# HIERARCHIKUS FOGALMI STRUKTÚRÁK VIZSGÁLATA GRÁFOKKAL

Doktori (PhD) értekezés

**FATALIN LÁSZLÓ**

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2008.

# NYILATKOZAT

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2008. január 31.

Fatalin László
jelölt

Tanúsítom, hogy Fatalin László doktorjelölt 2000-2008-között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2008. január 31.

Dr. Hortobágyi István
témavezető

# TARTALOMJEGYZÉK

# 1. BEVEZETÉS

## *1.1. A témaválasztás indoklása*

A matematikatanítás egyik fontos feladata, hogy sajátos eszközeivel fejlessze a tanulók fogalomalkotási készségét. A fogalomalkotás rendkívül összetett, nehezen vizsgálható folyamat, mert az egyes fogalmak szubjektív *belső reprezentáció*ja közvetlenül nem hozzáférhető számunkra, és ráadásul az egyes fogalmak sem önmagukban, hanem csak a többi fogalommal való kapcsolatrendszerükben kapják meg értelmüket. A fogalomalkotás vizsgálata szükségszerűen egy modellvizsgálat, hiszen a kommunikáció révén megjelenő *külső reprezentációk* alapján próbálunk meg következtetni a belső gondolkodási folyamatokra, miközben a modellmódszer minden korlátjával és hibalehetőségével számolnunk kell:

- egy modell mindig egyszerűsíti és csak adott szempontokból közelíti a valóságot;
- minden modell csak adott korlátok között használható.

A különböző tudományágak természetesen sajátos nézőpontjukkal és eszköztárukkal igyekeznek a fogalomalkotást megragadni. A természettudományokban, a fizikában és a kémiában a kísérletezés kap meghatározó szerepet a fizikai, kémiai fogalmak megalkotásában, míg a lingvisztikai elemzésekben a szóalkotások, esetenként etimológiai megfontolások kerülnek előtérbe. Műszaki megközelítésekben a zaj- és zavarhatások kiszűrése mellett kódolási kérdések kerülnek a figyelem középpontjába.

A matematikai fogalomalkotásban a ráció kapja a központi szerepet, és szimbolikus nyelvezetével a fogalmak leírása is precízebbé, áttekinthetőbbé válik.

Ebben a dolgozatban arra kívánunk kísérletet tenni, hogy a fogalomalkotási folyamat matematikadidaktikai vizsgálatában matematikai eredményeket és eszközöket használjunk. Az elmúlt évtizedben tanítási célként az fogalmazódott meg, hogy ne a matematikát tanítsuk meg a tanulóknak, hanem a matematikán keresztül fejlesszük a tanulók gondolkodását és szemléletét. *(NAT, 1995. 62.o)* E cél alapján a matematikai fogalomalkotás didaktikai vizsgálata sem redukálható a matematika definíciós formáinak (explicit, implicit és induktív definíciók) didaktikai adaptálására.

Az elmúlt három évtizedben tanárként és diákként különböző típusú középiskolákban és egyetemeken szerzett személyes tapasztalataim alapján a fogalomalkotás elsajátításában az egyik legsúlyosabb problémának azt tartom, hogy a megtanult fogalmak kisebb csoportokba tömörülve épülnek be az ismerethálóba úgy, hogy közben ezek a „fogalomcsoportocskák” elkülönülnek egymástól. A BME Villamosmérnöki Karának mérés- és irányítástechnikai szakát elvégezve, majd az iparban is dolgozva közvetlenül megtapasztalhattam, hogy e hiányosság szinte lehetetlenné teszi a rendszerszemlélet érvényesülését. *(Fatalin, 1990, 1991, 1992, 1993)* Az oktatásirányítás területén is hasonló tapasztalatokat szereztem. *(Fatalin, 2000)*

A 90-es évek első felében a PSZM Projektben nagyobb teret kaptak olyan oktatási kísérletek, amelyek a hagyományos tantárgyi kerettől eltérően interdiszciplináris fogalmak köré kívánták szervezni az elsajátítandó ismereteket. E kísérleti tantárgyak interdiszciplináris jellegükből adódóan az ismeretek egy más irányú hálózatba szervezésén keresztül segítették a fogalmi háló egy teljesebb kialakulását, ami jelentős előrelépést jelentett a rendszerszemlélet fejlesztése területén is. Személyesen a *tudományos modellalkotás* alapjainak bevezetési kísérletét vezettem. *(Fatalin&Varsics, 1993, 1996)* A hierarchikus modellek vizsgálata során kerültem munkakapcsolatba *Takács Violával*, így részt vehettem a fizika tankönyvek összehasonlítását végző kutatásaiban. Kitartó hite és elkötelezettsége a *Galois-gráf* pedagógiai alkalmazhatóságában mély benyomást tett rám, miközben lehetőséget kaptam a pedagógia mérő-értékelő rendszereinek rendszerszemléletű vizsgálatára is. *(Fatalin, 1993)* E munka során magam is meggyőződhettem a módszer hatékonyságáról, és egyben alkalmazásának nehézségeiről, aminek eredményeként vezetésemmel elkészült a *Szimulator for Windows* szoftver *(Fatalin, 1995)*.

A matematikadidaktikai szakirodalom bőségesen foglalkozik a fogalmi építkezés különböző aspektusaival, ugyanakkor meglepő módon éppen a fogalmi hierarchia leírására alkalmas *Galois-gráf* nem kapott helyet a matematika-tananyagok elemzésében, bár ma már több tantárgy (fizika: *Kovács, 2003*, kémia: *Tóth, 2005*, testnevelés: *Nagy, 1997*) esetében is folynak próbálkozások bevezetésére. Az elmúlt évtizedben a *Galois-gráf* mint modellező eszköz matematikadidaktikai alkalmazási lehetőségeit vizsgáltam. *(Fatalin, 2003a,b,c; 2005a,b,c; 2007 és Fatalin&Varsics, 2004)* A *Galois-gráf* mint eszköz bevezetése a matematikadidaktikai elemzésekbe kézenfekvőnek tűnik, de e formális matematikai modell csak némi átalakítás árán adaptálható a precíz és absztrakt matematikai fogalmak tanításának modellezésére. Az aprólékos, gondos munka eredményeként viszont olyan szemléletes képet nyerhetünk a fogalmi hierarchiáról, amin egyszerre vizsgálhatjuk a hierarchia egészét és egyes részleteit.

### *1.2. A fogalmi háló vizsgálatának előzményei*

A *tudásháló* kutatásával napjainkban különböző tuományágak képviselői foglalkoznak. A szakirodalomban a *tudásháló* kifejezéshez kettős értelmezés társul: a *külső* és a *belső reprezentációs háló* fogalma. A tudás hozzáférhető *külső reprezentációja* a kognitív álláspont szerint megfelel valamilyen *belső reprezentáció*nak, és a kutatók általában erős összefüggést tételeznek fel a *belső* és *külső reprezentáció* színvonala között! A *belső reprezentációs háló* csak közvetett módon, a *külső reprezentáció* által modellezve vizsgálható. A külső reprezentációs háló elemei a képzeteknek, fogalmaknak, ... nevezett objektumok halmaza, amelyek szoros kapcsolatban állnak egymással, ezért a matematikai relációk hatékony eszközei modellezésüknek, a kapcsolatok vizuális megjelenítésére pedig használhatjuk e relációk gráfjait.

A reprezentációs elméletek szerint egy-egy új ismeret, fogalom megfelelő beépülését e tudáshálóba két tényező javítja hatékonyan:

– az ismeretnek, fogalomnak minél *többféle reprezentáció*ja épüljön be a tudáshálóba;
– az ismeret, fogalom minél *több szállal kapcsolódjon* a már meglevő ismeretek, fogalmak hálójához.

A reprezentációk többféle csoportosítása terjedt el. Legelterjedtebb a *Bruner*-féle három reprezentációs síkot tartalmazó tipizálás, azaz az *enaktív*, az *ikonikus* és a *szimbolikus reprezentációk* megkülönböztetése. (A matematikai fogalmak reprezentációjának egy másik szintén elfogadott megközelítésében *numerikus, grafikus, algebrai* és *leíró reprezentációk*ról beszélhetünk.) Ma már finomabb felosztásokat is alkalmaznak a kutatók, hiszen például a nyelvi és a matematikai szimbólumok jellegzetességei alapvetően eltérnek egymástól. (A matematikai szimbólumok redundanciamentesek, szükséges és elégséges feltételekkel operálnak, míg a nyelvi kifejezések redundánsak és a kivételeket is megengedő tipikus tulajdonságokon alapulnak, továbbá más a nyelvi és más a matematikai logika is.)

A matematikatanítás számára fontos, hogy a többszörös reprezentációk vizsgálata során megállapítást nyert, miszerint az *ikonikus reprezentációk* nyoma a „kreatív agyféltekében”, a szimbolikusaké pedig a „logikáért felelős” másik agyféltekében helyezkednek el. A matematikatanításban a szemléltetés mellett a *szemléletes fogalomalkotás*ra is nagy hangsúlyt kell helyezni.

A kognitív álláspont szerint a tanulás során a tanulóknak az új ismeretet a már meglevő fogalmi hálójukba kell beépíteniük. A különböző reprezentációk párhuzamos használatával elérhető hogy a belső reprezentációba is többszörösen épüljön be az új ismeret. A matematikatanításban a *szemléletes fogalomalkotás*ra törekvés esetén a *szimbolikus reprezentáció* mellett a másik agyféltekében megjelenik a fogalom *ikonikus reprezentáció*ja is. A kibővülő, gazdagodó ismerethálóban létrejövő új kapcsolatok elmélyítéséhez és megszilárdításához az új ismereteket aktivizálni kell. A matematikatanításban a feladatmegoldások az új ismeretek begyakorlásának a színtere. A feladatok kiválasztása nemcsak az új kapcsolatok elmélyítésére, hanem az új kapcsolatok létrehozására is hatással van, ha a gyakorlati alkalmazások köréből választjuk, ui. így az új ismeret a meglevő tudásháló több eleméhez is kapcsolódni fog.

A kognitív szemlélet szerint a régebbi fogalmi háló elemei között már meglevő, sokszálú, megszilárdult kapcsolatok felszámolása szinte megoldhatatlan nehézségekkel jár, amihez a tanítási folyamatban feltétel nélkül alkalmazkodni kell. Ez meghatározó jelentőségű a tananyagfelépítések kialakításában: a tudáshálóba ne építsünk be olyan elemeket, amelyek a későbbi általánosításokat, absztrakciókat gátolják!

A fogalmak kialakulása különböző megközelítésekben vizsgálhatók. *Dörfler (1984)* a fogalomképzést *empirikus-teoretikus*, *Skemp (1985)* pedig az *elsődleges-másodlagos* és *egyszerű-absztrakt* jellegük alapján tárgyalja. A genetikus episztemológia atyja, *Piaget* a fogalomképzés négy szakaszát (sensori-motor; pre-conceptual; concrete-operational; formal-operational) különíti el. A fogalmak kialakulásának főbb mozzanataira mi a *Vigotszkij* (1956) által jellemzett szakaszokat tekintjük mérvadónak, mely szerint a fogalomkialakulás első lépésében a *szinkretizmus*, az időbeli egybeesés kap döntő szerepet. A következő fázisban a fogalmak *komplexusok*ként, azaz halmazokként jellemezhetők, míg a harmadik szakaszban jelenik meg az ún. *pozicionális fogalom*, mellyel a tanuló már úgy bánik, ahogyan az absztrakt fogalommal kell, de a fogalom meghatározásában, azonosításában még a *komplexus* szemlélet uralkodik. A negyedik fázis az *absztrakt fogalmak* színtere. Ez az elképzelés kellően egyszerű és plasztikus ahhoz, hogy az általunk vizsgált általánosítások és absztrakciók esetében hatékony didaktikai következtetésekre juthassunk az eredményül kapott gráfok didaktikai interpretációjában.

A *külső reprezentációk* vizsgálatai csoportosíthatók aszerint, hogy magára a fogalomra mint a gondolkodás tárgyára milyen leíró modellt alkalmaznak. A szemiotikai vizsgálatok alapvetően három típust különböztetnek meg: a *dichotomikus*, a *trichotomikus* és a *quadrichotomikus* modelleket, ugyanakkor a matematikadidaktikába *Tall* és *Vinner (1981)* már bevezette a *fogalomképzet (concept image)* kifejezést, ami a fogalmakat már komplex módon, a hozzá tartozó ismeretekkel együtt kezeli. Kutatásunk elsősorban a *dichotomikus* és *trichotomikus modell* alkalmazási lehetőségeit, előnyeit és hátrányait vizsgálja.

A fogalomalkotás és gondolkodás folyamatának didaktikai célú modellezéséhez már több kutató is alkalmazott matematikai eredményeket és eszközöket. *Piaget* és *Inhelder* kísérletet tettek (fizikai és kémiai feladatokon keresztül) a gondolkodási folyamat *Boole*-algebrai eszközökkel való leírására. Napjainkban a *formális fogalomanalízis*, a *Galois-gráf* pedagógiai felhasználási lehetőségeivel kísérleteznek a legkülönbözőbb területeken. *(Takács, 2000)* E kutatások eredményéül adódó *Galois-gráf*ok didaktikai interpretációi még szegényesek, esetenként felszínesek, mert az alkalmazott modellek nem kellően kidolgozott alapokról indulnak. E témakörben mind a fogalmi hierarchiák *(Gyaraki, 1983)*, mind az értékelés területén jelenleg is folynak a kutatások *(Tóth, 2005)*. A *formális fogalomanalízis* és a *trichotomikus fogalomleírási modell* alapján több kísérletet is tettünk egy matematikadidaktikai szempontból gazdagabb didaktikai interpretációt megengedő, jobban alkalmazható modell kereteinek pontosabb értelmezésére különböző alkalmazásokban.
*(Fatalin, 2003a,b,c; 2005a,b,c; 2007 és Fatalin&Varsics, 2004)*

A gondolkodási folyamatból mi az *általánosítás* és *absztrakció* műveletével foglakozunk részletesebben. E gondolkodási műveletekről a pszichológiai álláspontok eltérnek, *Lénárd (1984)* például a konkretizációt az általánosítás inverzeként jellemzi, az absztrakciónak pedig nála nincs fordított művelete. Mi a *Kelemen (1984)* által részletesen is ismertetett felfogást követjük, azaz az általánosítás fordított művelete a specializáció, az absztrakció fordított művelete pedig a konkretizáció.

Az absztrakció folyamatát az absztrakt vektorfogalom megalapozásán keresztül vizsgáljuk, ui. a vektorfogalom kialakításához már évtizedek óta különböző felépítések használatosak, melyek a különböző didaktikai problémákat eltérő módon oldják meg, illetve hidalják át. Napjainkban is kutatás tárgyát képezi a vektorfogalom kialakításúnak problémaköre *(Poynter, 2004)*, aminek elemzésére megkíséreljük alkalmazni modellünket.

### *1.3. Hipotézisek – A vizsgálat alapfeltevései*

Kutatásunkban a kognitív tudásháló egy algebrai hálón alapuló modellezésére tettünk kísérletet, ami a megcélzott tudásháló egzaktabb leírási módját is lehetővé tenné.

**Alaphipotézis**

*A formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modell alkalmas a megcélzott tudásháló reprezentálására.*

Ha modellünk a megcélzott tudásháló megfelelő reprezentációja, akkor a didaktikai célkitűzések megvalósításában makroszinten a tananyag tervezéséhez, mikroszinten pedig a tananyag-egységek lokális elrendezéséhez nyújthat segítséget, sőt a kitűzött cél explicit kifejeződése hasznos segédeszköznek bizonyulhat a felfedeztető, gyakorló illetve ellenőrző feladatsorok tervezésében és tanulói megoldásainak kiértékelésében is. Az alkalmasság kifejezést itt abban az értelemben használjuk, hogy modellünk segítségével érdemi információk nyerhetők a fentebbi témakörökben végzett matematikadidaktikai elemzésekben.

Az alaphipotézis alapján kutatásunkban a következő konkrét kérdéseket fogalmaztuk meg:

1. *Milyen konszenzusok árán lehet a trichotomikus fogalomleírási modellt és a formális fogalomanalízis által előálló Galois-gráfot egy modellben egyesíteni?*
2. *Milyen előkészítést igényel e modell konkrét előállítása ahhoz, hogy elősegítse a tanítási-tanulási folyamat szabatos és tudatos tervezését?*
3. *A modellben a matematikai elvárások és a didaktikai preferenciák milyen mértékben egyeztethetők össze?*
4. *Van-e a matematikai modellnek a kognitív folyamatok leírására alkalmazható aspektusa?*
5. *A modellnek mint statikus hálónak van-e olyan felhasználási módja, ami a statikus és dinamikus szemléletet összeköti?*
6. *A modell ad-e instrukciókat a beépítendő új tudáselemek aktivizálását szolgáló feladatok és feladatsorok tervezéséhez?*
7. *A modell alkalmazható-e az ellenőrző feladatsorok tanulói megoldásainak kiértékelésében?*

### *1.4. Kutatási módszerek*

A kutatás elsősorban elméleti, elemző jellegű, de végeztünk empirikus vizsgálatot is.

Főbb kutatási módszereink elemzési és modellalkotási oldalról a következők voltak:

- a fogalmi hierarchiákra vonatkozó pedagógiai alkalmazások szakirodalomban található leírásainak áttekintése;
  a különböző módszerek előnyeinek és korlátainak elemzése, összehasonlítása;
  a formalizált matematikai elmélethez megkeresni a hozzákapcsolható kognitív szemléletet;
- a gondolkodás mikrostruktúrájának pszichológiai szakirodalom tanulmányozása különös tekintettel az általánosítás és specializálás, valamint az absztrakció és konkretizáció műveletére.
- a dichotomikus és trichotomikus fogalomleírási modellek összehasonlítása a középiskolai matematikatanítás témaköreiben különös tekintettel a különböző reprezentációs síkokra;
- a matematika *formális fogalomanalízis*ének és a szemantika *trichotomikus modell*jének formális összehasonlítása;

A modell alkalmasságának vizsgálatában alkalmazott kutatási módszereink a következők voltak:

- a kialakított modell működésének kontrollálása a *konvex négyszögek* témakörén keresztül, az eredmények egybevetése a tapasztalatokkal;
- a modell kutatási célú alkalmazhatóságát az *absztrakt vektor* fogalmának kialakítási folyamatának modellezésén keresztül végeztük;
- a modell alkalmazhatósági vizsgálatát a mérés-értékelés folyamatában a hétköznapi gyakorlathoz igazodva végeztük, azaz a klasszikus ellenőrző dolgozatok hagyományos szaktanári összeállításának és értékelésének birtokában, utólag elemeztük a dolgozat szerkezetét, majd ennek ismeretében vizsgáltuk meg, hogy a tanulói megoldások strukturális elemzése milyen többletinformációt jelenthet az értékelésben;
- részvétel és előadások tartása nemzetközi konferenciákon, szakmai konzultációk.

A hipotézis jellegéből adódóan a modell megvalósíthatósági vizsgálata került előtérbe, ezért a modell megalkotásának és vizsgálatának minden fázisában konkrét példákat is alkalmaztunk. (A dolgozatban az illusztrációként szereplő konkrét alkalmazások eltérő szedésben szerepelnek.)

# 2. FOGALMI HIERARCHIÁK

A helyes fogalomalkotás, a fogalmak közti összefüggések tanításának módszertana a matematikadidaktika egyik kiemelt kutatási területe. A szakirodalomban a fogalmak közti hierarchikus kapcsolatokat gyakran különböző diagramokkal, ábrákkal szemléltetik. A fogalmak közti hierarchikus viszony, az alá- és fölérendeltségi kapcsolatok matematikai modelljei a részbenrendezés matematikai fogalmán alapulnak.

## *2.1. A rendezett halmazokról*

A rendezési reláció egzakt matematikai definiálásakor kétféle reláció különül el:

- a $\leq$ gyenge rendezési reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív tulajdonsággal;
- a $<$ szigorú rendezési reláció irreflexív, aszimmetrikus és tranzitív tulajdonsággal.

A véges rendezett halmazok megadhatók (négyzetes) relációtáblájukkal, ahol a táblázat sor- és oszlopfejlécében a halmaz elemei szerepelnek azonos felsorolásban, és az *a* elemhez tartozó sor, valamint a *b* elemhez tartozó oszlop által meghatározott cellában a $\times$ -jel található avagy üres attól függően, hogy az $a < b$ *(ill.* $a \leq b$*)* kapcsolat fennáll-e vagy sem. (Az $\times$ -jel helyett jelölésként az 1-et is használhatjuk, ekkor a reláció incidenciamátrixáról beszélünk.)

A rendezési relációk formális tulajdonságai táblázatukban is tükröződnek:

- Egy rendezési reláció táblázatában reflexív esetben a diagonálisban levő összes cellában szerepel a $\times$ -jel, míg szigorú rendezés esetében az irreflexivitás miatt a diagonális cellái üresek.
- A rendezési reláció anti- ill. aszimmetriája nem feltétlenül a táblázat ferde szimmetriáját jelenti, ui. a rendezés részlegessége miatt lehetnek közvetlenül össze nem hasonlítható *a* és *b* elemek. (Ekkor sem az *a* sor és *b* oszlop, sem a *b* sor és *a* oszlop kereszteződésében nem szerepel a relációs jel.) Az a(nti)szimmetria csak azt követeli meg, hogy ha az *a* sor és a *b* ($a \neq b$) oszlop kereszteződésében szerepel a relációs jel, akkor a *b* sor és *a* oszlop kereszteződése legyen üres.
- A tranzitivitás miatt ha a táblázat *b* sorának (*a* oszlopában) és *b* oszlopának (*c* sorában) van relációs jel, akkor a *c* sor *a* oszlopában is van relációs jel, azaz a táblázatban csak ilyen jelháromszögek fordulhatnak elő.

Egy halmaz gyenge és szigorú rendezései között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van, ui. szigorú rendezést kapunk, ha egy rendezési reláció táblázatából a diagonálisban levő cellák tartalmát töröljük, és fordítva: gyenge rendezési relációt kapunk, ha egy szigorú rendezés relációtáblájában a diagonálisban levő cellákat feltöltjük a relációs jellel.

A véges rendezett halmazok ábrázolhatók irányított gráfokkal oly módon, hogy a gráf szögpontjai a halmaz elemei, és az *a* pontból indul egy él a *b* ponthoz, ha az $a < b$ *(ill.* $a \leq b$*)* reláció fennáll. Egy részbenrendezés irányított gráfja nem tartalmaz irányított kört, azaz egyetlen csúcsából sem indul olyan irányított út, amely ugyanott végződne. Az irányított kört nem tartalmazó gráfokat DAG-nek (directed acyclic graph = irányított körmentes gráf) hívjuk. Minden irányított körmentes gráfban értelmezhető a csúcsainak egy rendezése, amely szerint az $a < b$ pontosan akkor áll fenn, ha a gráfban létezik olyan irányítható út, ami az *a* csúcsból a *b* csúcsba vezet.

Több különböző DAG is definiálhatja ugyanazt a rendezést. Az azonos rendezést megvalósító DAG-ek abban térnek el egymástól, hogy az $a<b<c$ szögpontokra az *a* csúcsból a *c* csúcsba menő irányított út közvetlenül egy gráfélen is megtehető-e. Az ugyanazon rendezést reprezentáló DAG-ek közül a legkevesebb élt *a gráf tranzitív redukáltja*, a legtöbbet pedig a *tranzitív lezárás*a tartalmazza. A *tranzitív redukált DAG*-ben minden $a<b<c$ szögponthármas esetén a gráfban már nem szerepel az *a* csúcsból közvetlenül a *c* csúcsba mutató él.

A gráf feltüntetett éleinek számát redukálva az ábra áttekinthetősége lényegesen javulhat. Ezt szolgálja a *Hasse*-féle konvenció elfogadása:

> *ha az a-pontból a b-ponton keresztül eljuthatunk a c-pontba, akkor a tranzitivitás miatt közvetlenül is eljuthatunk az a-pontból a c-pontba, ezért az a- és c-pontot közvetlenül összekötő élet nem ábrázoljuk.*

Egy *DAG tranzitív lezártjában* minden $a < b< c$ szögpontok esetében a gráfban szerepel az *a* csúcsból közvetlenül a *c* csúcsba mutató él is. A *Hasse*-féle konvenció elfogadásával *tranzitív redukált DAG*-ot ábrázolunk, miközben egy DAG *Hasse*-féle olvasata a *DAG tranzitív lezártja* lesz. *Forrás*nak nevezzük a bejövő, *nyelő*nek a kimenő élt nem tartalmazó csúcsokat. Egy véges DAG tartalmaz legalább egy *forrás*t, és legalább egy *nyelő*t.

A *fogalmi hierarchia* kifejezés alatt a továbbiakban mindig egy részbenrendezett véges halmazt értünk. A didaktikai szakirodalomban található különböző *fogalmi hierarchiákban* a fogalmakra és a köztük levő rendezésre eltérő modellek fordulnak elő. A didaktikai modellekben a rendezések két alaptípusa különíthető el:

– A kutatások egyik alaptípusában a fogalmak származtatása képezi a rendezés alapját. Ezekben a vizsgálatokban a fogalmak közti megalapozási vagy megelőzési reláció kap szerepet. Didaktikai alapkövetelmény, hogy egy új fogalom meghatározásában csak olyan ismeretekre szabad építkezni, amelyek előzőleg már ismertek, sőt megfelelően beépültek az ismerethálóba. Ez azt jelenti, hogy a relációk gráfja nem tartalmazhat irányított kört, ui. e kör bejárásakor végtelen ciklusba jutnánk. A DAG-ek esetében nincsenek ilyen körök. (E relációk értelmezésénél az irreflexivitás sem engedhető meg, hiszen egy fogalom értelmezésében, származtatásában magát a fogalmat logikailag is tiltott felhasználni.) A gyakorlatban sokszor csak a közvetlenül megelőzi (azaz szomszédosak is) viszonyra, azaz a tranzitív redukált DAG-ra építjük a vizsgálatokat. Erre a relációra a $\prec$ jelet használjuk. A származtatási típusú *fogalmi hierarchiák* egyszerűsített matematikai modelljeként a továbbiakban mindig egy $(\mathcal{F};\prec)$ rendezett párt használunk, ahol $\mathcal{F}$ a vizsgált fogalmak alaphalmaza, a $<$ reláció pedig egy szigorú rendezést jelöl a fogalmak $\mathcal{F}$ halmazán.

– A vizsgálatok másik alaptípusa azt vizsgálja, hogy melyik fogalom általánosabb, bővebb. Tartalmazási viszony vizsgálatakor megengedhető a reflexivitás, ui. nem szükséges valódi tartalmazásra szorítkoznunk. Tartalmazási típusú vizsgálatokban a *fogalmi hierarchiák* egyszerűsített matematikai modelljeként a továbbiakban mindig egy $(\mathcal{F};\preceq)$ rendezett párt használunk, ahol $\mathcal{F}$ a vizsgált fogalmak alaphalmaza, a $\leq$ reláció pedig egy gyenge rendezést jelöl a fogalmak $\mathcal{F}$ halmazán. A gyenge rendezési reláció általános $\leq$ jele helyett a $\subseteq$ jelet használjuk, ha utalni akarunk arra, hogy a rendezési reláció egybeesik a halmazelméleti tartalmazással.

Egy $<$ (ill. $\leq$) rendezési relációhoz duálisan mindig tartozik egy $>$ (ill. $\geq$) rendezési reláció, melynek értelmezése: $a > b$ (ill. $a \geq b$) akkor és csak akkor, ha $b < a$ (ill. $a \leq b$). A duális reláció táblázata az eredeti tábla transzponáltja, míg gráfja az eredeti gráf éleinek ellentétes irányításával kapható meg. A didaktikai szempontú vizsgálatokban az élek irányításának feltüntetésétől esetenként azért tekintünk el, mert az ábrák mindkét irányú didaktikai olvasata értelmes: az egyik irány például általánosításként, a másik irány pedig specializálásként interpretálható.

A továbbiakban példaként szereplő *fogalmi hierarchiák* esetében mind a táblázatos megadás, mind a gráffal történő szemléltetés helyet kap. Egy ábra esetében zavaró lehet, ha nem egyértelmű, hogy megalapozási ill. tartalmazási relációt ábrázol a gráf.

A didaktikában a gráfok hasznos segédeszköznek bizonyultak a tantervek kialakításában, a tananyag időbeli koordinációjában, felépítésének kialakításában. A tananyagegységek időbeli elrendezésekor alapkérdés, hogy adott egység tanítására mely tanegységek tanítását követően kerülhet csak sor. Ez tulajdonképpen egy megelőzési reláció előállítását jelenti. Egy előzetesen felvett relációt mindaddig finomítani kell, amíg tranzitív lezárása rendezési relációvá nem válik. Ebből a szempontból a gráf kritikus tulajdonsága, hogy tartalmaz-e kört, ami egyfajta circus vitiosust jelentene a tananyag felépítésében. Az 1960-as évektől különböző módszerek alakultak ki e problémák kezelésére. Az ilyen irányú hazai kutatásokat *Gyaraki Frigyes (1983)* vezette.

Mérföldkőnek tekinthető az a *Takács Viola (1995)* vezetésével végzett kutatás, ami a fizika tananyag tankönyvi felépítéseit vizsgálta oly módon, hogy három fizika tankönyvsorozat fogalmi építkezését hasonlította össze. Kiindulásként előállította a tankönyv fogalmaira vonatkozó közvetlen megalapozza relációt ($\prec$), azaz minden tankönyvi fogalomhoz megadta azokat a fogalmakat, amelyek definíciójukhoz szükségesek. (Már az egyes tankönyv-sorozatokhoz tartozó alaprelációk elkészítése is meglepő eredményeket hozott: pl. a *Paál Tamás*-féle tankönyvsorozat közel kétszerannyi fogalmat használ, mint a *Vermes Miklós*-féle tankönyvek.) A reláció kiértékelésében úttörő módszert jelentett, hogy e kutatásban a megalapozási reláció *Galois-gráf*ját állították elő, ami szükségszerűen rendezési relációt eredményez.

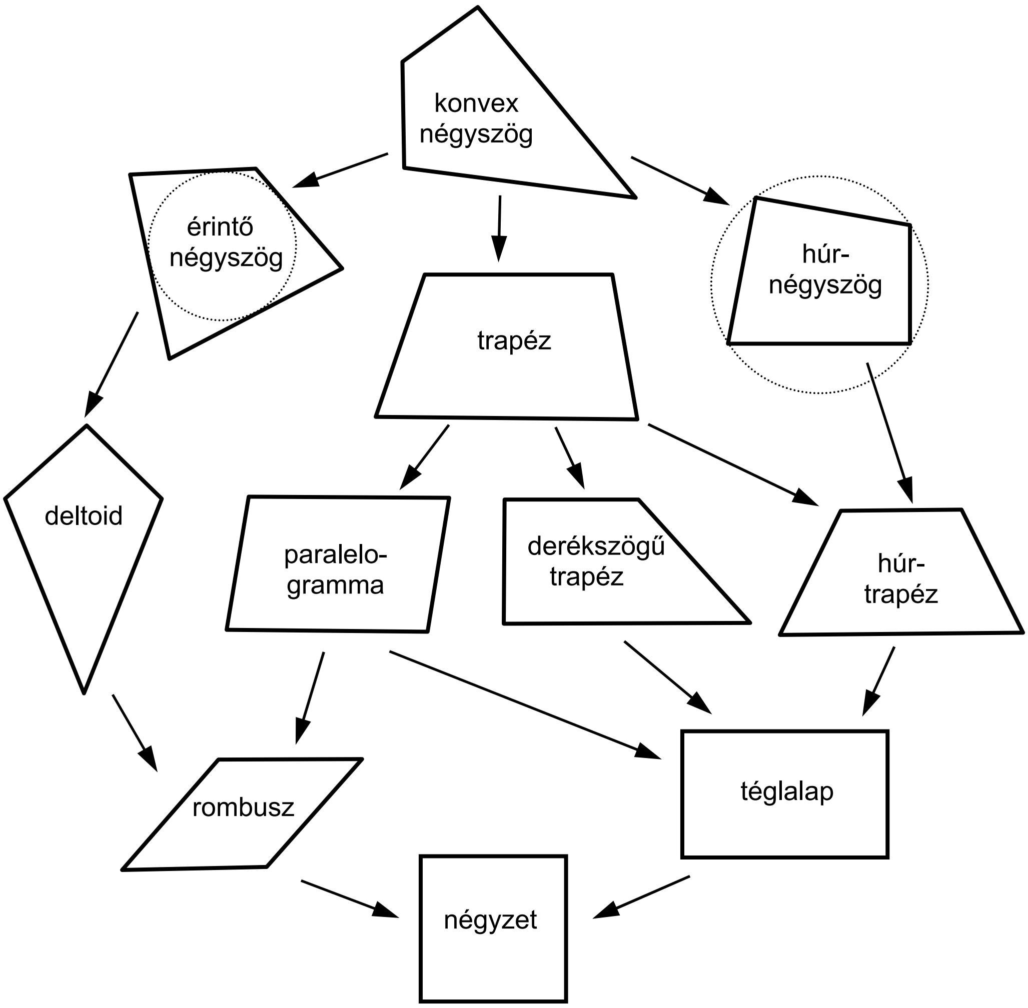
A *fogalmi hierarchiák* eddig említett vizsgálatai *dichotomikus modell*t alkalmaznak a fogalmakra abban az értelemben, hogy minden fogalmat egy kettőssel jellemeznek: a fogalom nevével (terminus) és a terjedelmével, azaz a terminus által jelölt objektumok halmazával. A fogalom ezen felfogását *Pietzsch (1988. 132.o)* a következő módon jellemzi: *„egy fogalom egy olyan halmaz”*, ami *„a társadalmi fejlődés során a gyakorlati vagy tudományos jelentősége miatt külön nevet kapott”*. (E modell elnevezésére bevezetett dichotomikus jelzőt a szemiotikai és lingvisztikai szakirodalomból kölcsönöztük. Az elnevezésben zavaró lehet, hogy a dichotómia kifejezést a matematikai szakirodalom elsősorban a rendezési relációra használja abban az értelemben, hogy minden *(a;b)* pár esetén az $a \leq b$ és $b \leq a$ közül pontosan az egyik teljesül.)

A *dichotomikus modell* egyszerűsége következtében igen kevés információt tartalmaz, így alkalmazásai több félreérthetőséget is rejtenek magukban. Didaktikai nézőpontból a *dichotomikus modell* alapján készített gráfok főbb hiányosságai a következők:

- a gráf éleit tartalmazási viszonyként értelmezve két fogalom metszetének ill. uniójának eredménye nem feltétlenül jelenik meg a gráfban, így két különböző pontból lefelé ill. felfelé elindulva és az első közös pontba érkezve nem a két fogalom közös részéhez ill. egyesítéséhez jutunk el;
- a gráf szögpontjai explicit megnevezéssel ellátott, intuitív terjedelmű és tartalmú fogalmakat jelölnek, következésképpen ez a gráf nem mutatja be az általánosítás és a specializálás szempontját, aminek prioritása van minden fogalmi hierarchia tanításában.

Az első probléma csak az alaphalmaz adekvát megválasztásával oldható fel, ám ez többnyire olyan részletezettséget igényel, amire sem szükség, sem idő nincsen a közoktatásban. Az utóbbi problémát hidalja át a fogalmak szöveges jellemzése, melyekben –ha nem is teljes körűen– már explicite is szerepelnek a fogalmak bizonyos tulajdonságai.

*A konvex négyszögek hierarchikus struktúráját szemlélteti az 2.1. ábra gráfja. Ennek az ábrának különböző variánsaival találkozhatunk a szakirodalomban. A 2.1. ábra gráfját közli Olosz (2005. 4.o), de hasonló ábrázolást találunk például Mitroica (1987. 58.o) és Reinhardt & Soeder (1993. 162.o) könyvében is. Az utóbbi szerzők változatában nem szerepelnek a gráfban a húrnégyszögek és az ortogonális trapézok, az érintő négyszög helyett pedig az ún. affin deltoidok osztálya válik a gráf egyik szögpontjává. Egyik ábraverzió sem tekinthető teljesnek, hiszen meglehetősen sokfajta speciális négyszögtípus létezik, melyek viszonylag könnyen meg is nevezhetők, ilyenek például az érintő húrtrapézok, a merőleges átlójú húrtrapézok vagy a derékszögű érintőtrapézok, hogy csak a trapézféléknél maradjunk. Az ábrázolások többnyire csak a speciális négyszögek alaptípusaira szorítkoznak.*




*2.1. ábra: A konvex négyszögek hierarchikus struktúrája Olosz (2005) nyomán*

*A 2.1 ábra gráfja néhány speciális négyszögosztály egy rendezését ábrázolja. Az ábra az egyes fogalmaknak csak a nevét szerepelteti és az egyes terminusokhoz tartozó fogalmi terjedelmekre és tartalmakra csak intuitív módon utal. A gráf csak e négyszög-osztályok tartalmazási viszonyát tükrözi helyesen, ám nem használható fel a fogalmi terjedelmek metszetének ill. uniójának értelmezésére, ui. ez hamis konklúziókhoz vezetne. (Az ábra ilyen olvasatában az érintő négyszögek és a húrnégyszögek közös része a négyzet lenne, pedig vannak érintő húrtrapézok is! A paralelogrammák, a húrtrapézok és az ortogonális trapézok sem fedik le a trapéz fogalom terjedelmét!) Ez a hibaforrás csak az alaphalmaz adekvát megválasztásával kerülhető el.*

*A gráf alapján elkészíthető a relációtábla (2.1. táblázat), és fordítva: a relációtábla alapján megrajzolható a gráf.*

| A konvex négyszögosztályok egy rendezési relációja | | | Négyszögosztályok | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Négyszögosztályok | konvex négyszög | 1 | | | | | | | | | | | |
| | trapéz | 2 | × | | | | | | | | | | |
| | derékszögű trapéz | 3 | × | × | | | | | | | | | |
| | húrtrapéz | 4 | × | × | × | | | | | | | × | |
| | deltoid | 5 | × | | | | | | | | | | × |
| | paralelogramma | 6 | × | × | | | | | | | | | |
| | rombusz | 7 | × | × | | | × | × | | | | | × |
| | téglalap | 8 | × | × | × | × | | × | | | | × | |
| | négyzet | 9 | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | × |
| | húrnégyszög | 10 | × | | | | | | | | | | |
| | érintő négyszög | 11 | × | | | | | | | | | | |

*2.1 táblázat: A konvex négyszögosztályok egy rendezési relációtáblája*

## *2.2. A matematikai definíciók*

A különböző fogalmak tömör szöveges leírására leggyakrabban explicit definíciókat használunk. Az explicit definíció formailag két részből áll: a definiendumból (meghatározandó) és a definiensből (meghatározó), melyek azonosítását fejezi ki a definíció:

$$\textit{definiendum} := \textit{definiens}.$$

A definiendum és a definiens azonosítását kifejező állandósult elemet ($:=$) *definiáló egyenlőség*nek nevezzük, melyet *Pólos* és *Ruzsa (1987. 174.o)* logikai szempontból a következő módon jellemez: *„kötőelem, amely kimondja, hogy a definiendum és a definiens intenziója azonos, és jelzi, hogy ez definíció.”* A *definiáló egyenlőség* elnevezés csak félig szerencsés, mert kifejezi ugyan, hogy a $:=$ tartalmilag egy azonosítást leíró egyenlőség, formailag viszont határozottan aszimmetrikus, mert a *definiáló egyenlőség* bal– és jobboldala nem cserélhető fel. A ’tartalmilag azonosítást kifejező egyenlőség’ itt azt jelenti, hogy egy ekvivalenciaosztályozást határoz meg, ui. két halmazba sorolja a dolgokat aszerint, hogy a definiensben szereplő feltételeknek eleget tesznek-e, vagy sem. A formai aszimmetria, amit még a *definiáló egyenlőség* jelölése is tükröz, viszont arra utal, hogy ez nem az egyenlőség típusú relációkkal (reflexív, szimmetrikus, tranzitív), hanem inkább az aszimmetrikus rendezési relációkkal van rokonságban.

A definícióval ellátott fogalmak egy $\mathcal{F}$ halmazán a $:=$ *definiáló egyenlőség* egy közvetlenül megelőzi típusú relációt ($\prec$) határoz meg. Az $\mathcal{F}$ fogalomrendszerben a $:=$ megalapozási reláció rendszerszemléletileg generál egy $<$ megelőzési relációt, amely megadja, hogy egy fogalom értelmezését mely fogalmak értelmezésének kell megelőznie. (Matematikailag a $<$ megelőzési reláció a $:=$ ’közvetlenül megalapozza’ reláció tranzitív lezárása.) Egy definíciós rendszerrel szemben logikai követelmény, hogy az így előálló megelőzési reláció rendezési reláció legyen az $\mathscr{F}$ fogalmak halmazán. Gráffal ábrázolhatjuk a fogalmak közti ⁝= ’közvetlenül megalapozza’ relációt, amiből könnyen megkaphatjuk a < megelőzési reláció gráfját, ui. csak a *Hasse*-féle konvenciót kell bevezetnünk. Szemléletesen: ha az ($\mathscr{F}$;<) gráfja DAG (irányított körmentes gráf), akkor a definíció-rendszer a fogalmak egy rendezett leírását adja.

Általában egy túlegyszerűsített gráfot kapunk, ha a definíciókban explicite rögzített fogalmi terjedelmek alapján ábrázoljuk a fogalmi hierarchiát, ui. a tulajdonságrendszerben logikailag fennálló belső összefüggések rejtve maradnak.

*A továbbiakban a négyszögek jellemzésére használt tulajdonságokat rögzítjük. Ezek között szimmetrikus és metrikus tulajdonságok egyaránt szerepelnek. E tulajdonságokra a továbbiakban a tömörítés érdekében kódjukkal hivatkozunk. A kódokat a 2.2. táblázat tartalmazza. (Ettől eltérő esetben a tulajdonságokat külön megadjuk alkalmi kódjukkal együtt.)*

| *Négyszögtulajdonságok* | *kód* |
|---|---|
| *(legalább egy) párhuzamos oldalpár* | *A* |
| *(legalább egy) egyenlő oldalpár* | *B* |
| *két-két párhuzamos oldal* | *C* |
| *két-két oldala egyenlő* | *D* |
| *minden oldala egyenlő* | *E* |
| *átlói egyenlők* | *F* |
| *átlói merőlegesek* | *G* |
| *átlói felezik egymást* | *H* |
| *(legalább egy) egyenlő szögpár* | *I* |
| *két egyenlő szögpár* | *J* |
| *minden szöge egyenlő* | *K* |
| *középpontosan szimmetrikus* | *L* |
| *(legalább egy) tengelyes szimmetria az átlóra* | *M* |
| *(legalább egy) tengelyes szimmetria az oldalfelezőmerőlegesre* | *N* |
| *két tengelyes szimmetria az átlókra* | *O* |
| *két tengelyes szimmetria az oldalfelezőmerőlegesekre* | *P* |
| *tengelyes szimmetria az oldalfelezőmerőlegesekre és az átlókra* | *Q* |
| *van érintőköre* | *R* |
| *van beírt köre* | *S* |

*2.2. táblázat: Az attribútum halmaz a kódjai*

*A speciális négyszögosztályokra természetesen különböző definíciós formulák adhatók. A 2.3/a táblázat Hajós (1961. 42.o) definíciói alapján készült.*

| | definíciós tulajdonság | | definiendumnak | |
|---|---|---|---|---|
| Ha egy négyszögre a | C | teljesül, akkor | paralelogrammának | nevezzük. |
| | K | | téglalapnak | |
| | E | | rombusznak | |
| | E és K | | négyzetnek | |
| | A | | trapéznak | |

*2.3a táblázat Négyszögosztályok definíciói Hajós nyomán*

*A 2.3b táblázat viszont egy elsősorban szimmetriákra építő definíció-rendszert ad meg.*

| Definiendumnak | | differentia specifica | | genus proximumot. |
|---|---|---|---|---|
| Paralelogrammának | nevezzük a | L | tulajdonságú | négyszöget. |
| Téglalapnak | | N | | paralelogrammát. |
| Rombusznak | | O | | paralelogrammát. |
| Négyzetnek | | G | | téglalapot. |
| Trapéznak | | A | | négyszöget. |

*2.3/b táblázat Négyszögosztályok definíciói szimmetriatulajdonságok alapján*

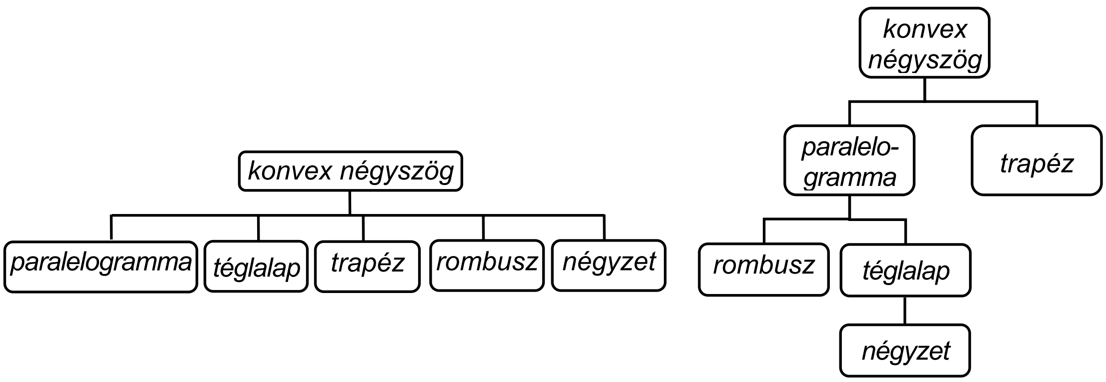
*A négyszögek e két különböző (a 2.3/a-b táblázatokban megadott) definiáló egyenlőségeit megalapozási relációként értelmezve a 2.2. ábrán látható fogalmi hierarchiákat kapjuk.*

*a eset*

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| konvex négyszög | 1 | | | | | | |
| trapéz | 2 | × | | | | | |
| paralelogramma | 3 | × | | | | | |
| rombusz | 4 | × | | | | | |
| téglalap | 5 | × | | | | | |
| négyzet | 6 | × | | | | | |

*b eset*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | × | | | | | |
| 3 | × | | | | | |
| 4 | × | | × | | | |
| 5 | × | | × | | | |
| 6 | × | | × | | × | |




*2.2. ábrán A konvex négyszögek hierarchiái a definiáló egyenlőségek alapján*

*2.3. A definíciós lánc*

Az írásos emlékek szerint elsőként *Platón* (a '*Szophista'-ban*) adott rendszerszemléletű definíciósort, mellyel a fogalmi specializálást demonstrálta úgy, hogy példájában a 'mesterember' fogalmából levezette a 'horgász' fogalmát.

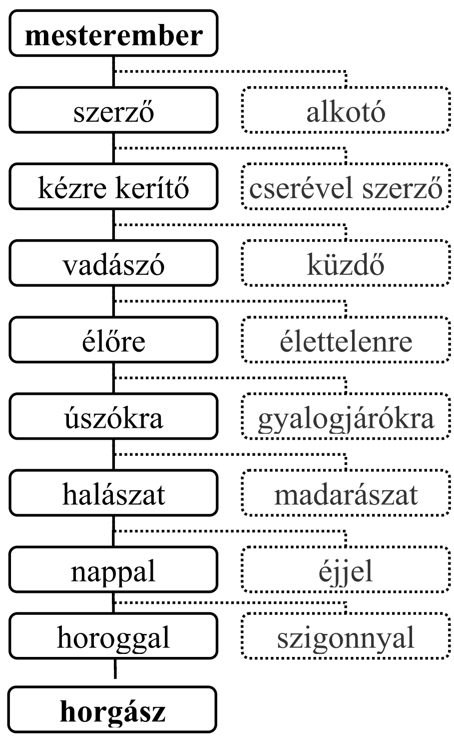
*Platón* definíciós eljárása megkülönböztető tulajdonságokkal szűkíti le lépésről lépésre az egyes fogalmak terjedelmét. Egy fogalom és egy kiválasztott tulajdonság segítségével a fogalom terjedelme két részre bomlik: az egyik halmazba tartoznak a kiválasztott tulajdonságnak eleget tevő objektumok, a másik részbe pedig azok, melyekre nem teljesül e tulajdonság. (Az első lépésben például a mesterembereket abból a szempontból különbözteti meg, hogy munkájuk meglevő dolgok megszerzésére, vagy új dolgok létrehozására irányul-e.)

A fogalmi specializálás e deduktív módszere igen általánosan alkalmazható, és az eljárás következő két előnyét ki kell emelnünk:

- a specializálás nézőpontja, a releváns tulajdonság explicite is megjelenik benne;
- pontosan szemlélteti a leggyakrabban használt explicit definíciók felépítését, amivel szemléletesen is elősegíti az explicit definíciós forma elsajátítását, mely szerint a fogalom terjedelmének körülhatárolása a „legközelebbi fölérendelt fogalomból" (genus proximum) a megkülönböztető tulajdonság (differentia specifica) segítségével történik.

Az eljárásnak azonban két korlátját feltétlenül meg kell említenünk:

- olyan hamis képzetet kelthet, hogy a 'legközelebbi fölérendelt fogalom', a genus proximum mindig egyértelműen létezik;
- a fogalmi hierarchia hálójából csak egy definíciós láncot emel ki, a többi ág lezáratlanul, általában valódi nevesítés nélkül marad, és az egy témakörön belül létező különböző definíciós láncok összekapcsolására nem ad útmutatást.



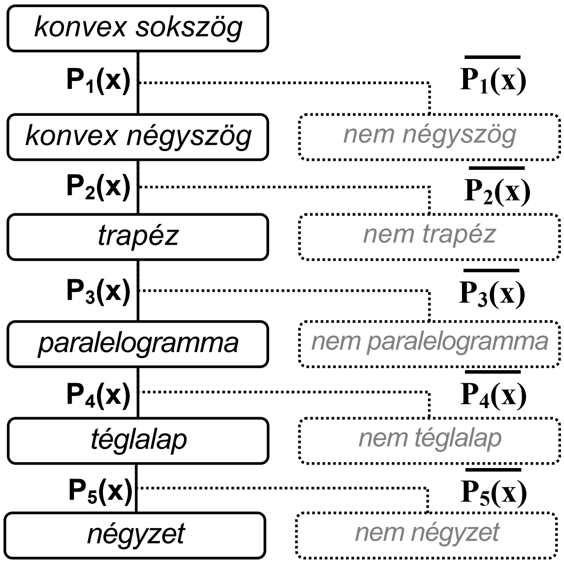

*2.3. ábra Platón módszere*

*Ambrus (1995. 60.o) a konvex négyszögek specializációján keresztül pontosan mutatja be Platón klasszikus eljárását. A 2.4. ábrához tartozó táblázat egy alternatívát tartalmaz a releváns attribútumra a 2.2. táblázatban rögzített kódokkal.*

*A 2.4. ábra nagyon pontosan szemlélteti az explicit definíció felépítését, ami segíti az explicit definíciós forma elsajátítását. (Pl.: A négyzet olyan téglalap, ami rendelkezik a $P_5$ attribútummal, azaz pl. az oldalai egyenlők.)*

*A releváns tulajdonság kiválasztása nem feltétlenül egyértelmű: pl. a négyzet olyan téglalap, aminek az átlói merőlegesek, és természetesen a genus proximum sem feltétlenül egyértelmű, hiszen a négyzet származtatható a rombuszból is: a négyzet olyan rombusz, aminek a szögei egyenlők.*

| *DIFFERENTIA SPECIFICA (kódok a 2.2. táblázatban)* | |
|---|---|
| **$P_1$** | *'konvex négyszögség'* |
| **$P_2$** | *'trapéz tulajdonság' (A)* |
| **$P_3$** | *'parallelogrammaság' (C)* |
| **$P_4$** | *'téglalap tulajdonság' (K)* |
| **$P_5$** | *'négyzet tulajdonság' (O)* |




*2.4. ábra: A konvex négyszögek származtatása Ambrus (1995) nyomán*

*Bár a 2.4. ábrán már megjelennek a tulajdonságok is, amelyek utalnak a specializálás szempontjára, de hiányossága, hogy lényegében csak egy lineáris láncot ábrázol szemben az 1. ábra fogalmi hierarchiát leíró hálózatával szemben! E lineáris lánc hálózattá szervezéséhez (pl. a húrtrapéz ill. a rombusz beillesztéséhez) már általánosabb eljárásra van szükség.*

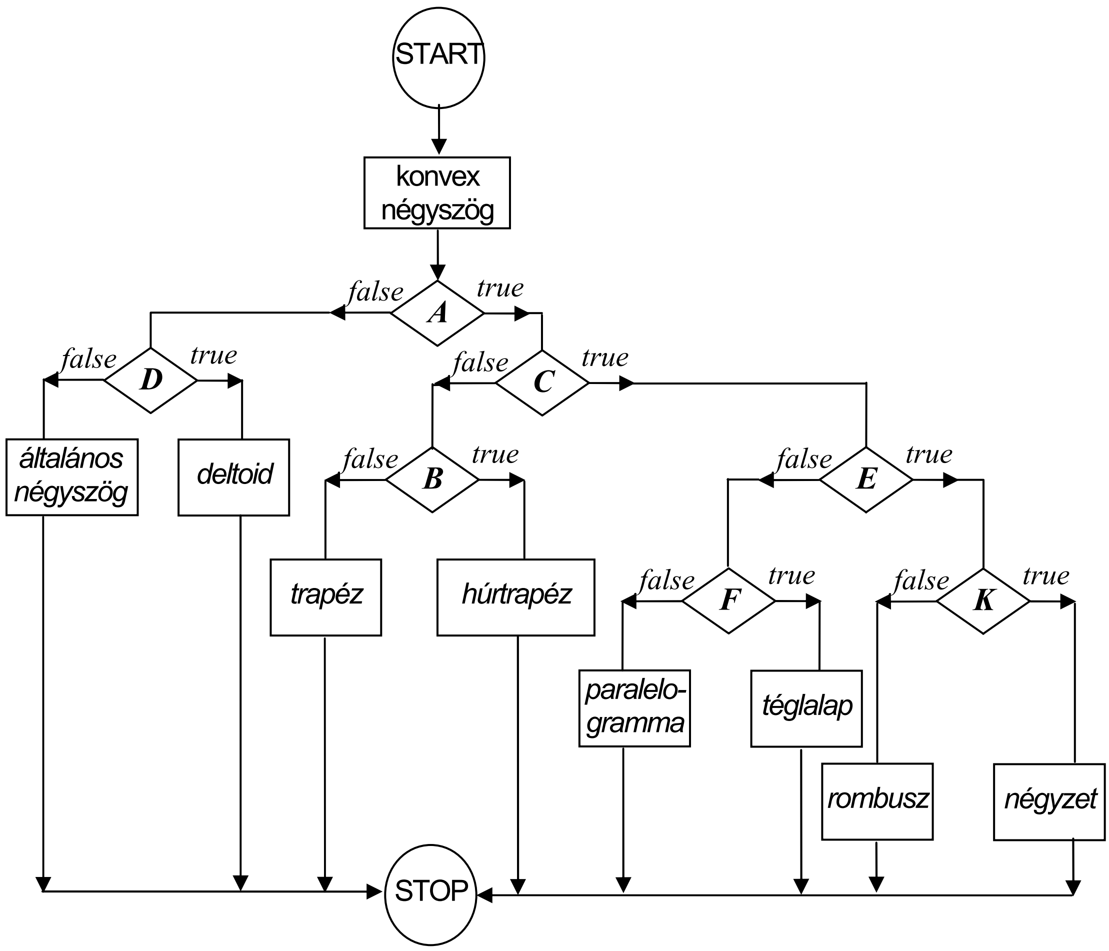
### *2.4. A folyamatábrákról*

*Platón* eljárása általánosítható úgy, hogy nemcsak a fogalmi levezetés szempontjából kedvező ágat fejtjük ki és nevesítjük, hanem a többi ágon is végigvisszük a specializálást. Ennek eredményeként egy döntési fát kapunk. A döntési fa egy olyan algoritmusnak tekinthető, amelynek segítségével minden objektum besorolható a fogalmi hierarchiába. A döntési fák előnye, hogy az objektumok több tulajdonságára építve nem hagynak lezáratlan ágakat, és ebben az értelemben a fogalmi hierarchiák egy teljesebb leírását szolgáltatják.

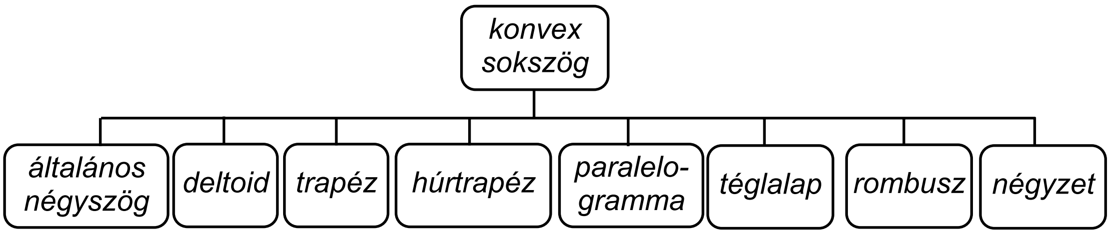
A döntési algoritmushoz kiválasztott tulajdonságrendszer többnyire nem egyértelműen determinált. A fogalmak definiálásához hasonlóan bizonyos szabadsági fokok vannak a releváns tulajdonságok kiválasztásában, ami egyben eltérő fogalmi hierarchiákat is eredményezhet.

A fogalmi hierarchiák döntési fákkal való leírásakor általában nem biztosítható, hogy minden döntés valóban releváns legyen a még hátralevő összes fogalom terjedelmére vonatkozóan. Ez azért okoz problémát, mert ha egy tulajdonság nem releváns egy fogalomosztályra, azaz a fogalmi terjedelmébe tartoznak olyan objektumok is, amelyekre teljesül, és vannak olyanok is amelyekre nem teljesül ez a tulajdonság, akkor az egész fogalomosztályra vonatkozó döntésként egységesen elutasítjuk a tulajdonság teljesülését, bár egy szűkebb terjedelmű részfogalmára esetleg igaz.

Az eljárás eredményeként a fogalmi hierarchia jellemzése szükségszerűen egy faszerkezetű struktúra lesz, azaz az egyes ágak csak szétágazhatnak, össze nem nőhetnek. E problémák jelzik, hogy a tevékenységsorozatok leírását preferáló folyamatábrák közvetlenül nem alkalmasak a fogalmi hálók általános leírására.




*2.5b ábra: Konvex négyszögek kategorizálásának folyamatábrája Pelle nyomán*




*2.5b. ábra: Konvex négyszögek hierarchiája a döntési fa alapján*

*A konvex négyszögek besorolására Pelle (1974. 436.o) közöl egy algoritmust, mellyel bármely négyszög besorolható a megfelelő speciális négyszögosztályba. A 2.5a ábra ezt az algoritmust adja meg a 2.2. táblázatban szereplő tulajdonságkódok segítségével, a 2.5b ábra pedig az eredményül kapott fogalmi hierarchiát ábrázolja.*

*Az 2.5. ábra hierarchikus olvasata meglepő következtetésekre vezet: minden speciális négyszögosztály közvetlenül a konvex négyszög fogalmából származik, és diszjunkt viszonyban állnak egymással. E szemlélet Euklidész (~ie.300) 22. definícióját idézi fel:*

> *„A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú; rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű; romboid, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz."*

*E terminológia mögött az a nyelvi törekvés húzódik meg, hogy lehetőleg minden dolgot a legpontosabban nevezzünk meg. Ebből a nézőpontból érthető, hogy egy négyzetet ne hívjunk téglalapnak, egy rombuszt pedig deltoidnak, inkább minden négyszöget nevezzünk a nevén. A tanítási gyakorlatban is gyakran tapasztalható a tanulók e nyelvi törekvése, ami azonban a megfelelő hierarchikus szemlélet fejlesztését hátráltatja. A döntési fák és az Euklidész-féle terminológia elfogadása valójában a négyszögek egy diszjunkt osztályokra bontását eredményezné, ami a Simon-féle jellemzés (1979) szerint egy lapos, széles hierarchia. (E terminológia alkalmazása a dolgok definíciójában szereplő tulajdonságrendszerekben halmozná fel és rejtené el a hierarchikus viszonyokat.)*

*A 2.5. ábra tartalmazási szempontból tehát helytelen képet ad a speciális négyszögek hierarchikus felépítéséről. A hibák elemzéséhez a 2.5. táblázatban a következő információkat tüntettük fel:*

- **×:** *az adott négyszögosztály adott tulajdonsága a döntési fából helyesen állapítható meg;*

*–: az adott négyszögosztályra teljesül az adott tulajdonság, de ez a döntési fából nem derül ki, azaz a döntési folyamatban nem kerül felhasználásra;*

***F:** az adott négyszögosztályra a döntési fa szerint nem teljesül az adott tulajdonság, ám ez az állítás az adott négyszögosztályra nem releváns.*

*A **–** hiányjel előfordulása természetes, ui. egy algoritmus általában nem igényli az érvényben levő összes tulajdonság felhasználását, de ez nem is okoz félreértést. Az **F** jelű információk viszont hamis információtöbbletet jelentenek. Az algoritmusba ugyan implicit módon épülnek be ezek a hamis információk, de a döntés során már explicite tagadjuk az adott tulajdonságot, pedig valójában e tulajdonságok csak lényegtelen az adott négyszögosztályok szempontjából.*

*Az **F** jelek hamis információtöbbletei eredményezik a hamis következtetéseket. (A táblázat A6 cellája szerint a deltoidnak 'semmiféleképpen' sincs (legalább) egy párhuzamos oldalpárja, míg a táblázat A8 cellája szerint a rombusznak 'mindenképpen' van (legalább) egy párhuzamos oldalpárja. Ez vezet arra a hamis következtetésre, hogy a rombusz nem deltoid.)*

| *Információs-táblázat a 2.5. ábrához* | | | *Attribútumok* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *K* |
| *Négyszögosztályok* | *konvex négyszög* | *1* | | | | | | | |
| | *ált. négyszög* | *2* | ***F*** | | | ***F*** | | | |
| | *trapéz* | *3* | × | ***F*** | ***F*** | | | | |
| | *húrtrapéz* | *4* | × | × | ***F*** | | | – | |
| | *deltoid* | *6* | ***F*** | – | | × | | | |
| | *paralelogramma* | *7* | × | – | × | – | | ***F*** | |
| | *rombusz* | *8* | × | – | × | – | × | | ***F*** |
| | *téglalap* | *9* | × | – | × | – | ***F*** | × | – |
| | *négyzet* | *10* | × | – | × | – | × | – | × |

*2.5. táblázat: A 2.5. ábra információ-táblázata*

*A fentebbi problémák mutatják, hogy egy fogalmi háló általában nem írható le egyszerűen folyamatábrával.*

## *2.5. A fogalmak trichotomikus modelljéről*

A fogalmak *dichotomikus modell*je az előző ábrázolásokban kiegészült néhány kiválasztott tulajdonsággal is, amelyek a specializálás szempontját adták meg. A relevánsnak tekintett tulajdonságrendszer kiválasztásában általában több szabadsági fokunk is van. E választási lehetőségekhez a következő gondolatot fűzi *Hajós (1959. 80.o)*:

> *„Sokszor jelent gondot a matematika felépítésében a definíciók megválasztása. Ez nem azt tükrözi, mintha a definiálás mikéntjétől függenének a tények, hiszen a geometria tényeit a valóságból merítjük. A definíciók a tényekre vonatkozó szóhasználatunkat szabályozzák. Ügyes szóhasználattal világosabban fejezzük ki a tényeket, ügyetlen szóhasználat mellett viszont sok kivétel és sok esetszétválasztás szerepel."*

A választási lehetőségek áttekintéséhez, a szabadsági fokok láthatóvá tételéhez didaktikai szempontból célszerűbb a fogalmak összes tulajdonságát számba vennünk. Ennek egyik módja, hogy a *dichotomikus modell* helyett a fogalmak ún. *trichotomikus modell*jét alkalmazzuk. A *trichotomikus modell*jellemzője, hogy minden fogalom szervesen rendelkezik a következő három komponenssel:

- a fogalom neve;
- a fogalom terjedelme;
- a fogalom tartalma.

A trichotomikus fogalomleírás tehát a *dichotomikus modell* kibővítése a fogalomhoz tartozó, arra érvényes tulajdonságok halmazával. A *trichotomikus modell* bármely komponensének hiánya esetén nem beszélhetünk fogalomról. Elsősorban nem ismeretelméleti, hanem didaktikai alapelvek miatt nem engedjük meg az üres halmaz szerepeltetését sem fogalmi terjedelemként, sem fogalmi tartalomként. A fogalom tartalmára és terjedelmére tett ezen kritérium indokai a következők:

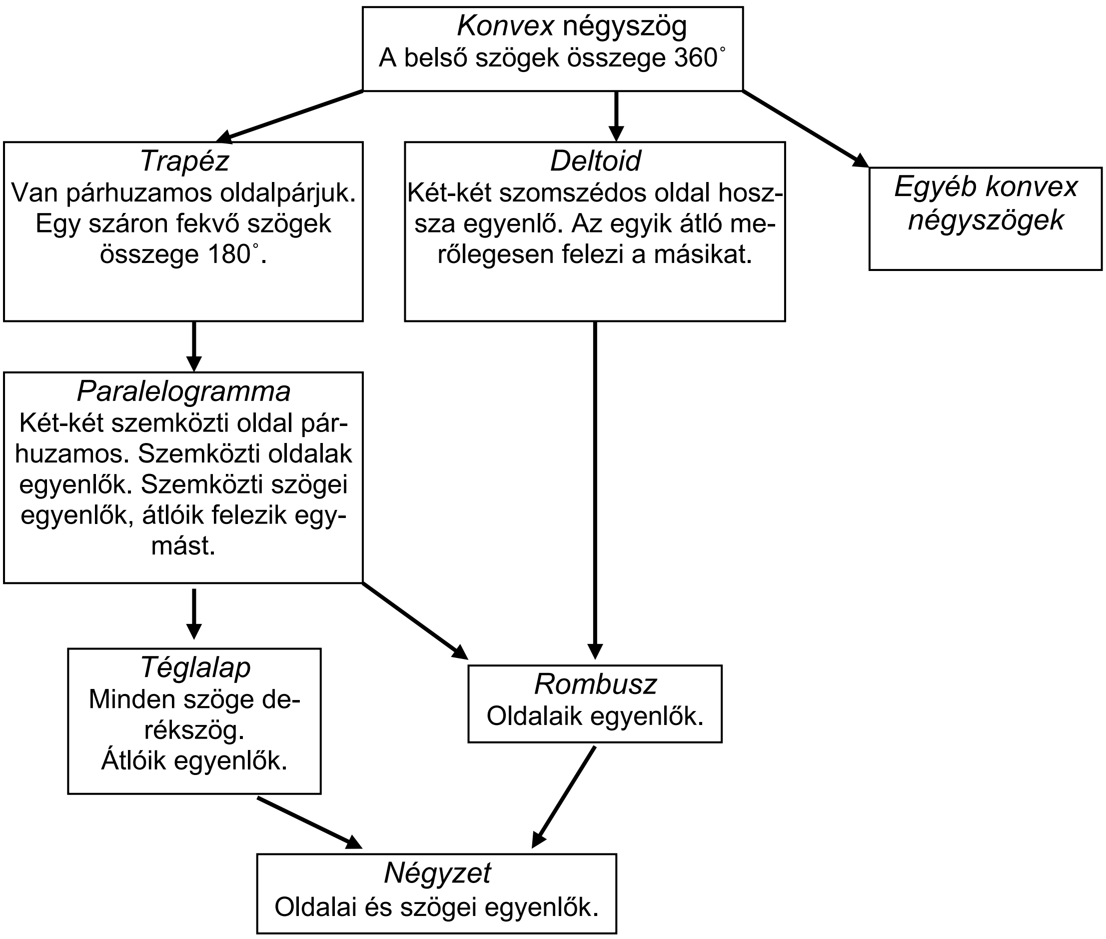
- A fogalomkialakítás egyik alaplépése a fogalom azonosítása, amihez a fogalom ismertetőjegyeinek, így az azonosító és megkülönböztető tulajdonságainak felismerése és elsajátítása is szükséges. A fogalmi tartalom üressége esetén a fogalom azonosítása nem végezhető el!
- A fogalom terjedelme az ellentmondások elkerülése végett nem lehet üres. (A 'semmire' vonatkozóan bármilyen, egymásnak akár ellentmondó állítások is igaznak tűnhetnek annak tudatában, hogy ellenpéldával nem cáfolhatók meg!)

A továbbiakban az elnevezés és név terminológiát is megkülönböztetjük, ui. annak további feltételei vannak, hogy egy elnevezés névvé váljon.

Meg kell jegyeznünk, hogy a *trichotomikus modell*re nem teljesül a matematikai fogalomleírás azon szabatossági feltétele, hogy egy fogalom megadásában, leírásában, meghatározásában csak annyi ún. releváns tulajdonság szerepeljen, amennyi feltétlenül szükséges a fogalom terjedelmének pontos körbehatárolásához. A *trichotomikus modell* fogalomleírásában ezzel szemben a fogalom minden tulajdonsága helyet kap, ilyen értelemben olyan „felesleges tulajdonságokat" is tartalmaz, amelyek a releváns tulajdonságokból levezethetők. A trichotomikus fogalomleírásban szereplő tulajdonságok tehát nem függetlenek egymástól, így ez a modell redundanciákat tartalmaz, ezért nem tekinthető tömörnek sem.

*A fogalmi hierarchiák szakirodalmi ábrázolásai között ritkán találkozunk trichotomikus modellel. Hortobágyi (2001. 35.o) konvex négyszögekre vonatkozó gráfján, amely a 2.6. ábrán látható, a négyszögosztályok ábrázolásában a fogalmak trichotomikus modellje jelenik meg. A 2.6.ábra a fogalmak tulajdonságait explicite is tartalmazza, azaz egy trichotomikus modellre alapozza a hierarchia ábrázolását. Az ábra olvasásakor értelemszerűen néhány konvencióra tekintettel kell lennünk:*

- *a tranzitivitási lánc miatt a Hasse-féle konvenció érvényes a tartalmazási viszonyokra, (pl. trapéz $\supset$ paralelogramma $\supset$ téglalap);*
- *a felsőbb fogalmak terjedelme tartalmazza az alárendelt fogalmak terjedelmét;*
- *a felsőbb fogalmak tulajdonságai öröklődnek az alárendelt fogalmakra, (pl. a rombusznál közvetlenül nem jelenik meg az, hogy átlói merőlegesen felezik egymást, de mivel deltoid-féle, ezért átlói merőlegesek, és paralelogramma-féle is, ezért átlói felezik egymást.)*




*2.6. ábra A konvex négyszögek hierarchikus rendszerezése Hortobágyi nyomán*

## 2.6. A formális fogalomanalízis elemei

A *formális fogalomanalízis*, a *Galois-gráf* a hálóelmélet eredményein alapul. A XIX. század végén *Dedekind* elsőként definiálta axiomatikusan a háló matematikai fogalmát, és egyben azt is megmutatta, hogy a logika szempontjából fontos *Boole*-algebra is egy speciális háló. *Dedekind* hálóelméletének fejlődése, kibontakozása az 1930-as évektől kapott nagy lendületet elsősorban *Garrett Birkhoff* munkássága nyomán. *Birkhoff* (1940) cikke alapján pedig *Rudolf Wille* (1996) és darmstadti kutatócsoportja kifejlesztette az ún. *formális fogalomanalízis*t. A *formális fogalomanalízis* eredményeként előállítható *Galois-gráf*ok különösen az elmúlt 15 évben nyertek egyre szélesebb körben alkalmazást.

A *formális fogalomanalízis* kiindulási pontja egy $R$ (binér) reláció egy $O$ objektumhalmaz és egy $E$ attribútumhalmaz elemei között, azaz formálisan: $R \subseteq O \times E$.

Az objektumok egy $O_1$ halmazának *intenzió*ja alatt az attribútumok azon $E_1$ részhalmazát értjük, amelybe azok az attribútumok tartoznak, amelyek teljesülnek az $O_1$ halmaz minden elemére.

Az attribútumok egy $E_1$ halmazának *extenzió*ja alatt pedig az objektumok azon $O_1$ részhalmazát értjük, amelybe azok az objektumok tartoznak, amelyekre az $E_1$ halmaz minden attribútuma teljesül.

Az $R$ reláció egy $O_1 \times E_1$ részhalmazát *klikk*nek nevezzük, ha az $O_1$ objektumok *intenzió*ja $E_1$, és az $E_1$ attribútumok *extenzió*ja $O_1$. *Klikk*nek tehát az $R$ reláció maximálisan zárt részhalmazait nevezzük. A *klikk* abban az értelemben zárt, hogy a *klikk* minden objektumára teljesül a *klikk* minden attribútuma. (A relációt a *klikk*re leszűkítve tehát teljes relációt kapunk, ami táblázatos megadásban teljesen kitöltött jeltéglalapot jelent.) A maximalitás pedig azt jelenti, hogy a *klikk* sem objektummal, sem attribútummal nem bővíthető tovább a zártsági feltétel megmaradása mellett.

A *klikk*ek között az *extenzió*ikra, ill. *intenzió*ikra vonatkozó halmazelméleti tartalmazás segítségével értelmezhető egy $\geq$ rendezés. Egy $C_1$ klikk nagyobb egy $C_2$ *klikk*nél, ha a $C_1$ *klikk extenzió*ja tartalmazza a $C_2$ *klikk extenzió*ját. Ezzel ekvivalens a következő megfogalmazás: a $C_1$ *klikk* nagyobb egy $C_2$ *klikk*nél, ha a $C_2$ *klikk intenzió*ja tartalmazza a $C_1$ *klikk intenzió*ját. (Formális felírásban a $C_1 = O_1 \times E_1$ és $C_2 = O_2 \times E_2$ *klikkekre*:

$$C_1 \geq C_2 \;:\Leftrightarrow\; O_1 \supseteq O_2 \wedge E_1 \subseteq E_2.$$

Az így értelmezett reláció parciálisrendezés, azaz reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus reláció a *klikk*ek halmazán.

A *klikk*ek részbenrendezett halmazának gráfját az $R$ reláció *Galois-gráf*jának nevezzük. A *Galois-gráf* egy véges irányított körmentes gráf, azaz DAG, ezért van *forrás*a és *nyelő*je. A *Galois-gráf nyelő*je a teljes *extenzió*-halmaz klikkje, ami egyben a gráf maximális klikkje, a gráf *forrás*a pedig a teljes *intenzió*-halmaz klikkje, ami egyben a gráf minimális klikkje.

A fogalmi hierarchiák modellezésében fontos szerepet játszik a *Galois-gráf* alábbi tulajdonsága. A klikkek duális fogalmi hierarchiája úgy értelmezendő, hogy a klikkek között értelmezett ≥ rendezési reláció helyett a ≤ duális relációt szerepeltetjük rendezésként. Az így kapott gráfot a *Galois-gráf* duálisának nevezzük.

A kiindulási reláció transzponáltjából kiindulva, azaz az objektum és attribútum halmazok szerepének felcserélésével szintén megkereshetők a transzponált reláció maximálisan zárt részhalmazpárjai, azaz klikkjei, melyek úgyis megkaphatók az eredeti reláció klikkjeiből, hogy felcseréljük azok *extenzió*ját és E „transzponált klikkek” rendezett halmazának DAG-je és az eredeti klikkek duális rendezése alapján elkészített DAG kanonikusan azonosítható. (Egy *Galois-gráf* transzponáltja és duálisa lényegében azonos DAG.)

A *Galois-gráf* előállítása a reláció számítógépes feldolgozását igényli. A *Galois-gráfok* alkalmazásai az elmúlt évtizedben több szakterületen is bekerültek a kutatások eszköztárába. Felhasználásának terjedése következtében a klikkek megkeresésére illetve a gráf előállítására már több szoftver is található, sőt szabad szoftverként a www.nexus.hu/opalsoft webhelyről letölthető az a program, melyet a *Takács Viola* vezette kutatásokhoz fejlesztettek ki. E program a *Norris*-féle algoritmus alapján állítja elő a klikkeket, ismertetése megtalálható a *Pozsonyi & Drommer (1994)*, míg a gráfrajzoló programot *Takács & Szigeti (2000)* ismerteti. Kutatásainkhoz a formális elemzéseket mi az ALTUIR szakértői iroda szoftverével végeztük, melynek kifejlesztését én irányítottam. (*Fatalin*, 1995)

*Wille és Ganter (1996) a formális fogalomanalízis bemutatására példaként a konvex négyszögek 2.6. táblázatban feltüntetett relációtábláját használja.*

| Wille és Ganter példája | | | Tulajdonságok | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | a ∥ c | b ∥ d | a=b | c=d | a=c | b=d | a⊥b |
| | | kód | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* |
| Objektumok | *Négyzet* | 1 | × | × | × | × | × | × | × |
| | *Téglalap* | 2 | × | × | | | × | × | × |
| | *paralelogramma* | 3 | × | × | | | × | × | |
| | *Trapéz* | 4 | × | | | | | | |
| | *Húrtrapéz* | 5 | × | | | | | × | |
| | *Deltoid* | 6 | | | × | × | | | |
| | *Rombusz* | 7 | × | × | × | × | × | × | |
| | *általános négyszög* | 8 | | | | | | | |

*2.6. táblázat: Wille és Ganter példája a formális fogalomanalízisre*

*A táblázatban kiemelt szedéssel szereplő jeltéglalap egy klikket jelöl meg, mert*

- *a négyzet; téglalap; parallelogramma és rombusz mindegyike rendelkezik az* $a \parallel c$; $b \parallel d$ ; $a=c$ és $b=d$ *tulajdonságok mindegyikével, és nincs olyan további tulajdonság, amely mindegyikükre teljesülne, azaz e követelmény megtartása mellett további oszloppal nem bővíthető a jeltéglalap;*

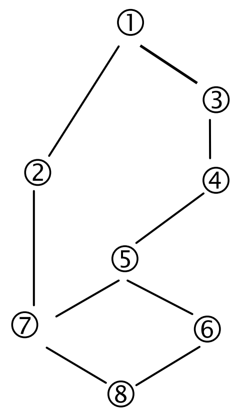
- *az* $a \parallel c$; $b \parallel d$; $a=c$ és $b=d$ *tulajdonságok mindegyike fennáll a négyzetre; a téglalapra; a parallelogrammára és a rombuszra, és nincs olyan további négyszög, amely rendelkezne e tulajdonságok mindegyikével, azaz e követelmény megtartása mellett további sorral nem bővíthető a jeltéglalap.*

*E relációtáblán természetesen több klikk is található. A megfelelő szoftverrel az összes klikk előállítható. Ez a relációtábla összesen 8 maximális zárt jeltéglalapot, azaz 8 klikket tartalmaz. E klikkeket azonosítókódjukkal együtt tartalmazza a 2.7. táblázat. A klikkek közti hierarchiát, azaz e reláció Galois-gráfját tünteti fel a 2.7. ábra.*

| *kód* | *A reláció klikkjei* extenzió × intenzió |
|---|---|
| ① | *{1;2;3;4;5;6;7;8}* × *Ø* |
| ② | *{1;6;7}* × *{C;D}* |
| ③ | *{1;2;3;4;5;6;7}* × *{A}* |
| ④ | *{1;2;3;5;6;7}* × *{A;F}* |
| ⑤ | *{1;2;3}* × *{A;B;E;F}* |
| ⑥ | *{1;6;7}* × *{B;D;I}* |
| ⑦ | *{1;7}* × *{A;B;C;D;E;F}* |
| ⑧ | *{5}* × *{A;B;C;D;E;F;G}* |

*2.7. táblázat: A 2.6 táblázat klikkjei*

*A klikkek hierarchiája*




*2.7. ábra A reláció Galois-gráfja*

## *2.7. A Galois-gráf és a trichotomikus modell kapcsolata*

A fogalmak *trichotomikus modell*je és a *formális fogalomanalízis* klikkjei között kézenfekvő az analógia: a fogalom terjedelmének a klikk *extenzió*ja, a fogalom tartalmának a klikk *intenzió*ja, így a fogalomnak a klikk feleltethető meg, míg a fogalmak hierarchiáját a *Galois-gráf* írja le. A szakirodalomban többnyire hallgatólagosan ezt az azonosítást használják, de didaktikai alkalmazás esetén az analógia némi pontosításra szorul! A klikkeknek az ún. *potenciális fogalmak*at feleltetjük meg, amelyek elvileg határozott fogalmi tartalommal és terjedelemmel rendelkeznek, de nem feltétlenül van nevük. Egy *potenciális fogalom* fogalommá válásának feltétele, hogy nevet (nem elnevezést!) kapjon. A fogalommá válás, azaz a névadás folyamatának azonban olyan feltételei is vannak, amelyek a *formális fogalomanalízis*ben nem kapnak helyet, ezért ezek vizsgálatára külön ki kell térni! A kiindulási reláció didaktikai interpretációját a továbbiakban *tárgyalási kontextus*nak nevezzük. A *formális fogalomanalízis* és a didaktikai célú *trichotomikus modell* közötti általunk pontosított kapcsolatot a 2.8. ábra mutatja.

| *MATEMATIKAI MODELL* | | *TRICHOTOMIKUS MODELL* |
|---|---|---|
| *kiindulási reláció* | ↔ | *tárgyalási kontextus* |
| *klikkek* | ↔ | *potenciális fogalmak* |
| *klikk extenziója* | ↔ | *potenciális fogalom terjedelme* |
| *klikk intenziója* | ↔ | *potenciális fogalom tartalma* |
| *Galois-gráf* | ↔ | *fogalmi hierarchia* |

2.8. ábra A matematikai és a *trichotomikus modell* kapcsolata

Az analógia alapján a *Galois-gráf* alkalmas matematikai modell lehet a trichotomikus fogalmi hierarchiák tanulmányozásához. E modell alkalmazását megkönnyíti, hogy a kiindulási reláció ismeretében a *Galois-gráf* előállítása már algoritmizált, a megfelelő szoftverek segítségével végrehajtható. E modell (didaktikai) alkalmazása során elvégzendő feladatok két csoportba sorolhatók:

- a kiindulási relációnak megfelelő konkrét *tárgyalási kontextus* előállítása és rögzítése a vizsgált témakörben;
- az eredményül kapott *Galois-gráf* (didaktikai) értelmezése.

A *formális fogalomanalízis* kiindulása egy binér reláció, ezért minden olyan kapcsolat matematikai modellezésére alkalmazható, amelyben minden objektum és bármely attribútum viszonylatában egyértelműen eldönthető, hogy az objektum és attribútum között e kapcsolat fennáll-e, avagy nem.

A matematikai fogalmak explicit definíciói a fogalmak egy olyan lényegi, megkülönböztető tulajdonságrendszerét tartalmazzák, amelyekkel azok és csak azok az objektumok rendelkeznek, melyek az adott fogalom terjedelmébe tartoznak, tehát a matematikai fogalmak esetében szükséges és elégséges feltételek szerepelnek, így a formális fogalomanalízis a matematikai fogalomrendszerre alkalmazható.

### *2.8. A redukált Galois-gráf tulajdonságai*

A matematikai fogalomleírásokra *Tarski (1990. 309.o)* az *adekvátság* és *szabatosság* kettős követelményét emeli ki: *„Célunk a fogalom megfelelő definiálása, azaz egy tartalmilag adekvát és formálisan szabatos definíció megalkotása.”*

A leggyakrabban alkalmazott matematikai definíció, az explicit definíció szerkezetileg a *'definiendum ≔ definiens'* formulában foglalható össze, ahhol a definiens formálisan a definiendum, azaz a szakkifejezés szaknyelvi jelentését szabványosítja, tartalmilag pedig a fogalom pontos leírását célozza meg.

A tartalmi adekvátságot, a fogalomleírás pontosságát a *szükséges és elégséges feltételek* használata biztosítja, így ebből a szempontból e modell megfelel a matematikai elvárásnak. Ez megnyugtaó tény, de nem hagyható figyelmen kívül, hogy a prototípus szemantika szerint a nyelvi reprezentációkban általában nem a *szükséges és elégséges feltételek* kapnak domináns szerepet, hanem az ún. *tipikalitási és centralitási feltételek*, amelyek még a kivételeket is megengedik. A matematikai definíciókhoz hasonlóan a trichotomikus fogalomleírási modell is a matematikai adekvátságot preferálja. A matematikatanítás során természetesen ügyelni kell arra, hogy hétköznapi nyelvi nézőpont és a tudományos matematikai nézőpont ezekben az alaptulajdonságokban is eltérnek egymástól, és csak hosszadalmas explikációs folyamat sokszori alkalmazása nyomán lassan alakul ki az a képesség, amivel a tanuló képessé válik a hétköznapi-matematikai nézőpontváltásra, ami egyben a matematikai modellek alkalmazásának egyik kulcskérdése.

A formális szabatosság feltétele azt fogalmazza meg, hogy a definiens csak annyi információt tartalmazzon, amennyi feltétlenül kell a szükséges és elégséges feltétel teljesítéséhez. A felesleges információk elkerülése a tömörség mellett érinti a függetlenség és az ellentmondásmentesség kérdését is. Logikailag e két tulajdonság összefügg, hiszen az információk függetlensége a tömörség mellett logikai ellentmondásmentességet is eredményez. A logikai értelemben feleslegesnek minősíthető információkat redundanciának nevezzük, amelyek alapvető szerepet töltenek be az információk tömör reprezentációjában. A matematikában a logikai ellentmondásmentességre törekvés miatt kap prioritást a szabatosság ezen értelmezése. A trichotomikus modellben, a redukált *Galois-gráf*ban egy fogalom összes tulajdonsága felsorolásra kerül az adott kontextusben, tehát matematikai értelemben nem szabatos fogalomleírási forma.

A tudásreprezentációk tömörsége azonban nemcsak a racionális logika szemszögéből fontos, ui. meghatározóan hat tárolásukra és feldolgozásukra is. A felesleges információk egyrészt nyilvánvalóan tárolási kapacitástöbbletet jelentenek, másrészt az információk feldolgozási idejét is jelentősen megnövelheti. Az informatikában kialakult a redundancia mennyiségi jellemzése, ami az információtartalom mérésén alapul. Az információtartalom és a redundancia informatikai megközelítése ugyan meglehetősen formális, ám következtetései mértékadóak lehetnek a szemantikai redundanciák megítélésénél is. Így fontos megállapítás hogy a *'formális logika szerint feleslegesnek minősülő'* redundanciáknak informatikai szempontból fontos tartalmuk lehet: bizonyos mértékű redundancia szükséges a kommunikáció során fellépő hibák kiszűrésére és korrigálására. A hibajavításhoz szükséges redundanciáknál lényegesen nagyobb redundanciát követel meg a tudáshálóba beépülő többszörös reprezentácók, aminek tanuláselméleti szempontól prioritása van. Didaktikailag ezért előnyösebb, ha explicite teljesebben jelennek meg a fogalom reprezentációiban a fogalomazonosításhoz szükséges azonosító és megkülönböztető tulajdonságok, hiszen a tulajdonságok redundanciája elősegíti, hogy az új fogalmak több szálon kötődjenek a meglévő tudáshálóhoz. A matematikai szabatosság elvetése didaktikai szempontból azért indokolt, mert a fogalom elsajátítását támogatja.

A *Galois-gráf* duális tulajdonsága szintén a modell kiemelkedően fontos tulajdonsága, aminek szerepét a konvex négyszögek általánosításának és specializálása során fogjuk részletezni.

# 3. A MODELL ALKALMAZÁSA A MATEMATIKADIDAKTIKÁBAN

A 2.8. ábrán vázolt modell alkalmazásának folyamatát a 3.1. ábra tünteti fel. Az ① lépés a *formális fogalomanalízis* kiindulási relációjának, azaz a *tárgyalási kontextus*-nak az előállítását jelöli, a ② lépésben a matematikai elemzés eredményeként előáll a kontextus *Galois-gráf*ja, a ③ lépében pedig az eredményül kapott *Galois-gráf*ot kell didaktikai olvasatban elemezni.

| ① | | ② | | ③ |
|---|---|---|---|---|
| *tárgyalási kontextus meghatározása* | → | *formális fogalomanalízis* | → | *a Galois-gráf didaktikai interpretációja* |

3.1. ábra A modell didaktikai alkalmazásának lépései

Az ① lépés, a *tárgyalási kontextus* meghatározása egyidejűleg igényel matematikai és matematikadidaktikai kompetenciát. A matematikadidaktikai alkalmazásokban a vizsgált objektum kifejezés általában a matematikai univerzum tananyagban szereplő objektumainak egy körére vonatkoznak, a vizsgált attribútumokat viszont csak részben határozzák meg ezen objektumok matematikai tulajdonságai, ui. jelentős hangsúlyt kell kapniuk a didaktikai szempontoknak is, hiszen egy tananyagrész felépítéseit a didaktikai célok és lehetőségek, valamint a matematika belső logikájából adódó lehetőségek együttes figyelembe vételével lehet csak elemezni.

Egy adott tananyagrész (tanítandó matematikai) objektumainak és a vizsgált (matematikai és didaktikai) tulajdonságainak, jellemzőinek összegyűjtése hosszadalmas, aprólékos feladat, amihez a joghatályos tananyagleírások meglehetősen kevés konkrét információt nyújtanak.

A mai magyar oktatási rendszerben a tananyag-felépítés kereteit kimeneti szabályozóként az érettségi követelményrendszer, bemeneti szabályozóként pedig a különböző szintű tantervek (NAT, kerettantervek és helyi tantervek) határozzák meg. E jogi előírások ma elsősorban a kompetenciákat preferálják. A részletes érettségi vizsgakövetelmények például két részből áll: első része a kompetenciákat, második része a számon kérhető ismeretanyagot sorolja fel matematikai témák szerint csoportosítva.

A különböző tantervek (NAT; kerettantervek, helyi tantervek) különböző részletességű időbontásban (NAT: két éves időtartam – helyi tanterv órákra bontva) osztják be az elsajátítandó ismereteket és a követelményeket. E dokumentumok nem sorolják fel explicit módon az elsajátítandó ismereteket, a bennük előforduló címszavak csak jelzésértékűnek tekinthetők, értelmezésük a tanárok szakmai intelligenciájára és intuíciójára hagyatkozik. E dokumentumok célként az elsajátítandó fogalmi hierarchia leírása helyett a fogalmi építkezés időbeli elrendezését tűzik ki. A tankönyvek a joghatályos előírásoknak megfelelően a matematikadidaktikai (pl. spiralitás) elveket alkalmazva a tananyag felépítés egy-egy alternatíváját adják.

Egy témakör *tárgyalási kontextus*ának előállításához szükséges információk elsősorban az adott tananyagrész tanítását, fogalmi építkezésének problémakörét és gondolkodásfejlesztési lehetőségeit taglaló matematikadidaktikai szakirodalomból gyűjthetők össze.

*A részletes érettségi vizsgakövetelmények a négyszögek témakörére szűkszavúan a következő követelményeket írja elő:*

*„Ismerje a négyszögek fajtáit (trapéz, paralelogramma, deltoid) és tulajdonságaikat, alkalmazza ismereteit egyszerű feladatokban.*

*Konvex síknégyszög belső és külső szögeinek összege, alkalmazásaik egyszerű feladatokban."*

*Az emelt szintű követelmény a következő mondattal egészül ki:*

*„Húrnégyszög, érintőnégyszög tételének ismerete (bizonyítással) és alkalmazása."*

Egy tananyagrész vizsgált matematikai objektumainak, és didaktikai szempontból is vizsgált jellemzőinek tételes áttekintése, explicit meghatározása alapfeltétele a formális fogalomanalízis alkalmazásának, ugyanakkor tételes összegyűjtése már önmagában is számos előnnyel járhat. (A 2.1. fejezetben említett fizika tankönyvekre vonatkozó összehasonlító vizsgálatnak már ebben a fázisában kiderült, hogy a *Paál Tamás*-féle tankönyvsorozat közel kétszer annyi fogalommal dolgozik mint a *Vermes*-féle, miközben a fizika ugyanazon fejezeteit fedik le!)

### *3.1. A tárgyalási kontextus előkészítése*

Egy tananyagrész elemzésekor a matematikadidaktikai szakirodalom mellett elsősorban az objektumhalmazt érintő matematikai definíciók, az alkalmazott szimbolikus és vizuális reprezentációk adnak útmutatást.

Az alaphalmaz és elemeinek matematikai meghatározásai fontos kiindulási pontot képeznek. Többnyire magára a matematikai objektumok alaphalmazára is több ekvivalens matematikai definíció található. Ezen definíciókat azonban didaktikai szempontból nem célszerű túlértékelnünk, mert a matematika specifikus követelményrendszerét (pl. redundanciamentesség) követik. A logikai nézőpontból preferált ellentmondásmentesség e megnyilvánulása helyett az alaphalmaz jellemzőinek minél bővebb számba vételére kell törekednünk, ami azért fontos, hogy a témakör fogalmi felépítésekor el tudjuk kerülni azokat a feltételeket, tulajdonságokat, amelyek elsődleges fixálódásukkal a későbbi fogalmi általánosításokat gátolnák.

*A konvex sokszög matematikai definícióira változatos matematikai megfogalmazások találhatók:*

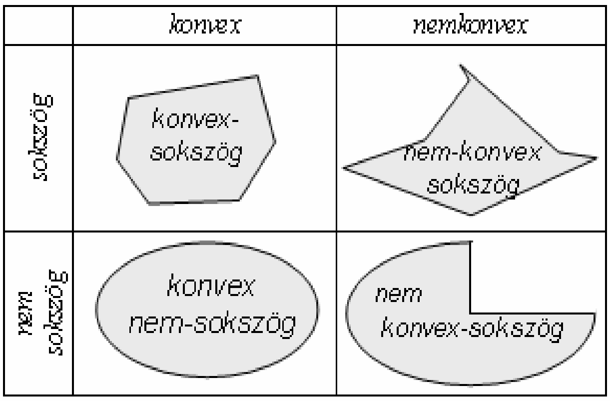
- *Coxeter (1973. 157.o) megfogalmazása: „Egy konvex sokszöget úgy adhatunk meg mint véges számú egyenes által határolt olyan véges síkbeli tartományt,* *amelynek belseje teljes egészében ezen egyenesek mindegyikének egyik oldalán helyezkedik el.”*

– *Hajós (1960. 28-30.o) a következőt közli: „Egy síkban, de nem egy egyenesen elhelyezkedő véges sok pont konvex burka a konvex sokszög”.*

*A konvex sokszögek egy „genus proximum + differentia specifica” elven alapuló explicit definíciója lehet a következő: Konvex sokszögnek nevezzük azokat a sokszögeket, melyeknek belső szögei kisebbek 180°-nál. A konvexitás fogalma azonban (görbevonalú) síkidomok, testek, függvények tárgyalásakor is megjelenik, így a belső szög mértékére tett kritérium helyett célszerűbb a tankönyvi meghatározásban szereplő „bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja az alakzathoz tartozik” feltételt szerepeltetni releváns tulajdonságként. (Csahóczi és társai 2000. 71.o) E tankönyvi definícióhoz szerencsés asszociációt nyújt a ’nem lehet elbújni benne’, illetve a ’minden mindenhonnan átlátható benne’ szemléleti kép.*

A matematikai definíciókban határozottan az objektumokra teljesülő releváns tulajdonságokat kell megadnunk, didaktikai szempontból azonban mindig tekintettel kell lennünk arra, hogy az azonosító jegyek ismerete nem elégséges a fogalom elsajátításához, a megkülönböztető jegyek ismeretére ugyanúgy szükségünk van. A *„mi az?”* mellett a *„mi nem az?”* kérdésekre is meg kell tudnunk válaszolni. Ez különösen fontos a *Claparède*-féle tudatosodási törvény ismeretében, miszerint a megkülönböztető jegyek előbb tudatosodnak mint az azonosító jegyek. (E törvény pszichológiai magyarázatát többnyire arra vezetik vissza, hogy az embernek mint biológiai lénynek a megváltozó körülményekre kell felfigyelnie, és más viselkedéssel gyorsan reagálnia. Fejlődéstörténeti eredetű tehát, hogy a változásra való felfigyelés képezi a tudatosodás alapját.) Ez persze nem azt jelenti, hogy a megkülönböztető jegyeket előbb és könnyebben sajátítjuk el, mint az azonosító jegyeket. E törvény didaktikailag azt fejezi ki, hogy az ismeretek tudatosodását, így az azonosítójegyek felismerését a megkülönböztető jegyek inspirálják, miközben az állandóság felismerésére, az invariancia megragadására törekszünk.

*A ’konvex sokszög’ fogalmi kialakításának természetesen része a nem-’konvex sokszögek’ ismerete is. A szóösszetételre jellemzően a tagadásnál ki kell térni a ’nem-konvex sokszögek’, a ’konvex de nem sokszögek’ és a ’nem konvex-sokszögek’ példáira is, mert csak ezek által válnak megkülönböztető jeggyé a definíciós tulajdonságok.*

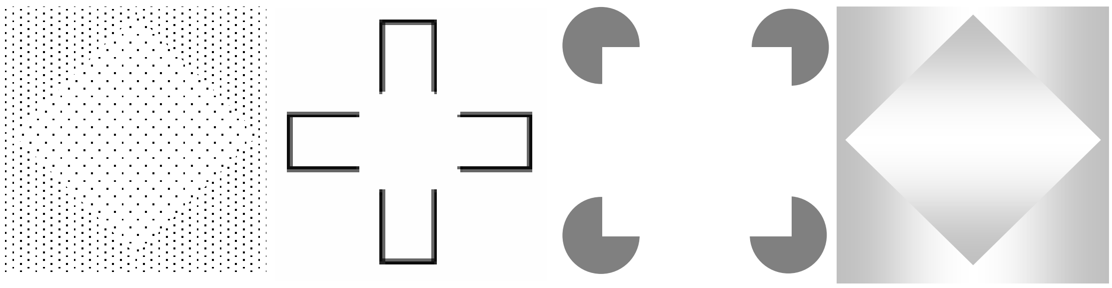


A szaktudományi reprezentációk áttekintése a *Bruner*-féle reprezentációs síkok alapján történhet. Az *enaktív reprezentációk* vizsgálata a gyakorlatorientált modellalkotást preferálja, hiszen a fogalmak konkrét, tárgyiasult megjelenéseit helyezi előtérbe. Az *ikonikus reprezentációk* a szemléltetési lehetőségek feltárásán túlmenően magához a *szemléletes* fogalomalkotáshoz is szükségesek. A *szimbolikus reprezentációk* részletes vizsgálatára azért is szükség van, mert a szimbolikus leírások hallgatólagosan több olyan momentumot is tartalmazhatnak, amelyek értelmezési nehézséget, esetenként még félreérthetőséget is okozhatnak. A matematikai jelölések tömörségükből adódóan általában csak lényegi momentumokat tartalmaznak, de nem utalnak arra, hogy milyen aspektusok nem fontosak. (Az is előfordulhat, hogy az egyszerűsített jelölések nem teljesen egyértelműek, azaz ugyanazon objektum eltérő jelöléseket is kaphat.)

*Enaktív síkon a négyszögek ponthalmazként való elkülönüléseit leggyakrabban a következők jellemzik:*

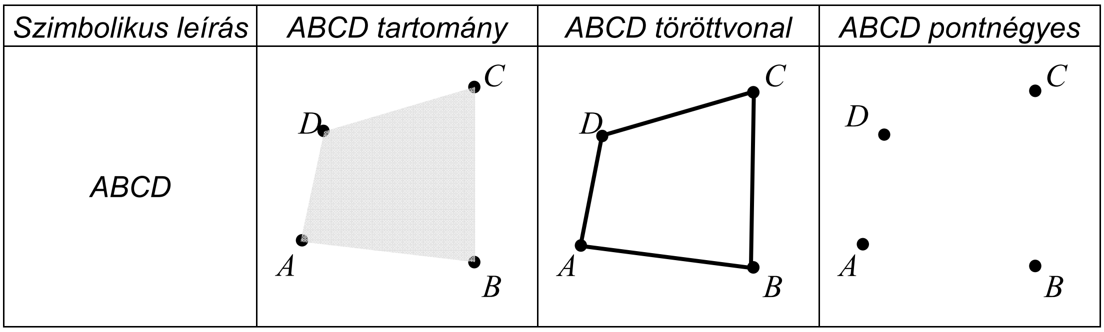
- *éllel határolódik el környezetétől (pl. mesterséges környezetünkben igen gyakori az előfordulásuk épületeken, bútorokon, …);*
- *színbeli eltérés alapján azonosítjuk (pl. sakktábla);*
- *képzeletbeli különbségtétel játszik meghatározó szerepet.*

*A képzeletbeli elkülönülésre igen változatos példák találhatók. A 3.3. ábra néhány olyan esetet szemléltet, amikor a szemlélő belelát a valóságban nem létező négyszöget az ábrába. A 3.3. ábráról nyert percepciós képeket egyértelműen az emberi elme egészíti ki a „képzeletbeli négyszögekkel”. (A közeli tárgyak gyakran takarják a távoliakat, amelyeket elménk e kiegészítésnek köszönhetően érzékel teljesnek.)*



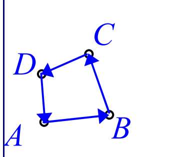
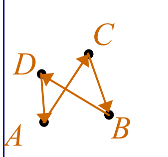
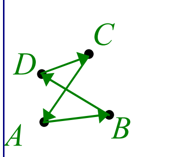
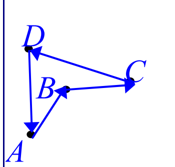
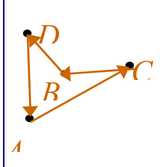
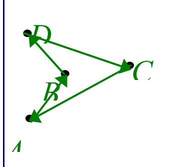
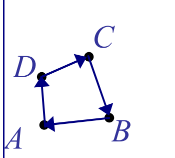
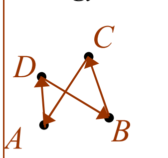
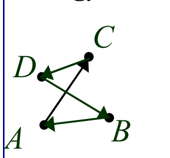
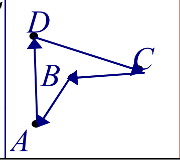
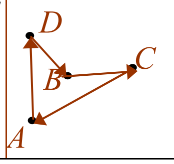
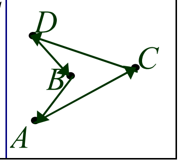
*3.3. ábra Képzelt négyszögek*

*A konvex négyszögek ikonikus reprezentációi a ponthalmaz szemléletre épülnek, azaz a ’fizikailag rajta van’ szemléletet tükröző halmazelméleti interpretáció kerül alkalmazásra, melyben az eleme (∈) reláció veszi át az absztrakt incidenciareláció szerepét. Az ABCD konvex négyszög mint ponthalmaz értelmezésében a következő értelmezési lehetőségek rejlenek: tartomány, (Coxeter-féle definíció); törtöttvonal, (Hajós-féle definíció); négy pont,(a szimbolikus reprezentációhoz igazodva). (3.4. ábra)*




3.4. ábra Az ABCD konvex négyszög ikonikus reprezentációi

*A konvex négyszögek szimbolikus leírása ('ABCD négyszög') igen tömör, és felveti például azt a kérdést, hogy számít-e az A,B,C,D jelek, azaz a csúcspontok sorrendje. E négy jelnek 4!=24 permutációja van. A 3.1. táblázat e szimbolikus lehetőségeket tünteti fel a hozzájuk tartozó ikonikus reprezentációkkal együtt kitérve a konkáv esetre is. A 3.1. táblázatban nyomon követhető, hogy a négyszögek szimbolikus kódolásakor ugyanazon négyszög többféle kódot is kap.*

| Négyszögek reprezentációi | Konfiguráció-1 | | Konfiguráció-2 | | Konfiguráció-3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Orientáció-1 + | **ABCD** | konvex  | **ACBD** | nemegyszerű  | **ABDC** | nemegyszerű  |
| | **BCDA** | | **BDAC** | | **BDCA** | |
| | **CDAB** | konkáv  | **CBDA** | konkáv  | **DCAB** | konkáv:  |
| | **DACB** | | **DACB** | | **CABD** | |
| Orientáció-2 - | **DCBA** | konvex  | **DBCA** | nemegyszerű  | **ACDB** | nemegyszerű  |
| | **ADCB** | | **CADB** | | **CDBA** | |
| | **BADC** | konkáv:  | **ADBC** | konkáv:  | **DBAC** | konkáv:  |
| | **BCAD** | | **BCAD** | | **BACD** | |

3.1. táblázat Négy pont által meghatározott négyszögek

*Meg kell különböztetnünk a négyszög mint ponthalmaz, és a négyszög mint alakzat fogalmát. Ebben a különbségtételben az játszik szerepet, hogy a ponthalmazként történő értelmezésben benne van a négyszög helye és helyzete is, míg alakzatként a négyszöget önmagában, helyétől és helyzetétől függetlenül jellemezzük. A négyszög geometriai fogalmát ponthalmazként és alakzatként is értelmezni kell! Az 'alakzat' fogalom absztrakt matematikai alapját az Erlangeni program (Felix Klein, 1873) rögzíti. Az alakzat fogalma mögött meghúzódó osztályozási eljárás (l. 4.7. fejezet) megalapozásához szerencsés, ha a transzformációs, elsősorban szimmetriákon alapuló négyszögtulajdonságok vizsgálatával kezdjük a speciális négyszögekkel való ismerkedést.*

*Az 3.2. táblázat tünteti fel a továbbiakban általunk vizsgált négyszögeket.*

| *A vizsgált konvex négyszögosztályok* | | | |
|---|---|---|---|
| *Alakzatok mint objektumok* | *kód* | *Alakzatok mint objektumok* | *kód* |
| *konvex négyszög* | *1* | *rombusz* | *7* |
| *trapezoid* | *2* | *téglalap* | *8* |
| *trapéz* | *3* | *négyzet* | *9* |
| *húrtrapéz* | *4* | *húrnégyszög* | *10* |
| *deltoid* | *5* | *érintő négyszög* | *11* |
| *paralelogramma* | *6* | | |

*3.2. táblázat A vizsgált konvex négyszögek kódjukkal*

### *3.2. A tárgyalási kontextus*

Az alaphalmazok felvételét követően kerül sor a *tárgyalási kontextus* előállítására. A relációtábla elkészítésekor és értelmezésekor általában nem különböztetik meg a következő két esetet:

- a kontextus objektumhalmaza konkrét tárgyi dolgok, egyedek;
- a kontextus objektumhalmaza (leggyakrabban) egyedek gyűjtőnevei.

Az első esetben a táblázatban levő × -jel egyértelműen azt mutatja, hogy az adott konkrét objektumra az illető tulajdonság teljesül-e vagy nem teljesül. A második esetben, ha a kontextus egyedek gyűjtőneveire épül, akkor a × -jel hiánya csak azt jelenti, hogy az adott gyűjtőnévvel jelölt egyedek között van(nak) olyan(ok), ami(k)re nem teljesül e tulajdonság, azaz nem jelenti azt, hogy egyikre sem teljesül! Tárgyalásunkban azért különböztetjük meg az egyedekre illetve gyűjtőneveikre elkészített kontextus táblázatot egymástól, mert a belőle kiinduló elemzés az első esetben magukra a dolgokra, míg az utóbbi esetben a gyűjtőnevek közti kapcsolatra vonatkozik!

A kontextustáblázatban lehetnek üresen maradt illetve × -jellel teljesen kitöltött sorok/oszlopok, esetenként pedig előfordulhatnak azonos kitöltöttségű sorok/oszlopok is. Ismeretelméleti szempontból e sorok/oszlopok szerepeltetése megkérdőjelezhető, hiszen az adott *tárgyalási kontextus*on belül ezek az objektumok/tulajdonságok nem azonosíthatók illetve elkülöníthetők egymástól az azonosító és megkülönböztető ismérvek hiányában. A didaktikai elemzésekben azonban nem célszerű a kontextustáblázatot megtisztítani e soroktól illetve oszlopoktól, ui. szerepeltetésük mögött látens szempontok is meghúzódhatnak.

*A továbbiakban a konvex négyszögek struktúráján keresztül demonstráljuk a vizsgálatot. A 3.3. táblázat rögzített tárgyalási kontextusa a középiskolai tananyag alapján készült, és valójában objektumként nem konkrét négyszögeket, hanem nevesített speciális négyszögosztályokat tartalmaz, ezért az ennek alapján készült elemzés sem a négyszögekre, hanem ezek elnevezéseinek hierarchiájára fog vonatkozni!*

| cross-tábla R | | | Tulajdonságok | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
| vizsgált négyszögosztályok | konvex négyszög | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | trapezoid | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | trapéz | 3 | × | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | húrtrapéz | 4 | × | × | | | | × | | | × | × | | | | × | | | | × | |
| | deltoid | 5 | | × | | × | | | × | | × | | | | × | | | | | | × |
| | paralelogramma | 6 | × | × | × | × | | | | × | × | × | | × | | | | | | | |
| | rombusz | 7 | × | × | × | × | × | | × | × | × | × | | × | × | | × | | | | × |
| | téglalap | 8 | × | × | × | × | | × | | × | × | × | × | × | | × | | × | | × | |
| | négyzet | 9 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| | húrnégyszög | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | × | |
| | érintőnégyszög | 11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | × |

*3.3. táblázat: A konvex négyszögek vizsgált kontextusa*

*A táblázatot soronként olvasva megkapjuk az egyes négyszögosztályok összes tulajdonságát, míg oszloponként tekintve azok a négyszögosztályok jelennek meg, amelyek az adott tulajdonsággal rendelkeznek. Az 5. sor szerint (B;D;G;I;M;S), azaz a deltoid tulajdonságai: van két egyenlő oldalpárja, átlói merőlegesek, egyik átlójára szimmetrikus, van beírt köre. Az L oszlop szerint (6;7;8;9); azaz középpontosan szimmetrikus a paralelogramma, a téglalap, a rombusz és a négyzet.*

*Az egyes cellák olvasatában a × -jel értelmezése a következő:*

- *az $a$ sor és a $b$ oszlop kereszteződésében levő × jel azt jelenti, hogy az $a$ négyszögosztály minden eleme rendelkezik a $b$ attribútummal. Például a 8L cella azt mutatja, hogy minden téglalap középpontosan szimmetrikus;*
- *a × -jel hiánya az $a$ sor és a $b$ oszlop kereszteződésében azt jelenti, hogy az $a$ négyszögosztálynak van (legalább) egy olyan eleme, amelyik nem rendelkezik a $b$ attribútummal, (azaz nem azt jelenti, hogy az a négyszögosztály egyik eleme*

*sem rendelkezhet a b tulajdonsággal). Példa: az 5E cella szerint van olyan deltoid amelynek nem minden oldala egyenlő, de nem zárja ki azt, hogy legyen olyan deltoid (pl. a rombusz) amelyiknek minden oldala egyenlő.*

### *3.3. Klikkek és fogalmak*

A relációtáblából a megfelelő algoritmussal előállíthatók a klikkek, melyeknek az ún. *potenciális fogalmak*at feleltettük meg, amelyek határozott fogalmi terjedelemmel és tartalommal rendelkeznek, de nem feltétlenül rendelkeznek névvel. Egy *potenciális fogalom* természetesen bármikor kaphat egy elnevezést, ám ezen elnevezés csak gyakorlati elfogadása és használata révén válhat névvé. (Egy elnevezés névvé válását általában gyakori előfordulása, illetve kiemelt szerepe motiválja.)

A *klikk*ek között tehát találunk névvel jellemezhető és név nélküli klikkeket egyaránt. A nevesített *klikk*ek a fogalmak. E *trichotomikus modell* ráirányítja a figyelmet arra, hogy az elsajátítandó fogalmak esetében a tanulóknak a (név; fogalom terjedelme; fogalom tartalma) hármast kell elsajátítaniuk, ezért a tanulási folyamatban, így a számonkérésben is egyaránt elő kell kerülnie a következő típusú feladatoknak:

- a név alapján a fogalmi terjedelem illetve tartalom azonosítása,
- a fogalom terjedelme alapján a név felismerése, illetve a fogalom tulajdonságainak megadása,
- a fogalmi tartalom alapján a név felismerése, illetve a fogalom terjedelmének megadása;

A *Claparède*-féle tudatosodási törvény alapján e feladatoknak nemcsak az azonosító, hanem a megkülönböztető jegyekre is ki kell térniük, ami egyben a nyelvi tagadás pontos értelmezését is szolgálja.

<table>
<tr><th colspan="3">A KLIKK</th></tr>
<tr><th>objektumhalmaz × tulajdonsághalmaz</th><th colspan="2">Megnevezése</th></tr>
<tr><td>$\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\} \times \emptyset$</td><td colspan="2">konvex négyszög</td></tr>
<tr><td>$\{3;4;6;7;8;9\} \times \{A\}$</td><td colspan="2">trapéz</td></tr>
<tr><td>$\{4;5;6;7;8;9\} \times \{B;I\}$</td><td>①</td><td rowspan="3">Klikkek név nélkül</td></tr>
<tr><td>$\{4;6;7;8;9\} \times \{A;B;I;J\}$</td><td>②</td></tr>
<tr><td>$\{5;6;7;8;9\} \times \{B;D;I\}$</td><td>③</td></tr>
<tr><td>$\{4;8;9;10\} \times \{R\}$</td><td colspan="2">húrnégyszög</td></tr>
<tr><td>$\{6;7;9;11\} \times \{S\}$</td><td colspan="2">érintő négyszög</td></tr>
<tr><td>$\{6;7;8;9;10\} \times \{A;B;C;D;H;I;J;L\}$</td><td colspan="2">paralelogramma</td></tr>
<tr><td>$\{4;8;9\} \times \{A;B;F;I;J;N;R\}$</td><td colspan="2">húrtrapéz</td></tr>
<tr><td>$\{5;7;9\} \times \{B;D;G;I;M;S\}$</td><td colspan="2">deltoid</td></tr>
<tr><td>$\{7;9\} \times \{A;B;C;D;E;G;H;I;J;L;M;O;S\}$</td><td colspan="2">rombusz</td></tr>
<tr><td>$\{8;9\} \times \{A;B;C;D;F;H;I;J;K;L;N;P;R\}$</td><td colspan="2">téglalap</td></tr>
<tr><td>$\{9\} \times \{A;B;C;D;E;F;G;H;I;J;K;L;M;N;O;P;Q;R;S\}$</td><td colspan="2">négyzet</td></tr>
</table>

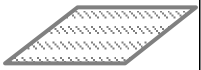
3.4. táblázat: A 3.3 táblázat kontextusának klikkjei

*A konvex négyszögek elemzésére felvett relációtábla 13 klikket, hármat név nélkül tartalmaz, melyeket a 3.4. táblázatban tüntettünk fel.*

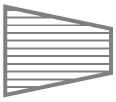
*Egy-egy speciális négyszögosztály ismeretéhez hozzátartozik fogalmi azonosításuk, és megkülönböztetésük, ami a trichotomikus modell alapján több, nem szimmetrikus feladattípusból áll. Demonstrációként a 3.5a-b táblázat néhány ilyen feladatotk tartalmaz:*

*Egy **vizuális reprezentációhoz** csatolható **nevek** felismerése:*

*Az ábrán látható négyszögre melyik elnevezések használhatók?*

| | *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|---|
|  | *paralelogramma* | *Téglalap* | *rombusz* | *deltoid* | *húrtrapéz* |

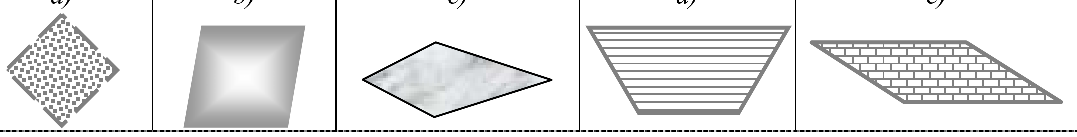
*Az ábrán látható négyszögre melyik elnevezések nem használhatók?*

| | *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|---|
|  | *paralelogramma* | *Téglalap* | *rombusz* | *deltoid* | *húrtrapéz* |

*Egy **névhez** tartozó **vizuális reprezentációk** felismerése:*

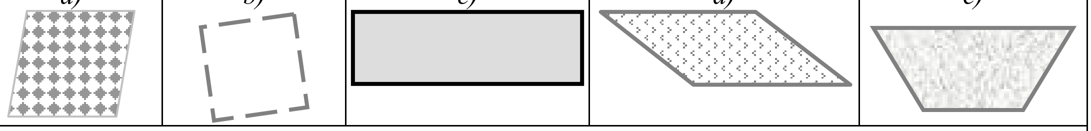
*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyekre a rombusz megnevezés használható!*

*a)* *b)* *c)* *d)* *e)*



*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyekre a trapéz megnevezés nem használható!*

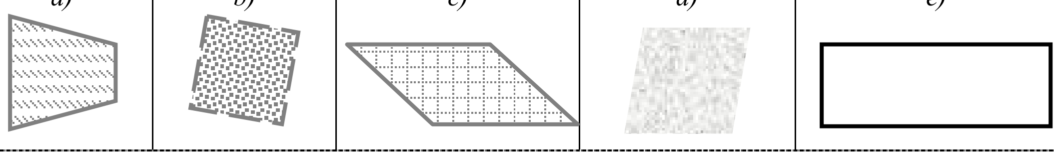
*a)* *b)* *c)* *d)* *e)*



***Egy tulajdonsághoz tartozó vizuális reprezentációk felismerése:***

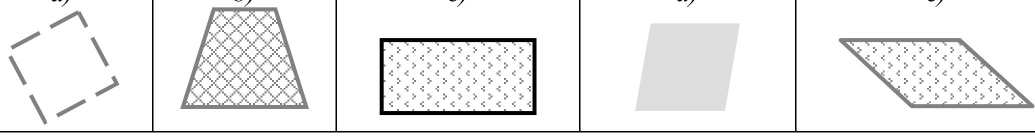
*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyeknek átlói merőlegesek!*

*a)* *b)* *c)* *d)* *e)*



*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyeknek átlói nem felezik egymást!*

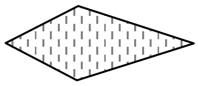
*a)* *b)* *c)* *d)* *e)*



*3.5a táblázat Mintafeladatok a fogalom azonosításához*

*Egy* ***vizuális reprezentációhoz*** *tartozó* ***tulajdonságok*** *felismerése:*

*Az ábrán levő négyszögre mely tulajdonságok érvényesek?*

| | *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|---|
|  | *két-két oldala egyenlő* | *tengelyesen szimmetrikus* | *átlói felezik egymást* | *oldalai egyenlők* | *átlói egyenlők* |

*Az ábrán levő négyszögre mely tulajdonságok nem érvényesek?*

| | *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|---|
|  | *két-két oldala egyenlő* | *tengelyesen szimmetrikus* | *átlói felezik egymást* | *szögei egyenlők* | *átlói merő-legesek* |

*Egy* ***névhez*** *tartozó* ***tulajdonságok*** *felismerése:*

*Jelölje be a* ***húrtrapéz****ra érvényes tulajdonságokat!*

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|
| *tengelyesen szimmetrikus* | *átlói merőlegesek* | *középpontosan szimmetrikus* | *szemközti oldalai egyenlők* | *szemközti szögei egyenlők* |

*Jelölje be a* ***rombusz****ra nem teljesülő tulajdonságokat!*

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|
| *középpontosan szimmetrikus* | *átlói merőlegesek* | *tengelyesen szimmetrikus* | *átlói egyenlők* | *szomszédos oldalai merőlegesek* |

*Egy* ***tulajdonsághoz*** *tartozó* ***nevek*** *felismerése:*

*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyek az* **átlójukra szimmetrikusak!**

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|
| *húrtrapéz* | *paralelogramma* | *rombusz* | *téglalap* | *deltoid* |

*Jelölje azokat a négyszögeket, amelyek* **középpontosan nem szimmetrikusak!**

| *a)* | *b)* | *c)* | *d)* | *e)* |
|---|---|---|---|---|
| *deltoid* | *paralelogramma* | *téglalap* | *rombusz* | *húrtrapéz* |

*3.5b táblázat Mintafeladatok a fogalom azonosításához*

### *3.4. Galois-gráf és konvenciók*

A *klikk*ek között értelmezett rendezés az *extenzió*k (fogalmi terjedelmek) tartalmazásán alapul, ami éppen a duálisa az *intenzió*k (fogalmi tartalmak) tartalmazási relációjának. A *klikk*ek (*potenciális fogalmak*) közti rendezési reláció táblázata alapján megrajzolható a reláció *Galois-gráf*ja.

A *fogalmi hierarchiák Galois-gráf*jának jellegzetes tulajdonsága, hogy van minimális eleme, azaz *forrás*a és van maximális eleme, azaz *nyelő*je is. A DAG *forrás*a, a minimális klikk *intenzió*ja mindig a teljes attribútum halmaz, és neki van a legszűkebb *extenzió*ja (esetenként ez az üres halmaz is lehet) az összes klikk közül. A DAG *nyelő*je, azaz a maximális klikk *extenzió*ja pedig mindig a teljes objektumhalmaz, és neki van a legszűkebb *intenzió*ja (esetenként ez az üres halmaz is lehet) az összes klikk közül. A minimális klikkből a gráf élei természetesen csak kiindulhatnak, és minden klikkhez (esetleg több úton is) el lehet jutni belőle. A maximális klikkbe pedig a gráf élei természetesen csak befuthatnak, és minden klikktől (esetleg több úton is) el lehet jutni hozzá. Konvencionálisan a minimális klikk a gráf legalsó, a maximális klikk pedig a gráf legfelső szögpontja. A legalsó és a legfelső szögpont között a fogalmi terjedelmüknek megfelelő szinten ábrázoljuk a többi klikket. Az *extenzió*k tartalmazási viszonya alapján kötjük össze a gráf szögpontjait a *Hasse*-féle konvenció figyelembe vételével.

A hierarchikus fogalmi rendszerek *Galois-gráf*jában a klikkek leírását egyszerűsíthetjük úgy, hogy egy klikk *extenzió*jának csak azon elemeit tüntetjük fel, amelyeket az alárendelt fogalmai nem tartalmaznak, *intenzió*jában pedig azokat az attribútumokat tüntetjük fel, amelyekkel a fölérendelt fogalmai nem rendelkeznek. Ez az ábra olvasatára a következő két konvenciót jelenti:

– a felsőbb fogalmak terjedelme tartalmazza az alárendelt fogalmak terjedelmét;

– a felsőbb fogalmak tulajdonságai öröklődnek az alárendelt fogalmakra.

A *Galois-gráf* e két konvenció nyomán úgy egyszerűsödik, hogy minden objektum és minden attribútum csak egyszer jelenik meg explicit módon az ábrán. Az ábrának ez a kiegyszerűsítése azért fontos, mert így azok a tulajdonságok jelennek meg az egyes klikkeknél, amelyek megadják azokat a szempontokat, amelyek segítségével a szomszédos fölérendelt fogalmakból eljuthatunk ehhez a (potenciális) fogalomhoz. E forma elősegíti az explicit definíciós formák áttekintését is: célszerű valamelyik (lehetőleg szomszédos) fölérendelt fogalmat genus proximumnak választani, a differentia specifica lehetséges szereplőit pedig a feltüntetett attribútumok jelenítik meg. (A formálisan így létrehozott definíciók persze általában nem elégítik ki a matematikai definíciókkal szemben támasztott szabatossági követelményt, mert a tulajdonságrendszerben lehetnek rejtett redundanciák! E redundanciák kiszűrésével a definíció szabatossá válik!)

A *Galois-gráf* nem a fogalmak, hanem a *potenciális fogalmak* hierarchiáját ábrázolja! A *potenciális fogalmak* közül esetenként néhány nem válik fogalommá. Amennyiben a fogalmak hierarchiáját vizsgáljuk, akkor a klikkek tartalmazási táblázatát le kell szűkítenünk a fogalmakra, és az így kapott fogalmi hierarchia gráfját kell elkészítenünk. A *Galois-gráf* ezen redukálásával kapjuk meg a ténylegesen megcélzott fogalmak hierarchiáját. E redukció nyomán nyert fogalmi hálót a *Galois-gráf* módosításával kapjuk meg. Egy-egy klikk törlése nem változtat azon a tényen, hogy a maximális klikkből minden klikkhez el lehet jutni, de azokhoz a klikkekhez, amelyeknek a törölt klikk volt a közvetlenül fölérendelt potenciális fogalma az explicite megjelenő attribútumai kibővülnek a törölt klikk kitüntetett attribútumaival. Tekintettel arra, hogy a törölt klikk több alárendelt fogalomnak is lehetett volna a genus proximuma, ezért az ő kitüntetett tulajdonságai a redukált gráfban már több klikkben is szerepelhetnek. A fogalmi hierarchia redukált gráfjában azokat a kitüntetett tulajdonságokat, amelyek több fogalomnál is megjelennek célszerű megjelölni, ui. ezeket általában nem célszerű sem a specializálás szempontjaként, sem a definiensben megkülönböztető tulajdonságként szerepeltetni, mert nem igazán relevánsak a törölt klikk alárendelt fogalmainak elkülönítésében.

*A vizsgált tárgyalási kontextus klikkjei közti rendezést adja meg a 3.6 táblázat, melyben kiemeléssel szerepelnek azok a klikkek, amelyek a középiskolai tananyagban nem válnak fogalommá.*

| klikkek tartalmazási táblája | | | Négyszögosztályok | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | *1* | ① | ② | ③ | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* | *11* |
| négyszögosztályok | konvex négyszög | *1* | ≤ | | | | | | | | | | | | |
| | *Név nélküli klikkek* | ① | ≤ | ≤ | | | | | | | | | | | |
| | | ② | ≤ | | ≤ | | ≤ | | | | | | | | |
| | | ③ | ≤ | ≤ | | ≤ | | | | | | | | | |
| | trapéz | *3* | ≤ | | | | ≤ | | | | | | | | |
| | húrtrapéz | *4* | ≤ | ≤ | ≤ | | ≤ | ≤ | | | | | | ≤ | |
| | deltoid | *5* | ≤ | ≤ | | ≤ | | | ≤ | | | | | | ≤ |
| | paralelogramma | *6* | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | | ≤ | | | | | |
| | rombusz | *7* | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | ≤ | ≤ | ≤ | | | | ≤ |
| | téglalap | *8* | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | | ≤ | | ≤ | | ≤ | |
| | négyzet | *9* | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ | ≤ |
| | húrnégyszög | *10* | ≤ | | | | | | | | | | | ≤ | |
| | érintő négyszög | *11* | ≤ | | | | | | | | | | | | ≤ |

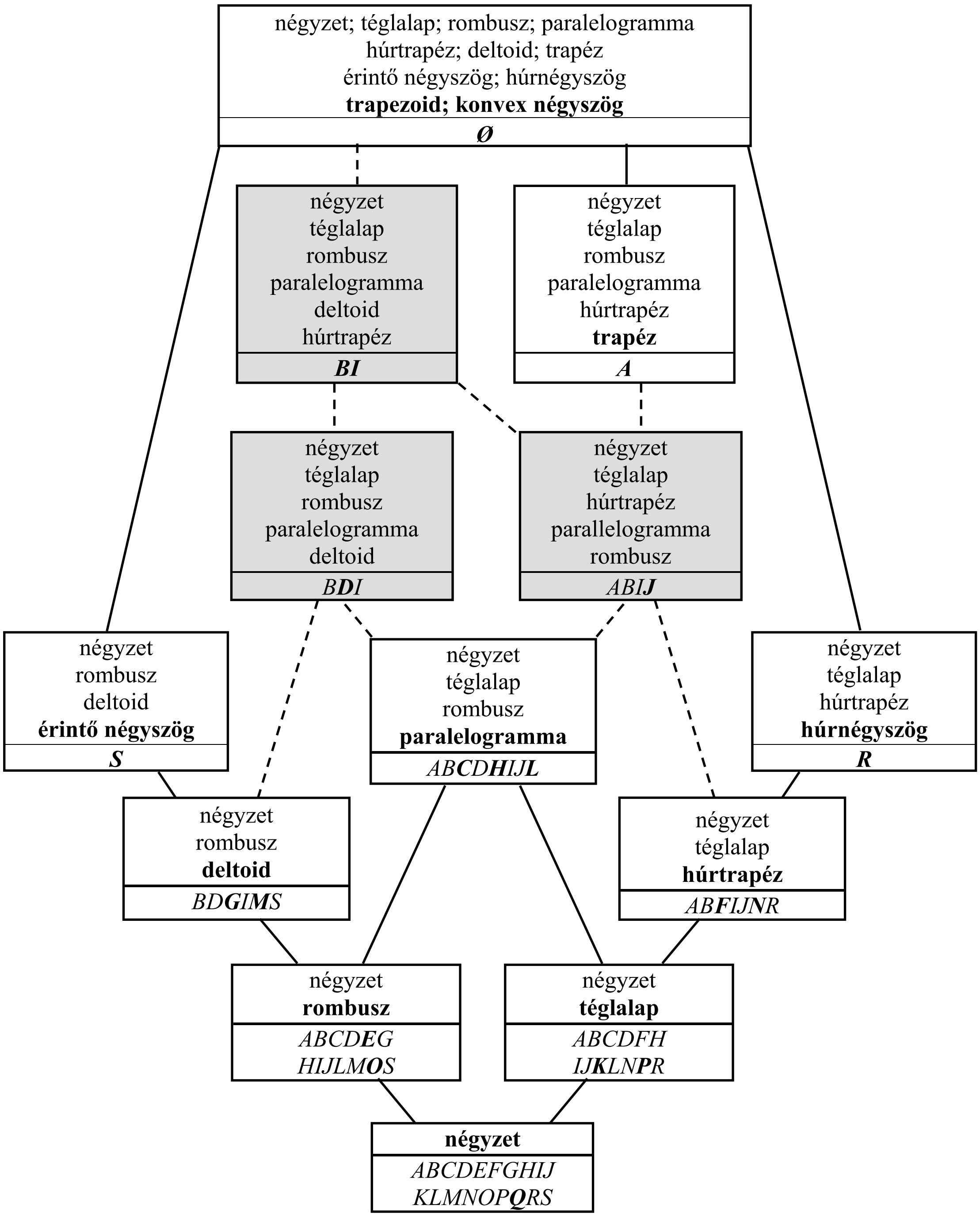
*3.6. táblázat: A klikkek (potenciális fogalmak) rendezési táblája*

*A tárgyalási kontextus alapján elkészített Galois-gráf szerepel és 3.5. ábrán.*

*A potenciális fogalmak helyett a (nevesített) fogalmakra redukálható a rendezési tábla, ha a név nélküli klikkekhez tartozó sorokat és oszlopokat töröljük. Ekkor természetesen a fogalmi hierarchia is némileg módosul. A fogalmakra vonatkozó hierarchia ábrázolásánál a gráf rajzolásánál a Hasse-féle konvenció mellett a következő megállapodással élünk:*

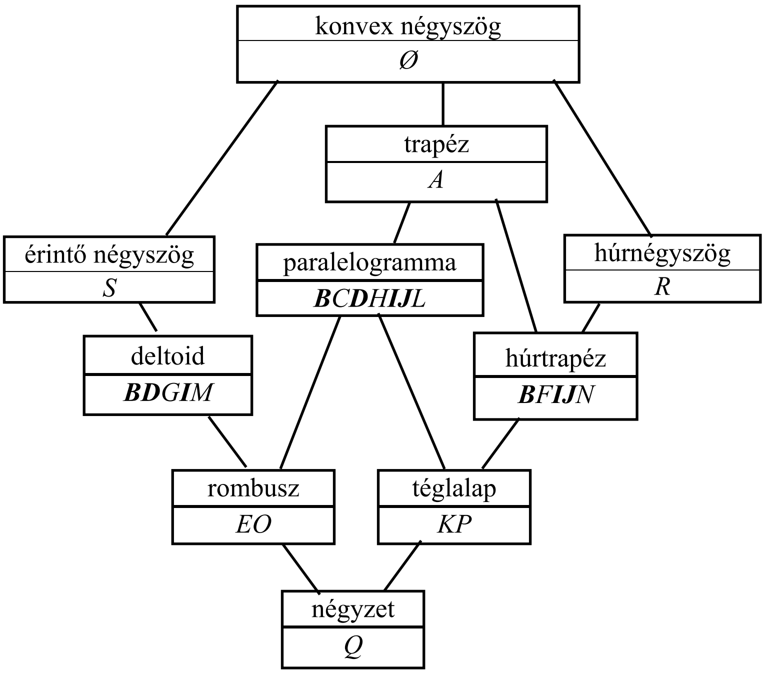
- *egy fogalom neveként a benne előforduló legbővebb fogalmi terjedelmű a négyszögosztályt használjuk, így világos, hogy a felsőbb fogalmak terjedelme tartalmazza az alárendelt fogalmak terjedelmét.*
- *a felsőbb fogalmak tulajdonságai öröklődnek az alárendelt fogalmakra, ezért csak az alárendeléskor megjelenő specifikus tulajdonságokat tüntetjük fel.*

*A 3 (név nélküli) klikk eltávolítását követően kapott redukált gráf a 3.6. ábrán látható. Ennél az ábránál az egyszerűsítő konvenciókat is használtuk.*



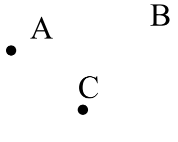
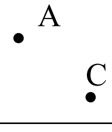

3.5. ábra: A tárgyalási kontextus Galois-gráfja

*A redukált gráf fogalmi hierarchiájában nem célszerű releváns tulajdonságnak tekinteni a. BDIJ tulajdonságokat, ui. a trapézból a húrtrapéz és a paralelogramma egymástól való elhatárolásában a J tulajdonság (van két egyenlő szögpárja) nem releváns. E tulajdonság alapján specializálható ugyan a trapézt, ám e szempont preferálása még nem segít a paralelogramma és a húrtrapéz megkülönböztetésében.*




*3.6. ábra: A 3.2 kontextus fogalmi hierarchiájának redukált Galois-gráfja*

*A hierarchikus viszonyra vonatkozó kapcsolatok elmélyítéséhez feladatokon keresztül aktivizálni kell a tudáshálóban kialakult kapcsolatokat. A Redukált Galois-gráf alapján konstruálhatók a fogalmak terjedelmére vonatkozó feladatok, és a fogalmak tartalmára vonatkozók egyaránt. Nagyobb kreativitást igényelnek az ún. kiegészítéses feladatok. E feladattípusokra mutat mintapéldákat a 3.7. táblázat.*

<table>
<tr><td colspan="2">Fogalmi terjedelmek tartalmazási viszonyára<br>Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások melyek igazak!<br>a) Minden téglalap húrtrapéz.<br>b) Van olyan deltoid, ami téglalap.<br>c) Nincs olyan téglalap, amely rombusz lenne.<br>d) A téglalap nem paralelogramma.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fogalmi tartalmak tartalmazási viszonyára<br>Állapítsa meg, hogy az alábbi állítások melyek igazak!<br>a) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus.<br>b) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor tengelyesen is szimmetrikus.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kiegészítéses feladatok</td></tr>
<tr><td>Az ábrán adott három pont. Egészítse ki e három pontot húrtrapézzá!<br>
</td><td>Az ábrán adott két pont. Adjon meg olyan négyzetet, amelyiknek e két pont lesz az átellenes csúcspárja!<br>
</td></tr>
</table>

*3.7. táblázat Mintafeladatok a tudásháló aktivizálásához*

### *3.5. Az általánosítás vizsgálata*

Egy adott tananyagrész fogalmi hierarchiáját leíró *Galois-gráf* segítséget nyújt különböző didaktikai szempontú elemzéshez. Az egyik legfontosabb eltérés a *dichotomikus modell*ekhez viszonyítva az, hogy szakít azzal a szemléleti képpel, hogy az általánosítás és specializálás egyértelműen a fogalmi terjedelmek egyszerű halmazelméleti tartalmazásával írható le. A *trichotomikus modell*ben az általánosítás és specializálás egymás duális műveleteként jelenik meg, amit a *Galois-gráf* szerkezetében levő dualitás pontosan tükröz. A fogalmi terjedelem bővítése (klasszikus értelmű általánosítás) egyidejűleg a fogalmi tartalom szűkítését (specializálását) eredményezi, és fordítva: a fogalmi tartalom bővítése (általánosítása) egyidejűleg a fogalmi terjedelem szűkítését (specializálását) vonja maga után.

Az általánosítás/specializálás egyes lépéseinek szempontja(i) a *Galois-gráf*ban explicite jelen van(nak), ezért a tananyagrész különböző felépítési alternatíváinak következetessége nyomon követhető a gráfon.

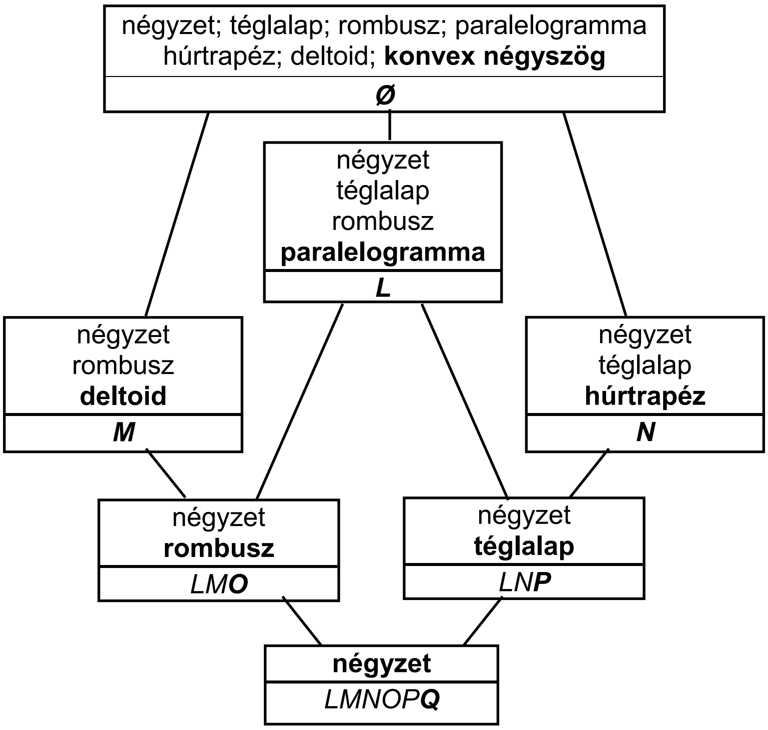
A spiralitás elve szerint az egyes témakörök fogalmi rendszere fokozatosan kerül kiépítésre. (Ezt az utat követi a számfogalom kialakítása, a hatványozás és a trigonometrikus függvények általánosításai csakúgy, mint az absztrakt vektorfogalom kialakítása.) Az egyes fokozatokhoz tartozó fogalmi hierarchiák kialakításakor fontos szempont, hogy az egyes fogalmak között kiépített kapcsolatok, így az alá- és fölérendeltségi viszonyok is, lehetőleg a későbbi általánosításkor változatlanul érvényben maradjanak (a hierarchia permanencia-elve), lehetőleg kevéssé módosuljanak. Az egyes fokozatokhoz tartozó fogalmi hálókat ennek az elvnek az értelmében úgy kell egymásra építeni, hogy az új fázisban megszerzendő ismeretek bővítsék az ismerethálót, és lehetőleg ne írják át a már kialakított fogalmi hálót, ui. a megszerzett ismeretek, a beidegződött szokások törlése és átírása az új ismeretek elsajátítását nagymértékben megnehezíti. Az új ismeret befogadásának hatékonyságát ugyanakkor jelentősen növeli, ha a meglevő fogalmi hálót gazdagítja, az új kapcsolatok elmélyítik a már meglevő kapcsolatokat, azokat kiegészítik. Ennek az elvnek megfelelően előnybe kell részesítenünk azokat a tananyag felépítéseket, ahol a következő fokozathoz tartozó fogalmi háló a már meglevőt megtartva, azt kiegészítve épül fel.

*A konvex négyszögek tanítására a gyakorlat által is visszaigazolt részletes felépítést követ a magyar matematikaoktatás. Ennek során a speciális négyszögosztályok először a szimmetriaelvek alapján kerülnek tárgyalásra. (E bevezetési mód egyik nagy előnye, hogy kezdettől megalapozza azt a szemléletet, hogy így a geometriai alakzatokat nem azonosulnak a ponthalmazzal, hiszen a „négyzetnek lenni” tulajdonságcsoportban nem kap helyet a négyzet helye és helyzete.) A 3.7. táblázatban szerepel a szimmetriaelvek alapján tárgyalt speciális négyszögek kontextus táblázata, ami nyilván részrelációja a 3.3. táblázatban vizsgált általánosabb kontextusnak. E szimmetria alapelven elkészített reláció elemzése 7 klikket ad eredményül, amelyek tartalmazási viszonya is kiolvasható a 3.7 táblázatból. E klikkek hierarchiáját leíró Galois-gráf a 3.7. ábrán látható.*

| kódolás | | | Kontextustábla | | | | | | tartalmazási tábla | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Attribútum | | | | | | négyszögek | | | | | | |
| | | | *L* | *M* | *N* | *O* | *P* | *Q* | 1 | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| négyszögek | konvex négyszög | *1* | | | | | | | < | | | | | | |
| | húrtrapéz | *4* | | | × | | | | < | < | | | | | |
| | deltoid | *5* | | × | | | | | < | | < | | | | |
| | paralelogramma | *6* | × | | | | | | < | | | < | | | |
| | rombusz | *7* | × | × | | × | | | < | < | < | < | < | | |
| | téglalap | *8* | × | | × | | × | | < | | | < | | < | |
| | négyzet | *9* | × | × | × | × | × | × | < | < | < | < | < | < | < |

*3.7.táblázat A négyszögek kontextusa szimmetrikus tulajdonságok alapján*

*Az általános iskolában ezt a hierarchiát célozzák meg először.*



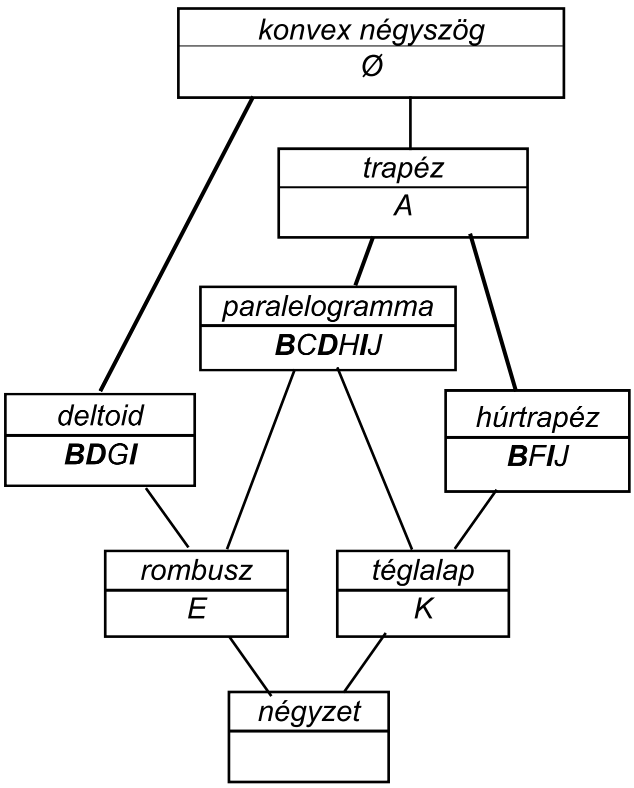

*3.7. ábra A szimmetria kontextus redukált Galois-gráfja*

*A szimmetriaelvű tárgyalást követően (5. osztálytól) egyre több metrikus jellegű tulajdonság vizsgálatára kerül sor. Az oldalak, szögek, átlók vizsgálata nyomán tovább bővülnek az ismeretek, és kialakul a konvex négyszögek metrikus tulajdonságokkal történő jellemzése. A 3.7. táblázatban szerepel a metrikus tulajdonságok alapján tárgyalt speciális négyszögek kontextus táblázata, ami nyilván szintén részrelációja a 3.3 táblázatban vizsgált általánosabb kontextusnak.*

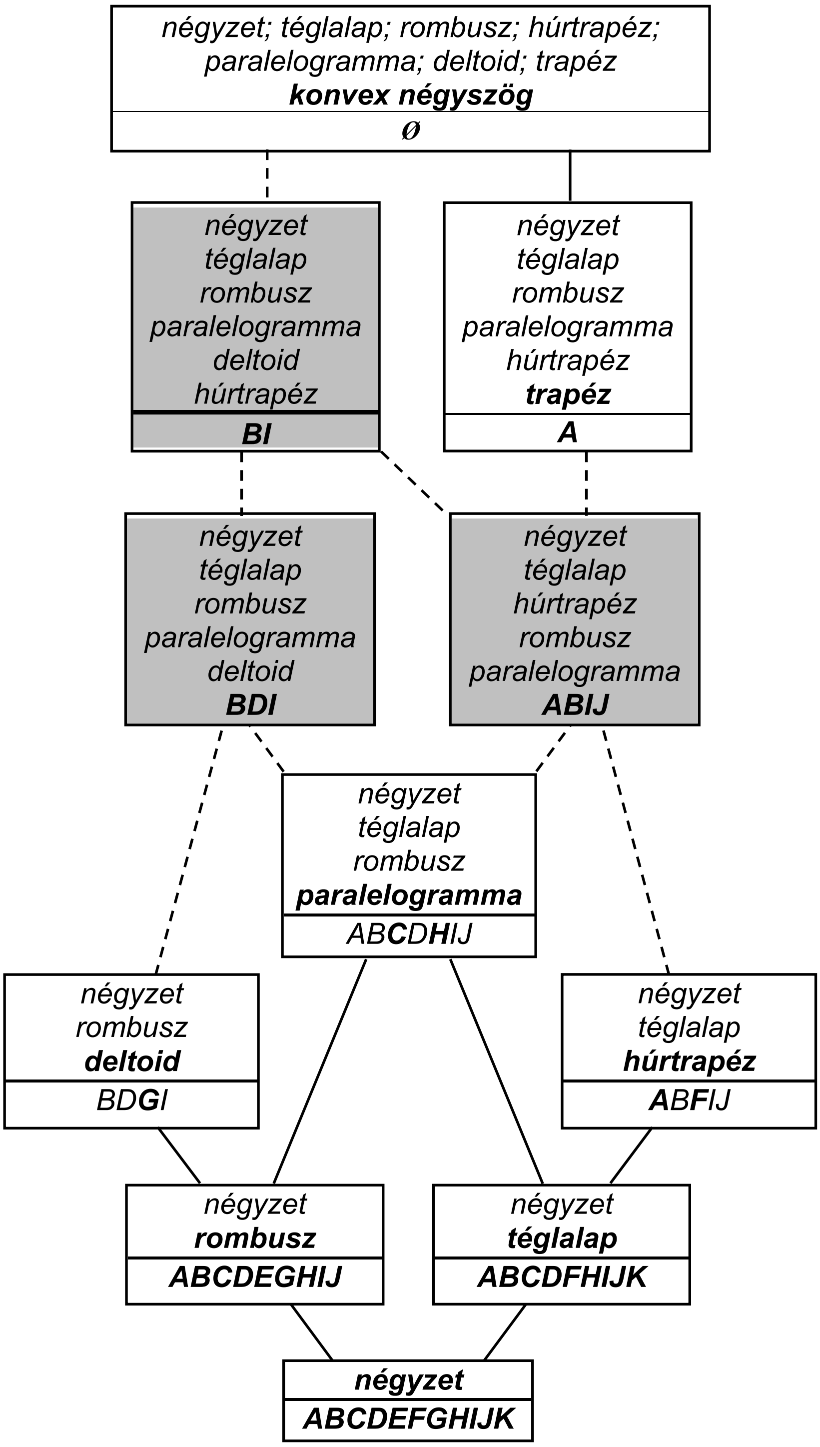
| | | | „metrikus tulajdonságok” | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | *I* | *J* | *K* |
| négyszögs | konvex négyszög | *1* | | | | | | | | | | | |
| | trapéz | *3* | × | | | | | | | | | | |
| | húrtrapéz | *5* | × | × | | | | × | | | × | × | |
| | deltoid | *6* | | × | | × | | | × | | × | | |
| | paralelogramma | *7* | × | × | × | × | | | | × | × | × | |
| | rombusz | *8* | × | × | × | × | × | | × | × | × | × | |
| | téglalap | *9* | × | × | × | × | | × | | × | × | × | × |
| | négyzet | *10* | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |

*3.8. táblázat Konvex négyszögek kontextus táblázata a metrikus tulajdonságok alapján*

*A „metrikán alapuló” reláció 11 klikkjének hierarchiáját szemlélteti a 3.6b ábrán látható Galois-gráf, valamint a fogalmak redukált gráfja pedig 3.6a ábrán látható.*

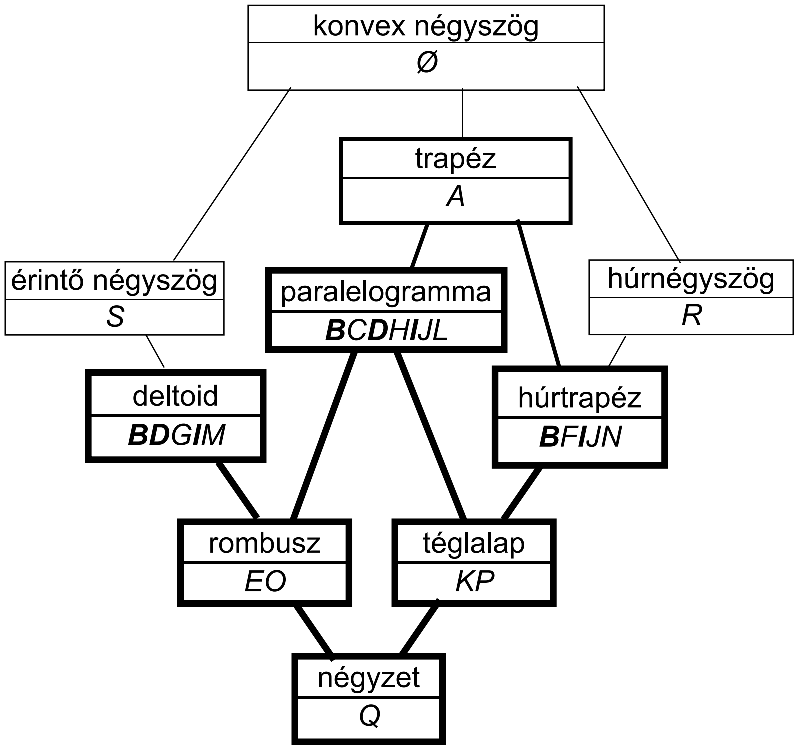



*3.8a ábra: Redukált metrikus Galois-gráf*




*3.8b ábra: A metrikus Galois-gráf*

*A középiskolában a konvex négyszögek témaköre lényegében csak a húrnégyszöggel és az érintőnégyszöggel, valamint ezek tulajdonságaival bővül. A középiskola végére megcélzott fogalmi hálóban pontosan nyomon követhető, hogy az ismeretek időszerinti* *bővítése mindkét általánosításnál a meglevő tudáshálót megtartja, azt gazdagítja és kiegészíti. A magyar oktatásban a konvex négyszögek e spirális felépítésére alkalmazott módszer elemzésünk szerint is didaktikusnak minősül.*




3.9 ábra: A fogalmi háló építésének fázisai

*A magyar oktatásban a konvex négyszögek e spirális felépítéséről a formális fogalomanalízisre alapított trichotomikus modellünk alapján végzett elemzés kimutatta, hogy a didaktikai szempontokat messzemenően figyelembe veszi.*

# 4. AZ ABSZTRAKT VEKTORFOGALOM KIALAKÍTÁSÁHOZ

A *Galois-gráf*ot mint *trichotomikus modell*t alkalmazzuk ebben a részben az absztrakt vektorfogalom kialakításának egy rendszerszemléletű elemzéséhez. A matematikadidaktikai szakirodalomban erre a témakörre nincs olyan egységesen kialakított és elfogadott módszer, mint a konvex négyszögek tanítására vonatkozóan, több vitatott kérdés, többféle megoldási javaslat él egymás mellett. Általánosan elfogadott, hogy az absztrakt vektor fogalmának megalapozásához több konkrét vektortér megismerésére van szükség, amit általánosan fogalmaz meg *Skemp (1975. 38.o)* első matematikatanulási alapelve:

> *„Definíció segítségével senkinek sem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.”*

A példák sokaságának jellegében azonban eltérő gyakorlatok vannak: egyes országokban (pl. Franciaországban) a vektor algebrai megalapozása, másutt (pl. Magyarországon) a vektor geometriai megalapozása dominál. Jelentős nézetkülönbségek vannak a vektor egyenlőségének értelmezésére vonatkozóan is, sőt az alkalmazhatósági szempontból fontos vektoreltolhatóság értelmezése is problematikus.

A vektorfogalom tanításának célja ugyan a tantervi keretben közvetlenül nem található meg, ui. e joghatályos dokumentumok többnyire csak a tantárgy egészére illetve nagyobb tanegységeire vonatkozóan fogalmaznak meg explicit módon célrendszert, de a vektorok esetében hallgatólagosan elfogadott alaphipotézis szerint két fő motívum indokolja e fogalom tanítását:

- széleskörű, korszerű alkalmazásai;
- gondolkodásfejlesztő hatása.

Az első, gyakorlatorientált szempont nem igényel különösebb indoklást, hiszen a természettudományoktól a közgazdaságtanig szinte minden területen alapismeretként használják a vektor fogalmát.

A vektor gondolkodásfejlesztő hatásának néhány momentumát viszont érdemes kiemelnünk, ui. kiváló területet nyújt az absztrakciós folyamat elsajátításához, elmélyítéséhez. Az absztakció során a különböző dolgokban a közös tulajdonságokat kell felismerni, ezeket kiemelni, és a többi „lényegtelen tulajdonságtól” eltekintve egy a gyakorlatban jól alkalmazható általánosított, absztrakt ismerethez eljutni. A vektorfogalom kialakítása során több konkrét, szemléletes, gyakorlati példa alapján kerül sor a permanencia-elv egy újabb alkalmazására is, miközben szabatosabb értelmezést nyer a függetlenség-dimenzió intuitív fogalmi rendszere is. (A linearizálás mint közelítés a későbbi alkalmazásokban szintén mélyebb megalapozást kap.)

### *4.1. A vektor fogalma a tananyagban, szakirodalmi előzmények*

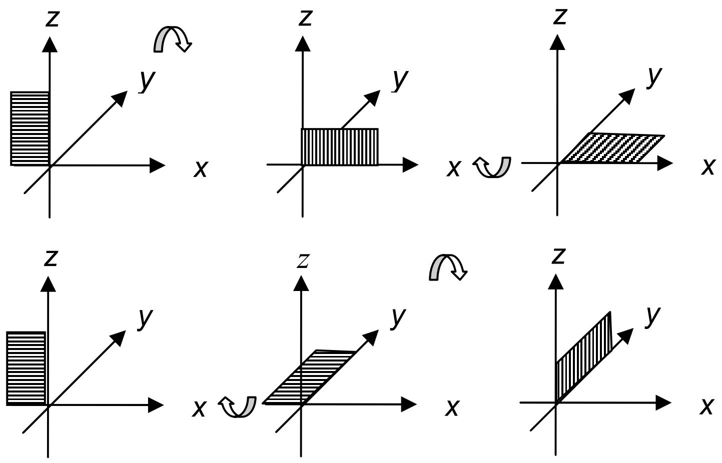
Bár a vektor viszonylag fiatal fogalomnak számít a matematikában, hiszen történelme alig másfél évszázados, középiskolai tanításában már négy évtized nemzetközi tapasztalata halmozódott fel, ui. számos ötlet és szempont alapján a vektorfogalom felépítésére különböző variációk is kipróbálásra kerültek.

A magyar közoktatásban az 1966-os tantervi reform nyomán épült be a matematika tananyagba a vektor fogalma, ezt követően pedig a folyamatos tananyag és óraszám-csökkentés mellett is egyre nagyobb teret kapott. A skaláris szorzat bevezetése (1976. évi reform), majd koordinátageometriai alkalmazásainak bővülése jelzi e folyamatot. E fogalom felépítésének tanítási problémáira is korán ráterelődött a figyelem, így számos tanulmány jelent meg és fűz értékes észrevételeket e fogalom tanításához. Az elmúlt négy évtized átfogó jellegű szakirodalmi feldolgozásaiból előzetesen a következő négy összefoglaló jellegű tanulmányt emeljük ki:

- *Megyesi & Skrapits (1974)* összefoglalja a korszak publikációinak főbb eredményeit, melyek elsősorban a geometriai vektor és az irányított szakasz kapcsolatára és a vektortér axiomatikus tanítására vonatkoztak, valamint a fizikai vektormennyiségek és a matematikai vektorfogalom párhuzamos vizsgálatán keresztül háromszintű fogalomépítést vázol fel, melyben tükröződnek a *Bruner*-féle tanuláselmélet enaktív-ikonikus-szimbolikus reprezentációs síkjai.
- *Peller & Megyesi (1982)* az előzőekben vázolt gondolatok és javaslatok bővebb kifejtésén és több ország tanítási gyakorlatának vizsgálata alapján egy 15 órára terjedő fogalmi építkezés részletes programját adják meg.
- *Varsics (1992)* a tanítási szempontok rendszerezésén keresztül megállapítja, hogy a geometriai vektor fogalmi kiépítése elsősorban nem a vektorfogalom kiépítését, hanem az egyenlőség-ekvivalenciareláció-skatulyázás témakörének tisztázását szolgálja. Fogalomépítési javaslatában ezért a geometriai vektor helyett a helyvektor kap megalapozó szerepet. Javaslatát azzal is alátámasztja, hogy a vektor eltolhatóságát biztosító magasabb matematikai modellekhez e fogalom közelebb áll.
- *Anne Pointer (2005)* a *Bruner*-féle reprezentációelmélet alapján teljes didaktikai részletességgel tárgyalja a vektor fogalmának kialakítását, ami különösen fontos abból a szempontból, hogy szakít azzal a Nyugat-Európában meghonosodott hagyománnyal, hogy az absztrakt vektor fogalma egyoldalú algebrai megalapozást nyerjen. Az ikonikus reprezentációs sík alapján a vektor geometriai megalapozása is kellő hangsúlyt nyer feldolgozásában. Vizsgálatainak részletes kidolgozottsága sajnos a vektorösszeadás értelmezésével zárul, így már nem tér ki a skalárral való szorzás műveletére.

A vektorfogalom tanítására végzett kutatások eredményei ellenére a hazai közoktatás matematika és fizika tanítása általánosan azt a szemléleti képet alakítja ki, hogy a vektor egy irányított mennyiség, holott a vektor fogalma történetileg nem az irányított mennyiségekből, mint prevektor fogalomból alakult ki.

A fizikában a vektormennyiség kritériumaként már eleinte is a *„paralelogramma-szabály”* szerinti összegződés, majd a *„vektorként transzformálódik”* feltétel dominált. Klasszikusnak számít a 4.1. ábrán látható ellenpélda, amely szerint az *x*, majd az *y* tengely körüli, illetve az *y*, majd az *x* tengely körüli 90º-os forgatás eredménye különbözik, így a tengely körüli forgatások, bár irányított mennyiségek (tengelyirány, forgatás nagysága), mégsem vektormennyiség.




*4.1. ábra A forgatás nem vektor, pedig van iránya és nagysága*

A matematikatörténet szerint a vektor klasszikus algebrai és geometriai megalapozása párhuzamosan, közel egy időben fejlődött ki. Az algebrai megalapozásban *Hamiltont* az egyenletmegoldások vizsgálata nyomán kialakult testbővítések vezették el a kvaterniókhoz. *Hamilton* (1853, *Lectures on Quaternion*) a komplex számoknál követett aritmetikai módszerrel építette fel kvaternió-elméletét. *Sain (1986)* szavaival:

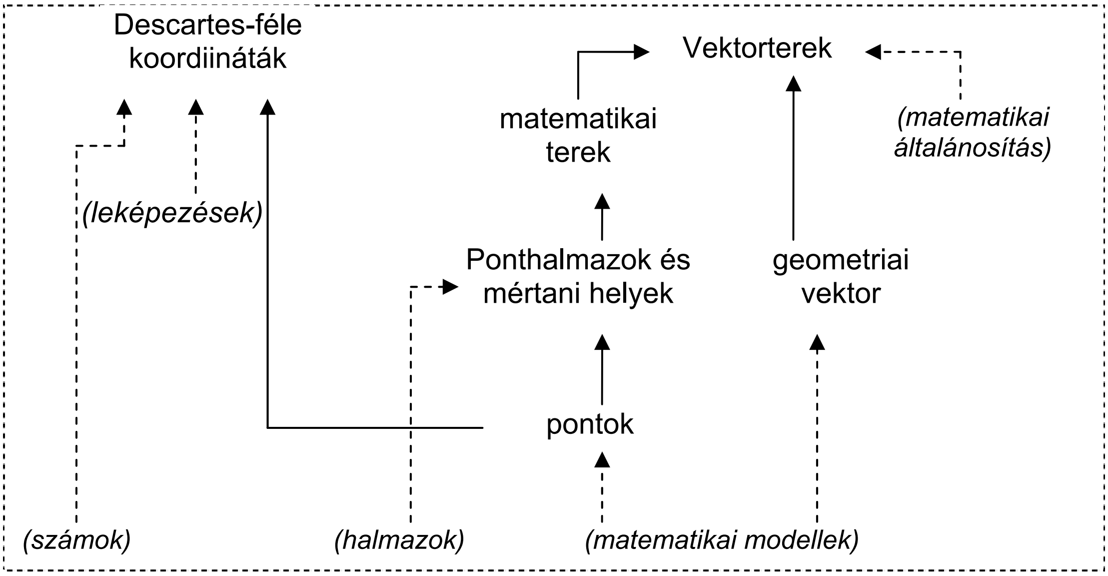
> *„Hamilton az a+bi+cj+dk kvaternió első tagját (α-t) skalárnak nevezte el, mert csak ilyen számokat lehet skálaszerűen felsorolni, a bi+cj+dk részt pedig vektornak (átvivőnek) hívta. ... A bi+cj+dk vektort olyan, nyíllal ellátott távolsággal ábrázolta, amely a P(x,y,z) pontból a P'(x+b;y+c;z+d) pontba mutat.”*

*Hamilton* a vektor elnevezést a csillagászatból kölcsönözte, ahol a Naptól a bolygóhoz húzott „vezérsugarat” nevezték így a „veho, vexi, vectus=húzni, vonni” latin kifejezés nyomán.

A vektorfogalom geometriai megalapozása *Grassmann* (1844, *Die lineale Ausdehunglehre, ein neuer Zweig der Mathematik*) nevéhez fűződik. Az analitikus geometriai vizsgálatok és koordinatizálás e korszak központi kutatási témái voltak. (*Möbius* 1827-ben a baricentrikus, *Plücker* pedig 1830 körül a homogén koordinátákat vezette be.)

*Gibbs (*1881-84, *Elements of Vector Analysis*) már a két felépítést egységesítve száműzte a kvaterniószorzás műveletét a vektorkalkulusból, helyette bevezette a skalárral való szorzás műveletét, majd a lineáris operátorok és reprezentációk kutatásainak eredményeként végül a vektorfogalom is absztrakt, axiomatikus megalapozást kapott.

Az absztrakt vektorfogalom kialakítására kevés szemléltető ábra található a szakirodalomban, *Skemp (1975)* ábrájának (4.2 ábra) kivételével csak szöveges leírásokra támaszkodhatunk e folyamat szemléletes képének kialakításához.




*4.2. ábra Skemp ábrája*

A vektorfogalom felépítésének *Galois-gráf*fal történő vizsgálatához a szakirodalomban rendelkezésre állnak különböző konkrét, a gyakorlatban is kipróbált vektortér modellek, valamint több olyan tanítási szempont is, amelyeket e fogalmi építkezéseknél figyelembe kell vennünk. A *tárgyalási kontextus* előállítása egyrészt az objektumhalmaz, jelen esetben a különböző konkrét vektorterek, másrészt a tanítási aspektusból fontos attribútumok minél átfogóbb áttekintését követeli meg. A fogalmi építkezés során felhasználható különböző vektorfogalmak áttekintését –e fogalom matematikatörténeti kialakulását is követve– két részben tekintjük át:

- geometriai megalapozások, melyek a vektorfogalom ikonikus reprezentációit helyezik előtérbe;
- algebrai megalapozások, melyek a szimbolikus reprezentációkat preferáló *lineáris tér* szemléletet közvetítik.

### *4.2. A vektor geometriai fogalma*

Az absztrakt vektorfogalom geometriai megalapozására több konkrét geometriai modell használatos a közoktatásban. Az alábbiakban a vektortér következő középiskolában is alkalmazott geometriai interpretációit tekintjük át:

–a *geometriai vektor*;

– a *helyvektor*;

– az *eltolások* mint vektorok.

A vektor geometriai értelmezésének legáltalánosabb szintjén a *tangensvektor* fogalma jelenik meg, ami ugyan magas szintű elvontsága miatt természetesen nem képezhet kiindulási pontot a vektorfogalom megalapozásában, ugyanakkor lényegi tulajdonságai mérvadók a megfelelő ikonikus reprezentációk kiválasztásában.

*A geometriai vektor fogalma*

A vektorfogalom geometriai megalapozása a magyar közoktatásban a kezdetektől fogva az irányított szakasz fogalmára épül. Az irányított szakaszok, azaz a rendezett pontpárok fogalmából indul ki a *geometriai vektor* fogalmának minden definíciója. Találkozhatunk olyan hibás megfogalmazásokkal, amelyek a vektor és az irányított szakasz fogalmát összemossák, azonosítják egymással. (Pl. *Simionescu (1973)* a vektoregyenlőség megemlítése nélkül közli, hogy *„a szakaszokat irányított szakaszoknak (azaz vektoroknak) tekintjük”.*) E megfogalmazások súlyos hibája, hogy az *n-dimenziós* euklideszi/affin tér irányított szakaszai *2n-dimenziós* vektorteret alkotnak. *Varsics (1992)* arra is rámutat, hogy e téves fogalomképzet kanonikusan azonosítható az euklideszi/affin geometria tangensnyaláb fogalmával.

A következő mérvadónak tekinthető szakirodalmi példák sora mutatja, hogy a *geometriai vektor* definíciójának szerves része a két vektor egyenlőségének meghatározása.

> *A Matematikai kislexikon (432. o)* a vektor egyik fogalmi értelmezéseként a következőt írja: *„A geometriában vektoron a tér adott irányú, irányítású és hosszúságú szakaszait értjük. Két vektor tehát akkor egyenlő, ha ezek a meghatározó adatok egyenlők.”*
>
> *Hajós (1960. 247-248.o)* a vektor geometriai fogalmára a következő tömör, ugyanakkor meglehetősen árnyalt és nyelvileg igényes megfogalmazást közli: *„Az irányított szakaszokat vektoroknak mondjuk. ... Két vektort azonosnak tekintünk és egyenlőnek mondunk, ha hosszuk és irányuk megegyezik.”*
>
> *Hajnal és társa (1991. 352.o*) gimnáziumi tankönyvében a következő meghatározás szerepel: *„Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük. ... Két vektort egyenlőnek tekintünk, ha abszolútértékük egyenlő, párhuzamosak (egyállásúak) és azonos irányításúak.”*

A *geometriai vektor* fogalmi meghatározásának szerves része az irányított szakaszok között értelmezett egyenlőség! Matematikai modellként tehát az irányított szakaszok mint rendezett pontpárok ($M\times M$) halmaza, és e rendezett pontpárok között egy adott tulajdonságcsoporttal értelmezett $=$ ekvivalencia reláció szolgál, ami a rendezett pontpárokat osztályokba sorolja. Az így keletkező osztályok a *geometriai vektorok*. A *geometriai vektor* fogalmának definíciói abban különböznek egymástól, hogy a két vektor egyenlőségének értelmezésében melyik *paralelogramma-tulajdonság* kap meghatározó szerepet. Így a geometriai vektor fogalmára több olyan ekvivalens definíció is adható, melyek az euklideszi geometriában matematikai szempontból egymással helyettesíthetők. Természetesen a geometriai általánosítás és a didaktikai feldolgozás szempontjából az egyes felépítések egymással többnyire nem egyenértékűek, hiszen az egyes tulajdonságcsoportok általánosítási lehetőségei, matematikai következményei és feldolgozási nehézségei jelentősen eltérnek. Ezen eltérések vizsgálatára a 4.7. pontban térünk ki részletesen.

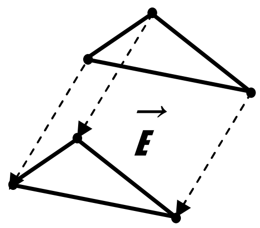
*Az eltolás mint vektor*

A vektor különböző geometriai értelmezései között az irányított szakaszon, azaz rendezett pontpáron alapuló felépítések mellett igen gyakran találkozunk a vektorok és az eltolások fogalmi azonosításával:

*Weyl* (1982. 59.o): *„A vektor tulajdonképpen ugyanaz, mint az eltolás, csak éppen a vektoroknál és az eltolásoknál más a szóhasználat."*

*Kolmogorov nyomán számos tankönyv azonosítja az eltolás és a vektor fogalmát: „a párhuzamos eltolásokkal fogunk foglalkozni, új néven vektoroknak nevezve őket."*

*Odvarko és társai (1971) is közlik: „A vektor ugyanaz, mint a párhuzamos eltolás."*




*4.2. ábra*
*A vektor mint eltolás*

A vektor és az eltolás azonosítása itt azt jelenti, hogy az affin/euklideszi transzformációcsoport transzláció-részcsoportját azonosítjuk a vektortérrel.

*A helyvektor*

A *helyvektor*, mint adott (kitüntetett) *O* pontból induló irányított szakasz, az *(O,P)* rendezett pontpár fogalmát szinte minden tankönyvi feldolgozás nevén nevezve szerepelteti. A *helyvektor* fogalmában nem jelentkezik az egyenlőség problémaköre, hiszen az *(O,A)=(O,B)* vektoregyenlőség itt az *(O,A)≡(O,B)*, azaz az *A≡B* azonosságon alapul.

A *helyvektor* a különböző tankönyvekben többnyire a koordinatizálás során kerül bevezetésre, de vannak olyan felépítések *(Szendrei, 1975)* és javaslatok *(Varsics, 1992)*, melyek a vektor elsődleges geometriai reprezentációjaként szerepeltetik. (Mindkét feldolgozás a *helyvektor* mint *kötött vektor* fogalmát alkalmazza, ami alkalmas a vektormező fogalmának szabatos definiálására.)

Az affin tér és a *helyvektor* fogalmára épített vektortér fogalmi terjedelme természetes módon azonosítható, de fogalmi tartalmukban lényegi különbség, hogy a vektortérnek van kitüntetett, ún. neutrális eleme, a **0**=*(O,O)* pontpár, az affin térnek pedig nincs kitüntetett pontja, azaz izotróp. E különbséget az affin tér *Weyl*-féle definíciója a vektortér fogalmára építve a következő módon küszöböli ki:

*Legyen M halmaz, V vektortér egy T test felett. Az $(M,V,\varphi)$ rendezett hármast, ahol $\varphi:M\times M\rightarrow V$ leképezés, n-dimenziós affin térnek nevezzük a T test felett, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:*

1. *Tetszőleges A ponthoz és* ***v*** *vektorhoz létezik egyértelműen egy B pont, amelyre $\varphi(A,B)=\mathbf{v}$,*
2. *Minden A,B,C ponthármasra fennáll, hogy $\varphi(A,B)=\mathbf{v}$ és $\varphi(B,C)=\mathbf{w}$, akkor$\varphi(A,C)=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, azaz $\varphi(A,B)+\varphi(B,C)=\varphi(A,C)$ teljesül.*

Az affin tér e meghatározása a vektor geometriai fogalmára a következő három interpretációs lehetőséget kínálja:

– az affin tér *Weyl*-féle definíciójában szereplő *V* vektortér kanonikus módon azonosítható az *M* affin tér transzláció-csoportjával, azaz a *V* vektortér elemei azonosíthatók az *eltolások*kal;

– az *M* affin tér pontjai és így a V vektortér vektorai is egy *O* pont kitüntetésével kanonikusan azonosíthatók a *helyvektorok*kal, így az *M* affin tér a *V* vektortérrel izomorf (hely)vektortérré válik;

– az affin tér rendezett pontpárjait a *V* vektortérrel mint transzlációcsoporttal osztályokba soroljuk, és a kapott ekvivalenciaosztályok lesznek a *geometriai vektorok*, azaz egy $M\times M/V$ faktortérként értelmeződik a *geometriai vektor*.

A *helyvektor*, az *eltolás* és a *geometriai vektor* fogalma alapvetően lefedi a vektor elemi geometriai értelmezési lehetőségeit.

A gyakorlatban használatos felépítésekben a geometriai vektor fogalmi felépítése általában kiegészül az eltolások szerepeltetésével. Az ilyen felépítések lehetőséget adnak a fogalom kettős beágyazódására, ami a többszörös reprezentációra tekintettel hatékonyabb elsajátítást tesz lehetővé. *Varsics (1992)* pontokba foglalja *a geometriai vektor* didaktikailag kialakult felépítésének vázát és felhívja a figyelmet arra, hogy a kettős beágyazási eljárásokban az egyes eltolások az ekvivalenciaosztályok címkéjeként, *„megnevezéseként”* szerepelnek. A *„névadás-azonosítás”* pszichés mellékhatásai mellett (pl. a tulajdonlás érzetét kelti) a fogalom kettős beágyazottságával stabilizálja a fogalom tartalmi beépülését a meglevő ismerethálóba, így igen hatékonyan alkalmazható. Több szerző is felhívja a figyelmet ennek az eljárásnak arra az előnyére, hogy így a geometriai vektorokkal végzett műveletek értelmezésekor elkerülhető a reprezentánstól való függetlenség igazolása.

Az általános térelméletben kialakult *tangensvektor* fogalmát, a pontos megnevezést mellőzve, harmadik értelmezésként ismerteti a *Matematikai kislexikon*. A vektor geometriai értelmezéseként legáltalánosabban ez a fogalom definiálható egy tetszőleges *M* differenciálható sokaságon. A definíció az *M* differenciálható sokaság egy kitüntetett *p* pontjában értelmezi a *p* pontbeli $T_pM$ *tangensteret* a következő módon:

*A $p \in M$ pontban differenciálható $f{:}M \to R$ típusú függvények $X_p$ lineáris differenciáloperátorai a p ponbeli tangensvektorok. (A lineáris differenciáloperátor megnevezés az alábbi két tulajdonságot jelenti:*

*1. $X_p(\alpha f+\beta g)= \alpha X_p(f)+ \beta X_p(g)$, azaz lineáris funkcionál;*
*2. $X_p(fg)= X_p(f)g+ fX_p(g)$, azaz teljesíti a Leibniz-szabályt.)*

A *tangensvektor* fogalma kapcsán két tulajdonságot emelünk ki:

- a sokaság egy *p* pontjának *tangensvektorai* a koordinátatranszformáció során homogén lineáris kifejezéssel transzformálódnak;
- a *tangensvektor* a *helyvektor*hoz hasonlóan egyértelműen *kötött vektor*, ami lehetővé teszi a *vektormező* fogalmának szabatos definiálását.

### *4.3. A vektor algebrai fogalma*

A továbbiakban az ikonikus reprezentációról a szimbolikusra áttérve a *lineáris tér* felfogáshoz vezető példákról lesz szó, melyben kiemelt szerepet kap a *permanencia-elv*. *Hamilton* és *Bolyai (1837, Responsio)* ezen az úton építette fel a komplex számokat, és az iskolai matematika tananyag is számos példát (számfogalom bővítése; hatványozás általánosítása,…) hoz fel a *permanencia-elv* alkalmazására. Természetesen a szimbolikus úton is több konkrét példát kell megismerni az absztrakt vektorfogalom tartalmas kialakulásához. A lehetőségek közül a további vizsgálatokhoz három konkrét algebrai példát szerepeltetünk:

- *rendezett szám n-esek*et;
- a *legfeljebb n-ed fokú polinomok* halmazát;
- az *n×m–es táblázatok* halmazát.

#### *Rendezett szám n-esek*

A szakirodalom többnyire a *rendezett szám n-esek* halmazát vezeti be elsőként a vektor szimbolikus reprezentációjaként. A *szám n-esek* azért is kapnak kiemelt szerepet a definíciós lehetőségek között, hiszen kiindulásként bármelyik vektorfogalmat is használjuk, a koordinatizálás, mint alapfeladat minden esetben egyenesen elvezet a *szám n-esek*hez.

> *Kuros (1978)* algebrai objektumként először a rendezett szám-n-est vezeti be vektorként, és definícióként a következőt közli: *„Egy rendezett szám-n-est: $\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ n dimenziós vektornak nevezünk. Az $a_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ számokat az α vektor komponenseinek fogjuk nevezni. Az α és a $\beta=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ vektort akkor fogjuk egyenlőnek tekinteni, ha azonos helyen álló komponenseik megegyeznek, vagyis $a_i=b_i$ minden $i=1,2,\dots,n$ esetén."*

#### *Legfeljebb n-ed fokú polinomok*

A polinomok összeadása és számmal való szorzása az algebrai kifejezésekkel végzett alapműveletként pontos megalapozást kap, így szerepeltethető az absztrakt vektortér előkészítéséhez. (Természetesen a polinomok szorzása itt nem kap szerepet, sőt a polinomok mint vektorok skaláris szorzata és a polinomok mint algebrai kifejezések szorzata két teljesen eltérő művelet!)

*n×m–es mátrixok*

A továbbiakban az *n×m–es táblázat*, *blokk*, illetve *tömb* kifejezés alatt az *n×m-es mátrixok* halmazát értjük az összeadási és a valós számmal való szorzási művelettel. Közismert, hogy az *n×m-es mátrixok* e két művelettel vektorteret alkotnak. (A mátrix elnevezés használata nem indokolt abban az értelemben, hogy a mátrixszorzás nem kap szerepet, sőt a mátrixok mint vektorok skaláris szorzata jelentősen eltér a mátrixok szorzási műveletétől!) A táblázatok több gyakorlati területen (*közgazdasági példák)* is jelentős szerepet kapnak, melyek közül kiemelt fontosságú egyik informatikai alkalmazása. Az Excel táblázatkezelőben a definiált tömbműveletek, melyeket a *<Ctrl>+<Shift>+<Enter>* billentyűkombinációval kell jóváhagyni, széles körben kerülnek alkalmazásra. Az *n×m–es táblázatok* így kellő megalapozással rendelkezhetnek ahhoz, hogy az *absztrakt vektortér* előkészítő példájaként szolgálhassanak.

Bár további vektortér modellek is előfordulnak a középiskolai tananyagban, melyeket a szakirodalom nevesít is, ám ezekről meg kell jegyezni, hogy a vektor fogalmi bevezetéséhez egyik tankönyvi felépítés sem alkalmazza őket, ui. általában olyan végtelen dimenziós függvényterekről van szó, amelyek nem szerepeltethetők konkrét előkészítő modellként, inkább csak a már meglevő vektortér funkcionális modelljeként használhatók fel. A szakirodalomban szereplő relatíve egyszerűbb algebrai példák (számsorozatok, amelyekben valamely rögzített elemtől kezdve csupa 0 áll; legfeljebb n-edfokú egyenletek, adott gyökkel rendelkező legfeljebb n-edfokú polinomok, legfeljebb
n-változós polinomok,...) tárgyalhatók vektortérként, de a tanterv szerint ezek nem épülnek be stabil ismerethátterként a tudáshálóba, így a vektorfogalom megalapozása sem építhető ezekre a modellekre.

A geometria algebrai felépítését számos könyv tárgyalja, melyek többnyire az algebrai vektorfogalomra építve a *Weyl-féle* meghatározáson alapulnak. Az affin tér klasszikus illeszkedési axiómáiból kiindulva is el lehet jutni a vektortér absztrakt fogalmához. E felépítésekből két problémát kell kiemelnünk:

- A vektortér értelmezésében szerepel a skalárral való szorzás művelete, így a vektor geometriai megalapozásában elemi geometriai úton értelmezni kell magát a számtestet is!
- A *Desargues-tétel* magasabb dimenziókban automatikusan teljesül, ezért a koordinatizálás, a számtest elemi geometriai felépítése kevesebb problémát rejt magában, mint az affin síkok esetében, ahol a *Desargues-tételt* is axióma rangjára kell emelni!

A szakirodalomban e témakör különböző feldolgozásai találhatók meg. Elemi koordinatizálást tárgyal *Molnár(1972),* transzformációcsoporton alapulót *Artin (1954)*; ternér-gyűrűst *Blumenthal (1962)*, *Kárteszi (1978)* pedig a véges geometriákra részletezi a vizsgálatot. Logikai szempontból tehát nem indokolt sem az algebrai, sem a geometriai felépítést preferálni, hiszen ezek ekvivalensnek tekinthetők.

Az absztrakt vektorfogalom megalapozásához számba vett konkrét vektormodellek rendelkeznek közös és egymástól eltérő tulajdonságokkal. Didaktikai szempontból kiemelten fontos a példaként szereplő modellek megválasztása. Elemzésünk vizsgálati aspektusai nem az egyes vektorfogalmak matematikai összehasonlítását célozzák, hanem az egyes vektorfogalmak didaktikai előnyeit és kialakításának nehézségeit igyekeznek jellemezni. Az absztrakció mint elvonatkoztatás hatékony fejlesztéséhez a lényegi tulajdonságok megragadása a központi feladat, amihez biztosítanunk kell azt is, hogy a lényegtelen dolgok figyelemelterelő hatásuk miatt ne kaphassanak túlzott hangsúlyt a fogalmi építkezés során. Ellenkező esetben a figyelem túlzottan áttevődik e lényegtelen momentumokra, ami jelentősen hátráltatja az absztrakció kialakulását. A különböző vektorfogalmak didaktikai célú jellemzésében természetesen egyidejűleg jelennek meg általános és a téma specifikumához igazodó szempontok is. Az egyes vektorfogalmak didaktikai attribútumainak áttekintését ennek megfelelően két részletben tárgyaljuk.

Vizsgálati szempontjainkat röviden és tömören jellemezzük, és csak azok jellemzésére térünk ki bővebben, amelyekről a szakirodalomban jelentős nézeteltérések találhatók.

### *4.4. A vektorfogalmak általános didaktikai tulajdonságairól*

Egy-egy fogalom kialakítása során minden esetben fontos a következő három aspektus elemzése.

- a fogalomképzés megalapozottsága;
- a fogalomazonosítás;
- a fogalomképzés szemléletessége.

#### *A fogalomképzés megalapozottsága*

A fogalmi építkezés során a konkréttól az absztrakt felé, az ismerttől az ismeretlen felé vezető úton a *Skemp*-féle törvény szerint mindig a példák sokaságán keresztül vezet az út. A felhasznált példáknak mindig jól ismertnek kell lenniük, a fogalmak megalapozását csak olyan ismeretekre építhetjük, amelyek megfelelően beépültek a tudáshálóba. Az absztrakt vektorfogalom kiépítéséhez felhasznált konkrét vektorfogalmaknak tehát már megfelelően megalapozottnak kell lenniük. Ez a szempont természetesen relatív abban az értelemben, hogy teljesülését nem a konkrét vektorfogalom adekvátsága vagy alkalmazhatósága, egyszerűsége illetve bonyolultsága határozza meg, hanem a tanterv. A konkrét vektorfogalmak esetében az *eltolások*, a *helyvektorok*, valamint a kiválasztott algebrai modellek esetében a magyar közoktatás tantervei szerint e szempont teljesül. A *geometriai vektor* esetében már erősen kérdőjeles, hogy mennyire tekinthető jól megalapozottnak az ekvivalencia-osztályozással nyert objektumok kezelése még akkor is, ha a számfogalom építése során, különösen a tört-számoktól a racionális számokhoz vezető úton, már szerepelt ez az eljárás. Egy ekvivalenciaosztály és reprezentánsának megkülönböztetését esetenként még a szakemberek sem használják következetesen. A vektorfogalmak jelen elemzésekor e szempont vizsgálatától eltekintünk. (E szempont bevonása a formális analízisbe egyébként nem változtat a 4.3. ábrán látható *Galois-gráf* alapszerkezetén!)

*Szemléletesség*

Az absztrakt vektor ugyan nem szemléletes fogalom, mégis célszerű előnybe részesítenünk a szemléletes vektormodelleket. Itt nem pusztán a szemléltetési lehetőség biztosításáról van szó, ui. a szemléletesség többlettartama itt egyben azt is jelenti, hogy a szemléletes megalapozás biztosítja e fogalom beépülését a vizuális, egyúttal a kreativitásért felelős agyféltekébe. A többszörös reprezentáció pedig, különösen ha mindkét féltekét érinti, hatékonyan javítja a fogalom használhatóságát.

A szemléletesség fogalmilag nem feltétlenül kötődik statikus képhez, bizonyos dinamizmus is megengedhető. Ilyen értelemben az *eltolás*t (kezdet és végállapot) is szemléletesnek tekintjük. *(Pointer, 2005)* A *geometriai vektor* szemléletessége a későbbiekben jelzett önellentmondások miatt megkérdőjelezhető, ezért nem tekintjük szemléletesnek. (A *Galois-gráf* alapszerkezetét nem módosítja ennek ellenkező értelmű feltételezése sem!) Az algebrai modellek jellegükből adódóan nem szemléletesek, feldolgozásuk is a szimbólumok feldolgozására szolgáló, a logikus gondolkodásért felelős másik agyféltekében történik.

*Egyenlőség azonosság alapján*

Minden fogalom kialakítása során, így a vektorfogalom esetében is, az egyik kritikus pont a fogalom azonosítása. A fogalomazonosítás során az egyenlőség fogalmát több módon is használhatjuk. A vektor fogalmához kötődően a szakirodalom a következő három módszert ismerteti két vektor egyenlőségének értelmezésére:

- két vektor egyenlősége objektumok azonosságaként értelmeződik;
- két vektor egyenlősége bizonyos releváns tulajdonsággal definiálódik, azaz logikailag e tulajdonság határozza meg az egyformának tekintendő objektumok körét;
- az egyenlőség közvetett módon egy ekvivalencia reláció megadásán keresztül nyer értelmezést, azaz a vektorok az objektumok ekvivalenciaosztályaként értelmeződnek, így két vektor akkor egyenlő, ha ekvivalenciaosztályként azonosak.

A definíciók jelentős részénél –a *geometriai vektor* kivételével– a vektorok egyenlősége az azonosság fogalmán alapul. Ez didaktikai szempontból olyannyira trivialitás, hogy az azonos objektumok egyenlőségéről beszélni többnyire csak zavart okoz. A vektorok mint *szám n-esek* definíciójában *Kuros (1978)* megfogalmazása, miszerint két vektor (*szám n-es*) akkor egyenlő, ha azonosak, kimondottan akkurátus.

Didaktikai szempontból viszont minden azonosítás több fontos momentumot is hordoz magában. A kimondva vagy kimondatlanul az azonosság fogalmát alkalmazó definíciókban a vektor kifejezés egy elnevezésként illetve szinonimaként funkcionál az egyébként is megnevezhető, deszkriptorral rendelkező objektumokra. A definíció mint átnevezés szerepe többrétegű. A *„külön névvel bír, mert fontos"* érzet mellett például a *helyvektor* definíciója *az O pontból induló irányított szakaszok* megnevezést tömöríti *az O pontbeli helyvektorok* elnevezésre. A megfelelő tömörítés szerepe sem redukálható a körülményesebb megfogalmazások elkerülhetőségére.

Egy új név bevezetése egy új fogalomképzet alapjául is szolgálhat, az ismerethálóban ugyanis azonos fogalmi terjedelem mellett az új névhez más tulajdonságok kaphatnak prioritást, sőt ezek lényegi tulajdonsággá is válhatnak, ami új fogalom képződéséhez vezethet. Az irányított szakasz megnevezéshez például elsődlegesen olyan asszociációk csatolódnak, amelyek az irány és a szakasz fogalmához kötődnek, míg a *helyvektorok* esetében már a velük végzett műveletek kaphatnak nagyobb prioritást.

A vektor eltolásként történő meghatározása mind formailag, mind nyelvileg egy szinonima kifejeződése. A *Weyl*-féle *„más a szóhasználat"* vagy a *Kolmogorov*-féle *„új néven nevezve őket"* kifejezéseket természetesen azonnal követnie kell a vektorműveletek bevezetésének, amivel biztosítható, hogy a vektor elnevezéshez elsődlegesen e műveletek kötődjenek. Az időbeli egybeesés kiemelkedően fontos, ui. csak így teljesíthető a *Vigotszkij*-féle legelemibb szintű fogalomalkotás, a *szinkretikus fogalomképződés* alapfeltétele. Az időbeli egybeeséssel biztosíthatjuk, hogy a vektor elnevezéshez a műveletek közvetlenül kapcsolódjanak.

Az új elnevezés és a hozzátartozó műveletek bevezetésével az absztrakt vektor egy szinkretikus fogalmi előzményéhez juthatunk el. Ezt közvetlenül a vektorműveletek begyakorlását célzó feladatoknak kell követniük, ami átvezet a *Vigotszkij* által *fogalmi komplexusnak nevezett fogalmi szint*hez. Több különböző konkrét vektorfogalom megismerése és használata alakítja ki a *pozicionális fogalmi szint*et, amikor a tanulók funkcionálisan már absztrakt vektorként használják meglevő fogalomképzetüket, bár a vektor fogalmának meghatározása még többnyire a komplexus szinten mozog.

Logikailag azonosnak és nyelvileg szinonimának tekinthető a vektor és az eltolás fogalma, de didaktikai szempontból jelentősen különböznek egymástól, hiszen az ismerethálóba más módon épülnek be. Az eltolás szubjektív fogalmi képe sokkal közelebb van a geometriai transzformációkhoz, mint a vektorok, ugyanakkor egy vektor $\pi$-szereséről kevésbé meglepő beszélni, mint egy eltolásáról, hiszen az eltolásokhoz elsősorban a geometriai transzformációk, esetleg fizikai mozgások képe csatolódik, a vektorhoz pedig megfelelő építkezés esetén a velük végezhető műveletek kapcsolódnak.

A vektor geometriai értelmezéseinek jelentős része az $(A,B) \in M \times M$ rendezett pontpárok között értelmez egy egyenlőséget, és az $(M \times M;=)$ objektumkettőst tekinti vektoroknak az egyenlőség formállogikai értelmezésében. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $(M \times M;=)$ rendszerben a továbbiakban bármilyen értelmezhető $\boldsymbol{T}$ tulajdonságra az $(A,B)=(C,D)$ esetén a $\boldsymbol{T}(A,B) \equiv \boldsymbol{T}(C,D)$ logikai azonosságnak is teljesülnie kell.

Az egyenlőség e formállogikai fogalmának következetes használata többnyire szokatlan, sőt több félreérthetőséget is rejt magában, ami jelentős értelmezési zavarok forrása. A tankönyvek egy jelentős része szerepelteti a vektor kezdőpontjának és végpontjának fogalmát. Az irányított szakasz mint rendezett pontpár valóban rendelkezik kezdőponttal (a rendezett pontpár első komponense) és végponttal (a rendezett pontpár második komponense), azaz az $M$ halmaz tetszőleges $P$ pontjára és $(A,B)$ rendezett pontpárjára az $(A,B)$ kezdőpontjának lenni illetve végpontjának lenni tulajdonság a $P \equiv A$ illetve $P \equiv B$ alapján értelmezhető. Az irányított szakasz kezdőpontjának és végpontjának fogalmát a vektorra átvinni azonban csak az egyenlőség formállogikai értelmezésének megsértése árán lehet. (E probléma analogonja a racionális számok–törtszámok viszonylatában úgy fogalmazódik meg, hogy a racionális szám számlálójáról illetve nevezőjéről nincs értelme beszélni, bár a törtszámok természetesen rendelkeznek számlálóval és nevezővel.)

Az egyenlőség e szokatlan alkalmazását több szerző is érzékelteti, *Hajós (1960)* az *„azonosnak tekintünk és egyenlőnek mondunk”* kifejezéssel él, míg *Reimann (1971. 10.o)* explicit formában is kifejti:

> *„…az egyenlőség fogalmát a matematikában itt szokatlan módon használjuk; egyenlőnek általában az azonos dolgokat szokták nevezni; két vektort egyenlőnek mondunk, ha azok szemmel láthatóan „különbözők”. … a szokottabb utat követnénk, ha vektornak … az 1-3. tulajdonságú irányított szakaszok összességét, halmazát neveznénk, az egyes irányított szakaszok csupán képviselői, reprezentánsai a vektornak. Ennek az útnak a bejárása azonban több elvi nehézséget tartalmaz,…”.*

A *„szokottabb út”* kifejezés itt arra utal, hogy a rendezett pontpárok halmazán az egyenlőséget mint ekvivalencia relációt adjuk meg, ami a rendezett pontpárokat diszjunkt részhalmazokba, ekvivalenciaosztályokba sorolja. Az így kapott ekvivalenciaosztályok a vektorok. Ebben az értelmezésben a két vektor egyenlősége egybeesik a két részhalmaz azonosságának fogalmával. Az egyes irányított szakaszok pedig csak reprezentánsai egy-egy vektornak, ami jól mutatja, hogy egy irányított szakasz kezdő- illetve végpontja nem osztályjellemző. E felfogásban az irányított szakaszokkal definiált vektorműveletek esetében szükséges a reprezentánstól való függetlenség igazolása.

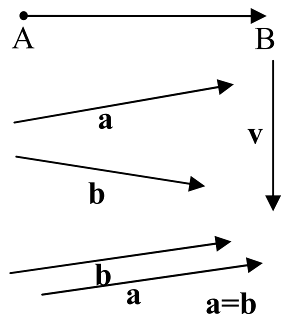
*Czapáry (1984. 128.o)* a vektor ekvivalenciaosztályként való bevezetése ellen a következő érveket hozza fel:

*„Eltekintve attól, hogy az így definiált vektort nem lehetne rajzzal szemléltetni („lerajzolni") az irányított szakasz és a vektor között különbséget kellene tenni. Ugyanis ebben az esetben az irányított szakasz mindig valamely vektornak (mint halmaznak) egyik eleme lenne. Az elem pedig nem azonos a halmazzal. Sok zavart okozna a tanuló fejében, ha irányított szakaszt rajzolna, amelyet nem tekintenénk vektornak, és közben mégis vektorról beszélne."*

A vektor geometriai értelmezéseiben az egyenlőség klasszikus fogalma ugyanúgy félreértések forrása, mint az ekvivalencia relációként történő használata. E problémakört leggyakrabban egy másodlagos (helyenként ki nem mondott) definícióval szokás áthidalni. Az esetek többségében a szerzők többnyire az eltolásokat használják eszközül. Ennek tipikus példája *Czapáry (1996, 307.o)* kettős definíciója:

*„Az irányított szakaszt vektornak nevezzük. ... Két vektor akkor és csak akkor egyenlő, ha a hosszuk és az irányuk megegyezik, vagyis ha egymásba eltolhatók."*

Tulajdonképpen *Czeglédy és társai (2002, 144-145.o)* 7. osztályosok számára készített tankönyve is egy kettős beágyazással él, csak nem az eltolást, hanem a 4.7. fejezetben részletesen kifejtett „névadási technológiát" alkalmazzák:

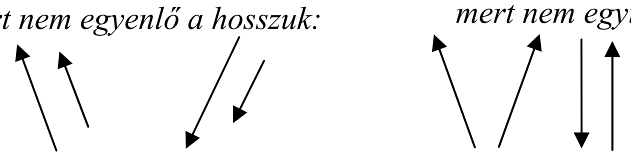



*„Az AB irányított szakaszt vektornak nevezzük. ... Nem szükséges a kezdő- és végpontot betűvel megjelölni. Például ez a három nyíl mindegyike egy-egy vektort jelez. Megkönnyíti az azonosítást, megnevezést, ha a nyíllal jelzett vektor mellé aláhúzott kisbetűt írunk (nyomtatásban ezt vastag betűvel jelöljük). Két vektort akkor tekintünk egyenlőnek, ha egyirányúak és a hosszúságuk is egyenlő."*

*Az azonosító tulajdonságok mellett a megkülönböztetésre is felhívják a figyelmet az alábbi ábrákkal:*

*"Ezek a vektorpárok nem egyenlők, mert nem egyenlő a hosszuk:*

*„Ezek a vektorpárok nem egyenlők, mert nem egyirányúak:*



*4.3. ábra Vektor definíciók és szemléltetések Czeglédy és társai nyomán*

A definíciókban alkalmazott gondolati kettősség sérti ugyan a matematika szabatossági követelményét, ui. nem redundanciamentes, de valódi didaktikai segítséget jelent a fogalom kettős beágyazódásának köszönhetően.

Elemzésünkben az absztrakt vektorfogalom kiépítésekor előnybe részesítjük azokat a vektormodelleket, amelyek a vektoregyenlőséget objektumazonosságként értelmezik.

### *4.5. A különböző vektorfogalmak téma-specifikus tulajdonságairól*

A különböző vektorfogalmak didaktikailag értékelhetők abból a szempontból is, hogy a különböző modellek milyen speciális megkötöttségeket illetve megvalósulásokat realizálnak az absztrakt vektorfogalomhoz. Ezek megállapítása az absztrakt vektorfogalom matematikai tulajdonságainak részletesebb vizsgálatán alapul.

Elemzésünkben a konkrét vektormodelleket a következő specifikus szempontokból értékeljük:

- a vektorműveletek egyszerű értelmezhetősége;
- a vektormodell dimenziója tetszőleges-e;
- a vektormodell koordinátafüggetlensége;
- a vektormodellben értelmezhető-e a vektor eltolhatósága;
- a vektormodellben a vektor eredendően rendelkezik-e hosszal.

#### *Vektorműveletek*

A vektorfogalom kialakulásának absztrakciós folyamata mind matematikatörténeti, mind szubjektív fejlődéstörténeti megközelítésben egyaránt úgy jellemezhető, hogy egy permanencia-elven alapuló általánosítás alapján bővül ki a fogalmi terjedelem, miközben a lényegi tulajdonságok (követelmények) köre leszűkül és egyben kiválasztódik, így születik meg az absztrakt vektor fogalma. Az egyes konkrét modellekben nem a rendezett pontpár kezdő- és végpontja, a hossz vagy az irány fogalma, hanem az összeadás és a számmal való szorzás művelete vezet el az általánosítás alapját képező közös tulajdonságok megleléséhez. Az absztrakt vektortér fogalmában a vektorműveletek váltak releváns attribútummá, így az absztrakt vektorok fő ismérve a velük végezhető műveletek!

A különböző geometriai vektormodellek definícióiban a vektorműveletek és tulajdonságaik explicite nem kapnak szerepet, pedig a vektortér axiomatikus definíciója éppen ezeket emeli ki a vektor lényegi tulajdonságaként. Az azonosság fejezetben már kifejtésre került, hogy a definiendum mint új elnevezés bevezetése és a szinkretizmus biztosítása lehetőséget ad arra, hogy a fogalmi hálóban az új fogalomképzet elnevezéséhez a műveletek közvetlenül asszociálódjanak. E fogalmi kötődés erősségét a szinkretizmus mellett a műveletek egyszerű értelmezhetősége és hasznosíthatósága is befolyásolja.

#### *Vektorok összeadása*

A vektorok összeadási művelete az algebrai értelmezésekben koordinátánként elvégzendő szám-összeadásként kerül definiálásra, ami egyben a *permanencia-elv* szinte magától értetődő érvényesítésülését vonja maga után. Ez minden koordinátán alapuló vektordefiníció esetében fennáll, így a műveleti tulajdonságok is könnyen beláthatók.

A vektorok mint *eltolások* értelmezésében a vektorösszeadás az eltolások kompozíciójával, a nullvektor a helybenhagyással, az ellentett vektor pedig az eltolás inverzével azonosul. Gondolati tartalmát tekintve e definíciók valójában egyszerű átnevezések. (A nomenklatúra-váltás maradandó beépüléséhez szükség van arra is, hogy problémamegoldási szituációkban eredményesen tudjuk alkalmazni.)

*Coxeter (1968. 219.o)* az *eltolás-vektor* átnevezést a következőképpen fogalmazza meg:

> *„... az eltolások multiplikatív írásmóddal kifejezett kommutatív csoportját tekintettük, ehelyett most a vektorok additív csoportjával foglalkozunk.*"

A *geometriai vektor* definíciói alapján a vektorösszeadást a reprezentáns irányított szakaszok paralelogramma-összegzésével, vagy az irányított szakaszok egymáshoz fűzésével (sokszög-módszer) értelmezzük. (A sokszögmódszer, a vektorok láncba fűzése persze a vektor eltolhatóságát is megköveteli!) E definíciók hátránya, hogy a reprezentánstól való függetlenséget igazolni kell, amihez hosszadalmas út vezet. (Kettős fogalmi beágyazással, a vektort eltolásként is értelmezve e feladat rövidíthető!)

Helyvektorok esetében az összeadás művelete a paralelogramma-szabály alapján definiálható, nullvektorként pedig az *(O;O)* irányított szakasz funkcionál. Az értelmezésben egy apró, de igen fontos momentumra érdemes felfigyelni: a helyvektor egy *O* ponthoz rögzített (kötött) irányított szakasz, ezért precíz megközelítésben gondot jelenthet az *O,A,B* kollineáris eset interpretálása, hiszen szó szerinti értelemben az *(O;B)* vektor *„nem tolható el"* az *(O;A)* vektor végpontjába, így a paralelogramma-szabály helyett a kollineáris esetben (l. 4.14. ábra) külön meg kell adni a két vektor összegének értelmezését.

### *Vektor szorzása skalárral*

A vektor skalárral való szorzata rendhagyó művelet, hiszen hagyományos értelemben a *permanencia-elven* alapuló számkör-bővítésekben a művelet kifejezés mindig egy $M \times M \to M$ típusú függvényt jelentett, azaz egy művelet az alaphalmaz két eleméhez, az operandusokhoz rendelt eredményként egy szintén alaphalmazbeli elemet. Műveleti tulajdonságként többnyire a kommutativitás, asszociativitás teljesülését, valamint az egység (null) elem illetve inverz elem létezését szokás követelményként megtartani.

A vektorokkal végzett műveletek egy része (pl. vektorok összeadása és vektoriális szorzata) a hagyományos értelemben is műveletnek minősül. A vektorműveletek egy másik része (pl. a skalárral való szorzás vagy a vektorok skaláris szorzata) magának a műveletnek a fogalmát is kibővíti, hiszen a skalárral való szorzás egy (skalár;vektor) rendezett párhoz rendel egy vektort, míg a skaláris szorzat egy (vektor;vektor) rendezett párhoz rendel egy számot.

*Hamilton* a komplex számok és a kvaterniók következetes permanencia-elven történő felépítése során vezette be a vektor fogalmát, de így a vektor még a hiperkomplex számok részeként (a szorzási művelettel együtt) kapott értelmezést, amitől *Grassmann* munkáira is támaszkodva *Gibbs* fosztotta meg a vektor algebrai fogalmát.

A vektor algebrai definícióiban (szám *n*-esek, blokkok, polinomok) a skalárral való szorzás könnyedén értelmezhető, hiszen ezek koordinátás alakban adják meg a vektort. A koordinátánként adott vektor esetében a skalárral való szorzást koordinátánként kell elvégezni, aminek alapján látható, hogy a skalárral való szorzás műveleti tulajdonságai követik a *permanencia-elv* alkalmazásaiban megszokott tulajdonságokat.

A vektor különböző geometriai értelmezéseiben a skalárral való szorzás műveletének értelmezésében döntő fontosságú, hogy normált térfogalommal vagy egy általánosabb affin fogalommal dolgozunk-e. A hosszfogalom ismeretében a skalárszoros könnyen értelmezhető úgy, hogy az eredményvektor az eredeti hosszt $\lambda$-szorosra nyújtja, a többi jellemzőjét (pl. irány és irányítottságot) pedig megtartja.

A vektorműveletek egyszerű értelmezhetősége megszűnik, ha a vektorok ekvivalenciaosztályok, és a műveletek definiálása a reprezentánsok segítségével történik, ui. a műveletek reprezentánstól való függetlenségét be kell látni.

*Dimenziófüggetlenség*

Az *absztrakt vektortér* fogalmi keretében definiálható a dimenzió fogalma, mint a lineárisan független generátorrendszer elemszáma. A közvetlen térszemléleten alapuló példák szükségszerűen legfeljebb 3-dimenziós teret eredményeznek, miközben egy absztrakt vektortér dimenziója tetszőleges lehet. Már *Grassmann* is kihangsúlyozta, hogy a vektorfogalmon keresztüli általánosítás során dimenziókorlát nem lép fel, tetszőleges dimenziójú tereket is lehet vizsgálni. Az egységes fogalomalkotás szempontjából előnyösnek tekintjük azokat a modelleket, melyekben dimenziókorlátozás nem lép fel, azaz ilyen értelemben dimenziófüggetlenek. Az algebrai modellek általában tetszőleges dimenziójúak lehetnek, míg a szemléletes geometriai modellek legfeljebb 3-dimenziósak.

*Koordinátafüggetlenség*

A konkrét vektorterek némelyikében természetes módon adott egy bázis. A kitüntetett bázis létezése miatt a vektorok és koordinátáik közvetlenül kötődnek egymáshoz. Az algebrai példákban (pl. *szám n-esek*) és más szakterületeken való alkalmazásokban is (különösen a közgazdasági területen) magától értetődően rendelkezésünkre áll a koordinátarendszer, ugyanakkor más modellekben (pl. az *eltolások* mint vektorok, és a *helyvektorok* esetében), illetve alkalmazásokban (például a *színvektor* esetében az alapszínek meghatározása) a bázis kiválasztása önkényes. Összesítve megállapítható, hogy az absztrakt vektorfogalomban nem lényegi tulajdonság a természetes bázis létezése, ezért egy modell esetében előnyös tulajdonságnak tekintjük, ha nincs természetes módon kitüntetett bázisa, azaz koordinátafüggetlen.

*A vektorok eltolhatósága*

Számos szakirodalmi feldolgozás vezeti be a *szabadvektor* és a *kötött vektor*, esetenként az *elcsúsztatható (részben szabad/kötött) vektor* fogalmát:

> *Obádovics* (1994. 521.o) közli: *„...szabadvektoroknak nevezzük, mert a térben önmagukkal párhuzamosan bárhova eltolhatók anélkül, hogy megváltoznának. A mechanikai,... és egyéb alkalmazásokban olyan vektorokat is használunk, amelyeknek a kezdőpontja a térben egy adott (fix)pont (ezeket kötött vagy helyvektoroknak nevezzük), vagy pedig saját irányegyenesük mentén mozgathatók (ún. csúsztatható vektorok)."*

> *Megyesi* és *Skrapits* (1974. 192.o) az alábbi meghatározásokat adják: *„A fizika vektormennyiségei hatásuktól függően háromfélék lehetnek. 1. Kötött vektorok, amelyet hatásának megváltoztatása nélkül nem tolhatunk el. 2. Részben szabadvektor, az ún. elcsúsztatható vektor, amelyet csak a vektort tartalmazó egyenes mentén tolhatunk el hatásának megváltoztatása nélkül. 3. Szabadvektor, amelynek hatása nem változik meg, ha eltoljuk. A geometria az elcsúsztatható vektor fogalmát nem vette át a fizikából,... A geometriában tehát csak szabad- és kötött vektorról beszélünk."*

E megállapítások nyomán két fontos tényt ki kell hangsúlyozni:

- az absztrakt vektor fogalmi tartalmában semmilyen *„vektor-eltolhatóság"* sem kap szerepet, sőt a vektor absztrakt szimbolikus reprezentációjában ilyen művelet közvetlenül nem is értelmezhető;
- a különböző, elsősorban fizikai alkalmazásokban, a fizikai vektormennyiségek körében játszik szerepet a *„vektorok eltolhatósági"* követelménye.

*Varsics* (1992. 6.o) rámutat arra, hogy a szerzők egy része a szabadvektor kifejezés alatt azt érti, hogy a *geometriai vektor* (egy ekvivalenciaosztály) bármely reprezentánsával (tetszőleges kezdőpontú irányított szakasszal) jellemezhető, majd a vektoregyenlőség pontos értelmezésének tükrében megállapítja:

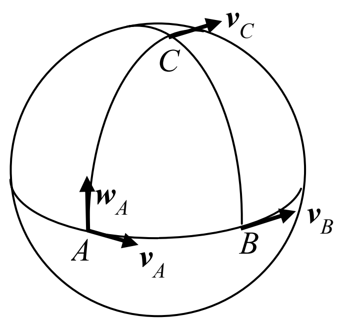
> *„A geometriai vektor esetén nincs mód a vektor elcsúsztatásáról beszélni, ... legfeljebb a reprezentáns elem kiemelésében van választási jog, de az irányított szakasz eltolásával a vektor változatlan marad."*

A matematikai vektorfogalom egyik legfontosabb funkcionális modellje a fizikai *vektormennyiség*. Ennek felhasználásához viszont szükséges, hogy a vektorfogalom kialakítása bizonyos értelemben elősegítse a vektor eltolhatóságát. Az előzőek alapján úgy tűnik, hogy a fizikai *vektormennyiségek „eltolhatósági követelményei"* látszólag három kategóriába sorolhatók be (szabad, kötött és csúsztatható vektorok), a pontosabb vizsgálatok azonban azt mutatják, hogy a fizikában alkalmazott vektormennyiségek leírására legelterjedtebben nem az *eltolható vektor*, hanem a *vektormező* matematikai fogalma alkalmazható. A *vektormező* szabatos definíciójában viszont a tér egyes pontjaihoz rögzített, *kötött vektorok*at kell megadni, azaz a tér minden pontjában rendelkezésre kell állnia egy ahhoz a ponthoz rögzített (kötött) vektortérnek. A vektorok különböző értelmezései közül csak a *helyvektorok* és a *tangensvektorok* rendelkeznek közvetlenül ezzel a tulajdonsággal.

A *vektormező* értelmezése és használata más megvilágításba helyezi a vektor eltolhatóságának kérdését, mint azt a *kötött, szabad, csúsztatható vektorfogalom* teszi. A *csúsztatható vektor* fogalmával élve például a csigán átvetett kötélről megállapítható, hogy „az erő hatásvonalát elgörbíti", míg a kötélben ébredő *vektormező* szemléltetésével plasztikus képet kaphatunk a kölcsönhatás továbbítódásáról, amiben a jelenség fizikai tartalma is hívebben tükröződik.

A *kötött, szabad, csúsztatható vektorfogalom* megkülönböztetése a fizikai alkalmazásokban valójában csak a merev testek mechanikájában érhető tetten, hiszen általános pontrendszer esetén az erők eredője legfeljebb egy fiktív pont, az ún. tömegközéppont mozgásáról adhat felvilágosítást. Igazából csak a merev testek mechanikájában kap szerepet a *csúsztatható vektor* fogalma, mert az erőpár forgatóhatásának értelmezéséhez az erővektor eltolhatóságát az erő hatásvonalára kell korlátozni. A többi fizikai alkalmazásban a *vektormező* szerepel matematikai modellként.

A *vektormező* fogalmának szerepeltetését a fizikai alkalmazások mellett az is indokolja, hogy ismeretében világosan elkülönül a tér és a mező fogalma. A gömbi geometriában például a vektorok eltolhatóságának tanulmányozása példát szolgáltathat a tér görbültségének értelmezéséhez anélkül, hogy a „térből" (a 4.4. ábra esetében a gömb felületéből) kilépnénk. A 4.4. ábrán látható módon az *ABC* háromszög mentén a $\boldsymbol{v}_A$ vektort „párhuzamosan eltolva" kapjuk a $\boldsymbol{w}_A$ vektort, amely az eltolások eredményeként az eredeti állásához képest elfordul.



*4.4. ábra Vektor párhuzamos eltolása a gömbön*

Egy tetszőleges *M* halmaz és $\boldsymbol{V}$ vektortér segítségével formálisan értelmezhető a vektormező fogalma a $\varphi:M\rightarrow M\times\boldsymbol{V}$, $a\rightarrow\varphi(a):=(a,\boldsymbol{v})$ definíció alapján, de az *M* halmaz geometriai tartalmához szükséges a *párhuzamos eltolás* valamilyen értelmezése, aminek segítségével az $(a,V)$ és $(b,V)$ lokális vektorterek közötti átjárás biztosított lesz. (Általánosságban a konnexióelmélet foglalkozik e problémakörrel.)

*Metrikafüggetlenség*

A vektornak általában nincs hossza, de a példák és alkalmazások egy jelentős részében természetes módon adódik, hogy a vektornak van nagysága. Mivel az absztrakt vektorfogalomnak nem lényegi tulajdonsága a norma létezése, ezért célszerű olyan példákat szerepeltetni, amelyekben a vektornak nincs hossza, így megakadályozható, hogy olyan gátak épüljenek be az ismerethálóba, amelyek az általánosítást nehezítik.

### *4.6. A vektordefiníciók tárgyalási kontextusa*

Az absztrakt vektorfogalmat megalapozó vektorfogalmak és ezek szakirodalmi értékelési szempontjai alapján elkészíthetünk egy *tárgyalási kontextus*t.

A 4.1a táblázatban a vizsgált vektorfogalmakat, a 4.1b táblázatban pedig a vizsgált szempontrendszerünket foglaltuk össze kódjaikkal feltüntetve.

| **Objektumok** | *kód* |
|---|---|
| *geometriai vektor* | ***1*** |
| *eltolások* | ***2*** |
| *helyvektor* | ***3*** |
| *rendezett szám-n-esek* | ***4*** |
| *polinomok* | ***5*** |
| *mátrixok* | ***6*** |

*4.1a táblázat*
*Vizsgált vektormodellek*

| **Attribútumok** | *kód* |
|---|---|
| *vektoregyenlőség azonosság alapján* | ***A*** |
| *vektorösszeadás közvetlen értelmezhetősége* | ***B*** |
| *skalárral szorzás közvetlen értelmezhetősége* | ***C*** |
| *dinmenziófüggetlenség* | ***D*** |
| *koordinátafüggetlenség* | ***E*** |
| *közvetlen szemléltethetőség* | ***F*** |
| *eltolhatóság* | ***G*** |
| *metrikafüggetlenség* | ***H*** |

*4.1b táblázat*
*A vektordefiníciók vizsgálati szempontjai*

Az egyes modellek és vizsgálati szempontjaink közti *tárgyalási kontextus*t rögzíti a 4.2. táblázat. (Ebben a kontextustáblázatban az egyes cellák kitöltésekor a geometriai értelmezések esetében a metrikus felfogás alapján állapítottuk meg a tulajdonságok teljesülését.)

| DEFINICIÓK-SZEMPONTOK *tárgyalási kontextus* metrikus esetben | | *= azonosság alapján* | *vektorösszeadás* | *skalárral szorzás* | *dinmenziófüggetlenség* | *koordinátafüggetlenség* | *szemléletesség* | *eltolhatóság* | *metrikafüggetlenség* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
| geometriai vektor | 1 | | | | | ✓ | | | |
| eltolások | 2 | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | |
| helyvektorok | 3 | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | |
| rendezett szám n-esek | 4 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| polinomok | 5 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| mátrixok | 6 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |

*4.2. táblázat A vektorfogalmak tárgyalási kontextusa metrikus esetben*

A *formális fogalomanalízis* elmélete szerint a *4*, *5* és *6* sorok egy sornak tekintendők, hiszen a *rendezett szám n-esek*, a *polinomok* és a *mátrixok* ugyanazon tulajdonságcsoporttal rendelkeznek, azaz egymástól megkülönböztethetetlen objektumok ebben a kontextusban. E megállapítás hasonlóan igaz az *A*, *B* és *C* tulajdonságokra, hiszen e kontextusban nincs olyan objektum, amely alapján ezen attribútumokat megkülönböztethetnénk egymástól. Ismeretelméleti szempontból az adott kontextusban megkülönböztethetetlen objektumokat illetve attribútumokat a *formális fogalomanalízis*ben azonosítanunk kell, azaz egy sorba illetve oszlopba kell tömörítenünk az egyforma objektumokat illetve attribútumokat. Ezt a lépést a kontextus megtisztításának nevezzük. A didaktikai vizsgálatokban azonban nem feltétlenül célszerű végrehajtanunk e megtisztítási műveletet, ui. az adott kontextusban egyforma objektumoknak lehetnek olyan látens tulajdonságai, illetve az attribútumoknak olyan látens értelmezései, amelyek a további vizsgálatokban jelentős szerepet kaphatnak. (A 4.8. fejezetben az affin általánosítás vizsgálatakor például a *C* és *H* attribútumok formállogikai szempontból is más értelmet nyernek!)

### *4.7. A vektordefiníciók fogalmi hierarchiája*

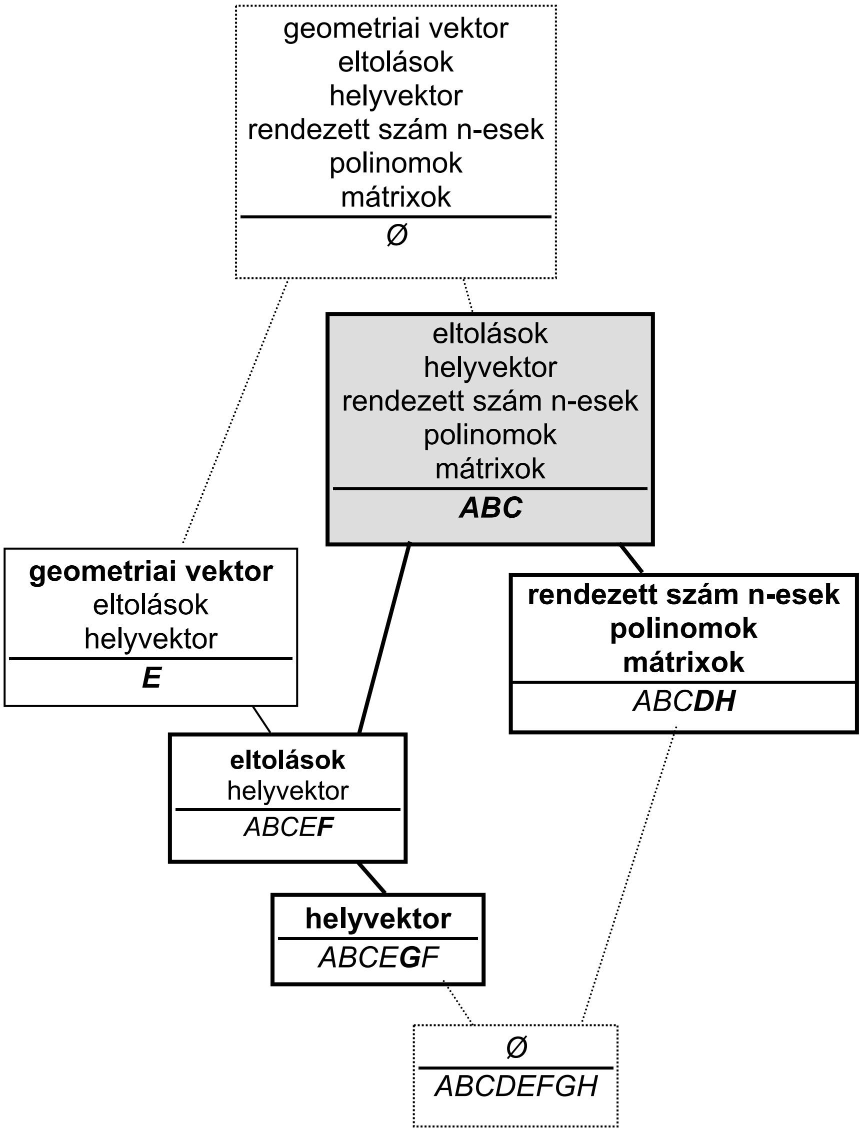
A *tárgyalási kontextus* előállítását követően *formális fogalomanalízis*sel megállapítható, hogy a 4.2 táblázat 7 klikket tartalmaz, melyeket a 4.3. táblázatban adtuk meg.

Modellünkben a *klikkek* felelnek meg a *potenciális fogalmak*nak, az egyes klikkek *extenzió*ja felel meg a *potenciális fogalom terjedelmének*, *intenziója* pedig a *fogalmi tartalmának*. Az ① és ⑦ klikk fogalmi tartalom illetve terjedelem hiányában nem válhat fogalommá, a többi klikk viszont határozott fogalmi tartalommal és terjedelemmel rendelkezik, azaz névadás útján fogalommá is válhatnak. A 4.3. táblázat utolsó oszlopában az egyes klikkeket jellemző tulajdonságokat tüntettük fel, ami alapját képezheti a névadásnak. Az absztrakt vektor releváns tulajdonsága a két művelet, azaz a *B* és *C* tulajdonság, ezért ebben a kontextusban az absztrakt vektor elnevezés a ② klikkhez illeszkedik.

| KLIKKEK | | |
|---|---|---|
| | *extenzió × Intenzió* | elnevezés |
| ① | *{1; 2; 3; 4; 5; 6} × Ø* | *Klikk fogalmi tartalom nélkül* |
| ② | *{2; 3; 4; 5; 6} × {**ABC**}* | *A releváns tulajdonságok klikkje, az absztrakt vektor* |
| ③ | *{**1**; 2; 3} × {**E**}* | *A koordináta-függetlenség klikkje* |
| ④ | *{**4; 5; 6**} × {ABC**DH**}* | *A dimenzió-függetlenség klikkje, algebrai megalapozás* |
| ⑤ | *{**2**; 3} × {ABCE**F**}* | *A szemléltethetőség klikkje, geometriai megalapozás* |
| ⑥ | *{**3**} × {ABCE**G**F}* | *Az eltolhatóság klikkje, a helyvektor* |
| ⑦ | *Ø × {ABCDEFGH}* | *Klikk fogalmi terjedelem nélkül* |

*4.3. táblázat: A vektordefiníciók klikkjei metrikus esetben*

A klikkek terjedelmének tartalmazása alapján elkészíthetjük e *tárgyalási kontextus Galois-gráf*ját, melyet a 4.5. ábra tüntet fel. A fogalmi hierarchia e szemléltetéséből különböző didaktikai konklúziókra juthatunk.




*4.5. ábra Az elemi vektorfogalmak Galois-gráfja*

A 4.3. ábra didaktikai olvasata a következő pontokba foglalható össze:

1. Az absztrakt vektorfogalom három univerzális jellemzője *A, B* és *C*, azaz
   – a vektoregyenlőség értelmezése objektumazonosságon alapuljon;
   – a vektorösszeadás értelmezése egyszerű legyen;
   – a skalárral való szorzás értelmezése egyszerű legyen.

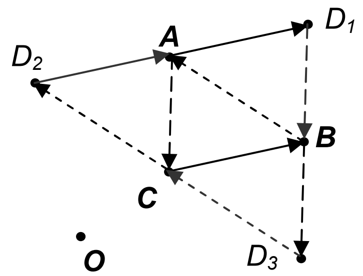
2. Az absztrakt vektorfogalom megalapozásában közvetlenül a ④ és ⑤ klikkek vesznek részt, azaz következetes fogalmi építkezés esetén mind a geometriai, mind az algebrai megalapozásra szükség van az absztrakt vektor fogalmának tartalmas kiépítéséhez.
3. A *geometriai vektor*nak nincs közvetlen szerepe az absztrakt vektorfogalom megalapozásában.
   - A releváns *A, B* és *C* szempontok hiánya jelzi, hogy itt nem a vektorfogalom irányába történik egy eredendően szemléletes fogalom továbbfejlesztése. (A 4.7. fejezetben igazoljuk, hogy ez a fogalomfejlesztés a klasszifikációs eljárás példájaként szolgálhat.)
4. Az algebrai megalapozások preferálják a *D* és *H* szempontokat, azaz olyan modellként szolgálnak, melyekben
   - a dimenziófüggetlenségük következtében „tetszőleges” dimenziójú vektorterekre mutatnak példákat;
   - a metrikafüggetlenségük következtében a vektoroknak nem lesz eredendően hosszuk.
5. A geometriai megalapozások az *E* és *F* szempontokat preferálják, azaz olyan modelleket szolgáltatnak, melyekben
   - a koordinátafüggetlenség miatt nincs kitüntetett bázis;
   - szemléletességük révén a kreativitásért felelős agyféltekében is lesz reprezentációjuk.
6. Az algebrai megalapozás hiánya esetén az absztrakt vektorfogalomhoz csatolódhat egy olyan vizuális képzet, mely szerint minden vektornak van hossza.
7. A geometriai megalapozás hiánya pedig a vektor olyan szimbolikus értelmezéséhez vezethet, melyben a vektor azonosulhat „természetes módon adott” koordinátáival.
8. A *G* szempontot egyedül a ⑥ klikk preferálja, azaz a vektor eltolhatósága csak a *helyvektor* következetes alkalmazásával biztosítható, ezért a fizikai vektormennyiségek esetében a tér adott pontjaihoz kötött (hely)vektorterek szolgálhatnak matematikai modellként.

Az *absztrakt vektor* fogalmi megalapozásakor mind az algebrai, mind a geometriai modellekben az aktuális vektorfogalmat kell felhasználni különböző feladatok megoldására. Az adott modell vektorfogalmával végzendő vektorműveleteknek kiemelt szerepet kell tulajdonítanunk, ui. így lehet megerősíteni a vektorfogalom és vele végezhető műveletek közti kapcsolatot.

A koordinátageometria különösen alkalmas terület e tevékenységre. A középiskolában szereplő síkbeli koordinátageometria feladatok következetesen tárgyalhatók ugyan a lineáris és másodfokú egyenletrendszerek alkalmazásaival is, mint arra *Simionescu (1977)* példát mutat, de a térbeli általánosítás szempontjából ez az eljárás zsákutca. Az alábbi klasszikusnak számító mintapélda jól mutatja a vektorfogalom hasznosíthatóságát a koordinátageometriában:

*Adott a síkban három pont a koordinátáival. Adja meg koordinátáival azon pontokat, amelyek e három pontot paralelogrammává egészítik ki!*

*E feladat megoldása különböző paralelogramma tulajdonságon alapulhat. A szemközti oldalak párhuzamosságát használva lineáris, a szemközti oldalak egyenlőségét használva másodfokú egyenletek írhatók fel, azaz egyenesek illetve körök metszéspontjaként oldható meg hagyományos módon e feladat, de a szemközti oldalak párhuzamosak és egyenlők tulajdonság alapján a vektorösszeadás műveletével a feladatmegoldás a végletekig leegyszerűsödik. (Megoldásként háromféle konfiguráció van!)*




$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}$$

*4.6. ábra*
*Egy megoldás vektorokkal*

Az algebrai és geometriai vektorfogalmak alkalmazásai vezetnek el a *Vigotszkij-féle pozicionális fogalmi szint*hez, azaz a vektorokkal végzendő műveletek beépülnek az ismerethálóba. Az *absztrakt vektor* fogalmának tartalmas kialakulása csak ezt követően jelenhet meg. A *pozicionális fogalmi szint* jellemzője, hogy bár a tanulók funkcionálisan már *absztrakt vektor*ként használják meglevő fogalomképzetüket, de a vektor fogalmának meghatározása még többnyire csak *komplexus szint*en mozog, azaz vektor lesz a *helyvektorok*, az *eltolások*, a *szám n-esek*, a *polinomok*, a *táblázatok* ... halmaza, amit a *② klikk* modellje explicite is kifejez.

A hierarchikus modellünk által követett fogalmi építkezés elemzése itt lezáródik, azaz nem alkalmas annak vizsgálatára, hogy az absztrakt vektorfogalom e *pozicionális szint*jétől milyen út vezethet az *absztrakt vektorfogalom* axiomatikus definiálásáig.

A felvett *tárgyalási kontextus* (4.2. táblázat) érvényességi és hatóköre e *pozicionális fogalmi szint*ig terjed, ami egyrészt nem fedi le a vektorokkal kapcsolatos középiskolai tananyagot teljesen, másrészt nem tartalmazhat és nem is tartalmaz útmutatást az absztrakt fogalomhoz vezető további útról. Mielőtt e két kérdéskör vizsgálatára térnénk rá, előtte részletesebben elemezzük azon 3. megállapításunkat, miszerint a *geometriai vektor* fogalma nem az *absztrakt vektor* fogalmának megalapozását, hanem a klasszifikációs eljárás gyakorlását szolgálja. Ennek elemzését az indokolja, hogy a magyar közoktatásban a vektorfogalom kialakítása hangsúlyozottan a *geometriai vektor* fogalmára épül.

### *4.8. A geometriai vektor fogalmáról*

A *geometria vektor*ról az elkészített *Galois-gráf* alapján azt állapítottuk meg, hogy nem az absztrakt vektorfogalom kiépítését segíti elő. E konklúzióra jutott *Varsics (1992)* is, aki a fogalmi építkezés harmadik lehetőségeként a vektor geometriai értelmezéseként a *helyvektor* fogalmát előtérbe helyezve javasolja, hogy a *geometriai vektor* fogalmát ki kell hagyni a tananyagból:

*„Tekintettel a geometriai vektor fizikai alkalmazhatóságának nehézségére és e fogalom bonyolultságára, ami nem segíti elő az absztrakt vektorfogalom kiépítését, a geometriai vektorfogalmat célszerűbb kihagyni a középiskolai oktatásból."*

A gyakorlatban ugyanakkor a *geometriai vektor* fogalma szerepel a tananyagban, ami speciális módon segítheti a klasszifikációs eljárás elsajátítását, ezért fogalmi kialakítási lehetőségeit részletesebben is áttekintjük.

A *geometriai vektor* és az irányított szakasz fogalmi megkülönböztetésében az irányított szakaszok között értelmezett egyenlőség játszik döntő szerepet, ami a vektorfogalom meghatározásának szerves része! Az irányított szakasz fogalmától a *geometriai vektor* fogalmához általánosan az irányított szakaszok között értelmezett egyenlőségek révén juthatunk el. Az egyenlőség fogalmának kétféle, logikailag egyaránt helyes alkalmazása él egymás mellett:

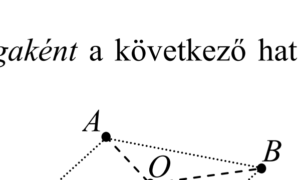
- egy attribútummal definiáljuk az egyenlőnek tekintett objektumokat, ami természetesen összhangban van az egyenlőség logikai értelmezésével;
- ekvivalenciarelációként értelmezzük, és az osztályba sorolást követően az ekvivalenciaosztályok azonosságaként értelmezzük az egyenlőséget.

A *geometriai vektor* matematikai modellje a rendezett pontpárok ($M\times M$) halmazából indul ki, és a rendezett pontpárok között egy adott tulajdonságcsoporttal értelmez egy ekvivalencia relációt (=), amely a rendezett pontpárokat osztályokba sorolja ($M\times M/=$). Az így keletkező osztályok a *geometriai vektorok*. Az $(A,B)=(C,D)$ ekvivalencia relációt meghatározó tulajdonság pedig az *ABCD* négyszög alkalmas *paralelogramma-tulajdonsága*, melynek különböző megfogalmazásaival a *geometriai vektorfogalom* ekvivalens definícióihoz juthatunk.

A *paralelogramma-tulajdonság* különböző megfogalmazásai több olyan vektoregyenlőség definíciót is lehetővé tesznek, amelyek a rendezett pontpárok ugyanazon osztályba sorolását eredményezik. Az ilyen értelemben ekvivalens definíciók a matematikai általánosítás és didaktikai feldolgozásuk szempontjából azonban nem egyenértékűek.

*Pelle (1974. 84.o)* a négyszögek *paralelogramma-tulajdonságaként* a következő hat alapesetet sorolja fel:

*„P1. Két-két szemközti oldala párhuzamos.*
*P2. Két-két szemközti oldala egyenlő.*
*P3. Két-két szemközti szöge egyenlő.*
*P4. Két szemben fekvő oldala egyenlő és párhuzamos.*
*P5. Két átlója felezi egymást.*
*P6. Centrálszimmetrikus."*



4.7. ábra
Paralelogramma
és tulajdonságai

A *paralelogramma-tulajdonság* az eltolás fogalmára is építhető, így a vektor-egyenlőségi definíciók vagy a Pelle-féle P1-P6 tulajdonságok, vagy a *paralelogramma-tulajdonság* eltolások segítségével történő megfogalmazásra épülhetnek. A *geometriai vektor* értelmezésére a 4.1. összefoglaló táblázatban szerepelő nyolc alaplehetőség kínálkozik. E különböző definíciós lehetőségek közötti választáshoz az egyes definíciókat célszerű mind matematikai, mind didaktikai szempontból elemezni. (Az egyes definíciós lehetőségek tömör jellemzésében elsősorban az esetenként szükségessé váló disszkussziókra, valamint az affin általánosíthatóságra térünk ki.)

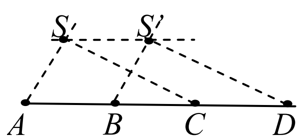
| **A vektoregyenlőség definíciós lehetőségei:** | | |
|---|---|---|
| *Paralelogramma tulajdonság alapján* | | |
| ① | | Két-két szemközti oldala párhuzamos. (P1) |
| ② | | Két-két szemközti oldala egyenlő. (P2) és *AC≤max(AD,BC)* |
| ③ | | Két-két szemközti szöge egyenlő. (P3) |
| ④ | *(A,B)=(C,D)* :⇔ | Két szemközti oldala egyenlő és párhuzamos. (P4) |
| ⑤ | | Átlói felezik egymást. (P5) |
| ⑥ | | Középpontosan szimmetrikus. (P6) |
| *Eltolás invariancia alapján* | | |
| ⑦ | *(A,B)=(C,D)* :⇔ | Az *(A,B)* és *(C,D)* pontpár eltolással fedésbe hozható. |
| ⑧ | | Az *(A,B)* és *(C,D)* pontpár ugyanazt az eltolást határozza meg. |

*4.1. táblázat A vektoregyenlőség definíciós lehetőségei*

① *definíció:* $(A;B)=(C;D)$, *ha* $AB \,//\, CD$ *és* $AC \,//\, BD$.

Ebben a definiensben csak a párhuzamosság fogalma kap szerepet, ami kizárólag az illeszkedési reláción alapul, így a geometriai vektor fogalmát a legáltalánosabb módon, affin fogalomként határozza meg.

E definíció értékét azonban jelentősen csökkenti, hogy az *ABCD* kollineáris pontnégyes esetét, mint elfajult esetet külön kell tárgyalni. (Ennek igazolása a síkba kilépve egy segédvektoron keresztül valósítható meg, azaz a kollineáris esetre vonatkozó megkülönböztetés során fel kell venni az egyenesen kívül egy *S* segédpontot. Az *S* segédpont kiválasztásától való függetlenség az ideális pontra és egyenesre vonatkozó *Desargues*-tételen alapul.)



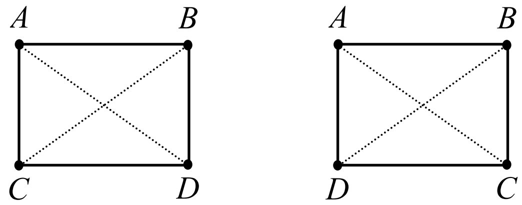
*4.8. ábra Segédpontok és a speciális Desargues-tétel*

E relációról könnyen igazolható, hogy ekvivalencia, ui. lehet építeni a párhuzamossági reláció ekvivalencia tulajdonságára, és könnyen belátható, hogy két ekvivalencia metszete is ekvivalencia. Erre a definícióra építette a vektorfogalmat *Molnár Emil (1972)* és több tankönyv is az NDK-ban.

② *definíció:* $(A;B)=(C;D)$*, ha* $\overline{AB}=\overline{CD}$ *és* $\overline{AC}=\overline{BD}$ *és* $\overline{AC}\le \max(\overline{AD};\overline{BC})$.

Az iskolai tananyagban az egyik legelső paralelogramma-tulajdonság a szemközti oldalak egyenlősége, így kézenfekvőnek tűnhet az oldalhosszakra vonatkozó tulajdonságot használni, ami épít a szakaszhossz fogalmára, ezért euklideszi fogalmat és normált teret eredményez, azaz a vektornak eredendően lesz hossza.

E definícióban szerepeltetni kell: az *AC≤max*(*AD,BC)* feltételt ahhoz, hogy a vektornak legyen irányítottsága, orientációja, különben bármely *ABCD* téglalapra az (*A;B)*=(*C;D)* és az *(A;B)*=(*D;C)* egyidejűleg teljesülne!

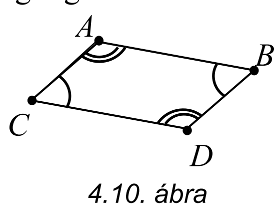



*4.9. ábra Az AC≤max(AD,BC) feltétel szükségessége*

E reláció ekvivalencia tulajdonságainak belátása részben a szemközti oldalegyenlőségre alkalmazott szakaszhosszak egyenlőségének metszetreláción alapul, de még az *AC≤max*(*AD,BC)* feltétel tranzitív tulajdonságát is igazolni kell. Az *AC≤max*(*AD,BC)* feltétel szerepeltetésének szükségessége miatt e definíciós lehetőség a szakirodalomban helyet sem kapott.

③ *definíció:* $(A;B)=(C;D)$*, ha* $CAB\angle = BDC\angle$ *és* $ABD\angle = ACD\angle$.

A szög mértékére alapozott definícióval a *Klein*-féle *Erlangeni program* szellemében egy hasonlósági geometriai fogalomalkotást kaphatunk, ui. a szög legbővebben a hasonlósági csoporttal szemben invariáns fogalom. (Csak a váltószögek egyenlőségi fogalmára építve lehetőség van affin fogalomalkotásra is.) E definíció értékét jelentősen csökkenti, hogy az *ABCD* kollineáris pontnégyest elfajult esetként külön kell tárgyalni, ezért a szakirodalom mellőzi e nehézkes tárgyalási módot. A reláció ekvivalencia tulajdonsága a szögmértékek egyenlősége alapján könnyen belátható.




*4.10. ábra Szög-ekvivalencia*

④ *definíció:* $(A;B)=(C;D)$*, ha* $\overline{AB}=\overline{CD}$*,* $AB\,//\,CD$ *és irányításuk megegyezik.*

A *geometriai vektor* fogalmának ez a legelterjedtebb meghatározása, ami a szokásos vektorábrázolással is összhangban van. *Baziljev és társai (1987)* az irány, az állás és a nagyság fogalmára alapozva ezt a felépítést követik. *Megyesi és Skrapits*

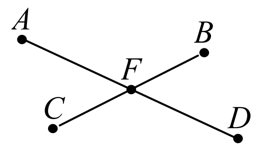
*(1974. 184.o)* az alábbi meghatározást közlik: *„Vektornak nevezzük az egymással párhuzamos, megegyező irányú és egyenlő hosszúságú szakaszok összességét."* Mivel a geometriai vektor ezen értelmezése tartalmazza a szakasz hosszát, ezért euklideszi fogalmat és normált teret eredményez, azaz a vektornak eredendően lesz hossza.

E reláció ekvivalencia tulajdonsága szinte magától értetődik, hiszen az „irányegyenlőség" és a „hosszegyenlőség" metszete, mint bármely két egyenlőség metszete mindig egyenlőség, ami általánosan is könnyen igazolható.

| ⑤ *definíció:* $(A;B)=(C;D)$, *ha* $\overline{AF}=\overline{FD}$ *és* $\overline{BF}=\overline{FC}$, *ahol* $F=AD\cap BC$. |
|---|

A rendezett pontpárok ekvipolenciája a paralelogrammaátlók felezési pontjainak egybeesésén alapul.

*Odvarko és társai (1971)* a geometriai vektor értelmezéseként a következő definíciót közlik: *„Az adott pontpárral ekvipolens pontpárok halmazát vektornak nevezzük."* *A* felezőpont fogalma épülhet a norma fogalmára, de a szakaszfelezőpont szimmetriapontként, illetve osztóviszonnyal is meghatározható affin fogalom, így e felépítés affin vektorfogalomhoz is vezethet.

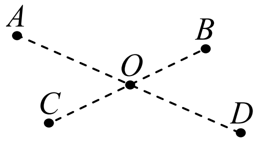


*4.11. ábra A vektor ekvipolens pontpárok*

Az ekvipolencia reláció ekvivalencia tulajdonságai könnyen igazolhatók az euklideszi geometriában, de a nem-metrikus általánosítása jelentős előkészítést igényel.

| ⑥ *definíció:* $(A;B)=(C;D)$, *ha* $\exists \mathrm{O}$ *középpontos tükrözés, melyre* $\mathrm{O}(A)=D$ *és* $\mathrm{O}(B)=C$. |
|---|

A tanulási folyamatban a *paralelogramma-tulajdonság* egyik központi kritériuma a paralelogramma középpontos szimmetriája. Az *(A;B)* és *(C;D)* irányított szakaszok ekvivalenciája tehát alapulhat azon, hogy középpontos tükrözéssel fedésbe hozhatók. A *geometriai vektor* tartalmi meghatározása erre a lényegi tulajdonságra is épülhetne, de a szakirodalom nem alkalmazza ezt a lehetőséget, ui. bár e reláció ekvivalencia, de ennek belátása nem illeszkedik a transzformációk csoportelméleti megközelítéséhez. (A tükrözések involutív tulajdonsága e reláció szimmetriáját ugyan triviálissá teszi, de a tranzitivitás már nem tárgyalható konzisztens módon, hiszen két középpontos tükrözés eredője (kompozíciója) nem középpontos tükrözés, hanem eltolás.)



*4.11. ábra A vektor mint szimmetriainvariancia*

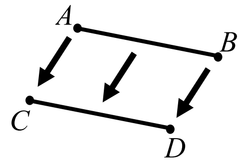
A *geometriai vektor* fogalma transzformáció-szemléleti megközelítésben az affin transzformáció-csoport eltolások részcsoportjához illeszkedik. A ⑦ és ⑧ definíció ezt használja releváns tulajdonságként. A formai hasonlóság ellenére a két felhasználási mód között azonban jelentős eltérés van. Mindkét módszer igen elterjedten használatos különböző fogalmak meghatározásában, ezért részletesebben is kitérünk jellemzésükre, elemi matematikai modellezésükre.

$$\boxed{⑦\ \textit{definíció: } (A;B)=(C;D),\ \textit{ha } \exists\vec{E} \textit{ eltolás, hogy } \vec{\mathrm{E}}(A)=C \textit{ és } \vec{\mathrm{E}}(B)=D.}$$

E definíciós lehetőséget is gyakran használja a szakirodalom:

*A Matematikai kislexikon szerint: „Az egyenlő vektorok térbeli eltolással fedésbe hozhatók."*

*Lukács & Rábai (1974*) a vektoregyenlőségre a következőket közli: *„E meghatározás alapján a vektorokat önmagukkal párhuzamosan bármely irányba eltolhatjuk, így az eredetivel egyenlő vektort kapunk".*



*4.12. ábra Vektor és eltolás-ekvivalencia*

*Szendrei (1975)* a sík (tér) irányított szakaszain, a rendezett pontpárok S halmazán értelmez egy τ ekvivalencia relációt, amely szerint az *(O;A)* rendezett pontpár relációban áll *(O';A')* rendezett pontpárral, ha az *(O;A)* rendezett pontpár párhuzamosan eltolható az *(O';A')* rendezett pontpárba. Ezt követően a következő definíciót adja meg: *„A sík (tér) irányított szakaszainak S halmazában értelmezett τ ekvivalenciarelációhoz tartozó ekvivalenciaosztályokat vektoroknak nevezzük."*

E reláció tartalmi meghatározása tulajdonképpen az ⑦ definíció transzformáció szemléletű átfogalmazásának is tekinthető, hiszen a köztük levő különbség ugyanazon *paralelogramma-tulajdonság* elemi geometriai és transzformáció szemléletű interpretációjában jelölhető meg.

E reláció ekvivalencia tulajdonságainak igazolása természetes módon építhető arra, hogy az eltolások a kompozíció műveletére csoportot alkotnak:

- *reflexivitás:* az *(A,B)=(A,B)* belátása az eltolás-csoport neutrális elemének (a helybenhagyás, az identikus leképezés) létezésén alapul,
- *szimmetria:* az *(A,B)=(C,D)*$\Rightarrow$ *(C,D)=(A,B)* igazolása az inverz elem létezésére, azaz az eltolás inverze is eltolás tulajdonságra vezethető vissza,
- *tranzitivitás:* az *(A,B)=(C,D) és (C,D)=(E,F)*$\Rightarrow$ *(A,B)=(E,F)* bizonyításához felhasználható, hogy az eltolások halmaza zárt a kompozíció műveletére nézve, azaz az eltolások egymás utáni alkalmazása is eltolás.

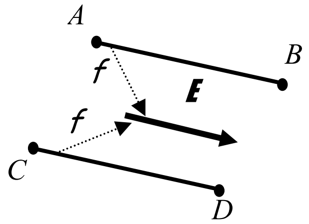
Ezen *eltolás-invarianciára* épülő definíció tehát a transzformáció szemléletet az *Erlangeni program* szellemében alkalmazza a rendezett pontpárok, mint alakzatok osztályozására az invarianciakutatás szellemében.

$$\boxed{⑧\ \textit{definíció: } \exists\vec{\mathrm{E}} \textit{ eltolás, hogy } \vec{\mathrm{E}}(A)=B \textit{ és } \vec{\mathrm{E}}(C)=D.}$$

Az eltolás fogalmára építve egy másik értelmezési lehetőség is kínálkozik a geometriai vektor definiálására. Ekvivalensnek tekintjük azon rendezett pontpárokat, amelyek ugyanazt az eltolást határozzák meg. Ezt a lehetőséget is alkalmazza a szakirodalom:

*Reimann (1999) a következő vektordefiníciót közli: „Az irányított szakaszokat vektornak nevezzük, és mindjárt megállapodunk abban, hogy az ugyanazt az eltolást előállító irányított szakaszokat egyenlő (azonos) vektoroknak mondjuk”.*

Ez a definíció az eltolás fogalmára építve formailag igen közel áll a ⑦ definícióhoz, de e fogalomalkotás tartalmát tekintve jelentősen eltér tőle. A két definíció tartalmi különbségét igen jól tükrözi az ekvivalencia tulajdonságok igazolása, ami a ⑦ definíció relációja esetében az eltolások csoporttulajdonságán alapul, itt viszont az a tulajdonság kerül kihasználásra, hogy *„egy tetszőleges (A,B) irányított szakaszhoz egy és csak egy olyan eltolás létezik, amelyik az A pontot a B pontba viszi át”*.




*4.13. ábra A vektor és az eltolás invariancia*

Ez utóbbi definícióban felhasználunk egy *f* függvényt, ami az *(A,B)* rendezett pontpárokhoz az általuk meghatározott eltolást rendeli. Ezen egyértelmű hozzárendelés alapján a pontpárok közti reláció ekvivalencia tulajdonsága könnyen belátható a következő módon:

– *reflexivitás:* az *(A,B)=(A,B)* belátásakor azt használjuk fel, hogy *az f hozzárendelés értelmezési tartománya az M×M halmaz*, azaz minden *(A,B)* rendezett pontpárhoz van olyan eltolás, amely az *A* pontot a *B* pontba viszi át,

– *szimmetria:* az *(A,B)=(C,D)⇒ (C,D)=(A,B)* igazolása szinte zavaróan triviális, hiszen csak a *logikai és művelet kommutativitását* kell használni, ui. a kiindulási feltétel szerint van olyan ***E*** eltolás, amely *A*-t *B*-be és *C*-t *D*-be viszi, akkor az ***E*** eltolás a *C*-t *D*-be *és A*-t *B*-be viszi.

– *tranzitivitás:* az *(A,B)=(C,D) és (C,D)=(E,F)⇒ (A,B)=(E,F)* belátása *a hozzárendelés egyértelműségén* alapul. Az egyértelműség miatt a kiindulási feltételek szerint az *(A,B)* és *(C,D)* meghatároz egy $\boldsymbol{E_1}$ eltolást, *(C,D)* és *(E,F)* meghatároz egy $\boldsymbol{E_2}$ eltolást, de a *(C,D)* által meghatározott két eltolás ($\boldsymbol{E_1}$ és $\boldsymbol{E_2}$) az egyértelmű hozzárendelés miatt triviálisan ugyanaz.

E reláció tulajdonságainak igazolásakor az értelmezett *f* függvény két alaptulajdonságát használtuk fel:

– a reflexivitás igazolásához az szükséges, hogy az *f* függvény értelmezési tartománya a teljes *M×M* halmaz legyen;

– a tranzitivitást pedig a hozzárendelés egyértelműsége biztosítja.

Az egyértelmű hozzárendelés interpretálható úgy is, hogy tulajdonképpen „nevesítjük” az egyes rendezett pontpárokat, és egyenlőnek tekintjük az azonos névvel ellátottakat. „Névként” itt az egyes eltolások szerepelnek, ami egyben jelzi, hogy maguk az eltolások is tekinthetők a vektor egy geometriai értelmezéseként.

Az előzőek alapján a *geometriai vektor* két utóbbi definíciójában szereplő egyenlőségek értelmezési különbsége abban jelölhető meg, hogy a felhasznált lényegi tulajdonság a transzformáció csoport illetve e „névadó” függvény fogalmára épül. (E különbségnek jelentős hatása van a vektorösszeadás műveletének értelmezésére is.)

A *geometriai vektor* értelmezési lehetőségei közül az ①, ④, ⑤, ⑦ és ⑧ rendelkezik kidolgozott gyakorlati alkalmazásokkal, problémát jelent a kollineáris eset elkülönült tárgyalása az ①, ③ és ⑤ definíciók esetében, a reláció tranzivitásának belátása pedig kevéssé magától értetődő a ② és ⑥ definíciók esetében. A magyar tanítási gyakorlat a ④, ⑦ és ⑧ definíciókat preferálja, ugyanakkor az affin általánosításkor a vektor ④ definícióját általában az ① definícióval helyettesítik.

### *4.9. A vektorfogalom affin általánosítása*

Az *Erlangeni program* értelmében a vektorfogalom affin fogalom. Sem az absztrakt, sem az affin vektornak nincs hossza. Ebben az értelemben az absztrakt vektor fogalmához közelebb áll az affin vektorfogalom mint az euklideszi. A vektornak legáltalánosabban az ún. normált terekben van hossza. Az a különbség a vektortér és a normált tér között, hogy a vektortéren értelmezve van egy $\| \ \| : V \to R; x \mapsto \|x\|$ normának nevezett függvény is, amely a következő három tulajdonsággal rendelkezik:

*1. pozitív definit, azaz (*$\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*);*

*2. homogén, (azaz a skalárszorosra* $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$*),*

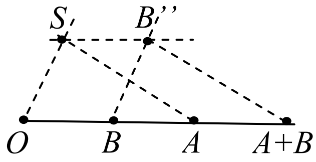
*3. háromszög-egyenlőtlenség, (azaz bármely x, y vektorra* $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$*)*

A szakaszhossz fogalmát is tartalmazó definíciók *normált teret* (végtelen dimenzió esetén *Banach-teret*) eredményeznek. A metrikafüggetlenség az algebrai modellekben egyszerűen teljesíthető volt, ugyanakkor a geometriai modellekben többnyire (a számmal való szorzás egyszerű értelmezhetősége miatt) felhasználtuk a szakaszhossz fogalmát.

Lehetőség van a vektorfogalom affin értelmezésére is, ekkor azonban a skalárral való szorzás értelmezése meglehetősen nehézkessé válik. A skalárral való szorzás értelemzése valós affin terek esetében például az osztóviszony fogalmának felhasználásával történhet. (Első lépésben az ún. diadikus számokra értelmezhető a szorzás művelete, majd a folytonosság felhasználásával a többi valós számra is kiterjeszthető a skalárral való szorzás. Erre a módszerre mutat példát *Strohmayer (1965)* felépítése.)

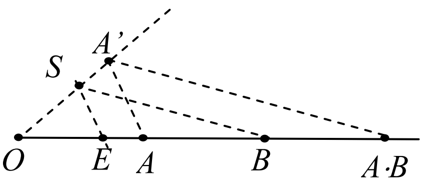
A legáltalánosabb affin értelmezés csak az illeszkedési axiómákra alapozza a skalárral való szorzás értelmezését, de ekkor az incidenciarelációra épített absztrakt affin tér axiómái alapján kell magát a számtestet is felépíteni. E felépítések eredményeként az affin geometria egyenesei számegyenessé válnak. A számtest értelmezéséhez az összeadás és szorzás műveletét kell értelmeznünk a számegyenes pontjai között, és igazolnunk kell, hogy a bevezetett műveletek rendelkeznek a testaxiómákban rögzített, általunk megszokott műveleti tulajdonságokkal.

– Egy egyenesen egy *O* pontot kitüntetve értelemezhető az *A* és *B* pont összege. (Az *OA* szakasz az *SB'* szakasz segítségével az *OA* szakaszhoz fűzhető a 4.14. ábra alapján!) E műveletről megmutatható, hogy az *S* segédpont megválasztásától független, kommutatív és asszociatív, az *O* pont nullelemként viselkedik, valamint minden pontnak van ellentettje.




*4.14. ábra Az egyenes pontjainak összeadása*

– Egy egyenesen az *O* ponttól különböző *E* pont kitüntetésével értelmezhető a pontok közti szorzás művelete is. A 4.15. ábra mutatja, hogy a szorzás értelmezése lényegében a párhuzamos szelők tétele alapján történik. Természetesen itt is igazolható, hogy e művelet az *S* segédpont választásától független, valamint a szokásos műveleti tulajdonságok is teljesülnek.




*4.15. ábra Az egyenes pontjainak szorzása*

A műveleti tulajdonságok igazolása a pontra és egyenesre perspektív háromszögek dualitásáról szóló *Desargues*-tételen alapul, ami a kettőnél magasabb dimenziós affin terekben automatikusan teljesül. (A 2-nél többdimenziós esetben az illeszkedési axiómából a *Desargues*-tétel levezethető, de a síkbeli perspektivitás duális tulajdonságának igazolásához ki kell lépni a térbe, ahol konstruálható olyan háromszög, amelynek segítségével bizonyítható a tétel.) Síkgeometriára szorítkozva azonban a *Desargues*-tételt axióma rangjára kell emelni, ui. vannak olyan, az illeszkedési axiómákat kielégítő síkmodellek, melyekben a *Desargues*-tétel nem teljesül. (A nem-desarguesi síkokon az egyenesek pontjai nem is alkotnak a fentebbi műveletekkel testet!)

Az algebrai test fogalma tehát geometriai megalapozást is kaphat. A számegyenes pontjaira épített algebrai közvetlen példákat szolgáltat véges testekre is. (Véges desarguesi síkokon a vektor skalárral való szorzásában a skalár egy véges test eleme lesz.) Ez egyben arra is ráirányítja a figyelmet, hogy a vektorfogalom különböző algebrai testekre is felépíthető. Ennek megfelelően beszélhetünk a racionális, a valós és a komplex számtest, sőt véges testekre épülő vektorterekről is. E témakör szakköri feldolgozását vizsgálja *Fatalin (1980).*

Az affin fogalomalkotás matematikai szempontból általánosabb ugyan, de didaktikai szempontból kétségtelenül csak az euklideszi metrikára, a hosszfogalomra építő geometriai vektorfogalmak esetében értelmezhető egyszerűen a skalárral való szorzás művelete. A vektor geometriai felépítésében az affin általánosításra való áttérés lényegesen megváltoztatja az egyes felépítésekhez tartozó szempontjaink kiértékelését. E változás fő ismérve a következő: az affin általánosítás nyomán a geometriai vektorfogalmak metrikafüggetlenné válnak, aminek az az ára, hogy a skalárral való szorzás értelmezése bonyolultabbá válik. Az affin esetre vonatkozóan a 4.5. táblázat tartalmazza a *tárgyalási kontextus*t.

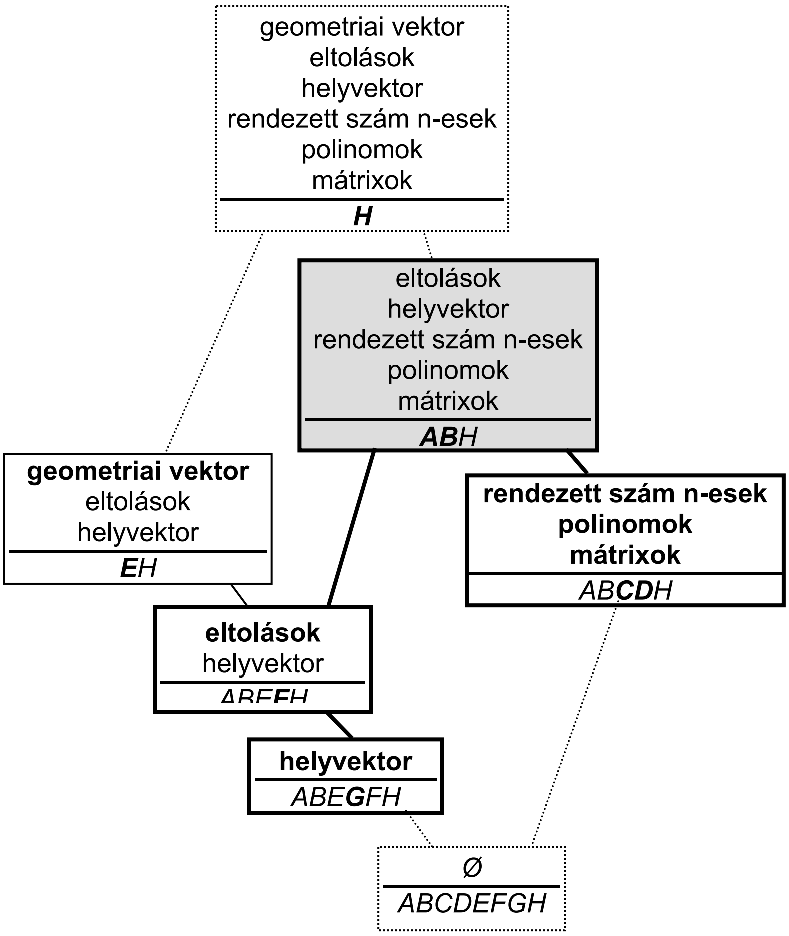
| DEFINICIÓK-SZEMPONTOK<br>*tárgyalási kontextus*<br>affin esetben | | *= azonosság alapján* | *Vektorösszeadás* | *skalárral szorzás* | *dinmenziófüggetlenség* | *koordinátafüggetlenség* | *Szemléletesség* | *eltolhatóság* | *metrikafüggetlenség* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
| geometriai vektor | 1 | | | | | ✓ | | | ✓ |
| eltolások | 2 | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| helyvektorok | 3 | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | ✓ |
| rendezett szám n-esek | 4 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| polinomok | 5 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |
| mátrixok | 6 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ |

*4.5. táblázat A vektorfogalmak affin tárgyalási kontextusa*

A 4.5. kontextusra alkalmazva a *formális fogalomanalízis*t a 4.6. táblázatban szereplő klikkeket kapjuk. E klikkek *Galois-gráf*ját (4.16. ábra) elkészítve megállapíthatjuk, hogy az affin általánosítás eredményeként nem változik meg a *Galois-gráf* alapszerkezete. Didaktikailag ez előnyös, hiszen a meglevő ismereteket nem kell gyökeresen átrendeznünk, ui. az újabb ismeretek a meglévő tudáshálóba kisebb módosításokkal, kiegészítésekkel be tudnak épülni, azaz a megtanult sémát jelen esetben csak csekély kiegészítéssel kell ellátni.

| KLIKKEK | | |
|---|---|---|
| | *extenzió × intenzió* | elnevezés |
| ① | *{1; 2; 3; 4; 5; 6} × {**H**}* | *Metrikafüggetlenség* |
| ② | *{2; 3; 4; 5; 6} × {**AB**H}* | *A releváns tulajdonságok klikkje,<br>Az absztrakt vektor* |
| ③ | *{**1**; 2; 3} × {**E**H}* | *A koordináta-függetlenség klikkje* |
| ④ | *{**4; 5; 6**} × {AB**CD**H}* | *A dimenzió-függetlenség klikkje,<br>algebrai megalapozás* |
| ⑤ | *{**2**; 3} × {ABE**F**H}* | *A szemléltethetőség klikkje,<br>geometriai megalapozás* |
| ⑥ | *{**3**} × {ABE**G**FH}* | *Az eltolhatóság klikkje,<br>a helyvektor* |
| ⑦ | *Ø × {ABCDEFGH}* | *Klikk fogalmi terjedelem nélkül* |

*4.6. táblázat: A vektordefiníciók klikkjei affin esetben*




*4.16. ábra A vektorfogalmak Galois-gráfja affin esetben*

## *4.10. Az vektorfogalom absztrakt szintje*

*Megyessy (1974)* felhívja a figyelmet arra, hogy *„legáltalánosabb értelemben vektornak nevezzük az olyan halmazok elemeit, amelyek a vektortér-axiómákat kielégítik.”*

A középiskolás tananyag a vektorfogalom *pozicionális szint*jének kialakítását célozza meg. A tanterv a gyakorlati alkalmazhatóságok miatt a vektor fogalmát kiegészíti a vektorok skaláris és emelt szinten a vektoriális szorzatuk értelmezésével és alkalmazásával. E két művelet nem tartozik az absztrakt vektor fogalmi értelmezéséhez. A fogalmi szintek *Vigotszkij-féle* felosztása szerint a *pozicionális* és *absztrakt fogalmi szint* közti különbség nem az adott fogalom használatában, hanem a fogalom meghatározásának tudatosságában rejlik. E különbségtétel nem szűkíthető le a definíció formális ismeretére.

A *pozicionális szint*től az *absztrakt szint*ig vezető tananyag felépítéssel kapcsolatban csak az egyik alapkérdés az, hogy mi legyen a definíció. E kérdéskör matematikai értelemben úgy vetődik fel, hogy mit és hogyan célszerű a vektortér definíciójában szerepeltetni. A vektortér axiómarendszereként több lehetőség is kínálkozik: *van der Waerden (1967)* felépítése például a jobboldali és baloldali szorzást megkülönböztetve nem ragaszkodik a test szorzás műveletének kommutativitásához, míg *Lang (1965)* a modulus általános fogalmának specializálásával vezeti be a lineáris teret. *Freud (1996. 96-97.o)* felhívja a figyelmet arra, hogy az általa is közölt axiómarendszer kis szépséghibája, hogy az egyik axióma (az összeadás kommutativitása) levezethető a többi axiómából. E kérdések elsősorban a matematika építkezésének sajátos belső logikáját érintik.

Didaktikai szempontból nagyobb súlyú probléma, hogy az axiomatikus definíció mint implicit definíciós forma tudati feldolgozása komoly nehézséget jelent. Az axiomatikus definíciók ui. nem egy fogalmat, hanem egyszerre egy egész fogalomrendszert határoznak meg. A vektorfogalom absztrakt definíciójában didaktikailag tehát annak van meghatározó jelentősége, hogy az axiomatikus definíciós módszer milyen mértékben ismert, ez pedig csak a teljes tananyag birtokában ítélhető meg. (Ha a vektortér axiómái bevezető mintapéldaként szolgálnak e definíciós módszerhez, akkor teljesen más problémákkal kell szembenézni, mintha az axiomatikus módszer már jól ismert a hallgatók előtt.)

A *pozicionális szint*től az *absztrakt szint*ig vezető úton biztosan meg kell ismerkednünk több konkrét vektortér modellel is. Ezek egy része még az absztrakt definíció megismerése előtt, egy része pedig már az absztrakt definíció ismeretében alkalmazásként történik meg. Az utóbbi lépés az absztrakció megfordítását, a konkretizációt jelenti.

A szakirodalomban javasolt modellek (korlátos, konvergens, racionális illetve valós sorozatok; az *[a;b]*-ben értelmezett korlátos, folytonos integrálható illetve deriválható függvények) elsősorban alkalmazásként tudják az absztrakt vektortér axiomatikus fogalmát megerősíteni. (Hatékony vizsgálatok végezhetők a vektorfogalom segítségével a rekurzív sorozatok keretében a Fibonacci-sorozatra vonatkozóan, más interpretációt nyerhetünk például a különböző sorfejtésekre, így a periodikus függvények ortogonális függvénysoraira, ...

Mind *pozicionális*, mind *absztrakt fogalmi szinten* jelentősen megerősíti a fogalom beépülését az ismerethálóba, ha a fogalom más szakterületeken is jelentős alkalmazást kap, ahol hatékonyan használhatjuk feladatok megoldására.

### *4.11. Egy gyakorlati alkalmazás: a színvektor*

A vektorfogalom gyakorlati megalapozásának és egyben a vektorfogalom matematikai modellként való alkalmazásának egyik területe a színelmélet A színelmélet elemei a közoktatásban a rajz és vizuális kultúra, az informatika és a fizika tantárgyakban kapnak helyet. A fizika tananyagban a fény spektrális felbontása nyomán jelenik meg a szín fogalma, ahol szinte azonosul egy elektromágneses hullám frekvenciájával, a rajz és vizuális kultúra pedig az additív színkeverésre és a színkörre szorítkozik, míg az informatikában két formában kerülhet elő a szín fogalma:

– a közismereti informatikában mindenkinek meg kell ismerkednie a *Windows* színpaletta alkalmazásával;

– a programozás elemeivel ismerkedőknek pedig a *Color* és az *RGB* függvényt is használniuk kell.

A színek tehát igen, de a *színvektorok* explicite nem szerepelnek a tananyagban, pedig az egyik legelső területe a vektormodell gyakorlati alkalmazásának. A történeti hűséghez tartozik, hogy a vektorfogalom egyik megalkotója, *Grassmann* ismerte fel elsőként a fény és a színek közötti alapvető összefüggéseket. *Nemcsics (1990)* a következő megfogalmazásban idézi fel *Grassmann* három színelméleti tételét:

I. *Összeadó színkeverés útján létrejött bármilyen színt a keveréshez felhasznált összetevők spektrális összetételüktől függetlenül határozzák meg.*

II. *Valamely szín jellemzésére három egymástól független adat szükséges és elegendő.*

III. *A színérzet a nappali látás tartományában a világossággal nem változik.*

Az első két Grassmann-törvény vezetett el a színvektor fogalmának kialakulásához, hiszen egy tetszőleges *F* szín felírható az additív színkeverésnél felhasznált három független alapszín ($A_1; A_2; A_3$) lineáris kombinációjaként:

$$F=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3$$

ahol az $a_1;a_2;a_3$ az *F* szín kikeveréshez szükséges alapszínértékek mennyiségét jelölik. A színérzékelésnél ez a három jellemző invariáns, ami a színes-technika (fotók, filmek, tévék; monitorok) elterjedésével közismertté is vált.

A *színvektor* bevezetése didaktikai szempontból a következő előnyöket illetve hátrányokat jelentheti a vektorfogalomra vonatkozóan: olyan vektorpélda, amely a gyakorlatban közvetlenül használható, ráadásul nem is metrikus és koordinátafüggetlen is!

Egy gyakorlati jelenség modellezésekor a precíz matematikai fogalmak csak egy közelítése a fizikai megfelelőjének. A szín és *színvektor* esetében e közelítés már a két szín egyenlősége nyomán fellép, bár többnyire nem okoz gondot annak a definíciónak az elfogadása, hogy két szín(vektor) azonos, ha azonos színérzetet kelt. Ezen azonosításról a következők állapíthatók meg:

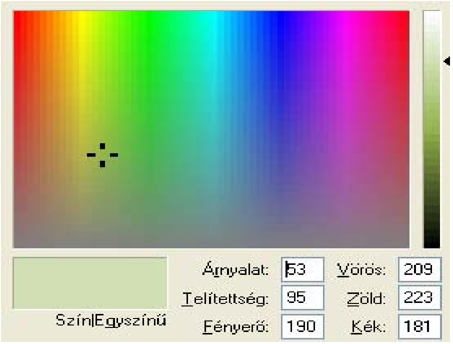
– a színérzet objektív forrása a beérkező fény, amely különböző spektrális eloszlás mellett is kelthet azonos színérzetet (Grassmann 2. színtörvénye), azaz ebben az értelemben nem azonosságon, hanem legfeljebb ekvivalencia reláción alapulhat a két szín egyenlősége;

– az *azonos színérzetet kelt* reláció valójában nem tranzitív reláció, hiszen folytonos átmenettel illetve kellően kis diszkrét lépések sorozatával bármely színtől bármely színig eljuthatunk olyan módon, hogy közben az egymást (közvetlenül) követő színeket egyformának látjuk. Ez azt jelzi, hogy valójában nem azonosságot, sőt még csak nem is ekvivalencia relációt, hanem egy tolerancia relációt nevez meg az *azonos színérzetet kelt* kifejezés, ami csak a színekre öntudatlanul használt közelítés miatt nem okoz fogalmi zavart a színvektor érelmezésénél.

A színek lineáris kombinációinak értelmezése a színek különböző arányú keveréseként definiálható. (Egy szín inverze az ellentett szín lesz, és így additív színelméleti keretében maradva is értelmezhető a kivonás művelete.)

A színvektorok példáját használva ugyancsak egy 3-dimenziós vektorteret kapunk modellként, ami azonban metrikafüggetlen, sőt koordinátafüggetlen is. Ebből a szempontból a színvektor egy lényegesen újabb elemmel bővíti ki az eredeti kontextust.

A színek körében nincs egy természetes bázis, ami a *Windows* színpalettájával pontosan érzékeltethető, hiszen a színeket kétféle (*RGB és HSL)* koordináta-rendszerben is megjeleníti. Ez utóbbi lehetőséget adhat a koordináta-transzformációk tanulmányozásához is! (A Windows színvektorai persze nem a valós test feletti vektortér, hiszen e vektorok koordinátaértékei csak véges diszkrét értékek, 0-255 közötti egész számok lehetnek.)



*4.14. ábra*
*A Windows színpalettája*

# 5. A *Galois-gráf* az értékelésben

A *formális fogalomanalízis*en alapuló didaktikai modell hatékony eszköznek bizonyult a tananyagfelépítések elemzésében, kutatásában és tervezésében. A *Galois-gráf* mint matematikai modell alkalmazható a tanítási folyamat egy másik területén, a tanulók tudásának értékelésében is. E vizsgálatokat *Takács (1993)* kezdte meg először szociálpszichológiai alkalmazással, majd az ő vezetésével az utóbbi években több tantárgyi területen is kísérletek folynak különböző tantárgyi keretekben pedagógiai bevezetésére.

E modell bevezetése és értelmezése a különböző tantárgyi értékelésekbe szintén a 3.1. ábra lépéseit követi. A konkrét kísérleti vizsgálatok többségében a *tárgyalási kontextust* általában egy-egy feladatsor tanulói megoldásaira építik fel, azaz a kiindulási reláció a tanulók által megadott helyes megoldási lépéseket tartalmazza. E kiindulási reláció *Galois-gráf*ja egy strukturális értékelés alapjául szolgálhat, de az eredményül kapott gráfok didaktikai interpretálása komoly nehézségekbe ütközik, ui. az egyes értelmezések mögött gyakran olyan látens hipotézisek húzódnak meg, amelyek szakmailag megkérdőjelezhetőek, sőt esetenként egyenesen cáfolhatók. Az utóbbi esetre példaként szolgálhat a következő, sokszor hallgatólagosan megbúvó hipotézis:

> *„A tudástér-elmélet alapfeltevése (surmise relation) a következő: Ha egy tanuló meg tud oldani egy, a hierarchiában magasabb szinten álló feladatot, akkor várható, hogy minden olyan feladatot meg tud oldani, amely a hierarchiában e feladat alatt helyezkedik el.” (Tóth, 2005)*

E problémák kezelése nyomán alakult ki a *tudástér-modell (knowledge space theory)*, ami a strukturális elemzések mellett a tudás instabilitásának figyelembe vételére valószínűségi meggondolásokkal is operál. *(Taagaperra és társai, 1997)*

A strukturális értékelés lehetőségeit vizsgálta és alkalmazásainak feltételeit foglalta össze egy a 90-es évek elején a PSZM Projekt keretében végzett, általam vezetett kutatás. *(Fatalin, 1993)* E kutatás egyik fontos megállapítása szerint minden értékelés strukturális elemzése során a feladatsor elemzéséből kell kiindulni, és csak ezt követően kerülhet sor a tanulói megoldások elemzésére. Az értékelés mindkét fázisában következetesen kell alkalmazni a *Galois-gráf*ot mint matematikai modell. A következőkben e két egymásra épülő gondolatkörre építjük kutatásunk ismertetését:

- a feladatsorok strukturális jellemzése *Galois-gráf*fal;
- a tanulói feladatmegoldások értékelése *Galois-gráf*fal.

## *5.1. A feladatsorok strukturális jellemzése Galois-gráffal*

A feladatsorok általános jellemzésekor tekintetbe kell vennünk, hogy különböző célokból készülhetnek. A tananyagban szereplő ismeretek felfedeztetésére szánt és az ismeretek begyakorlását célzó feladatsorok csakúgy eltérnek egymástól, mint az értékelés céljától erősen függő feladatsorok. Egy témakörön belül a pillanatnyi tudásállapot felmérését szolgáló ellenőrző dolgozat tartalmát és szerkezetét tekintve is más jellegzetességeket mutat, mint egy érettségi-felvételi vizsgafeladatsor.

A feladatsorok elemzésekor a kiindulás egyik alapja a lefedendő ismeretanyag listája, amit a jelenleg érvényben levő joghatályos előírások kellő részletességgel explicit módon nem tartalmaznak. Már a 3. fejezet elején utaltunk arra, hogy ennek hiányában jelentős szerephez jut a tanárok rutinja, szakmai intelligenciája és intuíciói, így az elemzésekben mindig megjelennek bizonyos szubjektív komponensek is. A szaktanári gyakorlatban csak több-kevesebb konszenzus alakult ki annak megítélésében, hogy mely ismereteket kell a feladatsorokban hangsúlyozottan szerepeltetni, ezért a konkrét feladatsorokban tetten érhetők megalkotójuknak a témakörre vonatkozó preferenciái.

A feladatsorok minden elemzése az egyes feladatok megoldásához szükséges elemi lépések, az ún. itemek (skillek) listájának összeállításából indul ki. Az itemek megállapításakor *az elemzést végző szakember* által felfedezendőnek, begyakorlandónak, illetve számon kérendőnek tartott elemi lépések, ismeretek, alapműveletek, alaptevékenységek kerülnek meghatározásra. Az elemzésnek e mozzanatában is már jelentős szubjektivitás nyilvánul meg.

A feladatok és itemek között elkészíthető egy relációtábla, amely minden feladathoz megadja azokat az itemeket, amelyeket a megoldás során fel kell használni. Egy feladatsor értékelésekor az így előállított reláció modellezi a feladatsort. E táblázat előállításában a legsúlyosabb problémát a már említett szubjektívitások okozzák, de emellett még számolnunk kell a következő jelenséggel is. A tervezett megoldás birtokában úgy tűnhet, hogy a feladatok egyértelműen jellemezhetők az itemekkel, de esetenként egy-egy feladat megoldható egymástól egészen eltérő eszközökkel, ismeretekkel illetve módszerekkel is!

### *Példatárak - gyakorló feladatsorok*

A modell első alkalmazásaiban a szubjektivitási tényező hatásának csökkentésére azonos szerzők tankönyvi felépítése alapján vizsgáltunk különböző tankönyvi példatárakat. (*Fatalin, 1993)* A példatárak szerkezeti felépítéséről a következő jellemzőket lehetett megállapítani:

1. A modell egyik alkalmazhatósági feltétele, hogy a didaktikai szabályok legyenek interpretálhatók a feladatsorok relációs modelljében, ami néhány elemi esetben magától értetődő (l. 5.1. táblázat).
Az 5.1. táblázatban szereplő 1. szabály természetesen csak szükséges feltételt fogalmaz meg, amely formálisan teljesíthető úgy is, hogy szerepeltetünk egy olyan komplex feladatot, amelynek megoldása során minden új ismeret szerepet kap. Egy ilyen „tökéletes feladat" szerepeltetése az 1. szabályt már önmagában is kielégítené, amitől a példatár felépítése nem lenne didaktikus, hiszen különböző összetettségű feladatoknak is helyet kell kapniuk benne. A 2. feltétel sem írja le pontosan az egyszerűtől az összetett felé haladás elvét, de ennek elemzéséhez már mélyebb relációelméleti elemzés szükséges.

| | **Didaktikai elvárásos egy tankönyvi példatár felépítésétől** | | ***A feladatok-itemek reláció tulajdonsága*** |
|---|---|---|---|
| *1.* | feladatanyaga fedje le a tankönyvben szereplő elméleti ismereteket, összefüggéseket | ↔ | *a feladatok-itemek reláció táblázatában minden item forduljon elő legalább egy sorban.* |
| 2. | feladatanyagában legyenek egyszerűbb és összetettebb feladatok | ↔ | *a reláció sorai között legyenek kevesebb és több itemet tartalmazó sorok is* |
| 3. | feladatanyagában fokozatosan nehezedő feladatok szerepeljenek | ↔ | *a feladatok-itemek reláció Galois-gráfjában kis szintugrások legyenek.* |
| .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | ↔ | .<br>.<br>. |

*5.1. táblázat Didaktikai szabályok olvasata a relációtáblázatban*

2. Egy feladat komplexitását a kutatók többnyire a feladat megoldásához tartozó itemek számával modellezik. (Ez természetesen csak egy adott kontextusban elfogadható feltételezés!)

   A *feladatok-itemek reláció Galois-gráf*ját előállítva a példatár szerkezetének egy finomabb jellemzését kaphatjuk meg. E *Galois-gráf* egyes klikkjeinek *extenzió*ja azoknak a feladatoknak a köréből áll, amelyek megoldásához az *intenzió*jában szereplő itemekre szükség van, és fordítva: egy klikk *intenzió*jában olyan itemek szerepelnek, melyek az *extenzió*jában szereplő feladatok megoldásakor felhasználásra kerülnek.

   A gráfot topológiailag célszerű úgy megrajzolnunk, hogy az egyforma itemszámú klikkek azonos szintre kerüljenek, és minél több klikk szükséges egy feladat megoldásához, a klikk annál magasabbra kerüljön az ábrán.

   A *Galois-gráf* maximális eleme, azaz a *DAG nyelő*je ebben az esetben mindig az összes feladat, valamint azon itemek, amelyek minden feladat megoldásához kellenek. A *DAG forrás*a, azaz a *Galois-gráf* minimális eleme pedig az összes item, és esetleg azok a feladatok, amelyek olyannyira komplexek, hogy megoldásukhoz minden item felhasználására szükség van. A továbbiakban *DAG forrás*át és *nyelő*jét helykímélés miatt nem tüntetjük fel.

3. A *klikk szintje* kifejezés alatt a klikk *intenzió*jában szereplő itemek számát értjük, ami jellemzi a feladat összetettségét. A feladatsorok egyik fontos jellemzője, hogy mekkora szintugrásokat tartalmaz, azaz szomszédos klikkjei között mekkorák a szintkülönbségek. (Két szomszédos klikk közti szintkülönbségként e két szomszédos klikk itemszám-eltérését értjük.) Egy didaktikailag kidolgozott gyakorló példatár feladatai több kislépésen keresztül készítik elő a komplexebb, összetettebb feladatok megoldását. A példatár *Galois-gráf*jában előforduló óriásugrás azt fejezi ki, hogy az ilyen feladatok megoldása során sok új item egyidejű alkalmazására kerül sor, ami az ilyen feladatoknak már probléma jelleget kölcsönöz, hiszen előkészített átmenetek nélkül egyszerre kell nagy szintugrást végrehajtani.

*Ellenőrző feladatsorok*

Az ellenőrző feladatsorok és a példatárak közti nyilvánvaló különbség, hogy az ellenőrző dolgozatokban a feladatok száma jelentősen korlátozott. Az itemek számát elsősorban az értékelésbe bevont tananyagrész terjedelme határozza meg. Egy érettségi-felvételi feladatsorban az itemek száma lényegesen bőségesebb, mint az egy-egy témakörön belül megíratott ellenőrző dolgozatoké.

Az egyes feladatok megoldásához szükséges itemek száma, amivel részben jellemezhető a feladat komplexitása, többnyire kevesebb a kisebb témakörre vonatkozó felmérő dolgozatokban. A nagyobb témakörök tudásmérésére alkalmazott átfogóbb feladatsorok (például érettségi dolgozatok) szerkezetileg szétesőbb jelleget mutatnak, ui. általában egymástól távolabb eső témakörökben összetettebb feladatok kapnak nagyobb teret. (A kétszintű érettségi bevezetésével egyidejűleg megjelentek az ún. minimumfeladatok is, amelyek több alacsonyabb komplexitású feladaton keresztül kérnek számon tudáselemeket.)

Vizsgálatunkban a tanári gyakorlatban napi szinten alkalmazott ellenőrző feladatsorokra és értékelésükre szorítkoztunk. E megszorítást több tényező is motiválta:

- a hétköznapi gyakorlathoz közelálló értékeléshez igazodva állapítható meg legegyszerűbben, hogy strukturális elemzésünk adhat-e érdemi információt a napi gyakorlat számára;
- a feladatsorok összeállításának és értékelésének meghatározása az előzőekben említett okokból kifolyólag jelentős szubjektivitásokat tartalmaz, amit kiiktatni ugyan nem tudtunk, de e rejtett szubjektivitások így legalább következetesen érvényesülhettek mind a számonkért, mind a számon kérendőnek, azaz értékelendőnek vélt itemek meghatározásában.

Az általunk vizsgált feladatsorokat kivétel nélkül szaktanárok állították össze önállóan a napi munkájuknak megfelelően, majd saját megszokott gyakorlatuk szerint állapították meg az itemeket és végezték el a dolgozatok kijavítását is. A mi vizsgálatunk a feladatsor és javításának utólagos elemzésére vonatkozott, így az általunk elvégzett elemzés nem befolyásolta a tanítási folyamatot.

Az alábbiakban konkrét példaként választott dolgozatsort egy több évtizedes tanítási gyakorlattal rendelkező szaktanár íratta meg egy teljesen átlagos képességű és felkészültségű szakközépiskolai osztályban. A bemutatásra kiválasztott dolgozatsor tipikus abban az értelemben, hogy az eddig vizsgált hasonló feladatsorok szinte minden sajátosságával rendelkezik. A feladatsort készítő és megírató szaktanár szakmai munkája pedig nem kérdőjelezhető meg abban a gyakorlatias értelemben, hogy az általa eddig felkészített több száz diák közül egynek sem kellett még matematiakérettségin szóbeli vizsgát tennie, és tanítványai közül többen is szoktak olyan irányba továbbtanulni, ahol a matematika felvételi tárgynak számít.

Az 5.2. ábrán feltüntetett ellenőrző dolgozatsor 7 feladatból áll, a 9. osztályosok számára készült az algebrai átalakítások témakörben.

## *A FELMÉRŐ DOLGOZAT FELADATAI*

*1. (ÉÖFGY 248) Végezze el a következő műveleteket!*

$$\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^3y^4)^3} : \frac{(9xy^2)^6}{(5xy^5)^3}; \qquad x \neq 0; \quad y \neq 0$$

*2. (ÉÖFGY 245) Végezze el a számlálóban kijelölt műveleteket, majd egyszerűsítse a következő törtet!*

$$\frac{(2x+1)^2 - (3x-1)(3x+1) + 5x^2}{2x+1}; \qquad x \neq -\frac{1}{2}.$$

*3. (ÉÖFGY 274) Végezze el a következő műveleteket!*

$$\frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2} \cdot \frac{6b+3a}{a}; \qquad /a/ \neq /2b/; \qquad a \neq 0$$

*4. (ÉÖFGY 254) Végezze el a következő műveleteket!*

$$\frac{3b+2}{2b+1} + \frac{1-4b}{2b-1} + \frac{2b^2-b}{4b^2-1}; \qquad b \neq \frac{1}{2}.$$

*5. (ÉÖFGY 356) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét!*

$$(5\sqrt{20} + \sqrt{45} - 7\sqrt{5} - 4\sqrt{28} + 3\sqrt{7})(2\sqrt{80} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{63} + \sqrt{28} - 3\sqrt{7}).$$

*6. (ÉÖFGY 407) Végezze el a következő műveleteket!*

$$\frac{\sqrt{x}+3}{x-16} \cdot \left(2 + \frac{2}{\sqrt{x}+3}\right); \qquad x \geq 0; \; x \neq 16.$$

*7. (ÉÖFGY 364) Gyöktelenítse a következő tört nevezőjét!*

$$\frac{a}{2\sqrt{b}}; \qquad \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

*5.1. ábra Az ellenőrződolgozat feladatai*

A szaktanár önállóan elkészített javítási útmutatóját az 5.2. ábra tartalmazza. Az egyes pontokhoz tartozó itemek nevesítésére csak utólag kértük meg a szaktanárt. (Az itemek nevesítése jelzésértékű a szubjektivitásokra vonatkozóan!)

***SZAKTANÁRI JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ***

| ***1. feladat*** | ***Σ 4 pont*** |
|---|---|
| $\frac{(9x^2y^3)^4}{(5x^3y^4)^3} : \frac{(9xy^2)^6}{(5xy^5)^3} = \frac{9^4x^8y^{12}}{5^3x^9y^{12}} : \frac{9^6x^6y^{12}}{5^3x^3y^{15}}$ | *A*<br>*C*<br>*B*<br>*D* |
| $\frac{9^4x^8y^{12}}{5^3x^9y^{12}} : \frac{9^6x^6y^{12}}{5^3x^3y^{15}} = \frac{9^4x^8y^{12}}{5^3x^9y^{12}} \cdot \frac{5^3x^3y^{15}}{9^6x^6y^{12}}$ | |
| $\frac{9^4x^8y^{12}}{5^3x^9y^{12}} \cdot \frac{5^3x^3y^{15}}{9^6x^6y^{12}} = \frac{5^3 \cdot 9^4x^{11}y^{27}}{5^3 \cdot 9^6x^{15}y^{24}}$ | |
| $\frac{5^3 \cdot 9^4x^{11}y^{27}}{5^3 \cdot 9^6x^{15}y^{24}} = \frac{y^3}{9^2x^4}$ | |

*5.2a ábra Szaktanári javítási útmutató az ellenőrződolgozathoz I.*

| | |
|---|---|
| **2. feladat** | **Σ 4 pont** |
| $$\frac{(2x+1)^2-(3x-1)(3x+1)+5x^2}{2x+1}=\frac{4x^2+4x+1-(9x^2-1)+5x^2}{2x+1}$$ | F |
| $$\frac{4x^2+4x+1-(9x^2-1)+5x^2}{2x+1}=\frac{4x+2}{2x+1}$$ | E |
| $$\frac{4x+2}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{2x+1}$$ | D G (J) |
| $$\frac{2(2x+1)}{2x+1}=2$$ | |
| **3. feladat** | **Σ 4 pont** |
| $$\frac{2ab-a^2}{4b^2-a^2}\cdot\frac{6b+3a}{a}=\frac{a(2b-a)}{4b^2-a^2}\cdot\frac{3(2b+a)}{a}$$ | B |
| $$\frac{a(2b-a)}{4b^2-a^2}\cdot\frac{3(2b+a)}{a}=\frac{a(2b-a)}{(2b-a)(2b+a)}\cdot\frac{3(2b+a)}{a}$$ | D |
| $$\frac{a(2b-a)}{(2b-a)(2b+a)}\cdot\frac{3(2b+a)}{a}=\frac{3a(2b-a)(2b+a)}{a(2b-a)(2b+a)}$$ | H |
| $$\frac{3a(2b-a)(2b+a)}{a(2b-a)(2b+a)}=3$$ | J |
| **4. feladat** | **Σ 6 pont** |
| $$\frac{3b+2}{2b+1}+\frac{1-4b}{2b-1}+\frac{2b^2-b}{4b^2-1}=\frac{3b+2}{2b+1}+\frac{1-4b}{2b-1}+\frac{2b^2-b}{(2b-1)(2b+1)}$$ | D |
| $$\frac{3b+2}{2b+1}+\frac{1-4b}{2b-1}+\frac{2b^2-b}{(2b-1)(2b+1)}=\frac{(3b+2)(2b-1)+(1-4b)(2b+1)+2b^2-b}{(2b+1)(2b-1)}$$ | G |
| $$\frac{(3b+2)(2b-1)+(1-4b)(2b+1)+2b^2-b}{(2b+1)(2b-1)}=\frac{6b^2+b-2-8b^2-2b+1+2b^2-b}{(2b+1)(2b-1)}$$ | H |
| $$\frac{6b^2+b-2-8b^2-2b+1+2b^2-b}{(2b+1)(2b-1)}=\frac{-2b-1}{(2b+1)(2b-1)}$$ | I |
| $$\frac{-2b-1}{(2b+1)(2b-1)}=\frac{-(2b+1)}{(2b+1)(2b-1)}$$ | J |
| $$\frac{-(2b+1)}{(2b+1)(2b-1)}=\frac{1}{1-2b}$$ | K |
| **5. feladat** | **Σ 3 pont** |
| $(5\sqrt{2^2 5}+\sqrt{3^2 5}-7\sqrt{5}-4\sqrt{2^2 7}+3\sqrt{7})(2\sqrt{2^4 5}-2\sqrt{5}+2\sqrt{3^2 7}+\sqrt{2^2 7}-3\sqrt{7})=$ | F |
| $=(10\sqrt{5}+3\sqrt{5}-7\sqrt{5}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7})(8\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6\sqrt{7}+2\sqrt{7}-3\sqrt{7})=$ | G |
| $=(6\sqrt{5}-5\sqrt{7})(6\sqrt{5}+5\sqrt{7})=6^2 5-5^2 7=180-175=5$ | L |

*5.2b ábra Szaktanári javítási útmutató az ellenőrződolgozathoz II.*

| **6. feladat** | **Σ 5 pont** |
|---|---|
| $\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}\cdot\left(2+\frac{2}{\sqrt{x}+3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}+\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+3}$ | *B I G H D* |
| $2\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}+\frac{\sqrt{x}+3}{x-16}\cdot\frac{2}{\sqrt{x}+3}=\frac{2\sqrt{x}+6}{x-16}+\frac{2}{x-16}$ | |
| $\frac{2\sqrt{x}+6}{x-16}+\frac{2}{x-16}=\frac{2\sqrt{x}+8}{x-16}$ | |
| $\frac{2\sqrt{x}+8}{x-16}=\frac{2(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}$ | |
| $\frac{2(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)}=\frac{2}{\sqrt{x}-4}$ | |

| **7. feladat** | | **Σ 3 pont** |
|---|---|---|
| *a)* | $\frac{a}{2\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{2b}$ | *D B F* |
| *b)* | $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$ | |
| | $\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$ | |

*5.2c. ábra Szaktanári javítási útmutató az ellenőrződolgozathoz III.*

Az egyes lépések „nevesítésének” az a célja, hogy a szaktanár belső reprezentációja szerint hasonlónak ítélt itemek azonos besorolást nyerjenek. Ebben a lépésben kapnak jelentős szerepet azok a szubjektív tényezők, amelyek kezelése a kellő részletezettséggel, központilag előírt itemlista hiányában nem kerülhető el. A több évtizedes tanári rutin nyomán kialakult belső besorolások, kategóriarendszerek pedig meghatározó erejűek mind a feladatok kiválogatásában, mind a pontozási rendszer kialakításában. Ez nyilván több szubjektív elemet is tartalmaz, melyeknek egy része a didaktikai szakirodalom megállapításaival alátámasztható, egy részük viszont megkérdőjelezhető. A vitatható itemekben ugyanakkor olyan szakmai rutinnal alátámasztott látens tényezők húzódhatnak meg, amelyek a szaktanári értékelésben mindenképpen hatnak, ezért fenntartással bár, de elfogadtuk ezeket is.

A szaktanár megítélése szerint az elkészített feladatsortól 12-féle item meglétének ellenőrzése várható. (Az itemek nevesítését az 5.2. táblázatban adtuk meg.)

*Érdemes az itemre-bontás néhány jellegzetességére felfigyelni:*

- *a számonkérésnek ezen a szintjén a szaktanár már nem hajlandó különbséget tenni a törtek egyszerűsítése és bővítése között, egységesen D itemként kezeli e lépést;*

- *a szaktanár a G itemben a két lépésből álló műveletsort (a zárójel felbontását és az azonos nemű tagok összevonását) egy műveletnek tekinti;*
- *a szaktanár megkülönbözteti az F item $(a+b)(a–b)=a^2–b^2$ azonosságát és a H item $a^2–b^2=(a+b)(a–b)$ azonosságát;*
- *az L itemben a szaktanár szintén összevonja a számok törzstényezőkre bontását és a négyzetgyök azonosságainak alkalmazását.*

| ***kód*** | ***műveleti lépés*** |
|---|---|
| *A* | *szorzat hatványozása* |
| *B* | *törtek szorzása és osztása* |
| *C* | *hatvány hatványozása* |
| *D* | *egyszerűsítés és bővítés* |
| *E* | *$(a + b)^2$ = ...formula alkalmazása* |
| *F* | *$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$ azonosság alkalmazása* |
| *G* | *zárójelfelbontás és összevonás* |
| *H* | *$a^2 – b^2$ = ... azonosság alkalmazása* |
| *I* | *közös nevező* |
| *J* | *kiemelés* |
| *K* | *zárójelfelbontás és összevonás* |
| *L* | *számok törzstényezőkre bontása; négyzetgyök-azonosságok* |

*5.2. táblázat Az ellenőrző dolgozat szaktanári itemlistája*

*Az így megállapított egyes itemek szubjektív megítélését alátámaszthatjuk érvelésekkel, vagy elutasíthatjuk cáfolásukkal. Az egyszerűsítés/bővítés matematikai jelentése a racionális számok birtokában azonos műveletcsoport, ezért a D item elfogadható, ugyanakkor didaktikailag megkérdőjelezhető. Matematikai szempontból az egyenlőség szimmetrikus alaptulajdonsága miatt az $(a+b)(a–b)=a^2–b^2$ és az $a^2–b^2=(a+b)(a–b)$ azonosság természetes módon ugyanazt fejezi ki, így megkülönböztetése nem indokolt, ugyanakkor az egyenlőség két különböző irányú alkalmazása teljesen más tevékenységnek minősül, azaz didaktikailag fontos e két alkalmazás megkülönböztetése. Az L itemben történő összevonás mögött tulajdonképpen nem is matematikai és nem is didaktikai megfontolás húzódik meg. E tömörítést a tanár ugyan azzal indokolta, hogy nála e feladat egy „speciális túltenyésztett iskolai feladat” kategóriába tartozik, ezért komplett egészként kezeli, valójában azonban mintha egészséges ösztönnel megelőlegezné azt a tényt, hogy az L item két teljesen különböző aspektusa ebben a dolgozatban úgysem válik el egymástól. (A formális fogalomanalízis szempontjából a reláció megtisztítása valóban éppen ezt az eredményt adja!)*

A gyakorlatban elterjedten alkalmazott itemek objektivizálása alapulhatna ugyan egy-egy tananyagrész aprólékos matematikadidaktikai elemzésén, de ennek megvalósításakor tekintetbe kellene vennünk, hogy az itemek a tanítási folyamat során megváltoznak. A tananyag spirális felépítéséből adódóan egy megelőző tanítási fázisban különböző itemekre bontott megoldási lépés éppen a fejlesztés nyomán a következő fázisban már egy egységnek fog minősülni, azaz az itemek is változáson esnek át.

| | | *Itemek (12)* | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* | *I* | *J* | *K* | *L* |
| *Feladatok (7)* | *1* | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | |
| | *2* | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | |
| | *3* | | ✓ | | ✓ | | | | ✓ | | ✓ | | |
| | *4* | | | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| | *5* | | | | | | ✓ | ✓ | | | | | ✓ |
| | *6* | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | *7* | | ✓ | | ✓ | | ✓ | | | | | | |

*5.3. táblázat Az ellenőrző dolgozat relációs táblája*

A szaktanár (szubjektív) követelményrendszere egyértelműen megmutatkozik egy feladatsor pontozásában is, ui. a tanár által számon kérendőnek és így értékelendőnek tartott elemi lépések, itemek explicit módon is kifejeződnek. A feladatsor összeállítása azonban további rejtett preferenciákat is tartalmazhat. A preferenciák kétféle módon jelentkezhetnek:

- az egyes elemi lépések, ismeretek, azaz itemek a feladatsor megoldásában többször is előfordulhatnak, a fontosabbnak tartott itemek több feladat megoldásában is előkerülnek;
- a többször előforduló itemek más itemekkel esetenként egyfajta állandósult kapcsolatban is jelen lehetnek.

Egy item súlyát jellemzi megjelenési gyakorisága. Egy-egy item szerepét árnyaltabban ítélhetjük meg, ha az előfordulási gyakorisága mellett azt is megnézzük, hogy milyen különböző összefüggésekben fordul elő e számonkérésben. A rejtettebben szereplő itemkapcsolatok a feladatok-itemek reláció elemzésével, klikkjeinek előállításával tárhatók fel. A feladatok-itemek reláció klikkjeiben a klikkek intenziói olyan itemcsoportokat jelenítenek meg, amelyek a különböző feladatok megoldásában együttesen fordulnak elő. Egy-egy item természetesen különböző klikkekben is előfordulhat, ami az item különböző kapcsolódási lehetőségeire mutat rá.

Az 5.4. táblázat tartalmazza a feladatok-itemek reláció 18+2 klikkjét. A *maximális klikk*nek *(Ø;ABCDEFGHIJKL)*, azaz a *DAG nyelő*jének, valamint a *DAG forrás*át jelentő *(1,2,3,4,5;6,7; Ø) minimális klikk* ábrázolásától általában eltekintünk. (A minimális klikk információtartalma a következő: a feladatsorban 12 item fordul elő, és nincs olyan komplex feladat, amelynek megoldásához minden itemre szükség lenne. A maximális klikk információtartalma pedig a következő: a feladatsor 7 feladatból áll, és nincs olyan item, amelyre minden feladat megoldásánál szükség lenne.)

| KLIKKEK (18+2) | | |
|---|---|---|
| *{FELADATOK}* | × | *{ITEMEK}* |
| *{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}* | × | *Ø* |
| *{1, 2, 3, 4, 6, 7}* | × | *{D}* |
| *{2, 5, 7}* | × | *{F}* |
| *{2, 4, 5, 6}* | × | *{G}* |
| *{1, 3, 6, 7}* | × | *{BD}* |
| *{3, 4, 6}* | × | *{DH}* |
| *{2, 4, 6}* | × | *{DG}* |
| *{2, 7}* | × | *{DF}* |
| *{2, 5}* | × | *{FG}* |
| *{3, 6}* | × | *{BDH}* |
| *{3, 4}* | × | *{DHJ}* |
| ***{7}*** | × | ***{BDF}*** |
| ***{5}*** | × | ***{FGL}*** |
| ***{3}*** | × | ***{BDHJ}*** |
| ***{1}*** | × | ***{ABCD}*** |
| *{4, 6}* | × | *{DGHI}* |
| ***{2}*** | × | ***{DEFG}*** |
| ***{6}*** | × | ***{BDGHI}*** |
| ***{4}*** | × | ***{DGHIJK}*** |
| *Ø* | × | *{ABCDEFGHIJKL}* |

*5.4. táblázat A feladatok-itemek reláció klikkjei*

A klikkek alapján látható, hogy komplexitás szempontjából az *5* és a *7* feladat három item ismeretét tételezi fel, legösszetettebbnek pedig a *4* feladat minősül, mert megoldása 6 item ismeretét tételezi fel.

A *D* item *(egyszerűsítés és bővítés)* több klikkben is előfordul, így például négy kétitemes klikkben is:

*(1, 3, 6, 7;* ***BD****)* ; *(3, 4, 6;* ***DH****)* ; *(2, 4, 6;****DG****)* és *(2, 7;* ***DF****)*.

Az *egyszerűsítés és bővítés* művelete tehát társul a *törtek szorzása és osztása* műveletéhez, az $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ *azonosság* mindkétirányú alkalmazásához, valamint a *zárójelfelbontás és összevonás* műveletéhez több feladatban is. A *DH* kombináció pedig további összetettebb kombinációkban (pl. *BDH*; *DHJ*; *DGHI*; …) is megjelenik. A *DH* kombinációt, azaz e műveletcsoport egyfajta állandósult kapcsolódását is súlyozottan kéri számon e feladatsor. A *DH* műveletcsoport megléte többletkövetelményt jelent, hiszen nem pusztán a *D* és *H* item külön-külön meglétét, hanem ezek stabil együttes alkalmazását is méri e feladatsor.

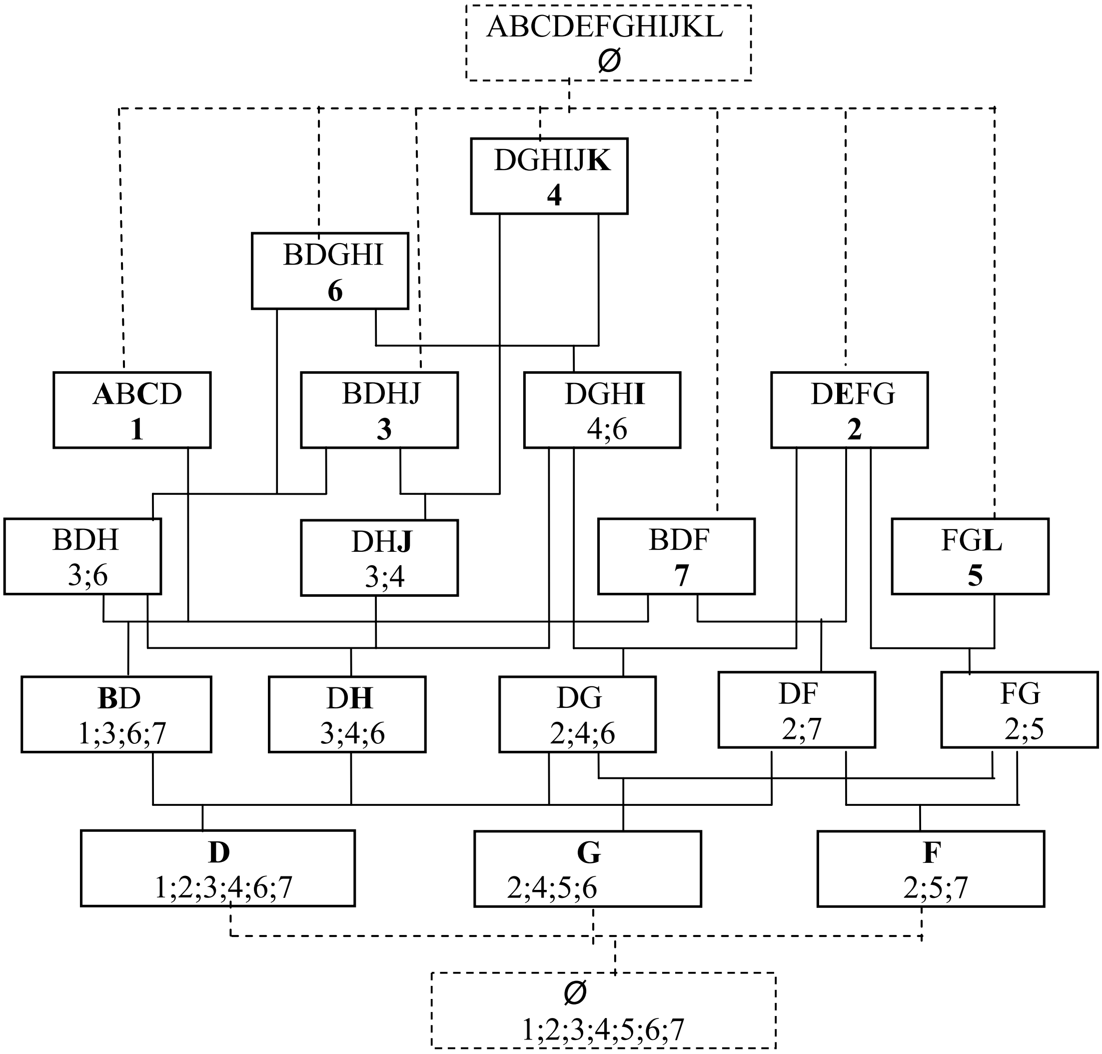
A klikkek-feladatok relációtáblázatot tüntettük fel az 5.5. táblázatban. (Kiemelt háttérrel szerepelnek maguk a feladatok.) A táblázatból egyértelműen kitűnik, hogy a dolgozat a *D*, a *G* és az *F* item meglétének ellenőrzésére helyezi a hangsúlyt. (A *D* item sokszori szerepeltetése mutatja, hogy a szaktanár preferenciája szerint az egyszerűsítés/bővítés alapművelete mind numerikus, mind algebrai értelemben kiemelt hangsúlyt kap.) A feladatsor további klikkjei pedig a preferált itemkapcsolódásokat mutatják meg.

| | FELADATOK | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| KLIKKEK | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| D | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ |
| F | | ✓ | | | ✓ | | ✓ |
| G | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | |
| BD | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| DH | | | ✓ | ✓ | | ✓ | |
| DG | | ✓ | | ✓ | | ✓ | |
| DF | | ✓ | | | | | ✓ |
| FG | | ✓ | | | ✓ | | |
| BDH | | | ✓ | | | ✓ | |
| DHJ | | | ✓ | ✓ | | | |
| BDF | | | | | | | ✓ |
| FGL | | | | | ✓ | | |
| BDHJ | | | ✓ | | | | |
| ABCD | ✓ | | | | | | |
| DGHI | | | | ✓ | | ✓ | |
| DEFG | | ✓ | | | | | |
| BDGHI | | | | | | ✓ | |
| DGHIJK | | | | ✓ | | | |

*5.5. táblázat Az ellenőrződolgozat klikkek-feladatok relációtáblája*

A preferált itemcsoportok egymáshoz való viszonyát *Galois-gráf*on ábrázolva szemléletesen is megjeleníthető a feladatsor szerkezete. Az 5.3. ábra a feladatsor *Galois-gráf*ját tünteti fel. A gyakorlatban a *DAG forrás*ának és *nyelő*jének feltüntetése többnyire csak zavaró részlet, ezért az ábránkon most is csak szaggatott vonalakkal jelenítettük meg. (A gyakorlati felhasználásokban az ábrát célszerű redukálni a szaggatott vonallal jelölt részek elhagyásával.)

E gráfból szemléletetesen megállapítható, hogy a feladatok komplexitása változatos, 3; 4; 5 illetve 6 item szükséges megoldásukhoz. A feladatok komplexitásának azonban ez nem lehet objektív mérőszáma, hiszen az itemek szubjektív megállapítása mögött kognitív értelemben nem feltétlenül elemi lépések húzódnak meg, sőt a példaként választott szaktanári itemlistában több item (*G*; *L*) határozottan több művelet összevonását is tartalmazza. (A *formális fogalomanalízis*ben alkalmazott ún. megtisztítási műveletben az adott kontextusban egymástól megkülönböztethetetlen objektumokat illetve attribútumokat összevonjuk, ami szintén határozottan megnehezíti a feladat komplexitásának megítélését, ezért ezt a lépést az analízisből célszerű kihagyni!)

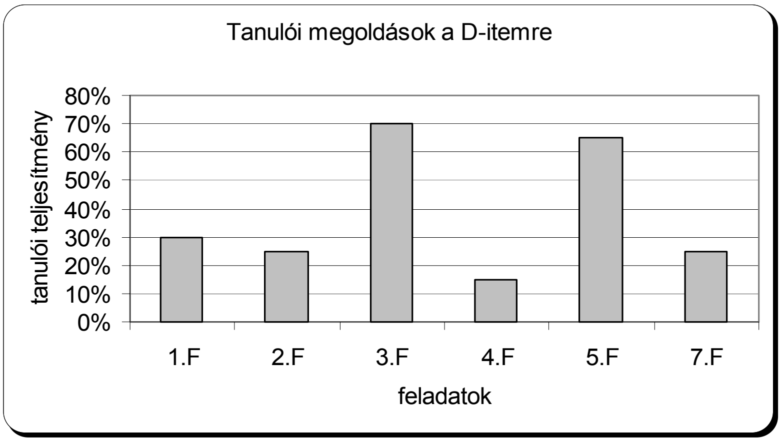



*5.3. ábra A feladatok-itemek kontextus Galois-gráfja (a gráf forrása és nyelője nélkül)*

A feladatsor *Galois-gráf*ja alapján megállapítható, hogy a szintugrások mérete 1 illetve 2, kivéve az *A4* feladat, amelyben előfordul egy hármasugrás is. A beépült szubjektív tényezők jelentősen torzíthatják a szintugrások megítélését is. A *G* illetve *L* itembe becsempészett műveletösszevonás nemcsak az egyes feladatok itemszámát, hanem a feladatsorban előforduló szintugrások mértékét is jelentősen lecsökkenti.

A feladatsorok objektívebb elemzését és szerkezetének jellemzését csak akkor lehetne elvégezni, ha az itemlisták előállítása kevésbé támaszkodna a szaktanári rutinra és intuícióra.

Egy feladatsorban egy-egy item több feladatban is előfordulhat, aminek következtében a hagyományos értékelési módszerek felülvizsgálhatók. A továbbiakban a feladatitem kifejezést fogjuk használni akkor, ha az item konkrét elfordulására kívánunk utalni. A feladatsorok tanulói megoldásainak értékelései a tanulók-feladatitemek relációtáblán alapulnak. (5.5. táblázat) Ez a táblázat tartalmazza azt az információt, hogy az egyes tanulók melyik feladatitemeket oldották meg helyesen. E táblázat alapján egyszerű vagy súlyozott pontozással a tanulók eredménye numerikusan is értkelhetővé válik. (Ennek egyszerűsített változatát tartalmazza az 5.5. táblázat utolsó oszlopa.)




*5.4.ábra A D-item tanulói megoldásai*

A tanulók által adott meoldásokat feladatitemenként is elemezhetjük, azaz megvizsgálhatjuk, hogy az egyes feladatitemeket a tanulók hány százaléka oldotta meg helyesen. (Ennek egyszerűsített változatát tartalmazza az 5.5. táblázat utolsó sora.) Egyadott tudáselem, skill meglétét vizsgáló item több feladatban is előfordulhat, így vizsgálható, hogy az azonosnak ítélt itemek megoldásakor a tanulók milyen eredményeket értek el a különböző feladatokban. (Az 5.4. ábra a *D* itemre vonatkozóan adja meg a tanulók által elért eredményt feladatonként.)

A tanulói megoldások értékelése azt mutatja, hogy eltérő eredményességgel oldották meg a *D* itemet a tanulók a különböző feladatokban. E jelenséget különböző tényezők okozhatják:

- egyes feladatokban azért oldották meg kevesebben ezt az itemet, mert nem is jutottak el hozzá, mert egyszerűen nem jutott rá idejük, vagy pedig azért, mert szükség lett volna a megelőző lépések helyes megoldására;
- a tanuló az adott kontextusban nem tudja megoldani az itemet, mert számára ez a feladatitem (még) nem tartozik a szaktanár által azonos itemnek tekintett kategóriába.

Ez a jelenségkör is felhívja a figyelmet arra, hogy a tanulói tudásban bizonyos instabilitások mutatkoznak. Ezek az instabilitások kezelhetők valószínűségi meggondolásokkal, ahogyan ezt a *tudástér-modellek (knowledge space theory)* is teszik.

| | | | T 1 | T 2 | T 3 | T 4 | T 5 | T 6 | T 7 | T 8 | T 9 | T 10 | T 11 | T 12 | T 13 | T 14 | T 15 | T 16 | T 17 | T 18 | T 19 | T 20 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **TEMEK** | 1. feladat | **A** | ✓ | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **65%** |
| | | **B** | ✓ | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | ✓ | **60%** |
| | | **C** | ✓ | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | **50%** |
| | | **D** | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | | | **30%** |
| | 2. feladat | **E** | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | **50%** |
| | | **F** | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **70%** |
| | | **G** | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | **40%** |
| | | **D** | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | **25%** |
| | 3. feladat | **J** | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **85%** |
| | | **B** | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **85%** |
| | | **H** | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **85%** |
| | | **D** | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | **70%** |
| | 4.feladat | **H** | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | **90%** |
| | | **I** | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | **85%** |
| | | **J** | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | **80%** |
| | | **K** | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | **70%** |
| | | **G** | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | | ✓ | **50%** |
| | | **D** | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | **15%** |
| | 5.feladat | **L** | ✓ | ✓ | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | **40%** |
| | | **G** | ✓ | ✓ | | | | | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | **35%** |
| | | **F** | ✓ | ✓ | | | | | | | | | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | **30%** |
| | 6. feladat | **I** | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **65%** |
| | | **H** | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | **15%** |
| | | **G** | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **60%** |
| | | **B** | ✓ | ✓ | | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **85%** |
| | | **D** | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **65%** |
| | 7.feladat | **B** | ✓ | ✓ | | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | **75%** |
| | | **F** | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | | ✓ | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | **45%** |
| | | **D** | | ✓ | | | | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | **25%** |
| Σ | | | **83%** | **86%** | **21%** | **24%** | **21%** | **7%** | **55%** | **45%** | **55%** | **59%** | **62%** | **55%** | **76%** | **69%** | **76%** | **66%** | **62%** | **76%** | **62%** | **76%** | |

*5.5. táblázat Tanulók-itemek relációstábla*

A szaktanári kiértékelések általában csak a konkrét feladatitemek helyes megoldásaival foglakoznak, és nem térnek ki a mérni kívánt tudáselem meglétének megítélésére, azaz a szaktanár által szubjektíve „azonos típusúnak” vélt itemek, melyek feltehetőleg egy adott tudásegység meglétét ellenőriznék, összesített kiértékelése elmarad.

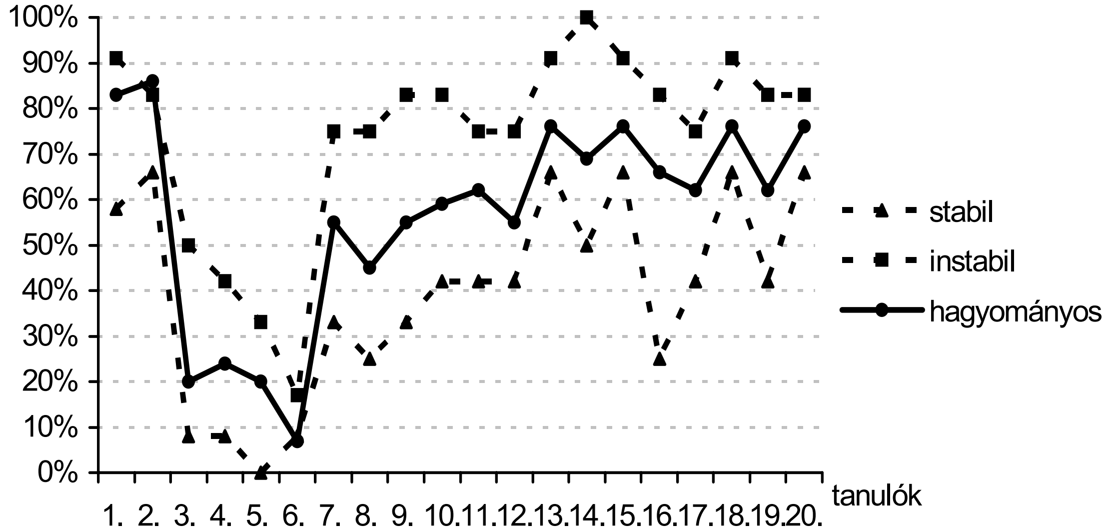
Annak feltételezésével, hogy az „azonos típusú” item valóban egy adott tudásegység mérésére szolgál, megpróbálkozhatunk következtetéseket levonni az egyes tudásegységek meglétéről illetve hiányáról. A hagyományos kiértékelések esetében az „azonos típusú” item tudásának elfogadását úgy értékeljük ki, hogy az összes előfordulásában minden jól megoldott feladatitemért megadjuk pontot. A tudásegységre vonatkozóan ezen eljárás azt eredményezi, hogy feladatonként eltérő értékelést kaphat az „azonos tudásegységet” realizáló item. Ennek végeredményeként pedig a tanuló „item-tudása” súlyozott kiértékelést kap annak függvényében, hogy mely feladatokban sikerült helyesen megoldania.

A tudásegységek e súlyozott kiértékelése mellett mi két szélsőséges feltételezésen alapuló értékelést vezettünk be:

– *instabil tudás hipotézise*: egy item tudását elfogadjuk, ha a tanuló legalább egyszer helyesen megoldotta az adott itemet;

– *stabil tudás hipotézise*: egy item birtoklását akkor ismerjük el, ha az itemet minden előfordulásban helyesen oldja meg a tanuló.

Az 5.5. ábrán a tanulói megoldások numerikus értékelését adtuk meg a hagyományos pontozási rendszer, valamint két szélsőséges hipotézisünk alapján. (A hagyományos értékelés eredménye általában a *stabil* és az *instabil tudás hipotézise* által adott értékelés között helyezkedik el.) A szélsőséges hipotéziseink alapján készített értékelés közti óriási különbségek vannak, ami szintén arra utal, hogy a tanulók tudásában jelentős instabilitás van.




*5.5. ábra Numerikus értékelés a különböző hipotézisek alapján*

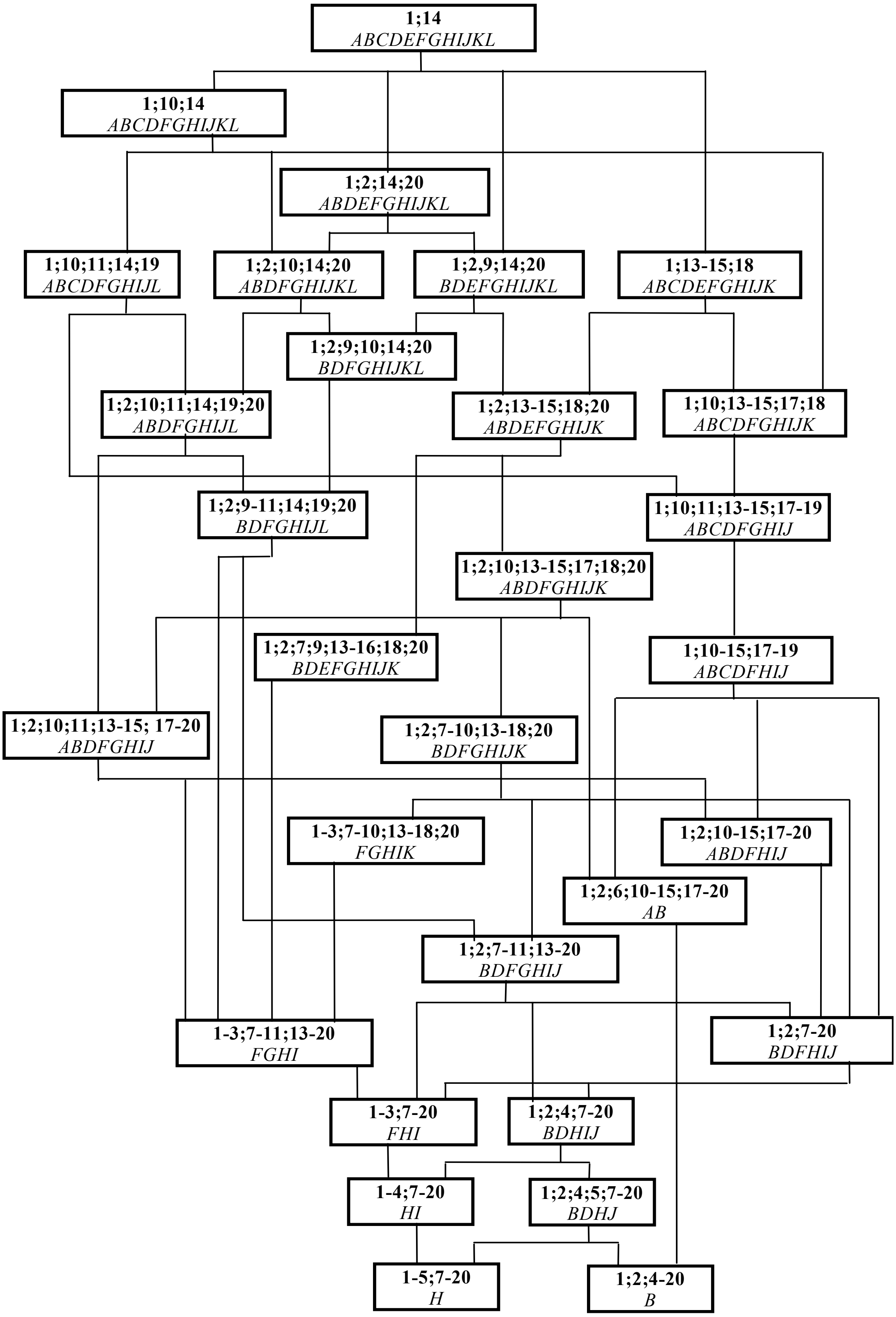
A stukturális értékelés eszköztárával is lehet közelíteni a meglevő tudásháló értékelésekor. Az első strukturális értékelések az osztály tudáshálójának felmérését vették célba, ami azt jelenetette, hogy a tanulók-feladatitemek reláció klikkjeinek megállapításából kiindulva ábrázolták a tanulói megoldások *Galois-gráf*ját.

A tanulók-feladatitemek reláció *Galois-gráfj*a az osztály tudástruktúrájának leírását adhatja, ha elfogadjuk azt a hipotézist, miszerint *„egy item megoldása az item mögött levő tudás meglétét jelenti”*. Ilyen irányú vizsgálatokat végeztek *Takács V. (2000)* és tanítványai. A testnevelésoktatás területén *Nagy É. (1997)*, a fizikatanításban pedig *Kovács Sz. (2003)* publikálta erre vonatkozó eredményeit. E *Galois-gráf* előállítását követően alapkérdésként a kutatók többnyire azt a gyakorlatias kérdést vetik fel, hogy az osztály tudásszerkezetének ilyetén feltérképezését követően a gráfból nyerhetünk-e információkat a tanítási folyamat további tervezéséhez. Az osztály tudásstruktúrájának reprezentálására használt Galois-gráf esetében *Takács V. (2000)* egy általános módszert ad egy ún. optimális út előállítására, melynek didaktikai interpretációját részletezi *Kovács Sz. (2003)* a fizikatanítás területén.

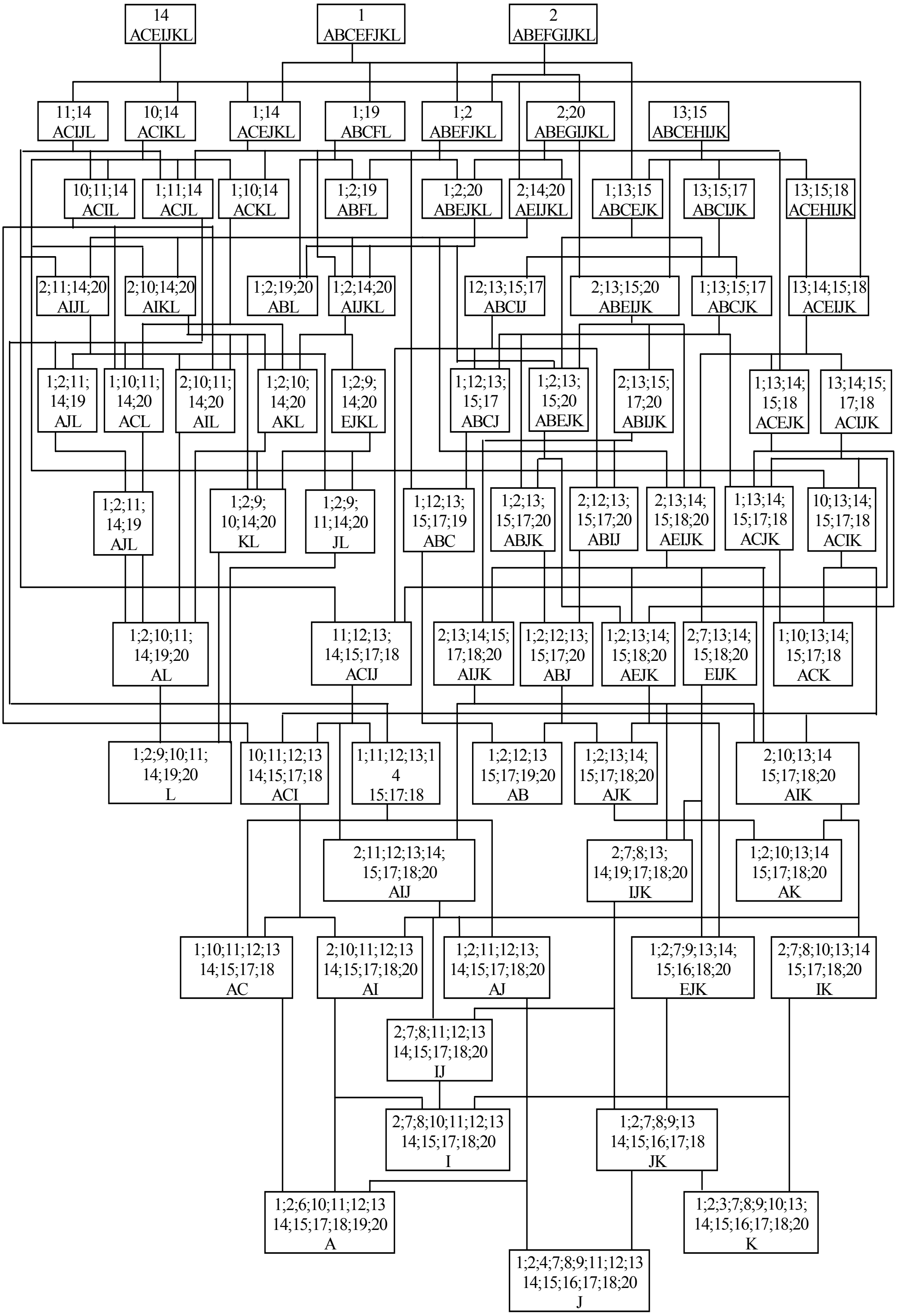
Kutatásunkban a már jelzett eredmények miatt el kellett vetnünk azt a hipotézist, hogy egy-egy feladatitem helyes megoldása a mögötte levő tudás meglétét jelentené, és inkább arra törekedtünk, hogy a *stabil* és *instabil tudás hipotézise* alapján korlátok közé tudjuk szorítani azt az információt, ami egy-egy item különböző helyes megoldásaiból a tudásegység meglétére vonatkoztatható. Elemzésünkben elvégeztük mind a *stabil*, mind az *instabil tudás hipotézise* alapján a tanulók-itemek reláció formális elemzését, azaz megállapítottuk klikkjeiket, valamint megrajzoltuk Galois-gráfjaikat. A vizsgálatot több ellenőrző dolgozat esetében is elvégezve azt tapasztaltuk, hogy óriási eltéréseket mutatnak a *stabil* és az *instabil tudás hipotézise* alapján elkészített gráfok. A példaként ismertetett ellenőrző dolgozatra vonatkozóan az 5.6. ábrán, az *instabil*, az 5.7. ábrán pedig a *stabil tudás hipotézise* alapján elkészített Galois-gráfok láthatók. (A mellékelt ábrán a gráfok forrása és nyelője már nem szerepel!)

Általában mindkét hipotézissel többnyire olyan bonyolult összefüggésű, nagyméretű, egymástól jelentősen eltérő gráfokat kapunk, amelyből megalapozott didaktikai következtetéseket nem tudtunk levonni. (Megjegyezzük, hogy az 5.6. és 5.7. ábrán szereplő gráfok csak egy 20 fős osztályra vonatkoznak. Nagyobb osztálylétszám illetve a tanulók-feladatitemek reláció vizsgálata esetén még terjedelmesebb és bonyolultabb gráfokat kapunk.) Vizsgálatunknak ez az iránya kudarcot vallott, és csak annyit valószínűsített számunkra, hogy az „osztály tudásstruktúrájának” ilyetén megjelenítése nem tűnik szerencsés reprezentációnak.

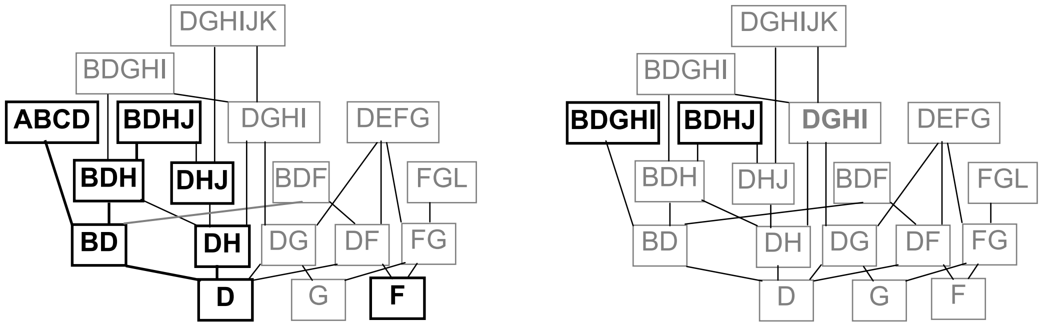
Az egyes tanulók egyedi tudásstruktúrája viszont nem ennek a relációnak a Galois-gráfján, hanem a feladatsor Galois-gráfján (5.3. ábrán) szemléltethető. E gráfon bejelölhetők azok a klikkek, aza mely preferált itemkapcsolatok, amiket instabilan illetve stabilan ismer fel és old meg a tanuló. (5.8a-b ábra) A tanulók létszámára tekintettel azonban ez olyannyira hosszadalmas és időigényes, hogy csak kivételes esetben van rá mód, hogy ezen az úton jussunk didaktikai következtetésekhez.



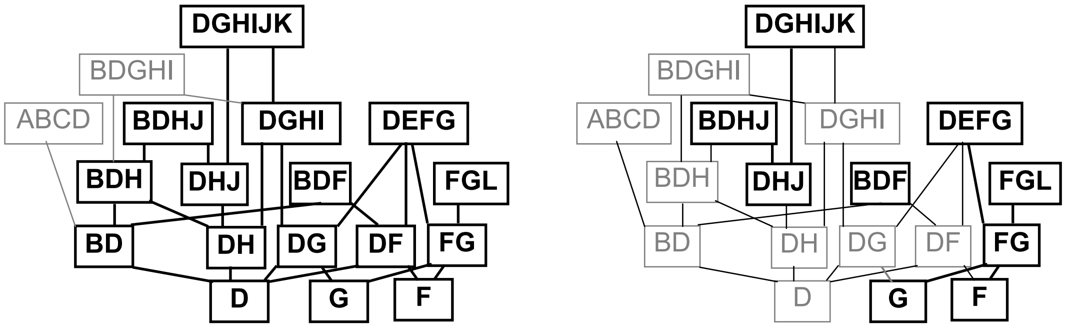

*5.6. ábra A tanulói teljesítések Galois-gráfja az instabil tudás hipotézise alapján*




*5.7. ábra A tanulói teljesítések Galois-gráfja a stabil tudás hipotézise alapján*




*5.8a ábra A 12-es tanuló instabil és stabil tudásgráfja*




*5.8b ábra A 2-es tanuló instabil és stabil tudásgráfja*

A feladatsor hálója nem a megcélzott tudásháló valamely részének mérésére szolgál, hanem a szaktanár tudatosan vagy ösztönösen, de mindenképpen szubjektíve preferált követelményrendszerét reprezentálja. Tanulónként ábrázolhatók e gráfban azok a klikkek, amelyeket a tanuló megoldotta mind az *instabil*, mind a *stabis tudás hipotézise* alapján. Az 5.8a ábra a 16 sorszámú tanuló, az 5.8b ábra pedig a 2 sorszámú tanuló megoldásait ábrázolja az *instabil* és a *stabil tudás hipotézisének* elfogadása mellett. Ezek az ábrázolások csak részben fejezik ki azt, hogy a tanári követelmények szerint az egyes tanulók mennyire felkészültek. Ha ideális jellemzésként elfogadjuk is a kapott gráfot, mint az egyes tanulók tudásgráfját, akkor sincs olyan megkérdőjelezhetetlen eljárásunk, amellyel ezekből az egyedi gráfokból egy eredő, az osztály egészére vonatkozó gráfot képezzünk. Vizsgálataink szerint nagyon munkaigényes és kevés haszonnal kecsegtető vállalkozásnak bizonyultak azok a kísérletek, amelyek a Galois-gráfból igyekeznek didaktikailag valóban hasznosítható következtetésekre jutni az értékelés területén.

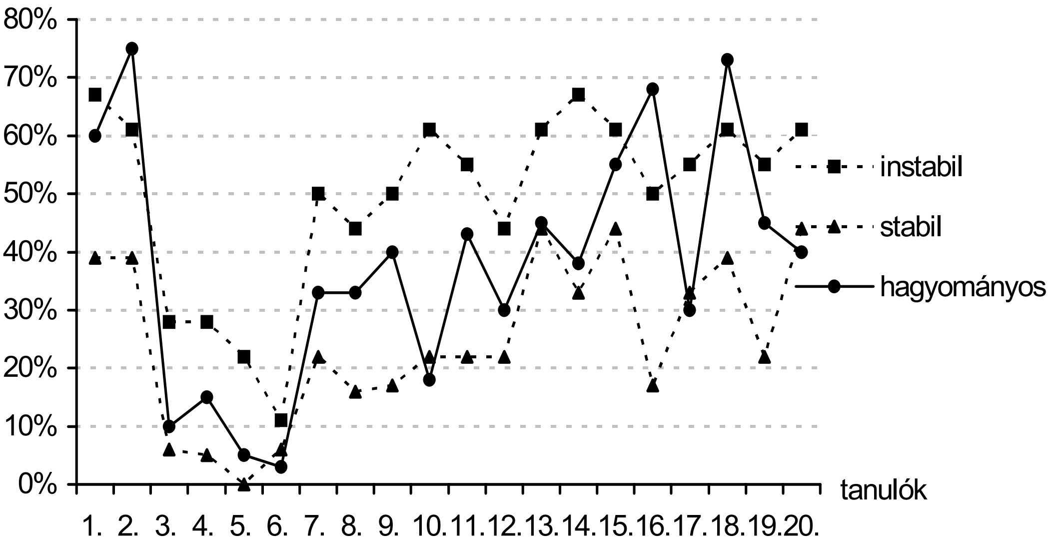
Itt is meg kell említenünk, hogy a „tudás-vizsgálatok” esetében nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy a „nem-tudás” vizsgálata is hasznos eredményeket szolgáltathat a tanítási folyamat további tervezéséhez, de ezek Galois-gráffal való kiértékelése szintén óriási idő- és energiaráfordítást igényel és kevés haszonnal kecsegtet az előzőekben már jelzett problémák miatt.

| KLIKKEK | | TANULÓK | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | T 1 | T 2 | T 3 | T 4 | T 5 | T 6 | T 7 | T 8 | T 9 | T 10 | T 11 | T 12 | T 13 | T 14 | T 15 | T 16 | T 17 | T 18 | T 19 | T 20 | Σ(%) |
| A1 | D | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | | | 30% |
| A1 | BD | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | 25% |
| A1 | ABCD | ✓ | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | 25% |
| A2 | D | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | 25% |
| A2 | F | ✓ | ✓ | ✓ | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 70% |
| A2 | G | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | 40% |
| A2 | DG | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | 25% |
| A2 | DF | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | 25% |
| A2 | FG | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | 40% |
| A2 | DEFG | ✓ | ✓ | | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | ✓ | 25% |
| A3 | D | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A3 | BD | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A3 | DH | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A3 | BDH | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A3 | DHJ | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A3 | BDHJ | ✓ | ✓ | | ✓ | | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | 70% |
| A4 | D | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A4 | G | ✓ | ✓ | ✓ | | | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | | ✓ | 50% |
| A4 | DH | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A4 | DG | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A4 | DHJ | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A4 | DGHI | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A4 | DGHIJK | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | | | ✓ | | | | | 15% |
| A5 | F | ✓ | ✓ | | | | | | | | | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 30% |
| A5 | G | ✓ | ✓ | | | | | | | | ✓ | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 35% |
| A5 | FG | ✓ | ✓ | | | | | | | | | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 30% |
| A5 | FGL | ✓ | ✓ | | | | | | | | | ✓ | | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | 30% |
| A6 | D | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 65% |
| A6 | G | | ✓ | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 60% |
| A6 | BD | ✓ | | | | ✓ | | | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 65% |
| A6 | DH | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | 15% |
| A6 | DG | | | | | | | | | | ✓ | ✓ | | ✓ | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 40% |
| A6 | BDH | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | 15% |
| A6 | DGHI | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | 15% |
| A6 | BDGHI | | | | | | | | | | | | | ✓ | | ✓ | | | ✓ | | | 15% |
| A7 | D | | ✓ | | | | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | 25% |
| A7 | F | ✓ | ✓ | | | | | ✓ | | ✓ | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | ✓ | | ✓ | | 45% |
| A7 | BD | | ✓ | | | | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | 25% |
| A7 | DF | | ✓ | | | | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | 25% |
| A7 | BDF | | ✓ | | | | | ✓ | | | | | | ✓ | | ✓ | ✓ | | | | | 25% |
| Σ (%) | | 60 | 75 | 10 | 15 | 5 | 0 | 33 | 20 | 40 | 18 | 43 | 30 | 45 | 38 | 55 | 68 | 30 | 58 | 45 | 40 | |

*5.6. táblázat Klikkek - tanulók relációtábla*

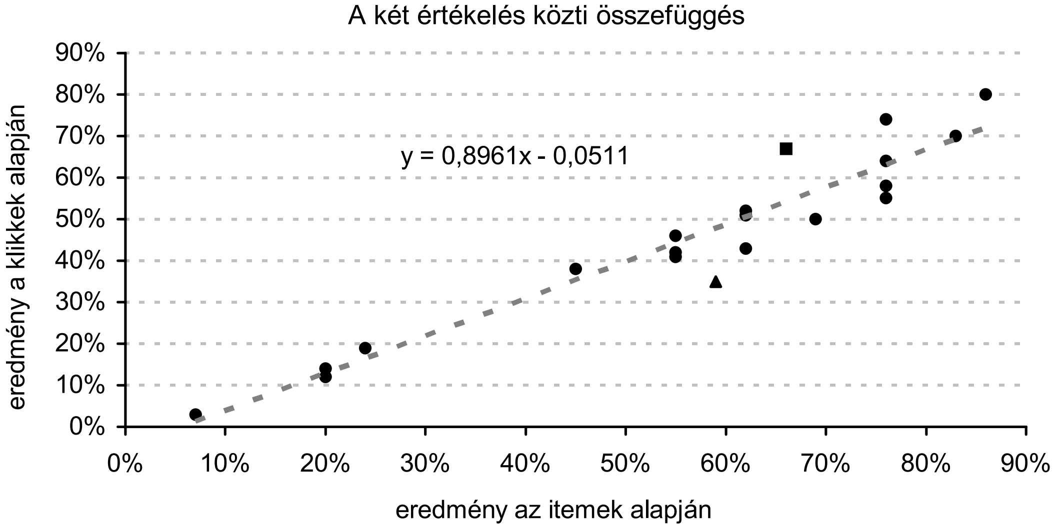
A tudásszerkezet értékeléséhez a strukturális analízis eszközeivel közelítve minden esetben arra az eredményre jutottunk, hogy a *Galois-gráf*ok elkészítése nem jelentett számunkra didaktikai szemponból használható eszközt a tudásháló felmérésének területén.

A feladatok-itemek reláció elemzésével kapott klikkek viszont segítséget nyújthatnak abban, hogy a preferált itemkapcsolódásokat figyelembe tudjuk venni a hagyományos pontozásos értékelési rendszerben. E klikkek bevonását az értékelésbe az indokolja, hogy rendszerszemléletileg az itemkapcsolódások felismerése és alkalmazása többlettudást jelent, amit extra pontokkal honorálhatunk a klasszikus értékelési rendszert némileg módosítva. A hagyományos pontozásos értékelést mi úgy módosítottuk, hogy a feladatsor által preferált itemcsoportok (klikkek) extra pontot kaptak, így a tanulók által elért pontszám a helyesen megoldott itemek és a „megoldott klikkek" pontszámának eredőjeként áll elő. Az instabil és stabil tudás hipotézise mellett elkészítettük tradicionális felfogásban is a pontozást. Mindhárom hipotézis alapján elvégezve az értékelést, az eredmények az 5.9. ábrán láthatók.




*5.9. ábra Numerikus értékelés a klikkek alapján*

A hagyományos numerikus értékeléshez közelebb áll a formális fogalomanalízisnek az az alkalmazása, amikor a klikkek ismeretében a gráf előállítása helyett a preferált itemkapcsolódások ismerete kap többletpontot. A kétféle pontozási rendszer közti kapcsolat szemléletesen is összehasonlítható. A két pontozás alapján kapott eredmények alapján elkészíthetünk egy ún. pontfelhő ábrát, amelyben minden tanulót egy olyan pont ábrázol, melynek első koordinátáját a tanuló itemek alapján, második koordinátáját pedig a klikkeket is figyelembe vevő értékelés alapján elért eredménye adja meg. A két értékelési rendszer összehasonlítására elkészített pontfelhőábrák alapján megállapítható, hogy a két értékelés között erős lineáris kapcsolat van. Az 5.10. ábra esetében a két értékelés között erős korreláció van, a korrelációs együttható értéke 0,96.




*5.10. ábra Pontfelhőábra a két értékelési eljárás összehasonlításához*

A két kiértékelési módszer között mutatkozó lineáris kapcsolattól csak néhány esetben tapasztalunk jelentősebb (±10-15%-os) eltérést. A regressziós egyenestől távolabbra kerülő pontokat vizsgálva eddigi tapasztalatunk az, hogy a klikkek figyelembe vételével olyan tanulók kapnak pozitívabb értékelést, akik az átlagnál sokkal makacsabban törekednek egy-egy feladat teljes megoldására, míg negatívabb értékelést jelent azok számára, akik felszínesen a könnyen megoldható részleteket mazsolázzák ki a dolgozat feladatsorából. A grafikonon például a fekete háromszög a 10-es sorszámú, a fekete négyzet pedig a 16-os sorszámú tanulót jelöli. Az itemek alapján közel hasonló eredményt értek el, ugyanakkor az itemkapcsolódásokat is figyelembe véve már jelentős eltérés lesz teljesítményük megítélésében. Hasonlóan szembetűnő eltérés figyelhető meg a 13, 15, 18 és 20 sorszámú tanulók esetében, akik az itemek alapján pontosan 76%-os eredményt értek el, míg a klikkeket is figyelembe vevő értékelésre áttérve a 15-ös sorszámú tanuló éppen a várható 64%-os, a 18-as tanuló 74%-os, míg a 20-as tanuló csak 55%-os értékelést kap.

A klikkeken alapuló értékelés kidolgozásához további vizsgálatokra és mérésekre van szükség. A „ki-mit nem tudott megoldani” kérdés vizsgálatát még el kell végeznünk, ui. ezek ismerete pontosabb diagnosztizálást tesz lehetővé, ami jelentős segítséget adhat a terápiajavaslatok kidolgozásához.

## 6. EREDMÉNYEK A HIPOTÉZISEKKEL ÖSSZEVETVE

Alaphipotézisünk szerint: *a formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modell alkalmas a megcélzott tudásháló reprezentálására.*

E hipotézis igazoltnak tekinthető abban az értelemben, hogy a *formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modellünket* sikeresen alkalmaztuk két konkrét tananyagrész (konvex négyszögek és vektorfogalom) elemzésére. A *redukált Galois-gráf*ból mint a *megcélzott tudásháló matematikai reprezentációjá*ból érdemi, matematikadidaktikai következtetéseket tudtunk levonni. Modellelméletileg természetesen nyitott kérdés maradt, hogy milyen aspektusokból, milyen közelítés mellett és milyen korlátok között alkalmazható e modell a matematikadidaktikai vizsgálatokban.

A kutatási kérdéseket illető eredményeink a következők:

1. *Milyen konszenzusok árán lehet a trichotomikus modellt és a formális fogalomanalízis által előálló Galois-gráfot egy modellben egyesíteni?*

   A *formális fogalomanalízis*ben formális fogalomnak a reláció klikkjeit, azaz maximálisan zárt halmazpárjait nevezik. A klikkek jellemzésére a *(klikk extenziója, klikk intenziója)* rendezett halmazpár szolgál, míg a *trichotomikus fogalomleírási modell* a fogalmakra a *(terminus; fogalom terjedelme; fogalom tartalma)* rendezett hármast alkalmazza. A klikk extenziójának a fogalom terjedelmét, a klikk intenziójának pedig a fogalom tartalmát megfeleltetve e modellben járulékosan be kellett vezetnünk a klikknek megfelelő ún. *potenciális fogalom* fogalmát. A *potenciális fogalom* határozott terjedelemmel és tartalommal rendelkezik, de nem feltétlenül kap(ott) nevet. A névadás folyamata a formális fogalomanalízisen nem kap szerepet, ezért ezzel a momentummal a modellben külön kell foglalkozni. A *potenciális fogalom* fogalommá válásában a névadás folyamata játszik döntő szerepet, amiben elméleti fontosságának illetve gyakorlati használatának van jelentősége.

   Kutatásunkban rámutattunk arra, hogy e modell alkalmazásaiban figyelembe kell vennünk a következő két momentumot:

   a. Elkülönítendő az alkalmazások két típusa:
      - az elemzést közvetlenül a matematikai objektumokon végezzük, ekkor az eredményül adódó hierarchikus leírás is magukra az objektumokra fog vonatkozni;
      - az elemzés a matematikai objektumosztályok neveire támaszkodik, az eredményül adódó hierarchikus leírás sem az objektumok, hanem a nyelvi reprezentációik logikai hálóját írja le!

      A második (gyakran használt) esetben a kapott redukált *Galois-gráf* mint vizuális reprezentáció a tartalmazási viszonyokat ugyan helyesen tükrözi, de a gráf alapján az objektumosztályok metszete, illetve uniója már nem feltétlenül helyesen állapítható meg!

b. A fogalmak és *potenciális fogalmak* megkülönböztetése azért fontos, mert a megcélzott tudáshálóban csak a névvel rendelkező fogalmak kapnak helyet. Ez azt jelenti, hogy a fogalomháló modellezésekor a névvel nem rendelkező klikkeket a *Galois-gráf*ból törölni kell. A gráf redukálásakor természetesen a tartalmazási viszonyokat megtartjuk, de a tudásháló algebrai értelemben már nem lesz háló a metszet és unió műveletére vonatkozóan.

2. *Milyen előkészítést igényel e modell konkrét előállítása ahhoz, hogy elősegítse a tanítási-tanulási folyamat szabatos és tudatos tervezését?*

A *Galois-gráf* előállítására szolgáló szoftverek ma már rendelkezésre állnak, ami jelentősen megkönnyíti a modell alkalmazhatóságát. A modell gyakorlati alkalmazását az gátolja, hogy nem állnak rendelkezésre kellő alapossággal és részletességgel elkészített tananyagleíró listák. Az elsajátítandó ismeretek és attribútumainak tételes megadását a jelenleg joghatályos dokumentumok nem tartalmazzák, összegyűjtésükhöz a szakirodalom alapos, körültekintő tanulmányozására van szükség. (A középiskolai matematika-tananyagban szereplő objektumok illetve attribútumok száma az előzetes becslések szerint ezres nagyságrendű lenne.)

A tananyag globális és lokális szintű tudatos tervezése mindig az adott tananyagrészben elsajátítandó ismeretek áttekintésén, az egyes tudáselemek szerepének megítélésén alapul. A megcélzott tudásháló *Galois-gráf*fal történő modellezése azonban fokozott követelményt támaszt erre az előzetes elemzésre, ui. már a kiinduláshoz tételesen rögzíteni kell a megcélzott tudásháló elemi ismereteit és a vizsgálat szempontjait. Egy komplex elemzés esetén pedig a vizsgálati szempontoknak ki kell terjedniük az elsajátítandó ismeretek, objektumok matematikai tulajdonságai mellett a figyelembe veendő didaktikai sajátosságaira is.

Kutatásunkban az iskolai tananyag három témakörére, a konvex négyszögekre, a vektorokra és az egyenletekre alkalmaztuk e modellt. E három alkalmazásból ebben a disszertációban a konvex négyszögekre és a vektorokra vonatkozó példák kerültek bemutatásra. Mindkét konkrét matematikadidaktikai alkalmazás példaadó jelleggel illusztrálja a modell alkalmazásának előkészületi igényét.

Ez a modell egyrész a vizsgált témakör aprólékos és gondos elemzését, másrészt az alkalmazójától matematikai és matematikadidaktikai kompetencia-együttest követel meg, cserébe rendszerszemléletű vizuális modellt szolgáltat, amelyen egyidejűleg tanulmányozható az egész és részei.

3. *A modellben a matematikai elvárások és a didaktikai preferenciák milyen mértékben egyeztethetők össze?*

A *formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modell* matematikadidaktikai alkalmazásainak egyrészt meg kell felelniük a matematikai elvárásoknak, másrészt a didaktikai preferenciákat is érvényesíteniük kell. A tudásháló minden modellje esetében kérdéses, hogy e kettős követelményt milyen kompromisszumok mellett elégíti ki modellünk.

A matematikai elvárások között a *Tarski*-féle kritériumok alapján a *tartalmi adekvátság*nak és a *formai szabatosság*nak van prioritása. A tartalmi adekvátság az abszolút pontosságot célozza meg, amit *szükséges és elégséges feltételek*kel ragad meg. A fogalmak leírására mind a formális fogalomanalízis, mind a trichotomikus modell az objektumok tulajdonságaként *szükséges és elégséges feltételek*et használ, ezért az adekvátság szempontjából e modell megfelel a matematikai elvárásnak. Didaktikai szempontból is fontos a pontosságra törekvés, de nem hagyható figyelmen kívül, hogy a prototípus szemantika szerint a nyelvi reprezentációkban nem a *szükséges és elégséges feltételek* kapnak domináns szerepet, hanem az ún. *tipikalitási és centralitási feltételek*, amelyek még a kivételeket is megengedik. Rámutattunk arra, hogy a matematikai definíciókhoz hasonlóan a trichotomikus fogalomleírási modell is a matematikai adekvátságot preferálja, és közben felhívtuk a figyelmet arra is, hogy a matematikatanítás során ügyelni kell arra, hogy a hétköznapi nyelvi nézőpont és a tudományos matematikai nézőpont alaptulajdonságaikban is eltérnek egymástól. A hétköznapi-matematikai nézőpontváltáshoz szükséges képesség csak igen lassan, fokozatosan alakítható ki.

A formai szabatosság a fogalom redundanciamentes leírását jelenti, azaz csak annyi információt jelenítsünk meg, amennyi feltétlenül szükséges az adekvátság feltételének megtartása mellett. E szempont azért kap különleges prioritást a matematikában, mert elsődleges cél, hogy a rendszer logikailag ellentmondásmentes legyen. Trichotomikus modellünk viszont redundáns, hiszen a fogalom leírása az adott kontextuson belül a fogalom összes tulajdonságát tartalmazza. Didaktikailag természetesen előnyös, ha explicite teljesebben jelennek meg a fogalom reprezentációiban a fogalomazonosításhoz szükséges azonosító és megkülönböztető tulajdonságok, hiszen a tulajdonságok redundanciája elősegíti, hogy az új fogalmak több szálon kötődjenek a meglévő tudáshálóhoz. A matematikai szabatosság elvetése didaktikai szempontból azért indokolt, mert a fogalom elsajátítását támogatja.

4. *Van-e a matematikai modellnek a kognitív folyamatok leírására alkalmazható aspektusa?*

A *redukált Galois-gráf* a megcélzott tudásháló modelljeként szemléletesen tükrözi a fogalmak közti alá- és fölérendeltséget, a hierarchikus viszonyt. Az egyes fogalmak a többi fogalomhoz viszonyítva szemléletesen kapják meg a helyüket. A redukált *Galois-gráf*ban vizuálisan is megjelenik a fogalmi terjedelmek tartalmazási viszonya.

A specializálás a klasszikus értelmezésben a fogalmi terjedelem szűkítését jelenti, ami egyszerű halmazelméleti tartalmazással modellezhető. A *Galois-*

*gráf*ban egyrészt tükröződik a specializálás ezen klasszikus értelmezése, másrészt a következő két információt is megjeleníti:

- a tulajdonságok öröklődnek a szűkebb fogalmi terjedelmekre;
- a specializálás klasszikus értelmezése mellett a gráfban megjelenik a specializálás szempontrendszere is.

A *Galois-gráf* szerkezeti felépítésének sajátossága, hogy az objektum-halmaz és az attribútum-halmaz felcserélésével kapott ún. transzponált *tárgyalási kontextus Galois-gráf*ja az eredeti gráf duálisával kanonikusan izomorf, azaz a fogalom általánosítása illetve specializálása lényegében egy gráf két különböző irányú olvasataként jelenik meg benne. A *Galois-gráf* e duális jellegében pontosan tükröződik az, hogy a fogalmi tartalom általánosítása (illetve specializálása) mindig a fogalmi terjedelem specializálását (illetve általánosítását) jelenti egyben. Hierarchikus modellünkről leolvasható az általánosítás és specializálás szempontrendszere. (Példát adtunk arra is, hogy e szempontrendszerek tartalmazhatnak redundanciákat.)

Áttekintettük a konvex négyszögek hierarchiájának különböző prekoncepciók alapján készített ábrázolásait. A különböző gráfok elemzése több félreértelmezhető logikai hibára illetve hiányosságra is ráirányította a figyelmet. Megállapítottuk, hogy a *megcélzott tudásháló*t reprezentáló gráfunk ezen elkövethető logikai hibák illetve hiányosságok számát jelentősen redukálja, hibaforrásként tulajdonképpen csak a nyelvi reprezentációk hiányosságaiból adódó félreérthetőségeket tartalmazza.

5. *A modellnek mint statikus hálónak van-e olyan felhasználási módja, ami a statikus és dinamikus szemléletet összeköti?*

A *redukált Galois-gráf* a megcélzott tudásháló egy olyan statikus vizuális reprezentációja, amelyen egyidejűleg tanulmányozható a fogalmi hierarchia egésze és egyes részletei is. A tananyagegységek időbeli elrendezését modellünk nem határozza meg egyértelműen, de a lehetséges felépítésekhez a gráfból instrukciók nyerhetők. Ezek elemzésekor kiemelt jelentőséget kell tulajdonítanunk annak a kognitív megállapításnak, hogy a tudáshálóba beépített ismeretek törlése gyakorlatilag nem megoldható.

A tudásháló olyan bővítésekor, amikor új, absztrakt objektumot kell bizonyos relevánsnak tekintett tulajdonságok alapján meghatározni, a *Galois-gráf* segítséget nyújt abban, hogy az absztrakt fogalom megalapozásához nélkülözhetetlen konkrét példák sokaságából megfelelően elkülönítsük illetve csoportosítsuk azokat, amelyeknek fontos szerepe van az absztrakt fogalom előkészítésében. A példák megválasztásának alapelvei a következők:

- a példa jellegzetesen hordozza magában az absztrakt fogalom releváns tulajdonságait;

– a példák sorában a nem-releváns tulajdonságok változatos tárháza is jelenjen meg, ellenkező esetben egy-egy felesleges attribútum téves követelményként kapcsolódhat az absztrakt fogalomhoz. (A tévhitek későbbi törlése a tudáshálóból már komoly nehézségekkel jár!)

Az absztrakt vektor fogalmának kiépítését vizsgálva az absztrakció szempontjából releváns tulajdonságok kiemelése és a zavaró momentumok csökkentése alapján megállapítható, hogy az absztrakt vektorfogalom kialakításához a geometriai és az algebrai megalapozásokra egyaránt szükség van. A megcélzott tudásháló általunk elkészített vizuális reprezentációja rámutatott arra is, hogy a *geometriai vektor* fogalmának szerepeltetése a példák sorában nem az absztrakt vektorfogalom kialakításának irányába mutat, hanem a részletes elemzés szerint az osztályozási eljárásra szolgáltat egy újabb példát. Az euklideszi és affin vektorfogalom megalapozásához elkészített *Galois-gráf*ok azt mutatják, hogy a tudásháló szerkezetileg az affin általánosítás során változatlan marad, tartalmában is csak csekély kiegészítések kapnak helyet.

A konvex négyszögek tanításának magyar gyakorlata először a szimmetria tulajdonságokra építi a négyszögfajták jellemzését, majd ennek fixálódását követően a metrikus tulajdonságok alapján tárgyalja a négyszögeket. A középiskolában alapvetően már csak a húr- és érintőnégyszögekkel egészül ki a témakör. A konvex négyszögekre mindhárom kontextusban alkalmaztuk modellünket. A szimmetriák alapján elkészített *redukált Galois-gráf* a metrikus tárgyalás esetén lényegében csak a trapézzal egészül ki, miközben az egyes négyszögosztályok tartalma teljesen más (metrikus) értelmezést is kap, majd a középiskolai általánosításban a húr- és érintőnégyszögekkel egészül ki a konvex négyszögek fogalmi hierarchiája. A tudásháló e reprezentációja alapján megállapíthattuk, hogy e felépítés során az egyes ismeretegységek közt kialakult és elmélyített kapcsolatokat a későbbiekben nem kell törölni, sőt az újabb tulajdonságok alapján a már meglevő kapcsolatok tovább erősödnek. Elemzésünk szerint didaktikus a tananyagnak ez a felépítése, hiszen az egyes tanítási fázisok megcélzott tudáshálói egymásra épülnek.

6. *A modell ad-e instrukciókat a beépítendő új tudáselemek aktivizálását szolgáló feladatok és feladatsorok tervezéséhez?*

Egy tananyagrész *redukált Galois-gráf*ja felhívja a figyelmet néhány feladattípus fontosságára. A konvex négyszögek témakörében konkrétan rámutattunk arra, hogy a feladatok jelentős része a fogalomazonosítás különböző reprezentációi közti átjárhatósága alapján kívánja a tudáshálóban kiépítendő kapcsolatokat megerősíteni. A trichotomikus modell három komponenséből bármelyik megadása esetén a másik két komponenst is tudni kell azonosítani. (A tagadásokat is beleértve ez 2•6 feladattípust jelent!) A fogalmi hierarchia alapján pedig a fogalmak terjedelmére illetve tartalmára vonatkozóan további feladattípusok fogalmazhatók meg.

A feladatsorok jellemzése a feladatok-itemek reláció elemzésén alapul. Meg kellett állapítanunk, hogy a megcélzott tudásháló explicit előállításának hiányában az itemlista előállítása szubjektív, esetenként vitatható elemeket tartalmaz. A különböző feladatsorok jellemezhetők annak alapján, hogy megoldásuk mennyi item ismeretét követeli meg. A feladatsor jellemzője az is, hogy hány item felhasználásával oldhatók meg az egyes feladatok, azaz feladatai mennyire komplexek.

A feladatok-itemek reláció *Galois-gráf*ja alapján bevezettük a *szintkülönbség* fogalmát (a szomszédos klikkek itemszámkülönbsége), ami lehetővé teszi egy feladatsor árnyaltabb jellemzését is. A didaktikusan felépített tankönyvi példatárak *Galois-gráf*jában például csak kis szintkülönbségek fordulnak elő, ui. az összetettebb feladatok megoldását egyszerűbb, illetve fokozatosan nehezedő feladatokkal készítik elő. Az érettségi feladatsorokban több item, komplexebb feladatok és nagyobb szintugrások fordulnak elő.

Egy algebrai átalakítások témakörében íratott ellenőrződolgozat példáján keresztül mutattuk be a strukturális elemzés nehézségeit. A strukturális értékelésben a feladatsor elemzéséből kell kiindulni. A feladatok kiválasztása és az itemlista meghatározása a szaktanári rutinon és intuíción alapul. A feladatok-itemek reláció klikkjeinek meghatározása felhívja a figyelmet arra, hogy bizonyos itemcsoportok többször, együttesen fordulnak elő, ami arra utal, hogy a feladatsor az itemek ilyen csoportos kapcsolódásait preferálja. Tudatos feladatválasztások esetén ezek a kapcsolódások rejtett tanári preferenciákat jelenítenek meg, amelyek feltárását a feladatsor *Galois-gráf*ja elősegítheti.

7. *A modell alkalmazható-e az ellenőrző feladatsorok tanulói megoldásainak kiértékelésében?*

A tanulói megoldások hagyományos értékelései a tanulók-itemek relációtáblán alapulnak, amely azt az információt tartalmazza, hogy az egyes tanulók melyik feladat-itemeket oldották meg helyesen. Egy adott item többször is előfordulhat egy feladatsorban, amit az egyes tanulók bizonyos feladatokban helyesen oldanak meg, más feladatokban viszont nem. Szélsőséges esetként a következő két hipotézissel éltünk az item tudására vonatkozóan:

– *instabil tudás hipotézise*: az „item tudását” elfogadjuk, ha a tanuló <u>legalább egyszer</u> helyesen megoldotta;
– *stabil tudás hipotézise*: egy „item tudását” csak akkor ismerjük el, ha <u>minden</u> előfordulásakor a tanuló helyesen oldja meg.

A gyakorlatban alkalmazott értékelések általában e két szélsőség között állnak, ui. az egyes itemek elfogadása súlyozottan történik annak alapján, hogy az esetek hány százalékában oldotta meg helyesen a tanuló.

A tanulók-itemek reláció *Galois-gráf*ját elkészítve akár a *stabil*, akár az *instabil tudás hipotézise* alapján többnyire olyan bonyolult összefüggésű, nagyméretű gráfot kapunk, amelyből megalapozott didaktikai következtetéseket nem tudtunk levonni.

Példát mutattunk arra, hogy a feladatok-itemek reláció elemzésével előálló klikkek segítséget nyújthatnak ahhoz, hogy a preferált itemkapcsolódásokat a hagyományos pontozásos értékelési rendszeren belül figyelembe vehessük. Az itemek mellett a „megoldott klikkeket” is pontozva módosítottuk az eredeti értékelés. (A klikkek bevonását az értékelésbe az indokolja, hogy az itemkapcsolódások felismerését és alkalmazását rendszerszemléletileg többlettudásként ismerjük el.)

Megállapítottuk, hogy a hagyományos és a klikkeket is figyelembe vevő értékelés között erős korreláció van. (A korrelációs együttható értéke: 0,96) A regressziós egyenestől távolabbra kerülő pontokat vizsgálva eddigi tapasztalatunk szerint a pozitívabb értékeléseket olyan tanulók kapták, akik az átlagnál sokkal kitartóbban, makacsabbul igyekeznek egy-egy feladatot megoldani, illetve negatívabb értékelést jelent azok számára, akik felszínesen inkább a könnyen megoldható részleteket mazsolázzák ki a dolgozat feladatsorából.

# 7. ÖSSZEGZÉS, KITEKINTÉS

Megmutattuk, hogy a megcélzott tudásháló matematikai modelljeként a Galois-gráfot alkalmazva matematikadidaktikai szempontból érdemi információkhoz tudunk jutni. A modell precíz alkalmazásai nyomán kiderítettük, hogy a fogalmi hierarchiák esetében a klikkek a lehetséges, ún. *potenciális fogalmak*nak felelnek meg, melyek nem mindegyike válik fogalommá, így a fogalmi hierarchiák modellje csak egy redukált Galois-gráf, ami már nem feltétlenül algebrai háló az unió és a metszet műveletére.

E modell alkalmasnak bizonyult az *általánosítás* és *specializálás*, valamint az *absztrakció* és *konkretizáció* gondolkodási műveletpárok olyan duális leírására, amelyből a kognitív pszichológia alapelveivel konkrét instrukciókat kapunk a szóba jöhető tananyagfelépítésekre. A konvex négyszögekre végzett modellvizsgálatunk kimutattta, hogy a magyar matematikatanításban kialakult gyakorlat (először szimmetriaelvű, majd metrikus tulajdonságokon történő tárgyalásuk a középiskolában kiegészül a húr- és érintő négyszögekkel) didaktikus, mert a megcélzott tudásháló csak bővül, miközben a már meglevő belső kapcsolatok megerősítést kapnak. A modell hasonló eredményt adott a vektor euklideszi és affin tárgyalására, miközben az is kiderült, hogy az *absztrakt vektor* fogalmának tartalmas kiépítéséhez az algebrai és a geometriai megalapozásokra egyaránt szükség van. (A modellvizsgálatunk rámutatott arra is, hogy a Magyarországon is használatos *geometriai vektor* fogalma elsősorban nem az *absztrakt vektor* fogalmi kialakulását segíti elő.)

Kognitív szempontból ennek a modellnek az egyik előnye, hogy az *általánosítás* és *specializálás*, valamint az *absztrakció* és *konkretizáció* releváns és irreleváns szempontjait szemléletesen és explicite tartalmazza. A megcélzott tudásháló e matematikai modelljén közvetlenül tanulmányozható, hogy a különböző fogalmi építkezések során keletkező részhálók egyes kapcsolatai mennyiben kapnak megerősítést, megmaradnak-e, vagy kiegészülnek, valamint hogyan kerülhető el, hogy a későbbiekben ne kelljen törölni egy közben (feleslegesen) kialakított, beépített kapcsolatrendszert. Az utóbbi momentumnak különösen nagy jelentőséget kell tulajdonítanunk, ui. a meglévő ismeret törlése hátráltatja, sőt esetenként ellehetetleníti a tanulási folyamatot.

A modell matematikai értelemben ugyan nem szabatos, mert egy fogalomhoz az összes tulajdonságát hozzárendeli, de ez didaktikai szemponból határozottan előnyös. Ez a fogalomleírási modell is adekvát, szükséges és elégséges feltételekkel operál, ezért nem alkalmas a hétköznapi nyelvhasználathoz és gondolkodáshoz jobban illeszkedő prototípus szemantikai észrevételek hasznosítására. A tipikus tulajdonság leírásához más típusú modelleket alkalmazunk. *(Fatalin 2003c; Vásárhelyi 2007)*

A modell alkalmazhatóságát erősen korlátozza, hogy a jelenleg joghatályos dokumentumok tételesen nem sorolják fel a megtanulandó ismereteket, pedig még ezek matematikai és didaktikai sajátosságaira is szükség van a kiindulási reláció előállításához. Az ismeretek és követelmények tételes megadásához gondos, aprólékos munka, valamint matematikai és matematikadidaktikai kompetencia szükséges.

A szükséges ismeretek és követelmények tételes megadásának hiányában e modell csak erősen korlátozott mértékben alkalmazható a tanulói tudás értékelésében. A hétköznapi tanítási gyakorlatban a szaktanári rutin és intuició hidalja át a tételesen megadott követelményrendszer hiányát, amitől az értékelés szubjektívebbé válik. A példatárak és a feladatsorok elemzésére felhasználható e modell, ha a tudásegységeket itemként azonosítja egy szakember. A Galois-gráffal a feladatsorok szerkezete árnyaltabban jellemezhetővé válik.

A feladatsorok tanulói megoldásainak kiértékelésére használva a Galois-gráfot, csak meglehetősen bizonytalan értékű didaktikai megállapítások tehetők az osztály tudásstruktúrájára. A feladat- és item-megoldások alapján a tanulói tudásra közvetlenül nem tudunk következtetni, ui. a tanulók tudásában jelentős instabilitás tapasztalható. Ezek hatása vizsgálható az *instabil* és a *stabil tudás hipotézise* alapján. Akár a tradicionális értékelés, akár e két szélsőséges hipotézis alapján készítjük is el egy dolgozat alapján az osztály teljesítményét leíró Galois-gráfot, megbízható didaktikai következtetést az osztály tudására vonatkozóan nem tudunk tenni.

A tanulói megoldások klasszikus pontozásos értékelésében előrelépést jelenthet, ha a feladatsor klikkjeinek, azaz a szaktanár által preferált itemcsoportok együttes megoldásáért extrapontot adunk. Az így módosított értékelés erős korrelációt (0,96) mutat a csak itemeket pontozó értékeléssel. Kivételes esetekben tapasztalható csak jelentősebb (±10-15%-os) eltérés a két értékelés között.

A modell alkalmazásához, valamint az értékelési rendszer objektívabbá tételéhez arra lenne szükség, hogy a megtanulandó ismeretek és követelmények tételes formában is előírásra kerüljenek. Az előzetes becslések szerint e listák ezres nagyságrendűek lehetnek. E listák központi meghatározásának hiányában a Galois-gráf modellként való didaktikai alkalmazásai csak szűkös témakörökre szorítkozó próbálkozásként fognak megjelenni a közeljövőben. Az osztály és az egyéni tudás vizsgálatához már nem elégséges a trichotomikus fogalomleírási modell, ui. az objektív fogalom mellett helyet kell biztosítani a szubjektív fogalom számára is.

## SUMMARY

One of the missions of teaching mathematics is to develop the skill of pupils' concept-building with the specific means. The concept-building is a complex process that is difficult to examine, because the subjective internal representation of the concepts is not available for us by direct methods, moreover the single concept gets a meaning not by itself but only by the connection system of the other concepts. Therefore the examination of the concept-building is necessarily a model examination, since we try to conclude on the internal thinking processes on the basis of the external representations appearing by the means of communication.

In the *formal concept analysis* concept is the name of the cliques of relation, i.e. the maximally closed pairs of set of the relation. The ordered pair of sets serves the characterization of the cliques *(extent or intent of the clique)*, while the *trichotomical concept description model* applies the ordered triple for the concepts *(terminus; extent of the concept; meaning of the concept)*. As we mapped the extent of the clique and the extent of the concept, and mapped the intent of the clique and the meaning of the concept in this model we had to introduce accessorily the so-called concept of *potential concept* that suits the clique. The *potential concept* has exact extent and meaning, but does not necessarily get a name. The differentiation of the concepts and *potential concepts* is important because only the concepts with names get place in the aimed knowledge net. It means that during modelling the concepts net, the cliques without names have to be deleted from the Galois-graph. Of course during the reduction of the graph we keep the containing relations, but the knowledge net in algebraic intellect will no longer be a net regarding to the operation of the section and union.

The goal of our present research was applying the *trichotomical concept description model* based on the *formal concept analysis* for modelling the aimed knowledge net. The examination of the *reduced Galois-graph* produced as a model revealed the followings:

1. *The concept hierarchies can be modelled with DAG (directly acyclic graphs), but these are usually not algebraic nets on the operations of section and union.*

We have surveyed the representations of the hierarchy of convex quadrilaterals made on the basis of different preconceptions. The analysis of the different graphs also called attention to several logical mistakes and defects that may be badly interpreted. We have established that our graph representing the *aimed knowledge net* reduces the number of these committable logical mistakes and defects greatly, as sources of error it actually contains only the possible bad intelligibility coming about the defects of the language representations.

2. *To apply the model accurately the detailed development of the curricular specifications are needed.*

Nowadays the software producing the Galois-graph is available, but the practical application of the model is held down because lists describing the curriculum are not available thoroughly and fully. This model requires the detailed and careful analysis of the examined subject matter on one hand, and mathematical, mathematical didactics competence collectivity from its applier on the other hand. In return for that it supplies such system-viewed visual model, on what the whole and its parts can be examined simultaneously. To collect them the thorough, careful and time-consuming investigation of the special literature is necessary.

3. *The reduced Galois-graph is such a visual representation of the aimed knowledge net, on which the whole concept hierarchy and also its parts can be examined simultaneously.*

The single concepts compared to the other concepts get their places expressively. The content relation of the conceptual extents appears in the reduced Galois-graph visually too.

4. *The reduced Galois-graph as the model of the aimed knowledge net suggestively reflects the basic properties of the dual action-pairs of the generalization–specialization and abstraction–concretization from cognitive view.*

The generalization and specialization of the concept appear essentially as two different direction of interpretation of one graph in it. In this dual character of the Galois-graph it reflects correctly that the generalization (or the specialization) of the conceptual contents always means the specialization (or the generalization) of the conceptual extension at the same time. The standpoints system of the generalization and the specialization can be read off from our hierarchical model.

We applied our model on the convex quadrilaterals and on the abstract vector concepts. For example on the convex quadrilaterals we got the following conclusion:

The Hungarian teaching practice at first builds the characterization of the quadrilaterals types on the symmetry characteristics, then after its fixing describes the quadrilaterals on the basis of the metrical characteristics. This subject matter is completed only with the inscribed and circumscribed quadrilaterals in the secondary school. We applied our model on the convex quadrilaterals in all three contexts. The *reduced Galois-graph* executed on the basis of symmetries is practically completed only with the trapezium in case of metrical discussion, while the contents of the quadrilaterals classes get also a totally different (metrical) interpretation, then in the secondary school generalization the concept hierarchy of the convex quadrilaterals is completed with the inscribed and circumscribed quadrilaterals. According to this representation of the knowledge net we could determine that in case of this construction the connections developed and deepened among the single knowledge units are not have to be cancelled later, moreover the newer features strengthen the already existing connections. According to our model this construction of the curriculum is didactic, because the aimed knowledge nets of the phases of teaching are built on each other.

5. *The Galois-graphs are suitable means to characterize the series of tasks more precisely, that help to uncover the hidden preferred items of the teacher.*

On the basis of the relation Galois-graph of the tasks-items we have introduced the concept of *level difference* (the difference between the numbers of items of the neighbouring cliques), that also makes it possible to characterize finely a series of tasks. For example in the Galois-graph of the didactically built collections of examples in the schoolbooks occur only small level differences, because more simple tasks that become gradually more difficult prepares the solving of the more complex tasks. There are more items, more complex tasks and bigger jumps in levels in the series of tasks of the final examination.

We have presented the difficulties of the structural analysis on the example of a controlling test made written in the subject matter of the algebraic transformations. The choice of the tasks and the determination of the item list are based on the routine and intuition of the subject teachers. The determination of the relation cliques of the tasks-items calls attention to that some groups of items occur together, several times, that refer to that the series of tasks prefers this grouped connections of the items. In case of conscious choice of tasks these connections represent hidden teacher's preferences, of which disclosure the Galois-graph of the series of tasks may help.

6. *The Galois-graphs of the pupils-items relation are large-sized graphs with complicated connections, because of the instability of the pupils' knowledge, from which we can not draw grounded didactics conclusions. We examined the tasks solutions of the pupils' on the basis of the hypotheses of the stabile and instable knowledge.*

We have set an example on that the cliques coming about the analysis of the tasks-items relation can help considering the preferred item connections within the traditional evaluation system on points. We have modified the original evaluation by pointing the „solved cliques" beside the items. (Participation of the cliques in the evaluation is reasonable because we admit the recognition and application of the item connections as plus knowledge in system view.) We have set an example on that the cliques coming about the analysis of the tasks-items relation can help considering the preferred item connections within the traditional evaluation system on points. We have modified the original evaluation by pointing the „solved cliques" beside the items. (Participation of the cliques in the evaluation is reasonable because we admit the recognition and application of the item connections as plus knowledge in system view.)

# Felhasznált irodalom


1 Ambrus, A. (1995), *Bevezetés a matematikadidaktikába* ELTE Eötvös Kiadó

2 Ambrus, A. (2002), A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai. *Új pedagógiai szemle*. 52. 157-170.

3 Artin, E. (1957), *Geometric algebra Interscience* Publisher New York – London, Princeton University

4 Balla, Á. (1994, szerk.), *A helyi tantervek*. Megyei Pedagógiai Intézet, Miskolc

5 Ballér, E. (1996), *Tantervelméletek Magyarországon a XIX-XX. században* (A tantervelmélet forrásai 17. kötet) OKI, Budapest.

6 Bárdossy, I. (1998), *A curriculumfejlesztés alapjai*. JPTE Távoktatási Központ, Pécs

7 Báthory, Z. & Gyaraki, F. (1982, szerk.), *Pedagógiai kézikönyv.* Budapest: Tankönyvkiadó.

8 Baziljev & Dunyicsev & Ivanyickaja (1987), *Geometria I.* Tankönyvkiadó 21-40.

9 Birkhoff, G. (1993), Lattice Theory. *American Mathematical Society: Colloquium Publications*, Vol. 25, Third edition, First published 1940, Providence, Rhode Island

10 Boltjanszkij & Jaglom (1962), A vektorok a geometria iskolai anyagában *Математика в школе* 1962/2.

11 Bruner J. S. (1970), *Der Prozess der Erziehung* Schwann Düsseldorf

12 Csapó, B. (2000), *Kognitív pedagógia* Osiris Kiadó, Budapest

13 Coxeter, H.S.M. (1973), *A geometriák alapjai* Műszaki Könyvkiadó

14 Czapáry E. (1996): *Matematika a középiskolák 1. osztálya számára* Nemzeti Tankönyvkiadó

15 Czapáry E. (1996): *Tanári kézikönyv a szakközépiskolák I. és II. osztályos matematika tananyagának tanításához* Nemzeti Tankönyvkiadó

16 Davis P.J. & Hersh R. (1984), *A matematika élménye* Műszaki Könyvkiadó 139-175.

17 Dobi, I. (1997), Megtanult és megértett matematikatudás In: Csapó, B. szerk. *Az iskolai tudás*, Osiris 177-199.

18 Dörfler W. (1984), Verallgemeinern als zentrale mathematische Tätigkeit *Journal für Didaktik der Mathematik* 4/1984.

19 Faludi, Sz. (1963), A tantervek készítését megalapozó pedagógiai kutatások. In: *Tanulmányok a neveléstudomány köréből. 1962*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

20 Fatalin, L. (1979), Geometriai algebra *TDK-dolgozat* ELTE, Budapest

21 Fatalin, L. (1980), Lineáris terek általános görbeelmélete *TDK-dolgozat* ELTE Budapest

22 Fatalin, L. (1981), Lineáris terek általános görbeelméletéhez *Szakdolgozat* ELTE Budapest

23 Fatalin, L. (1990), 64-csatornás programozható mérésadatgyűjtő tervezése, megépítése és felprogramozása *Diplomamunka* BME Budapest

24 Fatalin, L. (1991), Biztonság- és kockázatelemzési módszerek az épületgépészetben *13. Nemzetközi Távhőkonferencia 2. kötet. 67-76. Hajdúszoboszló*

25 Fatalin, L. (1992), A hőszállítási költségek alakulásának meghatározása mérésadatgyűjtők és matematikai módszerek alkalmazásával. *Hőszolgáltatás `92 Nemzetközi Konferencia 1. kötet. 19-26.Lillafüred*

26 Fatalin, L. (1993a), Mérő-értékelő rendszerek a pedagógiában *Kutatási jelentés* PSZM Projekt

27 Fatalin, L. (1993b), Távhőrendszerek energiaveszteségeinek feltárása és csökkentésének módszerei *Nemzetközi Távhőfórum 2.kötet. Tihany*

28 Fatalin, L. (1995) A tudomány térképe *Iskolakultúra* 1995/23. 106-17.

29 Fatalin, L. (1996), Adateszméletek *Iskolakultúra* VI/5. 44-54.

30 Fatalin, L. (1994), Mérünk vagy értékelünk *Iskolakultúra* II/5. 25-35.

31 Fatalin, L. (2000), Az ezredforduló oktatásirányítási rendszere a megyei fejlesztési tervek tükrében *BKE Diplomamunka*

32 Fatalin, L. (2003a) Strukturelle Analyse des Lernstoffes, in: K. J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.), *Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik* Abakus, Salzburg, 45-56.

33 Fatalin, L. (2003b) Strukturelle Analyse von Aufgabenserien und deren Schülerlösungen, in: K. J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.), *Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik* Abakus, Salzburg, 59-78.

34 Fatalin, L. (2003c) Systemtheoretische Untersuchung des Stoffes durch binäre Relationen - konvexe Vierecke - Konvex négyszögek rendszerelméleti vizsgálata binér relációkkal in: K.J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.) Az Ost- und Südeuropa Institut által támogatott salzburgi *Doktorandusz-szeminárium 2003.* kétnyelvű kötete URL: www.mathdid.inhun.com

35 Fatalin, L. (2005a) Erzeugen eines Wissensnetzes durch Galois-Graphen – Tudásháló szemléltetése Galois-gráffal in: K.J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.) Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi *Doktorandusz-szeminárium 2004.* kétnyelvű kötete, Salzburg

36 Fatalin, L. (2005b) Tananyagstruktúra szemléltetése *Galois-gráf*okkal, T. Berta & É. Vásárhelyi, (Eds.) *2$^{nd}$ Central-European PhD Conference on Mathematics Didactics* Komarno

37 Fatalin, L. (2005c) Über den Vergleich des mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Vektorbegriffs durch den Galois-Graphen. *Teaching Mathematics and Computer Science*, Debrecen, Jg.3. N1. 1-12.

38 Fatalin, L. (2007) Veranschaulichung der Lehrstoffstruktur durch Galois-Graphen, *Teaching Mathematics and Computer Science,* Debrecen, Jg.5. N1. 217-229.

39 Fatalin, L. & Varsics, Z. (1993a) A szavazás egy matematikai modellje *Iskola-kultúra* 1993/3-4. 100-101.

40 Fatalin, L. és Varsics, Z. (1993b), *A tudományos modellalkotás alapjai I.* Calibra

41 Fatalin, L. és Varsics, Z. (1995), *A tudományos modellalkotás alapjai II.* Keraban

42 Fatalin, L. & Varsics, Z. (2005) Über Vertiefungsmöglich der Gleichungsbegriff in der Mittelschule – Az egyenlet fogalmának egy elmélyítési lehetőségéről a középiskolában in: K.J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.), Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi *Doktorandusz-szeminárium 2004.* kétnyelvű kötete, Salzburg

43 Freud, R. (1981), Megoldhatók-e az egyenletek? in: *Nagy pillanatok a matematika történetében* 50-80. Gondolat Kiadó

44 Freud, R. (1996), *Lineáris algebra* ELTE Eötvös Kiadó

45 Fried E. (1972), *Absztrakt algebra elemi úton* Műszaki Könyvkiadó

46 Fried, E. (1977), *Klasszikus és lineáris algebra* Tankönyvkiadó

47 Fried, E. (1986), *Lineáris algebra a speciális matematikai osztályok számára* Tankönyvkiadó

48 Ganter, B. & Wille, R. (1996), *Formale Begrifsanalyse,* Springer, Berlin,

49 Gagné, E. D. (1985), *The cognitive psychology of school learning*, Little, Blown and Company, Boston

50 Gyaraki, F. F. (1983), *A tananyagelemzés, -kiválasztás, -elrendezés, -építés, a tantárgyi program és a tantervkészítés elvi kérdései, különös tekintettel az egzakt módszerekre* Budapest, Agroinform

51 Hajnal, I. & Némethy, K. (1991), *Matematika a gimnázium 1. osztálya számára* Nemzeti Tankönyvkiadó

52 Hajnal, I. (1996) *Matematika a speciális matematika I. osztálya számára* Nemzeti Tankönyvkiadó

53 Hajós, Gy. (1960), *Bevezetés a geometriába* Tankönyvkiadó

54 Halmos, P. R. (1974), *Finite-dimensional vector spaces* Springer magyarul: Végesdimenziós vektorterek Műszaki Könyvkiadó (1987)

55 Hársing, L. (1981), *A tudományos érvelés logikája* Akadémiai Kiadó

56 Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. (1932): *Anschauliche Geometrie* in: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften XXXVII. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

57 Hollai, M. & Vásárhelyi, É. (1993), Az analógia szerepe a matematikatanításban *Matematikatanár-képzés*

58 Inhelder, B. & Piaget, J. (1984), *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig* Akadémiai Kiadó

59 Jaglom, I.M. (1985), A Galilei transzformáció és a speciális relativitás-elmélet Gondolat Kiadó

60 Jánossy, L. & Gnädig, P. & Tasnádi, P. (1983), *Vektorszámítás I-III.* Tankönyvkiadó

61 Kelemen, L. (1985), *Pedagógiai pszichológia* Tankönyvkiadó

62 Kiefer, F. (2000), *Jelentéselmélet,* Corvina, Budapest

63 Kiss, S. (1999), *A háromszög nevezetes körei,* Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár

64 Kovács, Sz. (2003)A *Galois-gráf* alkalmazása a fizika tanításában *Iskolakultúra* 46-55.

65 Kőnig, D. (1936), *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig

66 Kuros, A.G. (1978), *Felsőbb algebra* Tankönyvkiadó

67 Lakatos, I. (1998), *Bizonyítások és cáfolatok* TypoTEX

68 Láng, H (1975), Ne csak tanítsuk, alkalmazzuk is a vektorokat! *A Matematika Tanítása* 1975. 1.sz.

69 Lang, S. (1965), *Algebra* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass, Columbia University, New York

70 Lénárd, I. (1984), *A problémamegoldó gondolkodás* Akadémiai Kiadó

71 Lévárdi, L. & Sain, M. (1982), *Matematikatörténeti feladatok* Tankönyvkiadó

72 Megyesi, L. & Skrapits, L. (1974), A vektormennyiségek és a vektor fogalmáról *ELTE TTK Szakmódszertani közlemények* VII. 176-203.

73 Mérő, L. (1996), *Mindenki másképp egyforma A játékelmélet és a racionalitás pszichológiája* Tericum Kiadó

74 Mérő, L. (1997), *Észjárások A racionális gondolkodás és a mesterséges intelligencia* Tercium Kiadó

75 Mitroica, Gh. (1987), *Din peripetiile rezolvitor de probleme* Editura Albatros, Bucuresti

76 Molnár, E. (1972), *A matematikai és fizikai térfogalom kapcsolatáról és világnézeti vonatkozásáról* ELTE Sokszorosító

77 Molnár, E. (1972), Geometriai axiomatika és relativitáselmélet *ELTE TTK Szakmódszertani közlemények* V. 72-112.

78 Molnár, E. (1971), Tükrözésgeometriák *ELTE TTK Szakmódszertani közlemények* IV. 54-86.

79 Nagy, É. (1997), A *Galois-gráf* alkalmazása a testnevelésoktatásban *Iskolakultúra* 3-10.

80 Nagy, J. (1994): Tanterv és személyiségfejlesztés. *Educatio* 3. sz.

81 Nemcsics, A. (1990), *Színdinamika. Színes környezet tervezése* Akadémiai Kiadó

82 Obádovics, J. Gy. (1994/58), *Matematika* Scolar Kiadó

83 Odvarko, O. & Mikulcsak, J. & Sedivy, J. & Visin, J. (1971), *Útmutató a matematika tanításához a gimnázium 2. osztályában* Slovenskè Pedagogickè Nakladatelstvo, Bratislava

84 Olosz, F. (2003), *Vektorok alkalmazása a geometriában* Appendix Kiadó, Marosvásárhely

85 Olosz, F. (2005), Mértanfeladatok megoldási stratégiái. T. Berta & É. Vásárhelyi, (Eds.) *2nd Central-European PhD Conference on Mathematics Didactics* Komarno

86 Orosz, S. (1994): *Pedagógiai mérések* Korona Kiadó, Budapest.

87 Pálfalvi, J. (2000), *Matematika didaktikusan* Typotex, Budapest

88 Pelle, B. (1974), *Geometria* Tankönyvkiadó, Budapest

89 Peller, J. & Megyesi, L. (1982), *Függvények elemi vizsgálata. Vektorok. A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában III.* Tankönyvkiadó

90 Piaget, J. (1967), *La psychologie de l'intelligence* Paris, Armand Colin, magyarul: Az értelem pszichológiája Kairosz Kiadó 1997.

91 Piaget, J. (1985), *The Equilibration of Cognitive Stuctures* Cambridge MA : Harvard

92 Pietzsch (1988), A tanárjelöltek felkészítése matematika fogalmak tanítására in: Ambrus(Eds.) *Matematikadidaktikai tanulmányok* Tankönyvkiadó

93 Pinker, S. (1999), *Nyelvi ösztön* TypoTEX

94 Pléh, Cs. (1992), *Pszichológiatörténet* Gondolat Kiadó

95 Pogáts, F. (1992), *Vektorgeometria* Tankönyvkiadó

96 Pogáts, F. (1992), *Vektorok, koordinátageometria, trigonometria* Tankönyvkiadó

97 Pólya, Gy. (1988), *A gondolkodás iskolája* Gondolat Kiadó

98 Pólya, Gy. (1988*), Indukció és analógia. A matematikai gondolkodás művészete I.* Gondolat Kiadó

99 Pólya, Gy. (1988), *Indukció és analógia. A plauzibilis következtetés II.* Gondolat Kiadó

100 Poynter, A. (2004), *Effect as a pivot between actions and symbols: the case of vector* Institut of Education University of Warwick

101 Reiman, I. (196.) *A trigonometria tanítása. Fejezetek a középiskolai matematika-tanítás módszertanából III.* Tankönyvkiadó

102 Reiman, I. (1967), *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.* Középiskolai szakköri füzetek Tankönyvkiadó

103 Reiman, I. (1971), *Vektorok a geometriában*. Szakköri feladatgyűjtemény Tankönyvkiadó

104 Reimann, I. (1999), *Geometria és határterületei* Szalai Könyvkiadó

105 Rubinstein, Sz. I. (1946), *Основы общей псиологии* Учпедгиз Москва magyarul: Általános pszichológia Akadémiai Kiadó (1979)

106 Ruzsa, I. (1968), *A matematika és a filozófia határán* Gondolat Kiadó

107 Ruzsa, I. (1971), *A matematika néhány filozófiai problémájáról* Tankönyvkiadó

108 Sain, M. (1986), *Nincs királyi út!* Matematikatörténet Gondolat Kiadó

109 Sain, M. (1993), *Matematikatörténeti ABC* Nemzeti Tankönyvkiadó. TypoTex

110 Simionescu, Gh.D. (1977), *Analitikus térmértan* Editura didactică şi pedagogică Bucureşti

111 Simon, H. A. (1979), Information Processing of Cognition American Review of Psychology 363-396 o magyarul: *Az információfeldolgozásként értelmezett emberi megismerés modelljei* in: Korlátozott racionalitás Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 1982.

112 Skemp, R. R. (1971), *The psychology of learning Mathematich* Penguin, Harmondsworth, Middlesex magyarul: *A matematikatanulás pszichológiája* (1975) Gondolat Kiadó

113 Srejder, Ju.A. (1975), *Egyenlőség, hasonlóság, rendezés* Gondolat Kiadó

114 Sternberg, R.J. & Ben-Zeev, T. (1998.), *A matematikai gondolkodás természete* Vince Kiadó

115 Struik, D.J. ((1958), *A matematika rövid története* Gondolat Kiadó

116 Szénássy, B. (1974), *A magyarországi matematika története a 20. század elejéig* Akadémiai Kiadó

117 Szendrei, J. (1975), *Algebra és számelmélet* Tankönyvkiadó

118 Szigetvári, S. (1981), *A fogalmak dialektikája* Akadémiai Kiadó

119 Taageperra, M. & Potter, F. & Miller, E.G. & Lakshminarayan, K. (1997), Mapping students' thinking patterns by the use of knowledge space theory *International Journal of Science Education* 19. 283-302.o

120 Takács, V. (1994): *Galois-gráf*ok pedagógiai alkalmazása. *Kandidátusi értekezés* Bp.

121 Takács, V (2000), *A Galois-gráf pedagógiai alkalmazásai,* Iskolakultúra, Pécs

122 Takács, V (2003), A fizika feladatok absztrakciós szintje szerinti teljesítmény az intelligencia-hányados tükrében *Magyar Pedagógia* 103/2. 141-154.

123 Tall, D.O. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematich, with particular reference to limits and continuity *Educational Studies in Mathematics*, 12. 151-169.

124 Tarsky, A. (1990), *Bizonyítás és igazság* Gondolat Kiadó

125 Tóth, Z. (1993), A kémiai számítások értékelése *Iskolakultúra III*/20. 53-60.

126 Tóth, Z. (2005), A tudásszerkezet és a tudás szerveződésének vizsgálata a tudástér-elmélet alapján *Magyar Pedagógia* 105/1 59-82.

127 van der Waerden, B.L. (1977), *Egy tudomány ébredése* Gondolat Kiadó

128 van der Waerden, B.L. (1967), *Algebra II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

129 van der Waerden, B.L. (1971), *Algebra I.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

130 Varsics, Z. (1992), A vektorfogalom kialakítása 1992. *Iskolakultúra* II/3. 2-7.

131 Varsics, Z. (1992), Osztályozási modellek – hierarchikus rendszerek *Iskolakultúra* II/3. 2-7.

132 Varsics, Z. (1992), Rendszerezünk-rendszerezzünk?! *Iskolakultúra* II/3. 2-7.

133 Varsics, Z. (1993), Kaleidoszkóp a geometria tanításáról 1993. *Iskolakultúra* III/23. 29-35.

134 Vásárhelyi, É. (2006) Bemerkungen zur Prototypentheorie – Begriffs - und Konzeptbildung *Teaching Mathematics and Computer Science,* Debrecen, Jg.4. N2. 365-390.

135 Vigotszkij, L. S. (1971), *A magasabb pszichikus funkciók fejlődése* Gondolat Kiadó

136 Vigotszkij, L. S. (1956), *Мышление и речъ* Моска, magyarul: *Gondolkodás és beszéd* Trezor Kiadó 2000.

137 Vojsvillo, J. K. (1978), *A fogalom* Gondolat Kiadó

138 Wartofsky, M. W. (1977), *A tudományos gondolkodás fogalmi alapjai* Gondolat Kiadó

139 Weyl, H. (1952), *Symmetry* Princeton University Press magyarul: Szimmetriák (1982) Gondolat Kiadó

140 Wittmann E. Ch. (1981), *Grundfragendes Mathematikunterrichts* Vieweg

141 Zech F. (1989), *Grundkurs Mathematikdidaktik* Belts Verlag, Basel

## PUBLIKÁCIÓS JEGYZÉK

*IDEGEN NYELVŰ REFERÁLT PUBLIKÁCIÓK*


1. *Fatalin L.* (2003) Strukturelle Analyse des Lernstoffes, in: *K. J. Parisot & É. Vásárhelyi, (Eds.), Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik.* Abakus, Salzburg, 45-56.
2. *Fatalin L.* (2003) Strukturelle Analyse von Aufgabenserien und deren Schülerlösungen, in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik.* Abakus, Salzburg, 59-78.
3. *Fatalin L.* (2005) Über den Vergleich des mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Vektorbegriffs durch den Galois-Graphen. Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, Jg.3. N1. 1-12.
4. *Fatalin L.* (2005) Erzeugen eines Wissensnetzes durch Galois-Graphen – Tudásháló szemléltetése *Galois-gráf*fal in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2004. kétnyelvű kötete hagyományos és elektronikus formában,* Salzburg
5. *Fatalin L.* (2007) Veranschaulichung der Lehrstoffstruktur durch Galois-Graphen, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, Jg.5. N1. 226-238.


*KÉTNYELVŰ PUBLIKÁCIÓ*


6. *Fatalin L.* (2003) Systemtheoretische Untersuchung des Stoffes durch binäre Relationen - konvexe Vierecke - Konvex négyszögek rendszerelméleti vizsgálata binér relációkkal *in: Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Ost- und Südeuropa Institut által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2003. kétnyelvű elektronikus kötete*
   URL: www.mathdid.inhun.com
7. *Fatalin L. & Varsics Z.* (2005) Über eine Möglichkeiten der Vertiefung des Gleichungsbegriffs in der Unterricht der Mittelschule–Az egyenlet fogalmának egy elmélyítési lehetőségéről a középiskolai tanításában in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2004. kétnyelvű kötete, Salzburg*


*KÖNYV:*


8. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1993) A tudományos modellalkotás alapjai I. kötet *Calibra*
9. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1995) A tudományos modellalkotás alapjai II. kötet *Keraban*


*EGYÉB MAGYARNYELVŰ PUBLIKÁCIÓK*


10. *Fatalin L.* (1996) A hmv szolgáltatás paradoxona, avagy a költségképzés és az energetika anomáliái *Magyar épületgépészet 1996/8.*
11. *Fatalin L. & Kertész T.* (1992) A vállalt kockázat alakulása a méretezési külső levegőhőmérséklet megválasztásának függvényében *Energiagazdálkodás 1992/3.*
12. *Fatalin L.* (1994) Mérünk vagy értékelünk *Iskolakultúra 1994/5.*

13. *Fatalin L.* (1996) Adat-eszméletek *Iskolakultúra 1996/5.*
14. *Fatalin L.* (2005) Tananyagstruktúra szemléltetése *Galois-gráf*okkal, *in: Berta & Vásárhelyi, (Eds.) Pont társadalomtudományi folyóirat 2005/1.-Matematika szakomódszertani különszám, kötetszám: ISSN 1336-135X*, Komarno *(2nd Central-European PhD Conference on Mathematics Didactics)*

RECENZIÓK:

15. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1993) A szavazás egy matematikai modellje *Iskolakultúra 1993/3-4.*
16. *Fatalin L.* (1994) Abacus *Iskolakultúra 1994/24.*
17. *Fatalin L.* (1995) A tudomány térképe *Iskolakultúra 1995/23.*

KONFERENCIÁK:

18. *Fatalin L.* (1991) Biztonság- és kockázatelemzési módszerek az épületgépészetben *13. Nemzetközi Távhőkonferencia 2. kötet. 67-76. o Hajdúszoboszló*
19. *Fatalin L.* (1992) A hőszállítási költségek alakulásának meghatározása mérésadatgyűjtők és matematikai módszerek alkalmazásával. *Hőszolgáltatás `92 Nemzetközi Konferencia 1. kötet. 19-26. Lillafüred*
20. *Fatalin L.* (1993) Távhőrendszerek energiaveszteségeinek feltárása és csökkentésének módszerei *Nemzetközi Távhőfórum 2.kötet. Tihany*
21. *Fatalin L.* (1994) A hmv szolgáltatás energiaveszteségei *Nemzetközi Hőszolgáltatási Fórum 33-44. Eger*

SZOFTVEREK:

22. *Fatalin L.* (1995) ErgAnal for Windows energetikai adatgyűjtő, lekérdező és elemző szoftver, *ALTUIR*
23. *Fatalin L.* (1995) Szimulator for Windows modellező szoftver, *ALTUIR*

DIPLMAMUNKÁK ÉS TDK-DOLGOZATOK

24. *Fatalin, L.* (1979), Geometriai algebra *TDK-dolgozat ELTE*, Budapest
25. *Fatalin, L.* (1980), Lineáris terek általános görbeelmélete *TDK-dolgozat ELTE* Budapest
26. Fatalin, L. (1981), Lineáris terek általános görbeelméletéhez *Szakdolgozat ELTE* Budapest
27. *Fatalin, L.* (1990), 64-csatornás programozható mérésadatgyűjtő tervezése, megépítése és felprogramozása *Diplomamunka BME* Budapest
28. *Fatalin, L.* (2000), Az ezredforduló oktatásirányítási rendszere a megyei fejlesztési tervek tükrében *Diplomamunka BKE* Budapest

# HIERARCHIKUS FOGALMI STRUKTÚRÁK VIZSGÁLATA GRÁFOKKAL

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a MATEMATIKA tudományágban

Írta: FATALIN LÁSZLÓ okleveles matematika-fizika szakos középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika. és Számítástudományok doktori iskolája
(DIDAKTIKA programja) keretében

Témavezető: Dr. HORTOBÁGYI ISTVÁN

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. …………………………

tagok: Dr. …………………………

Dr. …………………………

A doktori szigorlat időpontja: 200… . ……………… … .

Az értekezés bírálói:

Dr. ..........................................

Dr. ……………………………

Dr. ..........................................

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ..........................................

tagok: Dr. …………………………..

Dr. …………………………..

Dr. …………………………..

Dr. …………………………..

**Az értekezés védésének időpontja: 200… . ……………… … .**