HIERARCHIKUS FOGALMI STRUKTÚRÁK VIZSGÁLATA GRÁFOKKAL

doktori (PhD) értekezés tézisei

EXAMINATION OF THE HIERARCHICAL CONCEPT STRUCTURES WITH GRAPHS

Ph. D. Thesis

FATALIN LÁSZLÓ

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2008.

Tartalomjegyzék – Table of contents

1. Bevezetés

1.1. A témaválasztás indoklása

A matematikatanítás egyik fontos feladata, hogy sajátos eszközeivel fejlessze a tanulók fogalomalkotási készségét. A fogalomalkotás összetett, nehezen vizsgálható folyamat, mert az egyes fogalmak szubjektív *belső reprezentáció*ja közvetlenül nem hozzáférhető számunkra, és ráadásul az egyes fogalmak sem önmagukban, hanem csak a többi fogalommal való kapcsolatrendszerükben kapják meg értelmüket. A fogalomalkotás vizsgálata szükségszerűen egy modellvizsgálat, hiszen a kommunikáció révén megjelenő *külső reprezentációk* alapján próbálunk meg következtetni a belső gondolkodási folyamatokra, miközben a modellmódszer minden korlátjával és hibalehetőségével számolnunk kell:

- egy modell mindig egyszerűsíti és csak adott szempontokból közelíti a valóságot;
- minden modell csak adott korlátok között használható.

A különböző tudományágak természetesen sajátos nézőpontjukkal és eszköztárukkal igyekeznek a fogalomalkotást megragadni. A matematikai fogalomalkotásban a ráció kapja a központi szerepet, és szimbolikus nyelvezetével a fogalmak leírása is precízebbé, áttekinthetőbbé válik.

Kutatásunkban arra kívántunk kísérletet tenni, hogy a fogalomalkotási folyamat matematikadidaktikai vizsgálatában matematikai eredményeket és eszközöket használjunk. Az elmúlt évtizedben tanítási célként az fogalmazódott meg, hogy ne a matematikát tanítsuk meg a tanulóknak, hanem a matematikán keresztül fejlesszük a tanulók gondolkodását és szemléletét. E cél alapján a matematikai fogalomalkotás didaktikai vizsgálata sem redukálható a matematika definíciós formáinak (explicit, implicit és induktív definíciók) didaktikai adaptálására.

Az elmúlt három évtizedben tanárként és diákként különböző típusú középiskolákban és egyetemeken szerzett személyes tapasztalataim alapján a fogalomalkotás elsajátításában az egyik legsúlyosabb problémának azt tartom, hogy a megtanult fogalmak kisebb csoportokba tömörülve épülnek be az ismerethálóba úgy, hogy közben ezek a „fogalomcsoportocskák" elkülönülnek egymástól. Az energetika és az oktatásirányítás területén is közvetlenül megtapasztaltam, hogy e hiányosság szinte lehetetlenné teszi a rendszerszemlélet érvényesülését. *(Fatalin, 1991;1993 és 2000)*.

A 90-es évek első felében a PSZM Projektben nagyobb teret kaptak olyan oktatási kísérletek, amelyek a hagyományos tantárgyi kerettől eltérően interdiszciplináris fogalmak köré kívánták szervezni az elsajátítandó ismereteket. E kísérleti

Egyéb magyarnyelvű publikációk – Other Publications

10. *Fatalin L. & Kertész T.* (1992) A vállalt kockázat alakulása a méretezési külső levegőhőmérséklet megválasztásának függvényében *Energiagazdálkodás 1992/3.*
11. *Fatalin L.* (1994) Mérünk vagy értékelünk *Iskolakultúra 1994/5.*
12. *Fatalin L.* (1996): A hmv szolgáltatás paradoxona, avagy a költségképzés és az energetika anomáliái *Magyar épületgépészet 1996/8.*
13. *Fatalin L.* (1996) Adat-eszméletek *Iskolakultúra 1996/5.*
14. *Fatalin L.* (2005) Tananyagstruktúra szemléltetése Galois-gráfokkal, *in: Berta & Vásárhelyi, (Eds.) Pont társadalomtudományi folyóirat 2005/1.- Matematika szakomódszertani különszám, kötetszám: ISSN 1336-135X*, Komarno *(2nd Central-European PhD Conference on Mathematics Didactics)*

Recenziók – Review

15. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1993) A szavazás egy matematikai modellje *Iskolakultúra 1993/3-4.*
16. *Fatalin L.* (1994) Abacus *Iskolakultúra 1994/24.*
17. *Fatalin L.* (1995) A tudomány térképe *Iskolakultúra 1995/23.*

Konferenciák – Conferences

18. *Fatalin L.* (1991) Biztonság- és kockázatelemzési módszerek az épületgépészetben *13. Nemzetközi Távhőkonferencia 2. kötet. 67-76. o. Hajdúszoboszló*
19. *Fatalin L.* (1992) A hőszállítási költségek alakulásának meghatározása mérésadatgyűjtők és matematikai módszerek alkalmazásával. *Hőszolgáltatás `92 Nemzetközi Konferencia 1. kötet. 19-26. o. Lillafüred*
20. *Fatalin L.* (1993) Távhőrendszerek energiaveszteségeinek feltárása és csökkentésének módszerei *Nemzetközi Távhőfórum 2.kötet. Tihany*
21. *Fatalin L.* (1994) A hmv szolgáltatás energiaveszteségei *Nemzetközi Hőszolgáltatási Fórum 33-44. o. Eger*

Szoftverek – Software

22. *Fatalin L.* (1995) ErgAnal for Windows energetikai adatgyűjtő, lekérdező és elemző szoftver, *ALTUIR*
23. *Fatalin L.* (1995) Szimulator for Windows modellező szoftver, *ALTUIR*

PUBLIKÁCIÓS JEGYZÉK – LIST OF PUBLICATIONS

IDEGEN NYELVŰ REFERÁLT PUBLIKÁCIÓK – REFERRED PUBLICATIONS

1. *Fatalin L.* (2003) Strukturelle Analyse des Lernstoffes, in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik.* Abakus, Salzburg, 45-56.
2. *Fatalin L.* (2003) Strukturelle Analyse von Aufgabenserien und deren Schülerlösungen, in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Neue Sichtweisen in der Didaktik der Mathematik.* Abakus, Salzburg, 59-78.
3. *Fatalin L.* (2005) Über den Vergleich des mathematischen bzw. mathematikdidaktischen Vektorbegriffs durch den Galois-Graphen. Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, Jg.3. N1. 1-12.
4. *Fatalin L.* (2005) Erzeugen eines Wissensnetzes durch Galois-Graphen – Tudásháló szemléltetése Galois-gráffal in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2004. kétnyelvű kötete hagyományos és elektronikus formában,* Salzburg
5. *Fatalin L.* (2007) Veranschaulichung der Lehrstoffstruktur durch Galois-Graphen, *Teaching Mathematics and Computer Science*, Debrecen, Jg.5. N1. 226-238.

KÉTNYELVŰ PUBLIKÁCIÓK – BILINGUAL PUBLICATIONS

6. *Fatalin L.* (2003) Systemtheoretische Untersuchung des Stoffes durch binäre Relationen - konvexe Vierecke - Konvex négyszögek rendszerelméleti vizsgálata binér relációkkal *in: Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Ost- und Südeuropa Institut által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2003. kétnyelvű elektronikus kötete* URL: www.mathdid.inhun.com
7. *Fatalin L. & Varsics Z.* (2005) Über eine Möglichkeiten der Vertiefung des Gleichungsbegriffs in der Unterricht der Mittelschule–Az egyenlet fogalmának egy elmélyítési lehetőségéről a középiskolai tanításában in: *Parisot & Vásárhelyi, (Eds.) Az Aktion Österreich-Ungarn alapítvány által támogatott salzburgi Doktorandusz-szeminárium 2004. kétnyelvű kötete, Salzburg*

KÖNYVEK – BOOKS

8. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1993) A tudományos modellalkotás alapjai I. kötet *Calibra*
9. *Fatalin L. & Varsics Z.* (1995) A tudományos modellalkotás alapjai II. kötet *Keraban*

tantárgyak interdiszciplináris jellegükből adódóan az ismeretek egy más irányú hálózatba szervezésén keresztül segítették a fogalmi háló egy teljesebb kialakulását, ami jelentős előrelépést jelentett a rendszerszemlélet fejlesztése területén is. Személyesen a *tudományos modellalkotás* alapjainak bevezetési kísérletét vezettem. A hierarchikus modellek vizsgálata során kerültem munkakapcsolatba *Takács Violával*, így részt vehettem a fizika tankönyvek összehasonlítását végző kutatásaiban. Kitartó hite és elkötelezettsége a Galois-gráf pedagógiai alkalmazhatóságában mély benyomást tett rám, miközben lehetőséget kaptam a pedagógia mérő-értékelő rendszereinek rendszerszemléletű vizsgálatára is. E munka során magam is meggyőződhettem a módszer hatékonyságáról, és egyben alkalmazásának nehézségeiről, aminek eredményeként vezetésemmel elkészült a *Szimulator for Windows* szoftver.

A matematikadidaktikai szakirodalom bőségesen foglalkozik a fogalmi építkezés különböző aspektusaival, ugyanakkor meglepő módon éppen a fogalmi hierarchia leírására alkalmas Galois-gráf nem kapott helyet a matematika-tananyagok elemzésében, bár ma már több tantárgy esetében is folynak próbálkozások bevezetésére. Az elmúlt évtizedben a Galois-gráf mint modellező eszköz matematikadidaktikai alkalmazási lehetőségeit vizsgáltam. A Galois-gráf mint eszköz bevezetése a matematikadidaktikai elemzésekbe kézenfekvőnek tűnik, de e formális matematikai modell csak némi átalakítás árán adaptálható a precíz és absztrakt matematikai fogalmak tanításának modellezésére. Az aprólékos, gondos munka eredményeként viszont olyan szemléletes képet nyerhetünk a fogalmi hierarchiáról, amin egyszerre vizsgálhatjuk a hierarchia egészét és egyes részleteit.

1.2. A fogalmi háló vizsgálatának előzményei

A *tudásháló* kutatásával napjainkban különböző tudományágak képviselői foglalkoznak. A szakirodalomban a *tudásháló* kifejezéshez kettős értelmezés társul: a *külső* és a *belső reprezentációs háló* fogalma. A tudás hozzáférhető *külső reprezentációja* a kognitív álláspont szerint megfelel valamilyen *belső reprezentáció*nak, sőt a kutatók általában erős összefüggést tételeznek fel a *belső* és *külső reprezentáció* színvonala között! A *belső reprezentációs háló* csak közvetett módon, a *külső reprezentáció* által modellezve vizsgálható. A külső reprezentációs háló elemei a képzeteknek, fogalmaknak, ... nevezett objektumok halmaza, amelyek szoros kapcsolatban állnak egymással, ezért a matematikai relációk hatékony eszközei modellezésüknek, a kapcsolatok vizuális megjelenítésére pedig használhatjuk e relációk gráfjait.

A reprezentációs elméletek szerint egy-egy új ismeret, fogalom megfelelő beépülését e tudáshálóba két tényező javítja hatékonyan:

– az ismeretnek, fogalomnak minél *többféle reprezentáció*ja épüljön be a tudáshálóba;
– az ismeret, fogalom minél több szállal kapcsolódjon a már meglevő ismeretek, fogalmak hálójához.

A reprezentációk többféle csoportosítása terjedt el. Legelterjedtebb a *Bruner*-féle három reprezentációs síkot tartalmazó tipizálás, azaz az *enaktív*, az *ikonikus* és a *szimbolikus reprezentációk* megkülönböztetése. (A matematikai fogalmak reprezentációjának egy másik szintén elfogadott megközelítésében *numerikus, grafikus, algebrai* és *leíró reprezentációk*ról beszélhetünk.) Ma már finomabb felosztásokat is alkalmaznak a kutatók, hiszen például a nyelvi és a matematikai szimbólumok karaktere jelentősen eltér egymástól. (A matematikai szimbólumok redundanciamentesek, szüséges és elégséges feltételekkel operálnak, míg a nyelvi kifejezések redundánsak és a kivételeket is megengedő tipikus tulajdonságokon alapulnak, továbbá más a nyelvi és más a matematikai logika is.)

A matematikatanítás számára fontos, hogy a többszörös reprezentációk vizsgálata során megállapítást nyert, miszerint az *ikonikus reprezentációk* nyoma a „kreatív agyféltekében”, a szimbolikusaké pedig a „logikáért felelős” agyféltekében helyezkednek el. A matematikatanításban a szemléltetés mellett a *szemléletes fogalomalkotás*ra is nagy hangsúlyt kell helyezni.

A kognitív álláspont szerint a tanulás során a tanulóknak az új ismeretet a már meglevő fogalmi hálójukba kell beépíteniük. A különböző reprezentációk párhuzamos használatával elérhető hogy a belső reprezentációba is többszörösen épüljön be az új ismeret. A matematikatanításban a *szemléletes fogalomalkotás*ra törekvés esetén a *szimbolikus reprezentáció* mellett a másik agyféltekében is megjelenik a fogalom *ikonikus reprezentáció*ja. A kibővülő, gazdagodó ismerethálóban létrejövő új kapcsolatok elmélyítéséhez és megszilárdításához az új ismereteket aktivizálni kell. A matematikatanításban a feladatmegoldások az új ismeretek begyakorlásának a színterei. A feladatok kiválasztása nemcsak az új kapcsolatok elmélyítésére, hanem az új kapcsolatok létrehozására is hatással van, ha a gyakorlati alkalmazások köréből választjuk, ui. így az új ismeret a meglevő tudásháló több eleméhez is kapcsolódni fog.

A kognitív szemlélet szerint a régebbi fogalmi háló elemei között már meglevő, sokszálú, megszilárdult kapcsolatok felszámolása szinte megoldhatatlan nehézségekkel jár, amihez a tanítási folyamatban feltétel nélkül alkalmazkodni kell. Ez meghatározó jelentőségű a tananyagfelépítések kialakításában: a tudáshálóba ne építsünk be olyan elemeket, amelyek a későbbi általánosításokat, absztrakciókat gátolják!

A fogalmak kialakulásának főbb mozzanataira mi a *Vigotszkij* (1956) által jellemzett szakaszokat tekintjük mérvadónak, mely szerint a fogalomkialakulás

tasks much more persevering and stubborn than the average, or we can say it indicates more negative evaluation for those who superficially rather cream off the easily solvable parts from the tasks of the test.

2. SUMMARY AND PROSPECTS

The goal of our present research was applying the *trichotomical concept description model* based on the *formal concept analysis* for modelling the aimed knowledge net.

The examination of the *reduced Galois-graph* produced as a model revealed the followings:

1. The concept hierarchies can be modelled with directly acyclic graphs (DAG), but these are usually not algebraic nets on the operations of section and union.
2. To apply the model accurately the detailed development of the curricular specifications are needed.
3. The *reduced Galois-graph* is such a visual representation of the aimed knowledge net, on which the whole concept hierarchy and also its parts can be examined simultaneously.
4. The *reduced Galois-graph* as the model of the aimed knowledge net suggestively reflects the basic properties of the dual action-pairs of the generalization–specialization and abstraction–concretization from cognitive view.
5. The *Galois-graphs* are suitable means to characterize the series of tasks more precisely, that help to uncover the hidden preferred items of the teacher.
6. The Galois-graphs of the pupils-items relation are large-sized graphs with complicated connections, because of the instability of the pupils' knowledge, from which we can not draw grounded didactics conclusions. We examined the tasks solutions of the pupils' on the basis of the *hypotheses* of the *stabile* and *instable knowledge*.

tion of the item list are based on the routine and intuition of the subject teachers. The determination of the relation cliques of the tasks-items calls attention to that some groups of items occur together, several times, that refer to that the series of tasks prefers this grouped connections of the items. In case of conscious choice of tasks these connections represent hidden teacher's preferences, of which disclosure the Galois-graph of the series of tasks may help.

2.7. Application of the model in evaluating the pupils' solutions

The traditional evaluations of the pupils' solutions are based on the pupils-items relation board, that involves information about which task-items did the pupils solve correctly. A specific item may occur several times in a series of tasks, which some pupils solve correctly in certain tasks, but solve them wrongly in other tasks. As extreme case we set up the following two hypotheses regarding to the knowledge of the item:

– *hypothesis of the instable knowledge*: we accept the „knowledge of the item", if the pupil solved it correctly at <u>least once</u>;

– *hypothesis of the stable knowledge*: we accept the „knowledge of an item" only if the pupil solve it correctly <u>all the time</u> when it occurs.

Evaluations applied in practice usually stand between these two extremity, i.e. the acceptance of the items happens on the basis of how many percent of the cases the pupil solved them correctly.

Making the Galois-graph of the pupils-items relation on the basis of the hypothesis of the *stabile* or the *instable knowledge* we mostly get such a large-sized graph with complicated connection, from which we can not draw grounded didactics conclusions.

We have set an example on that the cliques coming about the analysis of the tasks-items relation can help considering the preferred item connections within the traditional evaluation system on points. We have modified the original evaluation by pointing the „solved cliques" beside the items. (Participation of the cliques in the evaluation is reasonable because we admit the recognition and application of the item connections as plus knowledge in system view.)

We have established that there is a strong correlation between the traditional evaluation and the evaluation considering also the cliques. (The value of the correlation coefficient is 0,955.) During the examination of the points which get further from the regression line we have learnt that those pupils get the more positive evaluations who try to solve the single

első lépésében a *szinkretizmusnak*, az időbeli egybeesésnek jut döntő szerep. A következő fázisban a fogalmak *komplexusok*ként, azaz halmazokként jellemezhetők, míg a harmadik fázisban jelenik meg az ún. *pozicionális fogalom*, melylyel a tanuló már úgy bánik, ahogyan az absztrakt fogalommal kell, de a fogalom meghatározásában, azonosításában még a *komplexus* szemlélet uralkodik. A negyedik fázis az *absztrakt fogalmak* szintere. Ez az elképzelés kellően egyszerű és plasztikus ahhoz, hogy az általunk vizsgált általánosítások és absztrakciók esetében hatékony didaktikai következtetésekre juthassunk az eredményül kapott gráfok didaktikai interpretációjában.

A *külső reprezentációk* vizsgálatai csoportosíthatók aszerint, hogy magára a fogalomra mint a gondolkodás tárgyára milyen leíró modellt alkalmaznak. A szemiotikai vizsgálatok alapvetően három típust különböztetnek meg: a *dichotomikus*, a *trichotomikus* és a *quadrichotomikus* modelleket, ugyanakkor a matematikadidaktikába *Tall* és *Vinner (1981)* már bevezette a *fogalomképzet (concept image)* kifejezést, ami a fogalmakat már komplex módon, a hozzá tartozó ismeretekkel együtt kezeli. Kutatásunk elsősorban a *dichotomikus* és *trichotomikus modell* alkalmazási lehetőségeit, előnyeit és hátrányait vizsgálja.

A *formális fogalomanalízis*, a *Galois-gráf* pedagógiai alkalmazásai napjainkban még kísérleti stádiumban vannak ugyan, de felhasználásuk fokozatosan terjed a legkülönbözőbb területeken. *(Takács, 2000)* E kutatások eredményéül adódó *Galois-gráf*ok didaktikai interpretációi még szegényesek, esetenként felszínesek, mert az alkalmazott modellek nem kellően kidolgozott alapokról indulnak. E témakörben mind a fogalmi hierarchiák *(Gyaraki, 1998)*, mind az értékelés területén jelenleg is folynak a kutatások *(Tóth, 2005).* A *formális fogalomanalízis* és a trichotomikus modell összekapcsolásával a matematikadidaktikai modellként történő alkalmazásai alapján megkíséreljük pontosítani a modell kereteinek értelmezését.

A gondolkodási folyamatból mi az *általánosítás* és *absztrakció* műveletével foglakozunk részletesebben. E gondolkodási műveletekről a pszichológiai álláspontok eltérnek, *Lénárd (1984)* például a *konkretizáció*t az *általánosítás* inverzeként jellemzi, az *absztrakció*nak pedig nála nincs fordított művelete. Mi a *Kelemen (1984)* által részletesen ismeretett terminológiában használjuk, azaz az *általánosítás* fordított művelete a *specializáció*, az *absztrakció* fordított művelete pedig a *konkretizáció*.

Az *absztrakció* folyamatát az absztrakt vektorfogalom megalapozásán keresztül vizsgáljuk, ui. a vektorfogalom kialakításához már évtizedek óta különböző felépítések használatosak, melyek a különböző didaktikai problémákat eltérő módon oldják meg, illetve hidalják át. Napjainkban is kutatás tárgyát képezi a vektorfogalom kialakításának problémaköre *(Poynter, 2004)*, aminek elemzésére megkíséreljük alkalmazni modellünket.

1.3. Hipotézisek – A vizsgálat alapfeltevései

Kutatásunkban a kognitív tudásháló egy algebrai hálón alapuló modellezésére tettünk kísérletet, ami a megcélzott tudásháló egzaktabb leírási módját is lehetővé tenné.

Alaphipotézis

A formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modell alkalmas a megcélzott tudásháló reprezentálására.

Ha modellünk a megcélzott tudásháló megfelelő reprezentációja, akkor a didaktikai célkitűzések megvalósításában makroszinten a tananyag tervezéséhez, mikroszinten pedig a tananyag-egységek lokális elrendezéséhez nyújthat segítséget, sőt a kitűzött cél explicit kifejeződése hasznos segédeszköznek bizonyulhat a felfedeztető, gyakorló illetve ellenőrző feladatsorok tervezésében és tanulói megoldásainak kiértékelésében is.. Az alkalmasság kifejezést itt abban az értelemben használjuk, hogy modellünk segítségével érdemi információk nyerhetők a fentebbi témakörökben végzett matematikadidaktikai elemzésekben.

Az alaphipotézis alapján kutatásunkban a következő konkrét kérdéseket fogalmaztuk meg:

1. *Milyen konszenzusok árán lehet a trichotomikus modellt és a formális fogalomanalízis által előálló Galois-gráfot egy modellben egyesíteni?*
2. *Milyen előkészítést igényel e modell konkrét előállítása ahhoz, hogy elősegítse a tanítási-tanulási folyamat szabatos és tudatos tervezését?*
3. *A modellben a matematikai elvárások és a didaktikai preferenciák milyen mértékben egyeztethetők össze?*
4. *Van-e a matematikai modellnek a kognitív folyamatok leírására alkalmazható aspektusa?*
5. *A modellnek mint statikus hálónak van-e olyan felhasználási módja, ami a statikus és dinamikus szemléletet összeköti?*
6. *A modell ad-e instrukciókat a beépítendő új tudáselemek aktivizálását szolgáló feladatok és feladatsorok tervezéséhez?*

quadrilaterals. According to this representation of the knowledge net we could determine that in case of this construction the connections developed and deepened among the single knowledge units are not have to be cancelled later, moreover the newer features strengthen the already existing connections. According to our analysis this construction of the curriculum is didactic, because the aimed knowledge nets of the phases of teaching are built on each other.

2.6. Instructions of the model for planning tasks and series of tasks

The *reduced Galois-graph* of a unit of a curriculum calls attention to the importance of some types of tasks. We have concretely pointed out in the subject matter of the convex quadrilaterals that most of the tasks desire to strengthen the connections being built up in the knowledge net on the basis of the transfer between the different representations of the concept identification. In case of getting any one from the three components of the trichotomical model the other two components also have to be able to be identified. (Included the negations it means 2•6 types of tasks.) However according to the concept hierarchy further types of tasks can be composed regarding to the extent and the meaning of the concepts.

Characterization of the series of tasks bases on the relation analysis of the tasks-items. We had to found out that with lack of the explicit production of the aimed knowledge net the production of the item list contains subjective, sometimes disputable elements. The different series of tasks can be characterized on the basis of how many items have to be known to solve them. It is also a characteristic of the series of tasks, that how much complex its single tasks are, say with the help of how many items can the single tasks be solved per task.

On the basis of the relation Galois-graph of the tasks-items we have introduced the concept of *level difference* (the difference between the numbers of items of the neighbouring cliques), that also makes it possible to characterize finely a series of tasks. For example in the Galois-graph of the didactically built collections of examples in the schoolbooks occur only small level differences, because more simple tasks that become gradually more difficult prepares the solving of the more complex tasks. There are more items, more complex tasks and bigger jumps in levels in the series of tasks of the final examination.

We have presented the difficulties of the structural analysis on the example of a controlling test made written in the subject matter of the algebraic transformations. In structural evaluation we have to start from the analysis of the series of tasks. The choice of the tasks and the determinaparts can be examined simultaneously. Instructions can be gained from the graph to arrange temporally the units of the curriculum, and for the possible constructions. During their analysis that cognitive establishment has to get a greater importance, that cancelling the knowledge built in the knowledge net is practically not solvable.

In such enlarging the knowledge net, when a new, abstract object has to be determined according to characteristics reckoned relevant, the Galois-graph helps to choose the examples needed for establishing the abstract concept. The basic principles of choosing the examples are the followings:

– the example typically has to carry the relevant characteristics of the abstract concept;

– some various non-relevant characteristics also have to appear among the examples, otherwise some unneeded attributes may connect to the abstract concept as wrong requirements. (To cancel the misbeliefs from the knowledge net later can cause serious difficulties.)

During the examination of building up the abstract vector concept it is determinable on the basis of emphasizing the characteristics relevant in the abstraction point of view and decreasing the disturbing circumstances, that to develop the abstract vector concept the geometrical and algebraic establishments are both necessary. The visual representation of the aimed knowledge net made by us pointed also out that putting the concept of the *geometrical vector* on the stage in the examples points not in the direction of developing the abstract vector concept, but supplies a new example of the marking procedure according to the detailed analysis. The Galois-graphs made for establish the Euclid's and affine vector concept show that during the affine generalization the knowledge net structurally remains unchanged, also contently gets only little completions.

The Hungarian teaching practice at first builds the characterization of the quadrilaterals types on the symmetry characteristics, then after its fixing describes the quadrilaterals on the basis of the metrical characteristics. This subject matter is completed only with the inscribed and circumscribed quadrilaterals in the secondary school. We applied our model on the convex quadrilaterals in all three contexts. The *reduced Galois-graph* executed on the basis of symmetries is practically completed only with the trapezium in case of metrical discussion, while the contents of the quadrilaterals classes get also a totally different (metrical) interpretation, then in the secondary school generalization the concept hierarchy of the convex quadrilaterals is completed with the inscribed and circumscribed

7. *A modell alkalmazható-e az ellenőrző feladatsorok tanulói megoldásainak kiértékelésében?*

1.4. Kutatási módszerek

A kutatás elsősorban elméleti, elemző jellegű, de végeztünk empirikus vizsgálatot is.

Főbb kutatási módszereink elemzési és modellalkotási oldalról a következők voltak:

– a fogalmi hierarchiákra vonatkozó pedagógiai alkalmazások szakirodalomban található leírásainak áttekintése;
a különböző módszerek előnyeinek és korlátainak elemzése, összehasonlítása;
a formalizált matematikai elmélethez megkeresni a hozzákapcsolható kognitív szemléletet;

– a gondolkodás mikrostruktúrájának tanulmányozása a pszichológiai szakirodalom alapján különös tekintettel az *általánosítás* és *specializálás*, valamint az *absztrakció* és *konkretizáció* műveletére.

– a dichotomikus és trichotomikus fogalomleírási modellek összehasonlítása a középiskolai matematikatanítás témaköreiben különös tekintettel a különböző reprezentációs síkokra;

– a matematika *formális fogalomanalízis*ének és a szemantika *trichotomikus modell*jének formális összehasonlítása;

A modell alkalmasságának vizsgálatában alkalmazott kutatási módszereink a következők voltak:

– a kialakított modell működésének kontrollálása a *konvex négyszögek* témakörén keresztül, az eredmények egybevetése a tapasztalatokkal;

– a modell kutatási célú alkalmazhatóságát az *absztrakt vektor* fogalmának kialakítási folyamatának modellezésén keresztül végeztük;

– a modell alkalmazhatósági vizsgálatát a mérés-értékelés folyamatában a hétköznapi gyakorlathoz igazodva végeztük, azaz a klasszikus ellenőrző dolgozatok hagyományos szaktanári összeállításának és értékelésének birtokában, utólag elemeztük a dolgozat szerkezetét, majd ennek ismeretében vizsgáltuk meg, hogy a tanulói megoldások strukturális elemzése milyen többletinformációt jelenthet az értékelésben;

– részvétel és előadások tartása nemzetközi konferenciákon, szakmai konzultációk.

A hipotézis jellegéből adódóan a modell megvalósíthatósági vizsgálata került előtérbe, ezért a modell megalkotásának és vizsgálatának minden fázisában konkrét példákat is alkalmaztunk.

2. Eredmények a hipotézisekkel összevetve

Alaphipotézisünk, miszerint *a formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modell alkalmas a megcélzott tudásháló reprezentálására,* igazoltnak tekinthető abban az értelemben, hogy modellünket sikeresen alkalmaztuk két konkrét tananyagrész (konvex négyszögek és vektorfogalom) elemzésére. A *redukált Galois-gráf*ból mint a *megcélzott tudásháló matematikai reprezentációjá*ból érdemi, matematikadidaktikai következtetéseket tudtunk levonni. Modellelméletileg természetesen nyitott kérdés maradt, hogy milyen aspektusokból, milyen közelítés mellett és milyen korlátok között alkalmazható e modell a matematikadidaktikai vizsgálatokban.

2.1. A modellalkotás konszenzusai

A *formális fogalomanalízis*ben formális fogalomnak a reláció klikkjeit, azaz maximálisan zárt halmazpárjait nevezik. A klikkek jellemzésére a *(klikk extenziója, klikk intenziója)* rendezett halmazpár szolgál, míg a *trichotomikus fogalomleírási modell* a fogalmakra a *(terminus; fogalom terjedelme; fogalom tartalma)* rendezett hármast alkalmazza. A klikk extenziójának a fogalom terjedelmét, a klikk intenziójának pedig a fogalom tartalmát megfeleltetve e modellben járulékosan be kellett vezetnünk a klikknek megfelelő ún. *potenciális fogalom* fogalmát. A *potenciális fogalom* határozott terjedelemmel és tartalommal rendelkezik, de nem feltételenül kap(ott) nevet. A névadásban a *potenciális fogalom* elméleti fontosságának illetve gyakorlati használatának van jelentősége. *[D3.3]*

Kutatásunkban rámutattunk arra, hogy e modell alkalmazásaiban figyelembe kell vennünk a következő két momentumot:

a. Elkülönítendő az alkalmazások két típusa:
   – az elemzést közvetlenül a matematikai objektumokon végezzük, ekkor az eredményül adódó hierarchikus leírás is magukra a matematikai objektumokra fog vonatkozni;
   – az elemzés a matematikai objektumosztályok neveire támaszkodik, az eredményül adódó hierarchikus leírás sem az objektumok, hanem a nyelvi reprezentációik logikai hálóját írja le!

2.4. Aspects of the model favourable in cognitive point of view

The reduced *Galois-graph* as the model of the aimed knowledge net reflects expressively the subordination, above ordination and the hierarchical connection between concepts. The single concepts compared to the other concepts get their places expressively. The content relation of the conceptual extents appears in the reduced Galois-graph visually too.

Specialization means tightening the conceptual extent in classical interpretation, which can be modelled by a simple content of the theory of sets. In the Galois-graph this classical interpretation of the specialization reflects on one hand, and it represents the following two pieces of information on the other hand:

– the characteristics descend to the tighter conceptual extents;
– the standpoints system of the specialization also appears in the graph.

It is a speciality of the structural construction of the Galois-graph, that the Galois-graph of the so called transposed *discussion context* got by exchanging the set of objects and the set of attributes is canonically isomorphic with the dual of the original graph. That is so the generalization and specialization of the concept appear essentially as two different direction of interpretation of one graph in it. In this dual character of the Galois-graph it reflects correctly that the generalization (or the specialization) of the conceptual contents always means the specialization (or the generalization) of the conceptual extension at the same time. The standpoints system of the generalization and the specialization can be read off from our hierarchical model. (We also set an example on these standpoints systems may contain redundancies.)

We have surveyed the representations of the hierarchy of convex quadrilaterals made on the basis of different preconceptions. The analysis of the different graphs also called attention to several logical mistakes and defects that may be badly interpreted. We have established that our graph representing the *aimed knowledge net* reduces the number of these committable logical mistakes and defects greatly, as sources of error it actually contains only the possible bad intelligibility coming about the defects of the language representations.

2.5. Dynamical usefulness of the static model

The *reduced Galois-graph* is such a static visual representation of the aimed knowledge net, on which the whole concept hierarchy and also its

From these three applications the examples of the convex quadrilaterals and the vectors were introduced in this dissertation. Both concrete mathematical didactics application illustrate the preparation demand of applying this model exemplary.

2.3. Mathematical and didactics expectations preferred by the model

In our model the mathematical expectations and the didactics preferences can be succeed only by certain compromises.

Expected from mathematics we have examined the priority of the *sense adequacy* and the *formal precision* on the basis of the *Tarski*-criterions. The sense adequacy aims the absolute accuracy, which it catches with the *necessary and sufficient conditions*. To describe concepts both the formal concepts analysis and the trichotomical model use *necessary and sufficient conditions* as characteristics of the objects, therefore also our model suits this mathematical expectation from the adequacy's point of view. Aspiration after accuracy is also important from the didactical point of view, but it is not negligible that according to the prototype semantics in the language representations not the *necessary and sufficient conditions* but the i.e. *typical and central conditions* get the dominant role, which allows the exceptions as well. We have pointed out that alike the mathematical definitions the trichotomical concept describing model also prefers the mathematical adequacy, meanwhile we called attention to take care of the possible difference in the basic characteristics of the common parlance standpoint and the scientific mathematical standpoint in teaching mathematics. The ability needed for the everyday changing of mathematical standpoints can be developed very slowly and gradually.

The formal precision means the non-redundant description of the concept, that is so represent only as much information as absolutely necessary to keep the stipulation of adequacy. This standpoint gets special priority in mathematics, because the logical redundancy exemption of the system is a primary goal. However our trichotomical model is redundant, since its concept description contains all the characteristics of the concept in the specific context. Didactically it is advantageous, because the identifier and distinctive attributes needed to identify the concept in the representation of the concept appears explicitly more completely, so the redundancy of the attributes helps the new concepts to connect to the already existing knowledge net in more points. To refuse the mathematical precision in didactics point of view is reasonable, because it supports attaining the concept.

A második (gyakran használt) esetben a kapott redukált Galois-gráf mint vizuális reprezentáció a tartalmazási viszonyokat ugyan helyesen tükrözi, de a gráf alapján az objektumosztályok metszete, illetve uniója már nem feltétlenül helyesen állapítható meg!

b. A fogalmak és *potenciális fogalmak* megkülönböztetése azért fontos, mert a megcélzott tudáshálóban csak a névvel rendelkező fogalmak kapnak helyet. Ez azt jelenti, hogy a fogalomháló modellezésekor a névvel nem rendelkező klikkeket a Galois-gráfból törölni kell. A gráf redukálásakor természetesen a tartalmazási viszonyokat megtartjuk, de a tudásháló algebrai értelemben már nem lesz háló a metszet és unió műveletére vonatkozóan. *[D2.7 és 3.3]*

2.2. A modell előkészítési igénye

A Galois-gráf előállítására szolgáló szoftverek ma már rendelkezésre állnak, de a modell gyakorlati alkalmazását gátolja, hogy nem állnak rendelkezésre kellő alapossággal és részletességgel elkészített tananyagleíró listák. Ezek összegyűjtéséhez a szakirodalom alapos, körültekintő és időigényes tanulmányozására van szükség.

A megcélzott tudásháló Galois-gráffal történő modellezése fokozott követelményt támaszt az előzetes elemzésre, ui. már a kiinduláshoz tételesen rögzíteni kell a megcélzott tudásháló elemi ismereteit és a vizsgálat szempontjait. A vizsgálati szempontoknak ki kell terjedniük az elsajátítandó ismeretek, objektumok matematikai tulajdonságai mellett a figyelembe veendő didaktikai sajátosságaira is. Ez a modell egyrészt a vizsgált témakör aprólékos és gondos elemzését, másrészt az alkalmazójától matematikai és matematikadidaktikai kompetencia-együttest követel meg, cserébe rendszerszemléletű vizuális modellt szolgáltat, amelyen egyidejűleg tanulmányozható az egész és részei.

Kutatásunkban az iskolai tananyag három témakörére, a konvex négyszögekre, a vektorokra és az egyenletekre alkalmaztuk e modellt. E három alkalmazásból ebben a disszertációban a konvex négyszögekre és a vektorokra vonatkozó példák kerültek bemutatásra. Mindkét konkrét matematikadidaktikai alkalmazás példaadó jelleggel illusztrálja a modell alkalmazásának előkészületi igényét. *[D3.1-2 és 4.1-6]*

2.3. A modell által preferált matematikai és didaktikai elvárások

Modellünkben csak bizonyos kompromisszumok mellett érvényesülnek a matematikai elvárások és a didaktikai preferenciák.

A matematikai elvárásként a *Tarski*-féle kritériumok alapján a *tartalmi adekvátság* és a *formai szabatosság* prioritását vizsgáltuk. A tartalmi adekvátság az abszolút pontosságot célozza meg, amit *szükséges és elégséges feltételek*kel ragad meg. A fogalmak leírására mind a formális fogalomanalízis, mind a trichotomikus modell az objektumok tulajdonságaként *szükséges és elégséges feltételek*et használ, ezért az adekvátság szempontjából modellünk is megfelel ennek a matematikai elvárásnak. Didaktikai szempontból is fontos a pontosságra törekvés, de nem hagyható figyelmen kívül, hogy a prototípus szemantika szerint a nyelvi reprezentációkban nem a *szükséges és elégséges feltételek* kapnak domináns szerepet, hanem az ún. *tipikalitási és centralitási feltételek*, amelyek még a kivételeket is megengedik. Rámutattunk arra, hogy a matematikai definíciókhoz hasonlóan a trichotomikus fogalomleírási modell is a matematikai adekvátságot preferálja, és közben felhívtuk a figyelmet arra is, hogy a matematikatanítás során ügyelni kell arra, hogy a hétköznapi nyelvi nézőpont és a tudományos matematikai nézőpont alaptulajdonságaikban is eltérnek egymástól. A hétköznapi-matematikai nézőpontváltás képessége csak igen lassan, fokozatosan alakítható ki. *[D2.8]*

A formai szabatosság a fogalom redundanciamentes leírását jelenti, azaz csak annyi információt jelenítsünk meg, amennyi feltétlenül szükséges az adekvátság feltételének megtartása mellett. E szempont azért kap különleges prioritást a matematikában, mert elsődleges cél, hogy a rendszer logikailag ellentmondásmentes legyen. Trichotomikus modellünk viszont redundáns, hiszen fogalomleírása az adott kontextuson belül a fogalom összes tulajdonságát tartalmazza. Didaktikailag ez előnyös, mert explicite teljesebben jelennek meg a fogalom reprezentációiban a fogalomazonosításhoz szükséges azonosító és megkülönböztető tulajdonságok, azaz a tulajdonságok redundanciája elősegíti, hogy az új fogalmak több szálon kötődjenek a meglévő tudáshálóhoz. A matematikai szabatosság elvetése didaktikai szempontból azért indokolt, mert a fogalom elsajátítását támogatja. *[D2.7]*

2.4. A modell kognitív szempontból kedvező aspektusai

A *redukált Galois-gráf* a megcélzott tudásháló modelljeként szemléletesen tükrözi a fogalmak közti alá- és fölérendeltséget, a hierarchikus viszonyt. Az egyes fogalmak a többi fogalomhoz viszonyítva szemléletesen kapják meg a helyüket. A redukált Galois-gráfban vizuálisan is megjelenik a fogalmi terjedelmek tartalmazási viszonya.

A specializálás a klasszikus értelmezésben a fogalmi terjedelem szűkítését jelenti, ami egyszerű halmazelméleti tartalmazással modellezhető. A

The two types of the application have to be separated:

- we make the analysis directly on the mathematical object, then the hierarchical description appears as a result will refer to the mathematical objects themselves;
- the analysis relies on the names of the mathematical object classes, the hierarchical description appears as a result neither describes the logical net of the objects, but the logical net of the language representations.

In the second (often used) case the obtained reduced Galois-graph as visual representation although reflects correctly the contents relations, but on the basis of the graph the section or the union of the object classes can no longer be establish necessarily correctly.

The differentiation of the concepts and *potential concepts* is important because only the concepts with names get place in the aimed knowledge net. It means that during modelling the concepts net, the cliques without names have to be deleted from the Galois-graph. Of course during the reduction of the graph we keep the containing relations, but the knowledge net in algebraic intellect will no longer be a net regarding to the operation of the section and union.

2.2. The preparation demand of the model

Nowadays the software producing the Galois-graph is available, but the practical application of the model is held down because lists describing the curriculum are not available thoroughly and fully. To collect them the thorough, careful and time-consuming investigation of the special literature is necessary.

Modelling of the aimed knowledge net with the Galois-graph expects an increased requirement from the preliminary analysis, i.e. the rudimentary knowledge of the aimed knowledge net and the aspects of the examination have to be laid down exactly already before starting. The aspects of the examination have to expand beside the mathematical attributes of the acquiring knowledge and objects to their didactics characteristics which have to be taken into consideration. This model requires the detailed and careful analysis of the examined subject matter on one hand, and mathematical, mathematical didactics competence collectivity from its applier on the other hand. In return for that it supplies such system-viewed visual model, on what the whole and its parts can be examined simultaneously.

In our research we applied this model on the three subject-matters of the school-curriculum: on the convex quadrilaterals, vectors and equations.

tice, i.e. firstly the mathematics teacher composed the controlling series of tasks and evaluated the pupils' solutions, after that we analysed the structure of the series of tasks, and then with this knowledge we examined if the structural analysis of the pupils' solutions can give any plus information for the evaluation;

- participation and giving presentations on international conferences, professional consultations.

Coming about the character of the hypothesis, the examination of the applicability of the model got foreground, so we applied concrete examples in all phases of creating and examining of the model.

2. Conclusions against Hypothesises

Our basic hypothesis (according to which the *trichotomical concept description model based on the formal concept analysis is suit for representing the aimed knowledge net* can be reckoned to be justified in the reason that we applied our model successfully to analyse two concrete parts of curriculum (the convex quadrilaterals and the vector concept). From the reduced *Galois-graph*, as from the *mathematical representation of the aimed knowledge net* we can drew worthy, mathematical didactical conclusions. In model theory it naturally remained an opened question that from what aspects, or by what kind of approximation, and within what limits can this model be applicable in the mathematical didactical examinations.

2.1. Consensuses of modelling

In the formal concept analysis concept is the name of the cliques of relation, i.e. the maximally closed pairs of set of the relation. The ordered pair of sets serves the characterization of the cliques *(extent or intent of the clique)*, while the *trichotomical concept description model* applies the ordered triple for the concepts *(terminus; extent of the concept; meaning of the concept)*. As we mapped the extent of the clique and the extent of the concept, and mapped the intent of the clique and the meaning of the concept in this model we had to introduce accessorily the so-called concept of *potential concept* that suits the clique. The *potential concept* has exact extent and meaning, but does not necessarily get a name. In naming, the theoretical importance and the practical usage of the *potential concept* are important.

In our research we pointed out that in applying this model we have to take the following two circumstances into consideration:

Galois-gráfban egyrészt tükröződik a specializálás ezen klasszikus értelmezése, másrészt a következő két információt is megjeleníti:

- a tulajdonságok öröklődnek a szűkebb fogalmi terjedelmekre;
- a gráfban megjelenik a specializálás szempontrendszere is.

A Galois-gráf szerkezeti felépítésének sajátossága, hogy az objektum-halmaz és az attribútum-halmaz felcserélésével kapott ún. transzponált *tárgyalási kontextus* Galois-gráfja az eredeti gráf duálisával kanonikusan izomorf, azaz a fogalom általánosítása illetve specializálása lényegében egy gráf két különböző irányú olvasataként jelenik meg benne. A Galois-gráf e duális jellegében pontosan tükröződik az, hogy a fogalmi tartalom általánosítása (illetve specializálása) mindig a fogalmi terjedelem specializálását (illetve általánosítását) jelenti egyben. Hierarchikus modellünkről leolvasható az általánosítás és specializálás szempontrendszere. (Példát adtunk arra is, hogy e szempontrendszerek tartalmazhatnak redundanciákat.) *[D3.5]*

Áttekintettük a konvex négyszögek hierarchiájának különböző prekoncepciók alapján készített ábrázolásait. A különböző gráfok elemzése több félreértelmezhető logikai hibára illetve hiányosságra is ráirányította a figyelmet. Megállapítottuk, hogy a *megcélzott tudásháló*t reprezentáló gráfunk ezen elkövethető logikai hibák illetve hiányosságok számát jelentősen redukálja, hibaforrásként tulajdonképpen csak a nyelvi reprezentációk hiányosságaiból adódó félreérthetőségeket tartalmazza. *[D2.2-7]*

2.5. A statikus modell dinamikai használhatósága

A *redukált Galois-gráf* a megcélzott tudásháló egy olyan statikus vizuális reprezentációja, amelyen egyidejűleg tanulmányozható a fogalmi hierarchia egésze és egyes részletei is. A tananyagegységek időbeli elrendezéséhez, a lehetséges felépítésekhez a gráfból instrukciók nyerhetők. Ezek elemzésekor kiemelt jelentőséget kell kapnia annak a kognitív megállapításnak, hogy a tudáshálóba beépített ismeretek törlése gyakorlatilag nem megoldható.

A tudásháló olyan bővítéseiben, amikor új, absztrakt objektumot kell relevánsnak tekintett tulajdonságok alapján meghatározni, a Galois-gráf segítséget nyújt az absztrakt fogalom megalapozásához szükséges példák kiválasztásában. A példák kiválasztásának alapelvei a következők:

- a példa jellegzetesen hordozza magában az absztrakt fogalom releváns tulajdonságait;

– a példák között a nem-releváns tulajdonságok változatos tárháza is jelenjen meg, ellenkező esetben egy-egy felesleges attribútum téves követelményként kapcsolódhat az absztrakt fogalomhoz. (A tévhitek későbbi törlése a tudáshálóból már komoly nehézségekkel jár!)

Az absztrakt vektor fogalmának kiépítését vizsgálva az absztrakció szempontjából releváns tulajdonságok kiemelése és a zavaró momentumok csökkentése alapján megállapítható, hogy az absztrakt vektorfogalom kialakításához a geometriai és az algebrai megalapozásokra egyaránt szükség van. A megcélzott tudásháló általunk elkészített vizuális reprezentációja rámutatott arra is, hogy a *geometriai vektor* fogalmának szerepeltetése a példák sorában nem az absztrakt vektorfogalom kialakításának irányába mutat, hanem a részletes elemzés szerint az osztályozási eljárásra szolgáltat egy újabb példát. Az euklideszi és affin vektorfogalom megalapozásához elkészített Galois-gráfok azt mutatják, hogy a tudásháló szerkezetileg az affin általánosítás során változatlan marad, tartalmában is csak csekély kiegészítések kapnak helyet. *[D4.7-10]*

A magyar tanítási gyakorlat először a szimmetria tulajdonságokra építi a négyszögfajták jellemzését, majd ennek fixálódását követően a metrikus tulajdonságok alapján tárgyalja a négyszögeket. A középiskolában alapvetően már csak a húr- és érintőnégyszögekkel egészül ki a témakör. A konvex négyszögekre mindhárom kontextusban alkalmaztuk modellünket. A szimmetriák alapján elkészített *redukált Galois-gráf* a metrikus tárgyalás esetén lényegében csak a trapézzal egészül ki, miközben az egyes négyszögosztályok tartalma teljesen más (metrikus) értelmezést is kap, majd a középiskolai általánosításban a húr- és érintőnégyszögekkel egészül ki a konvex négyszögek fogalmi hierarchiája. A tudásháló e reprezentációja alapján megállapíthattuk, hogy e felépítés esetén az egyes ismeretegységek közt kialakult és elmélyített kapcsolatokat a későbbiekben nem kell törölni, sőt az újabb tulajdonságok a már meglevő kapcsolatokat tovább erősítik. Elemzésünk szerint didaktikus a tananyagnak ez a felépítése, mert az egyes tanítási fázisok megcélzott tudáshálói egymásra épülnek. *[D3.5]*

2.6. A modell instrukciói feladatok és feladatsorok tervezéséhez

Egy tananyagrész *redukált Galois-gráf*ja felhívja a figyelmet néhány feladattípus fontosságára. A konvex négyszögek témakörében konkrétan rámutattunk arra, hogy a feladatok jelentős része a fogalomazonosítás különböző reprezentációi közti átjárhatósága alapján kívánja a tudáshálóban kiépítendő kapcsolatokat megerősíteni. A trichotomikus modell három komponenséből bármelyik megadása esetén a másik két komponenst is

5. *Are there any ways of application of this model as a static net, which connect the static and dynamic views?*
6. *Does this model give any instructions to planning such tasks and series of tasks that activate the new units of knowledge?*
7. *Is this model applicable for evaluating the pupils' solutions of the controlling series of tasks?*

1.4. Methods of research

The research is primarily theoretical and analytical, but we also made empirical examination.

Our main methods of research on the aspect of analysis and modelling were the followings:

– overview of the concept hierarchies in pedagogical applications and literature;
  analysis and comparison of the advantages and disadvantages of the different methods;
  looking for the cognitive approach that fits the formal mathematical theory;
– observation of psychological literature of the microstructure of thinking especially with special regard to the cognitive transaction of generalization and specialization, as well as the cognitive transaction of abstraction and the concretization.
– *comparison of the dichotomical with the trichotomical models of the concept description in subject matters of teaching mathematics in the secondary schools, with special regard to the different representational planes*;
– *formal comparison of the mathematical formal concept analysis and the semantical trichonomical model*;

Our applied methods of research in the examination of the suitability of the model were the followings:

– controlling the function of the developed model through the topic of the convex quadrilaterals and comparison of the results with the observations;
– we have examined the applicability of the model for research, in such a way that we have built a model on developing process of the *abstract vector's* concept;
– we have made the examination of the model's applicability in the process of the measurement and the evaluation on the basis of the daily teacher prac-

Kelemen (1984), i.e. the inverse operation of the generalization is the specialization, and the inverse operation of the abstraction is the concretization.

We examined the process of the abstraction through the foundation of the abstract vector concept. To develop the vector concept different constructions have been used since decades, which solve and smooth away the different didactics problems in different ways. The problems of developing the vector concept are a topic of the researches also these days, of which analysis we applied our model.

1.3. Hypothesis –Fundamental assumption of the research

In our research we have made an attempt at the modelling of the cognitive knowledge net with an algebraic net, which would make the more exact method of description of the aimed knowledge net possible.

Fundamental hypothesis

> *The trichotomical model of the concept description based on the formal concept analysis is suitable for representing the aimed knowledge net.*
>
> If our model is an adequate representation of the aimed knowledge net, then it could be helpful in realizing of the didactics intentions (in planning the curriculum on macro level, and in local arranging of the units of the curriculum in micro level). Moreover the explicit expression of the aimed target could be a useful help in planning the discovering, practicing and controlling tasks, and in evaluating the solutions of the pupils. Here we use the expression of suitability in the meaning of worthy information can be won with the help of our model in the mathematical didactics analysis accomplished in the topics written above.

According to the fundamental hypothesis in our research we put the following concrete questions:

1. *Which consensuses are needed to make the trichotomical model of the concept description unified with the Galois-graph based on the formal concept analysis consistent?*
2. *What preparation is needed to produce the concrete model to help the exact and conscious planning of the teaching-learning process?*
3. *How much can be the mathematical expectations and the didactics preferences made consistent in this model?*
4. *Are there any aspects of the mathematical model that can be applicable for description the cognitive processes?*

tudni kell azonosítani. (A tagadásokat is beleértve ez 2•6 feladattípust jelent!) A fogalmi hierarchia alapján pedig a fogalmak terjedelmére illetve tartalmára vonatkozóan további feladattípusok fogalmazhatók meg. *[D3.5]*

A feladatsorok jellemzése a feladatok-itemek reláció elemzésén alapul. Meg kellett állapítanunk, hogy a megcélzott tudásháló explicit előállításának hiányában az itemlista előállítása szubjektív, esetenként vitatható elemeket tartalmaz. A különböző feladatsorok jellemezhetők annak alapján, hogy megoldásuk mennyi item ismeretét követeli meg. A feladatsor jellemzője az is, hogy az egyes feladatok mennyire komplexek, azaz feladatonként hány item felhasználásával oldhatók meg az egyes feladatok.

A feladatok-itemek reláció Galois-gráfja alapján bevezettük a *szintkülönbség* fogalmát (a szomszédos klikkek itemszámkülönbsége), ami lehetővé teszi egy feladatsor árnyaltabb jellemzését is. A didaktikusan felépített tankönyvi példatárak Galois-gráfjában például csak kis szintkülönbségek fordulnak elő, ui. az összetettebb feladatok megoldását egyszerűbb, illetve fokozatosan nehezedő feladatokkal készítik elő. Az érettségi feladatsorokban több item, komplexebb feladatok és nagyobb szintugrások fordulnak elő.

Egy algebrai átalakítások témakörében íratott ellenőrződolgozat példáján keresztül mutattuk be a strukturális elemzés nehézségeit. A strukturális értékelésben a feladatsor elemzéséből kell kiindulni. A feladatok kiválasztása és az itemlista meghatározása a szaktanári rutinon és intuíción alapul. A feladatok-itemek reláció klikkjeinek meghatározása felhívja a figyelmet arra, hogy bizonyos itemcsoportok többször, együttesen fordulnak elő, ami arra utal, hogy a feladatsor az itemek ilyen csoportos kapcsolódásait preferálja. Tudatos feladatválasztások esetén ezek a kapcsolódások rejtett tanári preferenciákat jelenítenek meg, amelyek feltárását a feladatsor Galois-gráfja elősegítheti. *[D5.1]*

2.7. A modell alkalmazása a tanulói megoldások értékelésében

A tanulói megoldások hagyományos értékelése a tanulók-itemek relációtáblán alapul, amely azt az információt tartalmazza, hogy az egyes tanulók melyik feladat-itemeket oldották meg helyesen. Egy adott item többször is előfordulhat egy feladatsorban, amit az egyes tanulók bizonyos feladatokban helyesen oldanak meg, más feladatokban viszont nem. Szélsőséges esetként a következő két hipotézissel éltünk az item tudására vonatkozóan:

– *instabil tudás hipotézise*: az „item tudását" elfogadjuk, ha a tanuló legalább egyszer helyesen megoldotta;

– *stabil tudás hipotézise*: egy „item tudását" csak akkor ismerjük el, ha minden előfordulásakor a tanuló helyesen oldja meg.

A gyakorlatban alkalmazott értékelések általában e két szélsőség között állnak, ui. az egyes itemek elfogadása súlyozottan történik annak alapján, hogy az esetek hány százalékában oldotta meg helyesen a tanuló. *[D5.2]*

A tanulók-itemek reláció Galois-gráfját elkészítve akár a *stabil*, akár az *instabil tudás hipotézise* alapján többnyire olyan bonyolult összefüggésű, nagyméretű gráfot kapunk, amelyből megalapozott didaktikai következtetéseket nem tudtunk levonni.

Példát mutattunk arra, hogy a feladatok-itemek reláció elemzésével előálló klikkek segítséget nyújthatnak ahhoz, hogy a preferált itemkapcsolódásokat a hagyományos pontozásos értékelési rendszeren belül figyelembe vehessük. Az itemek mellett a „megoldott klikkeket" is pontozva módosítottuk az eredeti értékelés. (A klikkek bevonását az értékelésbe az indokolja, hogy az itemkapcsolódások felismerését és alkalmazását rendszerszemléletileg többlettudásként ismerjük el.)

Megállapítottuk, hogy a hagyományos és a klikkeket is figyelembe vevő értékelés között erős korreláció van. (A korrelációs együttható értéke:0,96) A regressziós egyenestől távolabbra kerülő pontokat vizsgálva eddigi tapasztalatunk szerint a pozitívabb értékeléseket olyan tanulók kapták, akik az átlagnál sokkal kitartóbban, makacsabbul igyekeznek egy-egy feladatot megoldani, illetve negatívabb értékelést jelent azok számára, akik felszínesen inkább a könnyen megoldható részleteket mazsolázzák ki a dolgozat feladatsorából. *[D5.2]*

3. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS KITEKINTÉS

Aktuális kutatásunk célja, hogy a megcélzott tudásháló modellezésére alkalmazzuk a formális fogalomanalízisen alapuló trichotomikus fogalomleírási modellt.

A modellként előállított redukált Galois-gráf vizsgálata a következőket mutatta:

1. A fogalmi hierarchiák modellezhetők irányított ciklusmentes gráffal (DAG-el), de ezek általában nem algebrai hálók a metszet és unió műveletére. *[D2.1 és 2.8]*
2. A modell konkrét alkalmazásaihoz a tantervi előírások részletesebb kidolgozására van szükség. *[D3.1-2]*

the curriculum: do not build such elements in the knowledge net what later can obstruct the future generalizations, abstractions.

The development of the concepts can be examined in different approaches. We follow the *Vigotszkij* (1956) analysis that indicates the syncretism (coincidence in time) as the first phase of the concept development. In the second phase the concepts will be *complexes*, i.e. characterized as sets. In the third phase the so called *positional concept* appears, which the pupil can manipulate with, as if it was an abstract concept, but in determination and identification of the concept the *complex* view is decisive. The fourth phase is the stage of the *abstract concepts*. This conception is simple enough and plastic to come to the mathematical didactics conclusions in the interpretation of the graphs got as results of the examinations of generalizations and abstractions.

The *external representations* can be divided in groups according to what descriptive model is applied for the concept as the object of thinking. The semiotic examinations essentially distinguish three types: *dichotomical*, *trichotomical and quadrichotomical* models. *Tall* and *Vinner (1981)* introduced the expression of *concept image* in the mathematical didactics, that handles the concepts in complex mode, together with the belonging knowledge. First of all we have examined the advantages, disadvantages and the possibility of applications of the *dichotomical* and *trichotomical* model.

Some researchers applied mathematical results and tools for didactics modelling of the thinking process and concept-building. *Piaget* and *Inhelder* made an attempt to describe the thinking process with *Boole*-algebraic tools (through physical and chemical tasks). Nowadays there are experiments on the possibilities of the pedagogical applications of the *formal concept analysis* and the *Galois-graph* on different areas.

As a result of these researches the didactics interpretations of the *Galois-graph*s are still meagre and in some cases superficial, because the bases of the applied models are not composed adequately. There are researches also at present in this subject matter of the concept hierarchies and of the pedagogical evaluations as well.

We attempted to give precise framings for the models, to get richer didactics interpretations from mathematical didactics view with the help of the *formal concept analysis* and the *trichotomical concepts descriptions model*.

In the topics of the thinking process we deal with the operations of the *generalization* and *abstraction* more detailed. About these thinking processes the psychological standpoints are different, we followed the conception introduced by each other, therefore the mathematical relations are effectual tools of their modelling, and we can use the graphs of these relations for visualizing the connections.

According to the representational theories two moments help effectively the convenient built in of some new knowledge or concept into this knowledge net:

– more kinds of representation of the knowledge and concepts have to be built in the knowledge net;
– the new knowledge and concepts have to be connected into the already existing knowledge net as much points as possible.

There are different groupings of the representations. We have made examinations on the basis of the more widespread *Bruner*-type *enactive*, *iconic* and *symbolic representations* using the modification we separate the *language representations*. The characters of the language and the mathematical symbols are basically different from each other, because the mathematical symbols are free from redundancy, operate with necessary and sufficient conditions, while the language expressions are redundant and based on typical properties that allow the exceptions, moreover the language logics and mathematical logics are different.

The examination of the multiple representations highlighted facts that the sign of the *iconic representations* are in the „creative cerebral hemisphere", however the sign of the *symbolic representations* are in the other cerebral hemisphere that is „responsible for the logic". In teaching mathematics besides the illustration we also have to emphasize the *visual concept-building*.

According to the cognitive standpoint pupils have to build in the new knowledge into their already existing concepts net during learning. Parallel using of the different representations help the new knowledge being multiply built into the *internal representation*. The ambition on the *visual concept-building* results, that not only the *symbolic* but also the *iconic representation* appears in the other cerebral hemisphere. To deepen and strengthen the new connections created in the widening, enriching knowledge net the new knowledge has to be activated. In teaching mathematics the new knowledge is practiced by solving tasks. Selection of the exercises will have an effect not only on deepening the new connections, but also on creating new connections, if we choose the exercises from the practical applications, thus the new knowledge will be connected to more elements of the already existing knowledge net.

According to the cognitive view, the existing, strengthened connections among the elements of the former concepts net can not be cancelled, it would cause almost inextricable difficulties. The teaching process has to be conformed to this principle. It has a determinate importance in developing the construction of

3. A redukált Galois-gráf a megcélzott tudásháló egy olyan szemléletes reprezentációja, amelyen egyidejűleg vizsgálható az egész és egyes részletei. *[D2.8; 3.5 és 4.7]*

4. Kognitív nézőpontból a redukált Galois-gráf a megcélzott tudásháló modelljeként szemléletesen tükrözi az általánosítás-specializálás és az absztrakció-konkretizáció duális művelet párok alaptulajdonságait *[D3.5; 4.7 és 4.9]*

5. A feladatsorok pontosabb jellemzéséhez alkalmas eszköz a Galois-gráf, ami segíti feltárni a rejtett szaktanári preferenciákat. *[D5.2]*

6. A tanulói tudás instabilitása miatt a tanulók-itemek reláció Galois-gráfja nagyméretű, bonyolult összefüggésű gráf, melyekből megalapozott didaktikai következtetéseket nem tudtunk levonni. A tanulók feladatmegoldásait mi a *stabil* és *instabil tudás hipotézise* alapján is vizsgáltuk. *[D5.1-2]*

1. INTRODUCTION

1.1. Reasons for choosing the topic of the thesis

One of the missions of teaching mathematics is to develop the skill of pupils' concept-building with the specific means.

The concept-building is a complex process that is difficult to examine, because the subjective internal representation of the concepts is not available for us by direct methods, moreover the single concept gets a meaning not by itself but only by the connection system of the other concepts.

Therefore the examination of the concept-building is necessarily a model examination, since we try to conclude on the internal thinking processes on the basis of the external representations appearing by the means of communication, meanwhile we have to consider all the limitations and possible mistakes of the model's method:

- a model always simplifies and approaches the reality only from specific aspects;
- all the models can be used only among given limitations.

The different disciplines try to model the concept-building of course by their specific views and toolbars. In the mathematical concept-building the sense gets the central role and the symbolic language of mathematics make the concepts' description more precise and more clearly arranged.

In our research we have made an attempt to use mathematical results and tools in mathematical didactics examination of the concept-building process. The Hungarian National Curriculum set as a teaching aim not to teach the mathematics for the pupils but to develop the pupils' thinking and view by the means of mathematics. The didactics examination of the mathematical concept-building naturally can not be reduced on didactics adapt of the mathematical definition forms (explicit, implicit and inductive definitions).

In the last thirty years my personal experiences I got at different types of schools and universities as a teacher or a student made me certain that the learnt concepts are being built in the knowledge net in bunched in smaller groups, while these concept groups sharply separate from each other.

This result of the concept-building process keeps back, even makes the success of the system view expressly impossible. I got also similar observations in working on the fields of education management and energetic.

In the first half of the 90s such educational experiment got chance in the PSZM Project, which unlike the traditional frame of subjects wished to organize the knowledge to be attained around the interdisciplinary concepts. The interdisciplinary character of these experimental subjects helps the knowledge being organized into a different tendency of network. The more completely built concepts net is advantageous also in the development of the system view.

I led the introducing experiment of the bases of *scientific model building*. During the examination of the hierarchical models I got in work relationship with *Viola Takács*, thus I could take a part in her research of comparison the physics schoolbooks. Her persistent belief in pedagogical adaptability of the Galois-graph has made a deep impression on me, while I also got a possibility of a system viewing examination of the pedagogical measuring-evaluative systems. During this work I became convinced of the efficiency of this method, and at the same time of the difficulty of applying this method. As a result of that the *Simulator for Windows* software was prepared by my monitoring.

The mathematical didactical literature argues with the different aspects of the concept-building abundantly. On the other hand surprisingly the Galois-graph suitable for describing the concept hierarchy did not get place in the mathematical didactical analysis, although nowadays there are attempts to apply it also in case of other subjects. In the last decade I examined the possibilities of mathematical didactics application of the Galois-graph as a modelling tool. Introducing the Galois-graph as a tool in the mathematical didactics analysis means that we use the formal concept analysis in modelling the teaching of the precise and abstract mathematical concepts. Creating this model requires an accurate, careful and reliable work, and as a result of it we win such a visual view about the concept hierarchy, on which we can examine the totality and the details of the hierarchy at the same time.

1.2. The antecedents of examining the concept net

These days the representatives of different disciplines deal with the research of the *knowledge net*. The expression of *knowledge net* is used in double meaning in the literature: the concept of the external and the internal *representational net*. According to the cognitive standpoint the available external representation of the knowledge corresponds to some kind of internal representation of the knowledge, and the researchers usually infer a strong connection between the level of the internal and external representation. The *internal representational net* can be examined only by indirect method, i.e. by the *external representation* as a model. The elements of the external representational net are set of the objects, called ideas, concepts, etc. These objects are in a strong connection with