

**Pokorádi László**

***Rendszerek és folyamatok  
modellezése***

***Campus Kiadó  
Debrecen  
2008.***

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás és a mű bővített, vagy rövidített változatának kiadási jogát is.

A Szerző előzetes írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak bármilyen részlete semmilyen formában nem sokszorosítható.

**Szerző:**

**Pokorádi László**

egyetemi tanár

okleveles (repülő)gépészmérnök, helikopter sárkány-hajtómű üzembentartó  
üzemmérnök, (belsőégésű) erőgépész üzemmérnök,

dr. univ., PhD (műszaki tudományok), a műszaki tudomány kandidátusa,  
dr. habil.

**Lektor:**

**Szabolcsi Róbert**

okleveles repülőmérnök,

dr. univ., PhD (műszaki tudományok), dr. habil.

**Szabó Sándor**

okleveles fizikus, okleveles fizika szakos tanár, diplomás gépészmérnök,  
PhD (fizika tudományok)

ISBN 978-963-9822-06-1

© **Pokorádi László**

Campus Kiadó

4028 Debrecen, Kassai út 26.

Telefon: 52-420-492

Felelős vezető a kiadó ügyvezető igazgatója

## ELŐSZÓ

Több mint két évtizedes felsőoktatási tevékenységem során a közvetlen oktató, nevelő munkám mellett — alapvetően a repüléstudomány területéhez tartozó — rendszerek és folyamatok matematikai modellezési lehetőségeit kutattam.

Az eddigi modellezési munkáim és eredményeim alapján jutottam el a modellek bizonytalansági kérdéseinek problémáihoz, melyek elemzését a következőkben folytatandó kutatásaim fő céljának tekintek.

Jelen könyv megírását több céllal terveztem el. Részben ezzel a munkával szeretném rendszerezetten összefoglalni az eddigi műszaki-tudományos tevékenységem eredményeit, illetve megfogalmazni, körvonalazni a további kutatásaim területét, irányvonalát.

Másrészt — de nem másodlagosan — a DEBRECENI EGYETEM MŰSZAKI KARÁN oktatásra kerülő több tantárgynak az alapját is képezi. Így az akkreditálás alatt lévő Gépészeti Tudományok Doktori Iskola *Rendszer- és folyamatmodellezés* tantárgyának, illetve a már akkreditált Létesítménymérnöki MSc szak *Rendszertechnika* tantárgyának.

Tudományos tevékenységemet — melyek összegzése ez a könyv — az OKTATÁSI MINISZTERIUM *Széchenyi Professzori Ösztöndíjjal* (1999–2002), majd *Széchenyi István Ösztöndíjjal* (2003–2005) támogatta, illetve a MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA DEBRECENI TERÜLETI BIZOTTSÁGA (DAB) 2008-ban *DAB plakettel* ismerte el, melyeket ezúton is szeretnék megköszönni.

Köszönetet mondok SZABOLCSI RÓBERT és SZABÓ SÁNDOR uraknak, a lektoraimnak, valamint TURJÁNYI SÁNDOR, NOVÁK ISTVÁN és PORTIK TAMÁS uraknak segítő észrevételeikért.

***Könyvemet Édesanyámnak ajánlom, 75. születésnapjára.***

Debrecen, 2008. április 08.

Pokorádi László



# TARTALOMJEGYZÉK

<b>BEVEZETÉS</b>	<b>1</b>
<b>I. RENDSZERELMÉLETI ALAPOK</b>	<b>3</b>
I.1. Bevezetés	3
I.2. A fejezetben alkalmazott általános jelölések	4
I.3. A rendszer fogalma	5
I.4. Jellemzők és jelek	8
I.4.1. Az extenzív és intenzív jellemzők	9
I.4.2. A Jellemezők térbeli és időbeni változása	10
I.4.3. A jelek	12
I.4.4. A vizsgálójelek	14
I.5. Rendszerek osztályozása	18
I.5.1. Gerjesztések és válaszok száma	18
I.5.2. Lineáris és nemlineáris rendszerek	20
I.5.3. Invariáns és variáns rendszerek	21
I.5.4. Dinamikus és memóriamentes rendszerek	22
I.5.5. Determinisztikus-sztochasztikus rendszerek	22
I.6. Felhasznált irodalom	23
<b>II. A MODELLEK</b>	<b>25</b>
II.1. Bevezetés	25
II.2. A fejezetben alkalmazott általános jelölések	25
II.3. A modellek fogalma és felosztása	26
II.3.1. A gondolati modellek	27
II.3.2. Az anyagi modellek	28
II.3.3. Egyszerű példa a modellekre	30
II.4. A matematikai modellek	33
II.4.1. Statikus és dinamikus modellek	35
II.4.2. Lineáris és nemlineáris modellek	35
II.4.3. Determinisztikus és sztochasztikus modellek	36
II.4.4. Folytonos idejű és diszkrét idejű modellek	36
II.4.5. Folytonos paraméterű és diszkrét paraméterű modellek	37
II.5. Modellelés és szimuláció	37
II.5.1. Modellalkotási eljárások	39
II.5.2. A matematikai modellalkotás céljai	40
II.5.2. A matematikai modellezés és szimuláció folyamata	41
II.6. Felhasznált irodalom	49

<b>III.</b>	<b>RENDSZEREK GRÁF-MODELLEZÉSE</b>	<b>51</b>
III.1.	Bevezetés	51
III.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	51
III.3.	Gráfelméleti alapfogalmak	52
III.4.	Gráf-modellek vizsgálata	57
III.5.	Felhasznált irodalom	62
<b>IV.</b>	<b>DIMENZIÓANALÍZIS ÉS HASONLÓSÁG</b>	<b>63</b>
IV.1.	Bevezetés	63
IV.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	63
IV.3.	A jellemzők dimenziói	63
IV.3.1.	Az SI mértékegységrendszer	64
IV.3.2.	Az angol-szász mértékegységrendszerek	68
IV.3.3.	A dimenziók aritmetikája	70
IV.4.	A dimenzióanalízis	71
IV.4.1.	A dimenzionális homogenitás	72
IV.4.2.	A dimenzióanalízis módszere	74
IV.5.	folyamatok hasonlósága	77
IV.5.1.	A geometriai hasonlóság	78
IV.5.2.	Hő- és áramlástanai hasonlóságok	78
IV.6.	Felhasznált irodalom	86
<b>V.</b>	<b>FIZIKAI FOLYAMATOK LEÍRÁSA</b>	<b>87</b>
V.1.	Bevezetés	87
V.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	87
V.3.	Az általános transzportegyenlet	88
V.3.1.	A LAGRANGE- és az EULER-féle leírási mód	89
V.3.2.	Az általános transzport egyenlet differenciál alakja	91
V.3.3.	Az általános transzport egyenlet integrál alakja	93
V.4.	Az anyagáram vizsgálata	96
V.4.1.	A folytonossági törvény	96
V.4.2.	Összenyomható közeg egyméretű áramlása	98
V.4.3.	A gázdinamikai függvények	103
V.5.	Erők és nyomatékok vizsgálata	104
V.5.1.	NEWTON második törvénye	105
V.5.2.	Az impulzus tétel	109
V.5.3.	A perdület tétel	111
V.6.	A Munka-tétel	114
V.7.	Felhasznált irodalom	119

<b>VI.</b>	<b>DETERMINISZTIKUS RENDSZERMODELLEZÉS</b>	<b>121</b>
VI.1.	Bevezetés	121
VI.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	121
VI.3.	Nemlineáris modellezés	121
VI.3.1.	NEWTON-RAPSHON módszer	125
VI.3.2.	A gradiens módszer	126
VI.3.3.	Mintapélda megoldása	128
VI.4.	Lineáris modellezés	129
VI.4.1.	Logaritmikus linearizálás	130
VI.4.2.	Teljes deriválás	132
VI.4.3.	TAYLOR (LIE-MAGNUS) sorbaféjtés	132
VI.4.4.	A diagnosztikai mátrix	133
VI.4.5.	Mintapélda megoldása	134
VI.5.	Érzékenységvizsgálat	135
VI.6.	Korrelációs-család vizsgálat	138
VI.7.	Állapotbecslés	143
VI.8.	Különleges üzemmódok vizsgálata	146
VI.9.	Felhasznált irodalom	151
<b>VII.</b>	<b>SZTOCHASZTIKUS MODELLEZÉS</b>	<b>153</b>
VII.1.	Bevezetés	153
VII.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	154
VII.3.	A sztochasztikus folyamatok	154
VII.3.1.	MARKOV folyamatok	155
VII.3.2.	Sorbanállási folyamatok	156
VII.4.	Meghibásodási folyamat modellezése	159
VII.5.	Üzemeltetési, karbantartási folyamat modellezése	163
VII.6.	Az üzemeltetés állapotfigyelésre épülő irányítása	167
VII.7.	Sorbanállási modellek	171
VII.7.1.	A kiszolgáló zóna befogadóképességének meghatározása	175
VII.7.2.	A kiszolgálható gépszám meghatározása	176
VII.8.	Felhasznált irodalom	178
<b>VIII.</b>	<b>FUZZY MODELLEZÉS</b>	<b>181</b>
VIII.1.	Bevezetés	181
VIII.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	182
VIII.3.	A fuzzy halmazelmélet alapjai	182
VIII.3.1.	Fuzzyfikáció	184
VIII.3.2.	Értelmezés	188
VIII.3.3.	Összegzés	188
VIII.3.4.	Defuzzifikáció	188

VIII.4.	Fuzzy modell alkalmazása a kockázatbecslésben	192
VIII.4.1.	Előkészítési szakasz	193
VIII.4.2.	Alkalmazási szakasz	196
VIII.5.	Fuzzy FMEA	198
VIII.5.1.	Előkészítési szakasz	199
VIII.5.2.	Alkalmazási szakasz	202
VIII.6.	Fuzzy döntési modell	206
VIII.6.1.	Ellenőrzések közti üzemidő meghatározása	207
VIII.6.2.	Megengedhető paramétereltérések meghatározása	210
VIII.7.	Felhasznált irodalom	212
<b>IX.</b>	<b>A MODELLEZÉSI BIZONYTALANSÁG</b>	<b>215</b>
IX.1.	Bevezetés	215
IX.2.	A fejezetben alkalmazott általános jelölések	215
IX.3.	A bizonytalanság értelmezése	215
IX.3.1.	A bizonytalanság elemzési módjai	218
IX.3.2.	A kockázatkezelés bizonytalansága	220
IX.4.	Determinisztikus modell parametrikus bizonytalanságának vizsgálata — Gyártási paraméter-eltérések hatásainak elemzése	224
IX.4.1.	A valószínűségi elemzés elméleti megoldása	224
IX.4.2.	A valószínűségi elemzés inverz feladata	227
IX.4.3.	Az intervallum elemzése elméleti megoldása	228
IX.4.4.	Az intervallum elemzése inverz feladata	229
IX.4.5.	Mintapélda intervallum elemzése	230
IX.5.	Sztochasztikus modell parametrikus bizonytalanságának vizsgálata — Javítási munkaigény kétdimenziós valószínűségi becslése	233
IX.5.1.	Elméleti megoldás	235
IX.5.2.	Esettanulmány	237
IX.6.	Felhasznált irodalom	240



## BEVEZETÉS

Modellezésen a valóságos rendszer vagy folyamat lényegi tulajdonságainak felismerését, és azok valamilyen formájú leképezését értjük. Egy adott technikai rendszer, vagy műszaki folyamat korszerű, tudományos igényű vizsgálatának feltétele a rendszermodell megalkotása.

Jelen könyv egyik fő célja a rendszerezetten összefoglalni a Szerző eddigi műszaki-tudományos tevékenységét, annak eredményeit, illetve megfogalmazni, körvonalazni további kutatásai irányvonalát. Ezért a kérdésköröket alapvetően (repülő)gépész szempontból vizsgálják a könyv különböző fejezetei. Így — a fenti „előéleti”, valamint terjedelmi okok miatt — a könyv nem tér ki például az elektromos rendszerek matematikai leírására.

A könyv másik fő célja, hogy megfelelő alapot biztosítson a Debreceni Egyetem Műszaki Karán a különböző (BSc, MSc, PhD) szintű képzések ezirányú tantárgyai tananyagainak. Ez utóbbi szolgálják a fejezetekben bemutatásra kerülő példák, esettanulmányok is.

A könyv az alábbi fejezetekből áll: Az első fejezet a rendszertechnikai alapfogalmakat, a jellemzők, jelek és a rendszerek osztályozását mutatja be. A második fejezet a modell fogalmát és felosztását írja le, részletesebben kitérve a matematikai modellekre és a matematikai modellezés folyamatára.

A harmadik fejezet — a Szerző korábbi ilyen irányú vizsgálatára támaszkodva — a rendszerek, és folyamatok gráfokkal történő modellezését szemlélteti. A negyedik fejezetben a jellemzők dimenzióival, a dimenzióanalízissel, valamint a fizikai folyamatok hasonlóságelméletével ismerkedhet meg az Olvasó. Az ötödik fejezet a fizikai folyamatok leírásával foglalkozik, ezen belül is inkább a mechanikai, a hő- és áramlástanai folyamatokra koncentrálva.

A hatodik fejezet a determinisztikus technikai rendszerekben lejátszódó folyamatok leírására szolgáló lineáris, és nem-lineáris matematikai modellezési és modellalkalmazási eljárásokat mutatja be. A hetedik fejezetben a sztochasztikus rendszer és folyamatmodellezési módszerek kerülnek bemutatásra, a technikai eszközök üzemeltetési gyakorlatából vett esettanulmányokkal együtt. A nyolcadik fejezet a fuzzy halmazelmélet alapjait írja le, majd a fuzzy halmazelméletre épülő modellezési technikákat szemléltet, melyek a technikai eszközök üzemeltetési problémáihoz kapcsolódó döntéselőkészítési feladatok megoldásakor alkalmazhatóak. Végül, a kilencedik fejezet a modellezési bizonytalansággal foglalkozik, részben elemezve a témakörhöz kapcsolódó — a Szerző tudományos gondolkodását meghatározó — irodalmakat, részben a Szerző gondolatait, eddigi eredményeit bemutatva.

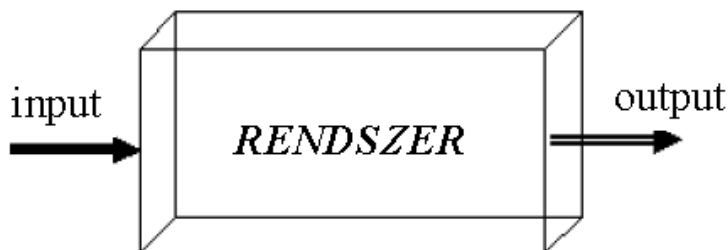


# RENDSZERELMÉLETI ALAPOK

### I.1. BEVEZETÉS

A rendszerelmélet — egyes szakemberek szerint — nem más, mint különféle matematikai módszerek gyűjteménye, melyek segítségével a rendszerek elemezhetők [I.4] [I.14]. Ezt a gyűjteményt főleg a differencia- és differenciálegyenletek, a vezérlélmélet, a kapcsolóáramkörök elmélete, az automaták elmélete, az információelmélet, a matematikai programozás, a dinamikus programozás, a variációszámítás, az alkalmazott mechanika, a dinamikus rendszerek elmélete, a funkcionálanalízis, a valószínűségelmélet, a játékelmélet területéről állították össze, de természetesen más matematikai ágak is helyet kapnak benne.

ZADEH véleménye szerint a rendszerelmélet, mint tudományág, elvileg két nagyobb részre osztható fel [I.14]. Az első rész az alap, amely főleg az olyan alapvető fogalmak, mint rendszer, állapot, linearitás, kauzalitás, passzivitás, meghatározottság, ekvivalencia, stabilitás, vezérelhetőség (irányíthatóság), megfigyelhetőség jelentésének definiálásával és az ezekkel kapcsolatos más fogalmakkal, valamint a definiált fogalmak alapvető tulajdonságainak vizsgálatával foglalkozik. A második részbe azokat a különböző módszereket, eljárásokat és algoritmusokat sorolja ZADEH, amelyekkel az egyes speciális rendszertípusok, mint differenciálegyenlettel leírt rendszerek, végesállapotú rendszerek, modulrendszerek, sztochasztikus rendszerek, tanuló rendszerek, osztott paraméterű rendszerek, nagyméretű rendszerek viselkedése tanulmányozható.



I.1. ábra A rendszer egyszerű értelmezése

De, mit is értünk rendszeren, illetve annak állapotán? Gyakorlati szempontból egy rendszer lehet az adott fizikai objektum egy modellje, amely az úgynevezett fizikai változók segítségével írható le. A „fizikai” fogalmán a

„valóságos”-t értjük. Tartalma lehet a szó szoros értelmében vett fizikai, kémiai, vagy gazdasági, esetleg más jellemző, illetve lehet ezek kombinációja is. Ezen mennyiségek némelyike adottnak tekinthető: ezek a bemenetek (gerjesztések, „inputok”). A változók másik csoportja, melyeket viselkedését elemzéseink során meg akarjuk határozni, a kimenetek („outputok”). A változók egy harmadik csoportját pedig azért vezetjük be, hogy le tudjuk írni a gerjesztések és válaszok közti kapcsolatot vagy kapcsolatokat. Ekkor minden fizikai változót az ahhoz rendelt jellel vagy jellemzővel, az objektumot egy rendszerrel írjuk le.

Elméleti szempontból a rendszer egy transzformáció, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel, melyet a I.1. ábra szemléltet.

Jelen fejezetben a rendszertechnika alapfogalmait ismerheti meg a Tisztelt Olvasó. Az I.3. fejezetben a rendszer fogalmát fogjuk értelmezni — több, mérnöki szempontból. Ezt követően kerül sor a technikai rendszer fogalmának meghatározására. Mivel minden rendszer inputok és outputok közti transzformációt végez, ezt követően a (rendszer állapotát leíró) jellemzőkkel, az (input és output) jelekkel kapcsolatos alapfogalmakat (I.4. fejezet) fogjuk ismertetni. Ezt követően pedig a rendszerek különböző, a későbbi elemzések szempontjaiból fontos, szempontú osztályozásait végezzük el (I.5. fejezet).

## I.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

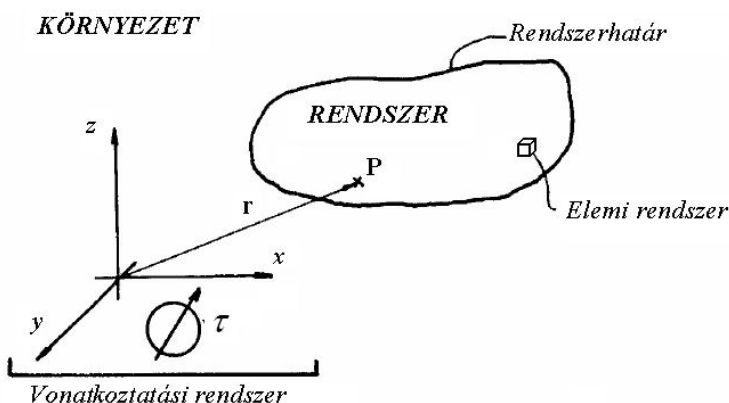
$f$	—	általános fizikai változó;
$\mathbf{R}$	—	valós számok halmaza;
$u$	—	általános gerjesztő jel;
$W$	—	általános rendszeroperátor;
$y$	—	általános válaszjel;
$\mathbf{Z}$	—	valós egész számok halmaza;
$\rho$	—	sűrűség;
$\tau$	—	idő;
$\mathbf{f}$	—	általános fizikai vektorváltozó;
$\mathbf{r}$	—	helyvektor;
$\mathbf{u}$	—	általános gerjesztő jelvektor;
$\mathbf{y}$	—	általános válaszjel vektor;
$\delta(\tau)$	—	DIRAC-delta függvény;
$l(\tau)$	—	egységugrás függvény;
$\tau l(\tau)$	—	egységsebesség függvény;
$\frac{\tau^2}{2}l(\tau)$	—	egységgyorsulás függvény.

### I.3. A RENDSZER FOGALMA

A különböző mérnöki szakirodalmak más és más megfogalmazást adnak a rendszerrel kapcsolatban.

A mérnöki fizikában (hő- és áramlástanban) **rendszeren** az anyagi világ vizsgálataink tárgyát képező részét értjük [I.6]. Az anyagi világ azon részét, amely nem tartozik a rendszerhez, **környezetnek** nevezzük. A rendszer lényeges tartozéka a **rendszerhatár**, amely a rendszert teljesen körülzárja és elválasztja azt a környezetétől (I.2. ábra).

A rendszernek ez a fogalmi meghatározása nagyon általánosnak tűnik. Például, ha áramlástanilag vagy hőtanilag vizsgálunk egy gázturbinás hajtóművet, akkor rendszeren magát a hajtóművet és belső tereit kell érteni, a környezeten viszont a környező világ többi részét. A rendszerhatárt pedig a hajtómű külső burkolata, valamint a beömlő csatorna és a gázelvezető cső homloklapfelülete alkotják.



I.2. ábra Rendszer és környezet értelmezése a mérnöki fizikában

Természetesen, a rendszer kiválasztása történhet úgy is, hogy a rendszerhatár egy képzeletbeli zárt felület. Ilyen esettel találkozhatunk például egy légcsavar áramlástanilag vizsgálatakor. Ekkor a rendszernek a légcsavaron átáramló levegő áramcsövét vesszük fel. A rendszerhatárt pedig az áramcső palástja, valamint a be-, illetve kilépő keresztmetszete alkotja (I.3. ábra).

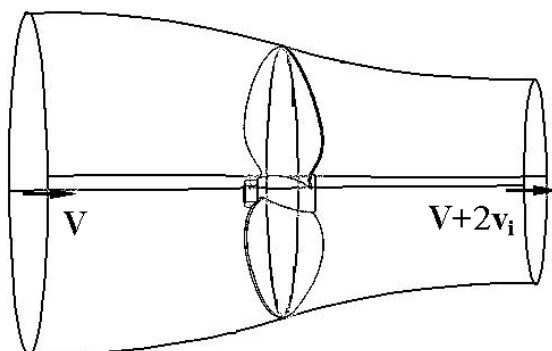
A rendszer és a környezet közötti kölcsönhatás megnyilvánulhat mechanikai, termikus vagy anyagi formában.

**Szigetelt** a rendszer, ha az a környezetével semminemű energetikai vagy materiális kölcsönhatás nem lép.

**Zárt rendszerről** vagy **anyagi térfogatról** akkor beszélünk, ha az a környezetével nem állhat anyagi kölcsönhatásban.

**Nyitott** a rendszer, ha lehetséges, hogy környezetével materiális kölcsönhatás alakuljon ki. Ekkor a rendszerbe léphet be, vagy a rendszerből léphet ki anyag.

Ha a környezet és a rendszer között termikus energetikai kölcsönhatás, azaz hőcsere, nem léphet fel, akkor **adiabatikus rendszerről**, vagy hőszigetelt rendszerről beszélünk.



I.3. ábra Légszavár vizsgálatánál alkalmazott rendszer (áramcső)

Vizsgálataink **vonatkozási rendszerén** a folyamatok színterét kijelölő derékszögű (vagy polár) koordináta-rendszer és az időbeli lefolyásuknak léptéket adó időskála együttesét értjük (I.2. ábra).

A vonatkoztatási rendszerhez, azaz a megfigyelőhöz képest mozdulatlan, tetszőleges, de állandó alakú és kiterjedésű nyitott rendszert **ellenőrző térfogatnak** nevezzük. Az ellenőrző térfogat határa az ellenőrző felület.

Az **anyagi térfogat** és az ellenőrző térfogat között az alábbi két lényeges különbség található:

- az anyagi térfogat és határa változtathatja az alakját, kiterjedését és az adott vonatkoztatási rendszerhez viszonyított térbeli helyzetét, ezzel szemben az ellenőrző térfogat határa, az ellenőrző felület viszont ezt nem teheti meg;
- az ellenőrző térfogat tömege általában változatlan és/vagy cserélődhet — mivel az anyagáram az ellenőrző felületen átléphet —, ezzel szemben az anyagi térfogaté (zárt rendszeré) soha sem.

**Elemi rendszernek** olyan — anyaggal folytonosan kitöltött (materiális) — térfogatot nevezünk, amely elég kicsi ahhoz, hogy belsejében a fizikai jellemzők térbeli eloszlását minden esetben egyenletesnek tekinthessük, de elegendően nagyszámú korpuszculát (például molekulát vagy atomot) tartalmaz

ahhoz, hogy az általuk meghatározott fizikai jellemzőket statisztikai átlagként foghassuk fel.

ZADEH szerint a rendszert úgy definiálhatjuk, mint olyan objektumok összessége, amelyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak össze. Ebben a megfogalmazásban az is benne rejlik, hogy majdnem minden, ami létezik, valamilyen rendszernek tekinthető [I.14].

Nem egészen ennyire elterjedt, de ennek ellenére szintén alapvető fogalom a rendszer állapota. Első megközelítésben a **rendszer állapota** azt az egy adott időpontban megadott információk összességét jelenti, amely ettől az időponttól kezdve a rendszer viselkedésének meghatározásához szükséges. Így például a kinematikában a szilárd test állapotát egyenes vonalú mozgás esetén helyzete-, és sebessége adja meg.

Ha a rendszert a bemenet-kimenet párok halmazaként definiáljuk, akkor az állapotot természetes módon bizonyos konzisztencia-kritériumokat kielégítő bemenet-kimenet párok részhalmazához kapcsolódó címkeként határozhatjuk meg. Az ilyen részhalmazt **aggregátnak** nevezzük. Az aggregát koncepciója fontos szerepet tölt be rendszerelméletben, hiszen igen természetes módszert szolgáltat az állapot-ekvivalencia, a rendszer-ekvivalencia, a bemenet – kimenet állapotrelációk, tehát a rendszerelmélet alapelveinek bevezetéséhez.

NAGY megfogalmazásában a rendszer fogalma olyan jelenségek vagy objektumok összessége, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak össze. A folyamat a rendszeren belül lejátszódó jelenségek térbeli és/vagy időbeli sorozata [I.5].

FODOR [I.4] könyvében úgy fogalmaz, hogy egy rendszer az adott fizikai objektum egy modellje, amely az úgynevezett fizikai változók segítségével írható le. A „fizikai”, véleménye szerint, azt jelenti, hogy „valóságos”; a konkrét tartalma lehet fizikai, kémiai, gazdasági, stb. vagy ezek keveréke. A rendszer egy transzformáció, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel.

A fenti megfogalmazásokból a Szerző szerint hiányzik, vagy nem kellő hangsúllyal jelenik meg a technikai rendszerek egyik, talán a legfontosabb eleme — az ember. Egy tisztán technikai rendszer a valóságban az emberért, az emberrel együtt működik, így nem szabad a teljes ember-gép rendszerből az embert nem megemlíteni. Egyik érvként megemlíthető SZABOLCSI tudományos tevékenysége (például [I.12]), aki a repülőgép-vezetőt a repülésszabályozó rendszer arányos–differenciáló–holtidős tagjának tekinti, és elemzése során meghatározza a repülésbiztonság szempontjából kritikus paramétereket, melyek a pilóta emberi (fiziológiai) mivoltának következménye.

Fontos azt is megemlíteni, hogy a technikai eszközök (tervezés utáni) használata, karbantartása, javítása, azaz üzemeltetése is egy adott rendszerben valósul meg. Az üzemeltetés üzemeltetési rendszerben történik, ami a technikai eszköz vagy eszközök; azok kiszolgálását, ellenőrzését, karbantartását, javítását szolgáló berendezések; az üzemeltetést végző (műszaki) állomány; a kezelőszemélyzet; az üzemeltetést irányító szervezet kölcsönös együttműködése folytán valósul meg [I.8]. Ezen megfontolás hangsúlyozása azért lényeges, mert későbbiekben kimondottan ember–gép rendszerek vizsgálatát is fogjuk végezni. De, azt fontos hangsúlyoznunk, hogy egy rendszer csak akkor tekinthető technikainak, ha az műszaki eszközt, berendezést vagy fizikai objektumot tartalmaz. Tehát ez az elsődleges összetevője egy technikai rendszernek.

FODOR, NAGY és ZADEH fenti megfogalmazásai sem zárják ki ezt a megközelítést, ha a folyamatban résztvevő személyt a rendszer egy objektumának, aggregátjának tekintjük, így hármójuk és a Szerző véleménye nem jelentős mértékben, hanem csak hangsúlyokban tér el egymástól.

A fenti megfogalmazások valamint megfontolások, és a jelen sorok írójának eddigi tapasztalatai alapján a technikai rendszer fogalma az alábbiak szerint határozható meg:

**Technikai rendszer az anyagi világ vizsgálatunk tárgyát képező része, mely egymással valamilyen kölcsönhatásban lévő elemek (berendezések és személyek) összessége. A rendszer állapota, illetve a benne lejátszódó folyamat a be- és a kimenő valamint a belső jellemzőkkel írható le. A környezet kölcsönhatásban lehet a rendszerrel és meghatározza a rendszer működésének peremfeltételeit.**

#### I.4. JELLEMZŐK ÉS JELEK

A rendszerekben lejátszódó folyamatok mérhető mennyiségeit fizikai mennyiségeknek nevezzük, melyek nem csak fizikai, hanem kémiai, biológiai, technikai vagy gazdasági folyamatokat is jellemezhetnek. A további vizsgálataink során nem foglalkozunk a mennyiség valódi, csak annak absztrakt (matematikai) tartalmával. Egy változó valamely fizikai mennyiségnek egy alkalmas mértékegységben kifejezett számértékét jelenti. Egy változó egy fizikai mennyiség matematikai leírása.

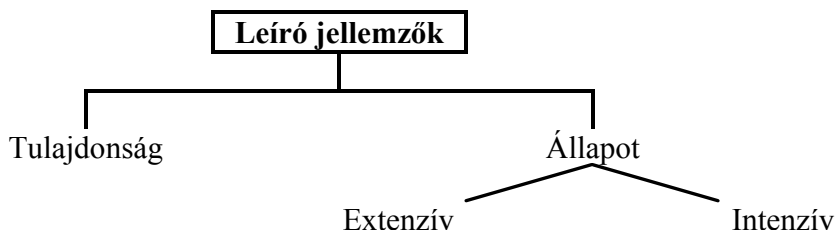
A technikai folyamatokat leíró jellemzőket a tulajdonságokat és a rendszer állapotát meghatározó jellemzők csoportjába osztjuk (I.4. ábra).

A tulajdonságot kifejező jellemzők általában egyértékűek, ide tartoznak a különböző geometriai adatok, valamint az anyagjellemzők, úgy, mint például a viszkozitás, villamos vezetőképesség vagy a fajhő [I.9].

Fizikai állapoton az anyagi rendszer sajátosságainak — fizikai jellemzőinek — összességét értjük. Két elemi rendszer fizikai állapota azonos,



ha a megfelelő fizikai jellemzők értéke az adott időpillanatban páronként egymással megegyeznek.



I.4. ábra Leíró jellemzők csoportosítása ([I.9] alapján)

A fenti definíció alapján kijelenthető, hogy az ilyen fizikai jellemzők értékei csakis attól az állapottól függenek, amelyben a vizsgált időpontban az elemi rendszer található, és független attól a folyamattól, amelyen keresztül az elemi rendszer az adott állapotba jutott. Ezért a fizikai jellemzőket **állapotjelzőknek** is nevezhetjük [I.7].

#### I.4.1. AZ EXTENZÍV ÉS INTENZÍV JELLEMZŐK

Egy rendszer valamely fizikai jellemzője **extenzív**, ha értékét az elemi rendszerben mérhető értékek összességéként kapjuk meg. Például az aerodinamikai vizsgálatoknál alkalmazott extenzív jellemzők például a tömeg, a térfogat vagy a mozgásmennyiség.

**Intenzívnek** tekintjük a fizikai jellemzőt, ha az nem rendelkezik az elemi rendszerek szerinti összegezhetőség tulajdonságával. Intenzív fizikai jellemző például a nyomás és a hőmérséklet.

Tegyük fel, hogy van két, egyenként 1 kg tömegű, 380 K (107 °C) hőmérsékletű testünk (amelyek itt elemi rendszereknek tekinthetők), és ezeket egymás mellé helyezzük — azaz egy rendszert hozunk létre belőlük. Ennek a rendszernek a tömege 2 kg lesz, mivel a tömeg extenzív mennyiség. De a két test együttes hőmérséklete nem 760 K (vagy 214 °C) lesz, hanem továbbra is 380 K marad — mert a hőmérséklet intenzív állapotjelző [I.7].

Egy extenzív jellemző térfogategységre vonatkoztatott értékét az adott extenzív mennyiség **sűrűségének** nevezzük. Ilyen például a tömegsűrűség (jele:  $\rho$ ), melyet egyszerűen „csak” sűrűségnek szokás nevezni. Az egyéb extenzív jellemző térfogategységre vonatkoztatott értéke esetén a „sűrűség” szó elé oda kell írni az illető extenzív jellemzőt is — például: „energiasűrűség”.

Egy extenzív jellemző tömegegységre vonatkoztatott értékét a kérdéses extenzív

jellemző **fajlagos** értékének nevezzük. Ilyen jellemző például a „fajlagos térfogat” — vagy egyszerűen „fajtérfogat” —, ami nem más, mint az egységnyi tömegű anyag térfogata. (Érdekességként említhetjük meg, hogy korábban alkalmazott műszaki mértékegységrendszerben a fajlagos értékeket a tömegegység helyett súlyegységre vonatkoztatták.)

Érdemes itt azt is megemlíteni a fajsúly „esetét”. A fajsúly definíciója alapján az egységnyi térfogatú anyag súlya — azaz fizikai szempontból: sűrűség —, csak nevében tűnik faj(lagos) értéknek.

Könnyen belátható, hogy az extenzív jellemzők sűrűségei és fajlagos értékei már egyértelműen intenzív mennyiségek. A kettő közti kapcsolatról pedig kimondhatjuk, hogy egy extenzív mennyiség sűrűsége az adott mennyiség fajlagos értékének és a rendszer (tömeg)sűrűségének szorzataként határozható meg [I.13].

#### I.4.2. A JELLEMEZŐK TÉRBELI ÉS IDŐBENI VÁLTOZÁSA

A fizikai jellemzők — az esetleges különleges tartományoktól eltekintve — a térben folytonosan oszlanak meg. Az ilyen térbeli megoszlásokat gyűjtőnéven **fizikai tereknek** nevezzük. A fizikai jellemzők részben skaláris (például nyomás) részben vektoriális (például gyorsulás) jellegűek. Ennek megfelelően, mint már azt matematikából tudott, beszélhetünk skalár-, és vektorterekről. A fizikai terek általában az időben is változnak, ezért általános formában matematikailag az

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(x; y; z; \tau) \quad (\text{I.4.1})$$

alakban írható fel, ahol  $f$  skalár-, vagy vektor mennyiséget is jelölhet.

**Homogén** a fizikai tér, ha az adott  $f$  jellemző térbeli megoszlása egyenletes, az időbeni változása a tér minden pontjában, azonos mértékben és egyidejűleg következik be, azaz az (I.4.1) egyenlet az

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(\tau) \quad (\text{I.4.2})$$

alakot vesz fel. Ha az  $f$  fizikai jellemző megoszlása térben változik, akkor **inhomogén** a fizikai tér.

**Stacionárius** vagy stacioner fizikai térről akkor beszélünk, ha az  $f$  jellemző térbeli megoszlása időben nem változik, azaz

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(\mathbf{r}) = f(x; y; z) \quad . \quad (\text{I.4.3})$$

Az  $f$  jellemző időbeni változása esetén **instacioner** a fizikai tér. **Kvázistacioner** fizikai térről akkor beszélünk, ha az  $f$  jellemző időben változik, de ezt a változást — relatív nagysága miatt — elhanyagolhatjuk.

A **skalártereket** szintfelületekkel (szintvonalakkal) jellemezzük, amelyek a tér azon pontjait kötik össze, amelyekben az  $f$  fizikai változó értéke azonos (például az izobárok az állandó nyomású pontokat magukba foglaló felületek vagy görbék).

A skalárterek hely szerinti változásának jellemzésére egy vektormennyiséget, a **gradiens** vektort használjuk, amelynek  $x$ ;  $y$  és  $z$  komponensei a leírt fizikai mennyiség  $x$ ;  $y$  és  $z$  irányú változásának rohamosságával, sebességével arányosak:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \mathbf{r}} \quad . \quad (\text{I.4.4})$$

Egy adott pontbeli gradiens vektor

- a skalártér legrohamosabb változásának irányával párhuzamos;
- a skalártér növekedésének irányába mutat;
- hossza egyenesen arányos a változás rohamosságával;
- merőleges a szintfelületre (szintvonalra).

A **vektorterek** helyszerinti változását kétféleképpen jellemezhetjük.

A **divergencia** a vektortér — adott pontbeli — forrásosságát jellemző skaláris érték, meghatározása az alábbiak szerint történik:

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad . \quad (\text{I.4.5})$$

Pozitív értékű divergencia esetén azt mondjuk, hogy a pontban forrás van, negatív divergencia esetén pedig nyelőről beszélünk.

A **rotáció vektor** a vektortér — adott pontbeli — örvényességét mutatja meg:

$$\text{rot } \mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (\text{I.4.6})$$

Az olyan vektorteret, amelynek rotációja azonosan nulla, örvénymentesnek, vagy másképpen konzervatívnak nevezzük. Minden örvénymentes vektortérhez rendelhető egy olyan

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}; \tau)$$

skalár–vektor függvény, amelyből a vektorteret leíró vektor–vektor függvényt gradiens képzéssel nyerhetjük, azaz:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}; \tau) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}; \tau) \quad . \quad (\text{I.4.7})$$

Ezt a  $\varphi(\mathbf{r}; \tau)$  függvényt az adott tér **potenciálfüggvényének** (például sebességi potenciálnak) nevezzük. Ezért az örvénymentes vektortereket potenciális tereknek is szokás nevezni.

### I.4.3. A JELEK

Egy jel a változó azon részének matematikai leírása, amely a vizsgálataink számára lényeges információt hordozza.

Egy  $f$  jel **folytonos idejű jel** (FI jel), ha a  $\tau$  idő minden valós értékére értelmezett, azaz:

$$f = f(\tau) \quad \tau \in \mathbf{R} \quad . \quad (\text{I.4.8})$$

Bizonyos típusú jelek csak a (független) idő  $\tau_i$  diszkrét értékeire értelmezettek, azaz akkor arra az esetre szorítkozunk, amikor a diszkrét időnek csak az egész értékei fordulnak elő. Az  $f$  **diszkrét idejű jel** (DI jel) megadásának módja

$$f = f(\tau_i) \quad i \in \mathbf{Z} \quad . \quad (\text{I.4.9})$$

A mérnöki gyakorlatban a  $k$ -adik diszkrét időpontra a  $k$ -adik ütem elnevezést is használjuk.

A  $\tau \in \mathbf{R}$ , illetve a  $\tau_i \in \mathbf{Z}$  megadását gyakran elhagyjuk, mert az  $f(\tau)$  illetve a  $f(\tau_i)$  jelölés vagy a szöveggörnyezet is egyértelműen mutatja, hogy folytonos vagy diszkrét idejű jelről van-e szó. Egy diszkrét idejű DI jel gyakran egy folytonos idejű FI jel által meghatározott. Gyakori eset, amikor a  $f(\tau_i)$  diszkrét idejű értékek egy  $f(\tau)$  folytonos idejű jel értékei (mintái) a  $\tau = \tau_i$  időpontokban. Az esetek többségében a mintavétel egyenletes, azaz:

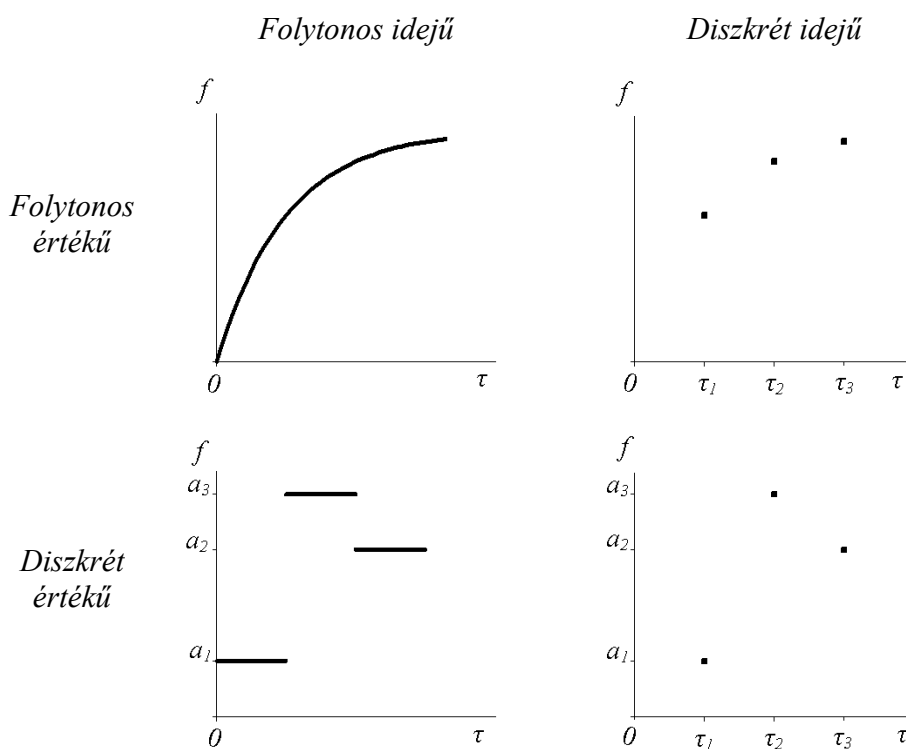
$$\tau_i = \tau_0 + k\Delta\tau \quad , \quad (\text{I.4.10})$$

ahol  $\Delta\tau$  az adott mintavételi periódusidő, illetve  $\tau_0$  a kezdeti idő, amely a műszaki gyakorlatban általában zérusértékűnek vesszük fel [I.11].

Általános esetben nehéz, felesleges vagy lehetetlen egy olyan FI jelet értelmezni, amelyből a DI jel származtatható. Például a kockadobás eredményei egy diszkrét idejű jelet határoznak meg, ahol  $k$  a dobás sorszáma, nincs értelme annak a kérdésnek, hogy mennyi a kockadobás „eredménye” két dobás között.

Amikor valóságos technikai folyamatokat modellezünk, gyakran alkalmazunk DI modellt FI folyamatra vagy fordítva.

Egy  $f$  jel **folytonos értékű**, ha annak értéke — esetleg bizonyos megszorításokkal — bármilyen valós vagy komplex szám lehet. Ilyen megszorítás lehet, hogy  $f$  csak valós és pozitív értékű lehet, vagy nem lehet nagyobb egy felső, illetve kisebb egy alsó korlátnál. Gondoljunk például a hőmérsékletre, amely — mint az köztudott —  $0\text{ K}$  ( $-273\text{ }^\circ\text{C}$ ) alatti értéket nem vehet fel.



I.5. ábra A jelek alapvető típusai ([I.3] alapján)

Egy  $f$  jel **diszkrét értékű**, más néven **kvantált**, ha csak bizonyos  $a_0; a_1; a_2; \dots$  valós vagy komplex értékeket vehet fel. Ezek az  $a_i$  értékek lehetnek tetszőlegesek vagy követhetnek bizonyos szabályszerűséget. Például a kockadobás esetében:

$$a_i = i \quad 1 \leq i \leq 6 \quad i \in Z \quad . \quad (I.4.11)$$

Bizonyos mennyiségek eleve diszkrét értékűek (például darabszám), másokat folytonos értékűeknek tekintünk (sebesség, hőmérséklet). Az utóbbiak mért értékei is diszkrét értékűek a mérés módja és a kerekítés által meghatározottan.

Mind a folytonos értékű, mind a diszkrét értékű jel lehet folytonos idejű vagy diszkrét idejű. A négy lehetőséget szemlélteti az I.5. ábra.

A folytonos idejű és folytonos értékű jeleket szokásos analóg jeleknek, a diszkrét idejű és diszkrét értékű jeleket szokás digitális jeleknek nevezni. Ezeknek a kifejezéseknek azonban más jelentésük is használatos.

Egy jelet **determinisztikus jeln**ek nevezünk, ha értéke a vizsgálat során minden időpontban ismert vagy meghatározható, azaz a jel (kielégítő pontossággal) megismételhető folyamatot ír le.

Ha nem tudjuk a jelet megismételni, mert az azonosnak tűnő eljárás különböző eredményekre vezet, akkor a jelet **sztochasztikus jeln**ek nevezük. A sztochasztikus jelek leírására a valószínűség számítás fogalmait és egyenleteit, elsősorban a valószínűség-sűrűségfüggvényeket alkalmazzuk.

A mérnöki gyakorlatban sokszor egy adott jel egy-egy determinisztikus és sztochasztikus jel összege. Tipikus eset, amikor a hasznos jelet determinisztikusnak, a hozzá adódó zajt viszont sztochasztikus jelként írjuk le. Ezek szétválasztása (a zaj kiszűrése) statisztikai módszerekkel lehetséges. [I.11]

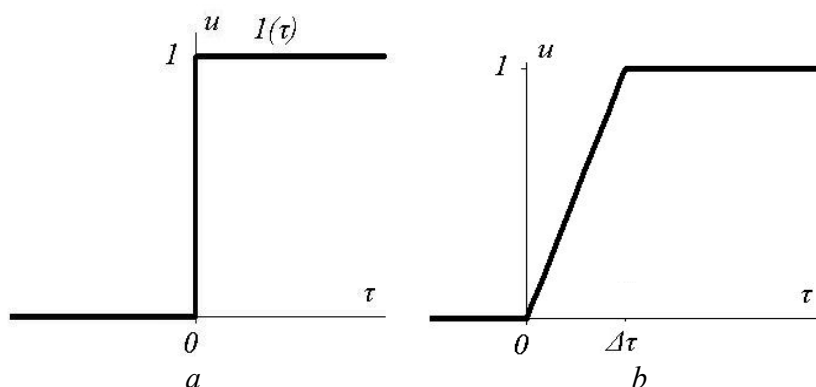
A folyamatnak determinisztikus vagy sztochasztikus jelként történő leírása lehet kényszerű, de lehet választásunk következménye is. A fizikából ismert, hogy sok jelenséget leírhatunk determinisztikusan és statisztikusan is.

#### I.4.4. A VIZSGÁLÓJELEK

A vizsgáló jelek a determinisztikus rendszerek determinisztikus jelekkel való vizsgálata érdekében alakították ki. Ezek a jelek egyértelműek, gyakorlatilag viszonylag könnyen előállíthatók, és jól reprodukálhatóak. A leggyakrabban alkalmazottakat az alábbiakban foglaljuk össze [I.1]; [I.2] és [I.10] irodalmak alapján:

Az **egységugrás-függvény**. Jele:  $1(t)$ .

$$1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0 \\ 1 & \text{ha } \tau > 0 \end{cases} \quad . \quad (I.4.12)$$



I.6. ábra Az egységugrás függvény és származtatása

Viszonylag a leggyakrabban használt vizsgáló jel (I.6.a ábra), alkalmazását „bekapcsolási” jelenségnek is szokás nevezni. Gyakorlatilag nem valósítható meg, hiszen a jel értékét zérus idő alatt kellene egységnyi értékre növelni. Leszármaztatható a I.6.b ábra szerinti, folytonosan változó jelből, ha  $\Delta\tau$  értéke a zérushoz közelít:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0 \\ \frac{\tau}{\Delta\tau} & \text{ha } 0 \leq \tau \leq \Delta\tau \\ 1 & \text{ha } \tau > \Delta\tau \end{cases} ; \quad 1(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\tau) . \quad (\text{I.4.13})$$

A rendszer egységugrás-alakú bemenetre adott válaszát **átmeneti függvénynek** nevezzük, és  $v_a(\tau)$ -val jelöljük.

Az **egységimpulzus-függvény** vagy más néven **DIRAC<sup>1</sup>-delta**. Jele:  $\delta(\tau)$ .  
Köznapian szólva, ez a rendszert érő „lökés”, azaz végtelen rövid idő alatt meghatározott extenzívét közvetítő jel:

$$\delta(\tau) = 0 \quad \tau \neq 0 ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 . \quad (\text{I.4.14})$$

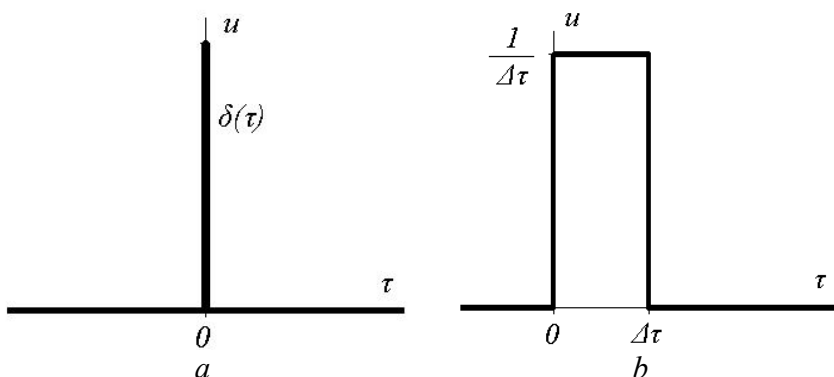
Az egységimpulzus-függvény matematikailag egzakt módon csak a disztribúcióelmélettel értelmezhető, mivel a klasszikus értelmezése ellentmondásokra vezethet. Fizikailag megvalósítható rendszerekre azonban minden további nélkül alkalmazható vizsgáló jelként.

Az I.7.a ábrán szemléltetett egységimpulzus-függvény származtatását az

<sup>1</sup> *Dirac, Paul Adrien Maurice (1902–1984)*: angol fizikus. A kvantum-elektrodinamika és a kvantum-térelmélet egyik megalapozója. Az általa kidolgozott matematikai rendszer új hullámmechanika kialakítását tette lehetővé a kvantumelmélet és a relativitáselmélet egyesítésével. 1933-ban fizikai Nobel-díjat kapott.

I.7.b ábra szemlélteti. Az egységimpulzus tulajdonképpen egy  $\Delta\tau$  szélességű és  $\frac{1}{\Delta\tau}$  amplitúdójú négyzög impulzus határesete, ha  $\Delta\tau$  a zérushoz tart:

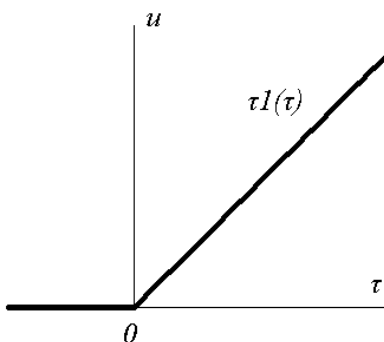
$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0 \\ \frac{1}{\Delta\tau} & \text{ha } 0 \leq \tau \leq \Delta\tau \\ 0 & \text{ha } \tau > \Delta\tau \end{cases} ; \quad \delta(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\tau) . \quad (\text{I.4.15})$$



I.7. ábra DIRAC-delta függvény és származtatása

A szabályázástechnikai elemzések során a rendszer egységimpulzus-bemenetre adott válaszát **súlyfüggvénynek** nevezzük, melynek jele:  $w(\tau)$ . A súlyfüggvény előnye, hogy nagyon tisztán mutatja meg a rendszer tulajdonságait, mivel ekkor a mozgását kizárólag saját felépítése és jellemzői befolyásolják.

Az **egységsebesség-függvény**. Jele:  $\tau I(\tau)$ .



I.8. ábra Egységsebesség-függvény

Gyakran alkalmazott vizsgáló jel, technikailag is viszonylag előállítható.



Matematikai leírása:

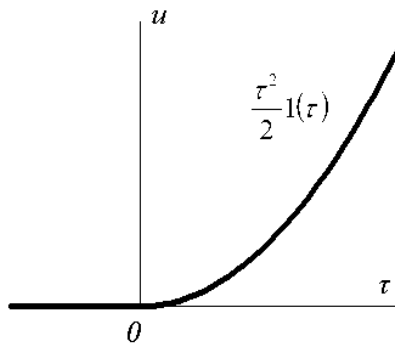
$$\tau 1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0 \\ \tau & \text{ha } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.16})$$

Hatására a rendszer kimenetén az egységsebességre vonatkozó,  $u_\tau(\tau)$  jelű, válaszfüggvény jelentkezik.

Az **egységgyorsulás-függvény**. Jele:  $\frac{\tau^2}{2} 1(\tau)$ .

Ennél a függvénynél a bemeneti jel értéke állandó, egységnyi gyorsulással növekszik (I.9. ábra):

$$\frac{\tau^2}{2} 1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \tau < 0 \\ \frac{\tau^2}{2} & \text{ha } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I.4.17})$$



I.9. ábra Egységgyorsulás-függvény

## I.5. RENDSZEREK OSZTÁLYOZÁSA

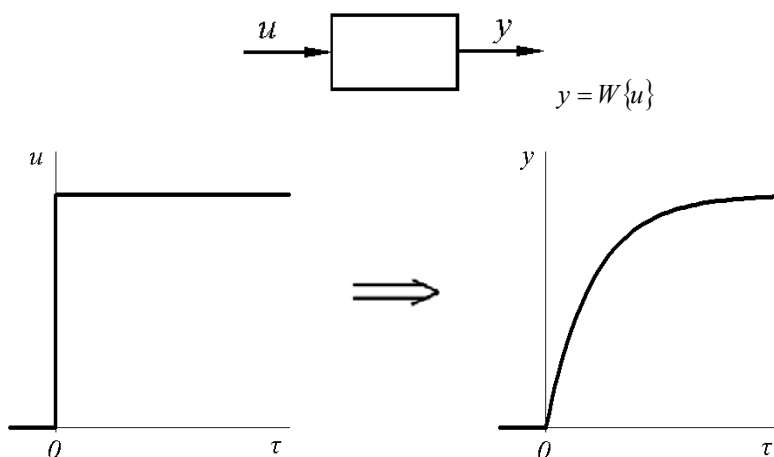
A rendszerek osztályozása különféle szempontok alapján történhet. Jelen fejezetben — a teljesség igénye nélkül — csak a későbbi elemzéseink megértéséhez szükséges osztályozásokat végezzük el.

### I.5.1. GERJESZTÉSEK ÉS VÁLASZOK SZÁMA

Az **egyváltozós (egy-gerjesztésű, egy-válaszú) rendszer** (SISO — „single input single output”) egy kapcsolatot jelent, amely az adott  $u(\tau)$ , illetve  $u(\tau_i)$  gerjesztéshez egy  $y(\tau)$  illetve  $y(\tau_i)$  választ rendel (I.10. ábra) Az összerendelés explicit alakját az

$$y = W\{u\} \quad (\text{I.5.1})$$

**gerjesztés-válasz kapcsolat**, ahol  $W$  egy operátor, amely lehet a  $\tau$ , illetve  $\tau_i$  időtől függő vagy független. Egy explicit gerjesztés-válasz kapcsolatot matematikailag egy lineáris-, vagy nem-lineáris explicit függvénnyel tudjuk leírni.



I.10. ábra Egyváltozós rendszer leírása

A gerjesztés-válasz kapcsolat azt jelenti, hogy ha az  $u$  gerjesztés ismert, akkor az  $y$  válasz meghatározható. Fontos azt is megjegyezni, hogy a kapcsolatot leíró függvény invertálásával kapott összefüggés nem biztos, hogy a rendszer működését írja le. Más szóval, ha  $y$  ismert, akkor logikailag következtethetünk arra, hogy ezt a választ milyen  $u$  gerjesztés hozta létre, de nem jelenti azt, hogy ha a modellezett objektum kimenetére egy  $y$  mennyiséget

kényszerítünk, akkor az objektum bemenetén fellépő  $u$  mennyiség az invertálással kapott összefüggés szerinti értékű lesz.

A mérnöki gyakorlatban gyakran találkozunk azzal a problémával, hogy a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja nem ismert. Ekkor a feladatunk éppen az, hogy — ismerve a rendszer valamilyen leírását — meghatározzuk a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakját. Ha az adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározható a rendszer egy leírásából közvetlenül is, akkor lehetséges, hogy nincs szükségünk a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakjának tényleges meghatározására.

Egy rendszernek lehet sok gerjesztése és sok válasza. Ezt a rendszert **többváltozós — sok gerjesztésű, sok válaszó** — (MIMO — „multiple input multiple output”) rendszernek nevezzük. Egy ilyen rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolatokat

$$y_i = W_i \{u_1; u_2; \dots; u_m\} \quad i = 1; 2; \dots; n \quad , \quad (I.5.2)$$

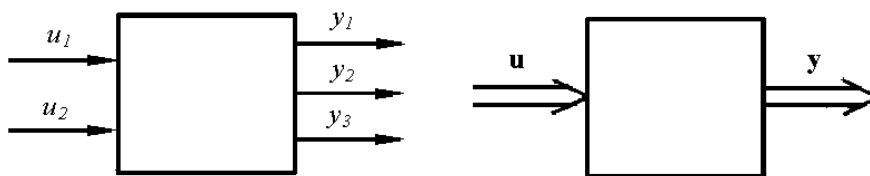
rendszerével, vagy az

$$\mathbf{y} = W \{\mathbf{u}\} \quad , \quad (I.5.3)$$

vektorösszefüggéssel írható le, ahol:

$$\mathbf{y}^T = [y_1 y_2 \dots y_n] \quad \mathbf{u}^T = [u_1 u_2 \dots u_m]$$

$m$  — gerjesztések száma;  
 $n$  — válaszok száma.



I.11. ábra Többváltozós rendszer

Ha a rendszer egy bemenő jelre és több kimenő jellel reagál, **egy bemenetű, több kimenetű** (SIMO — „single input multiple output”) rendszeréről beszélünk. Ekkor a gerjesztés-válasz kapcsolatot egy

$$\mathbf{y} = W \{u\} \quad , \quad (I.5.4)$$

alakú vektor–skalár függvénnyel tudjuk leírni.

A **több bemenetű, egy kimenetű** (MISO — „multiple input single output”) rendszer esetén a gerjesztés–válasz kapcsolatot egy

$$y = W\{\mathbf{u}\} \quad , \quad (I.5.5)$$

skalár–vektor függvénnyel jellemezhetjük.

A továbbiakban egy rendszer gerjesztés–válasz kapcsolat általános leírásakor az (I.5.1) egyenlettel megadott alakot fogjuk használni. A többi formát csak abban az esetben említjük meg, ha az adott elemzés során jelentőséggel bír a rendszer gerjesztéseinek, illetve válaszainak a száma.

### I.5.2. LINEÁRIS ÉS NEMLINEÁRIS RENDSZEREK

Legyen  $y_1$ , illetve  $y_2$  egy SISO rendszer  $u_1$ , illetve  $u_2$  gerjesztésekre adott válaszai. A szuperpozíció elvén azt értjük, hogy az

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

inputhoz az adott rendszer

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

outputja tartozik bármely  $C_1$  és  $C_2$  konstansok esetén.

Egy rendszer akkor, és csak akkor **lineáris**, ha az explicit gerjesztés–válasz kapcsolatban szereplő operátor lineáris, vagyis ha a rendszerre érvényes a szuperpozíció elve. Azaz minden lineáris rendszer  $W$  operátora az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$W\left\{\sum_{i=1}^n C_i u_i\right\} = \sum_{i=1}^n C_i W\{u_i\} \quad , \quad (I.5.6)$$

illetve

$$W\{Cu\} = CW\{u\} \quad . \quad (I.5.7)$$

Az (I.5.7) kifejezésből következik, hogy lineáris rendszer esetén az  $|u| = 0$  gerjesztéshez  $|y| = 0$  válasz tartozik. Többváltozós (MIMO) rendszer esetében az (I.5.3) összefüggés

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{u} \quad (\text{I.5.8}),$$

homogén, lineáris vektor-vektor kapcsolatra módosul, azaz tenzor alakot vesz fel, ahol  $\mathbf{W}$  a rendszer gerjesztés-válasz mátrixa.

Könnyen belátható, hogy két lineáris rendszer soros vagy párhuzamos kapcsolásából keletkező eredő rendszer is lineáris.

Ha a rendszer nem elégíti ki a fenti követelményt, azaz nem lineáris, akkor **nemlineáris rendszernek** nevezzük.

Gyakorlatilag a fizikai, műszaki objektumok sohasem lineárisak. Ha a gerjesztés, a válasz vagy más változó túlságosan nagygyá válik, akkor mindig fellépnek nemlineáris hatások.

### I.5.3. INVARIÁNS ÉS VARIÁNS RENDSZEREK

Egy rendszer **időben invariáns** (időfüggetlen-, vagy statikus), ha a gerjesztés időbeli eltolása csak egy ugyanekkora időbeli eltolást okoz a válaszban is.

Legyen  $y_1(\tau)$ , illetve  $y_1(\tau_i)$  egy rendszer az  $u_1(\tau)$ , illetve  $u_1(\tau_i)$  input jelre adott válasza. Ha a rendszer az  $u_2(\tau-\Delta\tau)$ , illetve  $u_2(\tau_{i-k})$  időben eltolt gerjesztésre az

$$y_2(\tau) = y_1(\tau - \Delta\tau) \quad , \quad \text{illetve} \quad y_2(\tau_i) = y_1(\tau_{i-k}) \quad (\text{I.5.9})$$

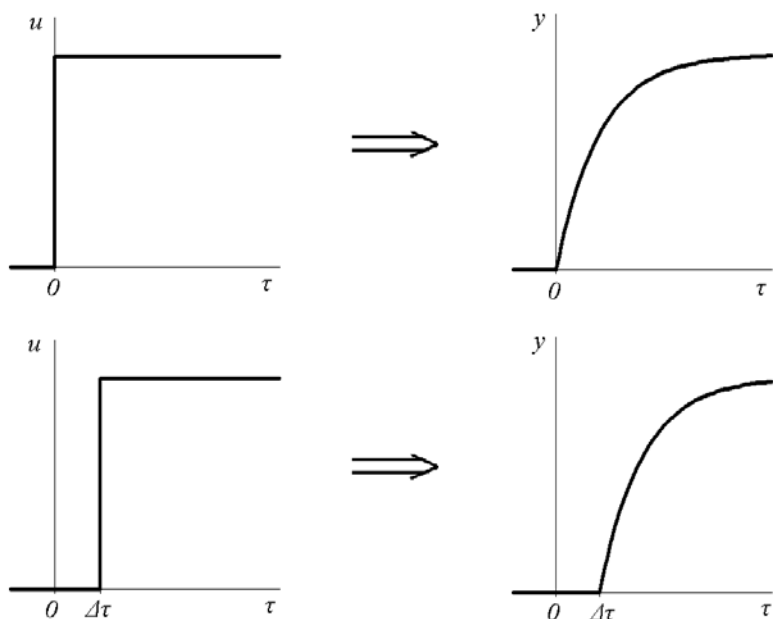
választ adja, bármely tetszőleges  $\Delta\tau$ , illetve  $k$  értékre, akkor, és csak akkor a rendszert invariánsnak tekintjük.

Invariáns rendszer operátora az alábbi tulajdonságok valamelyikével bír:

$$W\{u(\tau - \Delta\tau)\} = W\{u(\tau)\} \Big|_{\tau \rightarrow \tau - \Delta\tau} \quad , \quad \text{illetve} \quad W\{u(\tau_{i-k})\} = W\{u(\tau_i)\} \Big|_{i \rightarrow i-k} \quad . \quad (\text{I.5.10})$$

Ha a rendszer nem invariáns, akkor azt **variáns** (időfüggő) rendszernek nevezzük.

Gyakorlatban a technikai objektumok, rendszerek csak nagyon ritkán invariánsak az öregedés, a környezeti paraméteringadozások és hasonló hatások következtében. Ezen hatások egy része (determinisztikus vagy sztochasztikus) járulékos gerjesztésként vehető figyelembe. Ennek ellenére az objektum invariáns modellje sokszor jól használható közelítést jelent ha „rövid” időtartamok vizsgálatára szorítkozunk. Léteznek olyan objektumok, amelyek működésének lényege a variáns jellegük, mint például a nappal és éjjel (de nem világosban és sötétben) vagy a télen és nyáron (de nem melegben és hidegben) másként működő rendszerek



I.12. ábra Időinvariáns (egyváltozós) rendszer gerjesztése és válasza

#### I.5.4. DINAMIKUS ÉS MEMÓRIAMENTES RENDSZEREK

Egy rendszer akkor **memóriamentes**, ha bármelyik  $\tau$ , illetve  $\tau_i$  időpontban adott válasza csak a gerjesztésnek ugyanezen  $\tau$ , illetve  $\tau_i$  időpontbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer **dinamikus** (nem-memóriamentes).

A dinamikus rendszer rendszerállapotán a rendszer előtörténetének azt a legkisebb halmazát értjük, amely a múltnak és a jelennek a rendszer jövőjére való hatását megítélhetővé teszi. Ilyen rendszerek esetén állapotváltozóknak nevezzük az időtől függő változóknak azt a szükséges és elégséges legkisebb halmazát, amely segítségével az adott dinamikus rendszer állapota teljes és pontos leírása elvégezhető. A dinamikus rendszer állapotváltozói az időben lejátszódó rendszerállapotok matematikai leírására szolgálnak. Tehát, ekkor az állapotváltozók a dinamikus rendszerek átmenetei folyamatait hivatottak szemléltetni.

Egy dinamikus rendszer véges vagy végtelen memóriájú lehet. Véges memóriájú dinamikus rendszer esetén az  $\tau_i$  időpontbeli  $y(\tau_i)$  válasz csak az  $u$  gerjesztésnek a

$$\tau_i - \Delta\tau < \tau \leq \tau_i \quad , \quad \text{illetve} \quad \tau_{i-L} < \tau \leq \tau_i$$

intervallumbeli értékeitől függ, ahol  $\Delta\tau$  és  $L$  véges értékkel bír.

### I.5.5. DETERMINISZTIKUS-SZTOCHASZTIKUS RENDSZEREK

A rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata lehet determinisztikus vagy sztochasztikus, annak függvényében, hogy a kapcsolatot leíró egyenlet milyen tulajdonsággal bír.

Egy rendszert **determinisztikusnak** nevezzük, ha minden egyes  $u(\tau)$  bemenőjelhez egy meghatározott  $y(\tau)$  kimenőjel tartozik.

Ezzel szemben a rendszert **sztochasztikusnak** nevezzük, ha egy adott bemenőjelhez több kimenőjel is tartozhat, mégpedig mindegyik bizonyos bekövetkezési valószínűséggel.

### I.6. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [I.1] **CSÁKI, F. – RUTH, B.**, Automatika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 702.
- [I.2] **CSÁKI, F.**, Fejezetek a szabályázástechnikából Állapotegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973., pp. 487.
- [I.3] **CSENGERI PINTÉR, P.**, Mennyiségek Mértékegységek Számok SI, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981, pp. 384.
- [I.4] **FODOR, GY.**, Jelek és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006., pp. 470.
- [I.5] **NAGY, V.**, Gépészeti rendszertechnika, kézirat, SzIF, Győr, 2001, pp. 154.
- [I.6] **POKORÁDI, L.**, Aerodinamika I., Ideális közeg általános aerodinamikája, főiskolai jegyzet, MH. SzRTF, Szolnok 1992., pp. 141.
- [I.7] **POKORÁDI, L.**, Áramlástan, elektronikus jegyzet, DE MFK, Debrecen, 2002., pp. 86.,  
<http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/aramlastan.pdf>
- [I.8] **POKORÁDI, L.**, Karbantartás elmélet, DE MFK, Debrecen, 2002.,  
[http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb\\_elm.pdf](http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb_elm.pdf), pp. 101.
- [I.9] **SZABÓ I.**, Gépészeti rendszertechnika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., pp. 541.
- [I.10] **SZABÓ I.**, Rendszer- és irányítástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994. pp. 457.
- [I.11] **SZABOLCSI R.**, Modern szabályozástechnika, egyetemi tankönyv, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Budapest, 2004., pp. 167.
- [I.12] **SZABOLCSI, R.**, A repülőgép-vezető repülésbiztonság szempontjából kritikus paramétereinek meghatározása, Debreceni Műszaki Közlemények V. évf. 3. szám, Debrecen, 2006. p. 13–24.

- [I.13] **SZÜCS, E.**, Hasonlóság és modell, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 299.
- [I.14] **ZADEH, L.A. – POLAK, E.**, Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 476.



## II. FEJEZET

# A MODELLEK

### II.1. BEVEZETÉS

Napjainkban a modell szónak két jelentése is használatos. A modell szóval jelöljük a valamely meghatározott jelenséghez hasonlót megvalósító berendezést, egyes termékek mintáit (ruhamodell, gépmodell), technikai eszközök kicsinyített, működőképes formáját, amely az eredeti rendeltetési célnak (például repülőgépek esetén az utas- vagy teherszállítás) természetesen nem felel meg (az előbb már említett repülőgépmodell), fogyasztói termékek és építmények külső képét tükröző, geometriailag kisebbített mását (amelyek rendszerint szemléltető célt szolgálnak, és amelyeket — helyesen — megkülönböztetésül egyre gyakrabban makettnek neveznek). Modell a neve továbbá az olyan szemléltető eszközöknek is, amelyek nagyon kicsiny (vagy nagyon nagy) méretűek, és így az oktatáshoz jelentősen felnagyított (vagy kicsinyített) formában mutatják be őket (például egy atom vagy molekula, illetve a Naprendszer modellje egy planetáriumban).

A modell elnevezés értelmezésünk szerint csak azokban az esetekben alkalmazható, amikor hordozója az emberi megismerési folyamatot segíti elő, újabb ismeretek szerzését teszi lehetővé.

Modellezésen értjük a valóságos rendszer lényegi tulajdonságainak felismerését, és azok valamilyen formájú leképezését [II.13]. Egy adott rendszer korszerű, tudományos igényű vizsgálatának feltétele a rendszermodell megalkotása.

A könyv jelen fejezete a modellek — ezen belül a matematikai modell — értelmezésével, csoportosításával a modellalkotás folyamatának kérdéseit tárgyalja.

A II.3. fejezetben modellek fogalma és osztályozása ismerhető meg. A II.4. fejezetben külön tárgyaljuk modellek mérnöki gyakorlatban leginkább alkalmazott típusával, a matematikai modellel. Majd a II.5. fejezetben a matematikai modellezéssel és a szimulációval kapcsolatos elvi kérdésekkel ismerkedhet meg a Tisztelt Olvasó.

### II.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

<i>M</i>	—	modell általános szerkezete;
<i>P</i>	—	modell általános (belső) paramétere;
<i>T</i>	—	vizsgálati idő, periódusidő;
<i>U</i>	—	(villamos) feszültség;

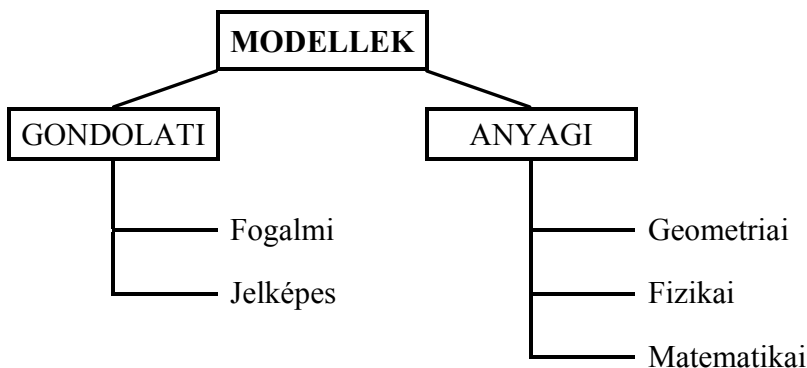
$u$	—	általános gerjesztő jel;
$x$	—	vízszintes irányú kitérés;
$y$	—	általános válaszjel;
$\tau$	—	idő;
$\omega$	—	Szögsebesség.

### II.3. A MODELLEK FOGALMA ÉS FELOSZTÁSA

A modell egy valóságos rendszer egyszerűsített, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait kiemelő mása. A modell mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak. Ezért elég, ha a modell a valódi rendszert csak a meghatározott szempontból vagy szempontokból helyettesíti. Sőt, a vizsgálat szempontjából lényegtelen szempontok figyelembevétele kifejezetten káros. Bonyolítja magát a modellt és így a vizsgálatot, de lényegi információhoz nem jutunk vele.

Például egy ballisztikus rakétát — legegyszerűbben — egy ferdén elhajított kővel tudunk modellezni, ha a pályáját, repülés dinamikáját vizsgáljuk, és nem foglalkozunk a hajtóművében lejátszódó hő- és áramlási folyamatokkal.

Nincs kikötve, hogy modell csak az lehet, amit kizárólag erre a célra készítünk. Az nem feltétele a modellnek. A fenti példában szereplő követ használhatjuk másra is, nem csak a rakéta modellezésére. Valamilyen tárgy akkor válik modellé, ha a vizsgálatot végző személy ilyen funkciót ad neki. A modellválasztás mégsem önkényes, hiszen teljesítenie kell mindazokat a követelményeket, amelyek az eredeti rendszerrel, jelenséggel való hasonlóságát biztosítják.



II.1. ábra. Modellek csoportosítása

A modellek osztályozásával kiterjedt irodalom foglalkozik (például: [II.4]);

[II.6]; [II.9] és [II.13]). A modelleket csoportosíthatjuk például aszerint, hogy milyen a modell belső természete. Ez alapján anyagi és gondolati modelleket különböztethetünk meg (II.1. ábra).

### II.3.1. A GONDOLATI MODELLEK

A **gondolati** vagy más néven eszmei modellek az ember által felállított logikai kapcsolat szerint „működnek”. Módszerüket, formájukat illetően szubjektívek, de tartalmukat nézve – azaz a tárgykört, amellyel foglalkoznak – objektívek. Az eszmei modellek nélkülözhetetlen elemei a megismerés folyamatának. Természetesen a logikai törvények alapján kapott eredményeket ellenőrizni kell a fizikai valóságban is. Ilyen értelemben csak utólag dönthető el, hogy valóban modelljei voltak-e a vizsgált folyamatnak vagy rendszernek. Mint az a II.1. ábrából is kitűnik, kétféle gondolati modellfajta különböztetünk meg:

- fogalmit, és a
- jelképest.

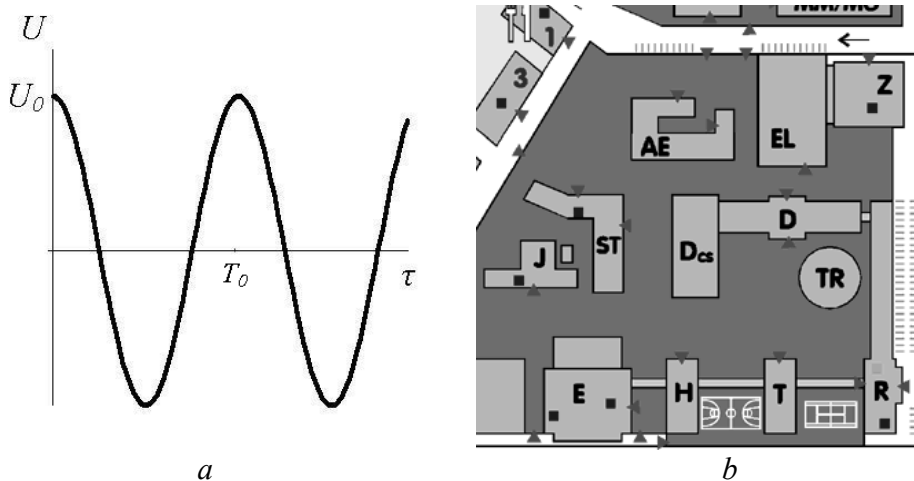
A **fogalmi modell** a közvetlen érzéki tapasztalatoknak az absztrakt gondolkodás segítségével történő „feldolgozása”. Feladata a kísérletek értelmezése, a kísérleti eredmények alapján a hipotézisek ellenőrzése, illetve újabb hipotézisek alkotása. Jelentős eszköze a gondolati kísérlet. Ennek során ismert természeti, társadalmi vagy gazdasági törvények felhasználásával megalkotott fogalmi modellünket gondolatban meghatározott körülmények közé helyezzük és levezetjük a vizsgált rendszer várható viselkedését, a folyamat várható lefolyását. Az így kapott eredmények kísérleti ellenőrzése a gondolatmenet helyességének eldöntésére, illetve hiányosságainak feltárására alkalmas. Ilyen gondolati kísérletnek kell megelőznie minden tényleges kísérletet, ha el akarjuk kerülni, hogy durva hibákat kövessünk el. Egyes területeken, például az elméleti fizikában vagy a csillagászatban, a fogalmi modellalkotás nélkül lehetetlen kutatómunkát végezni.

Fogalmi modelleket alkalmaznak például kozmogóniában, amely az égitestek és más kozmikus objektumok keletkezésének tudománya. A kozmogóniai hipotézisek megkísérlik, hogy az égitestek ma megfigyelhető állapotát ismert fizikai törvények alapján valamely korábbi állapotból vezessék le. Minden kozmogóniai elmélettel szemben alapvető követelmény, hogy összhangban legyen a megfigyelt jelenségekkel. Egy elmélet annál értékesebb, minél egyszerűbb fizikai-kémiai állapotú anyagot feltételez az önkényesen kiválasztott, korábbi állapotban. Ilyen például a rendezetlen, diffúz gázfelhő. Növeli egy kozmogóniai elmélet értékét, ha minél többféle kozmikus objektum mai állapotát tudja meghatározni egyetlen közös kiindulási állapotból. [II.14]

Fogalmi modelleket alkalmazunk, amikor egy probléma lehetséges

megoldásaiként különféle forgatókönyveket, más szóval, scenario-kat készítünk. Ezt a modellezési módot előszeretettel alkalmazzák a kockázatkezelés során, illetve a társadalomtudományok különféle területein.

A **jelképes modell** az empiria (tapasztalat) adatait, vagy feladatait fogalmazza meg jelrendszerek segítségével. A mérési eredmények rendszerint táblázat, grafikus ábrázolás vagy szám-, esetleg jelrendszer formájában adóttak. Ezek közvetlenül a tudományos szintű feldolgozás, általánosítás céljára alkalmatlanok. A mérnöki gyakorlatban például egy többoldalas táblázatot vagy leírást szemléletesség szempontjából helyettesíteni tudunk egy egyszerű grafikonnal. „*A mérnök diagramokban gondolkodik*”, ahogy jelen sorok írója is tanulta professzorától. A köznapi életben talán a leggyakrabban alkalmazott jelképes modellek a különféle térképek.



II.2. ábra Példák analóg modellre  
(a – rezgőkör időbeli feszültségváltozása; b – térképrészlet)

### II.3.2. AZ ANYAGI MODELLEK

Az **anyagi modellek** saját, objektív törvényeik szerint működnek. Az anyagi modelleket, mivel lényegében a vizsgált rendszernek vagy folyamatnak az absztrakció eszközeivel előállított képe, **absztrahált modelleknek** is szokás nevezni. Ez egyszerűsített, de a jelenség szubsztanciális (anyagi) tulajdonságait figyelembe vevő kép, amely a jelenség meghatározott célú vizsgálata szempontjából annak lényegi tulajdonságait emeli ki. Csak a működés feltételeit választhatjuk meg, de a belső törvényszerűségeket nem tudjuk irányítani. Az anyagi modelleket — realizálási módjuk szerint — csoportosíthatjuk, úgymint:

- homológ, vagy más néven geometriai;
- analóg, azaz fizikai;
- matematikai modell.

A **homológ modell** geometriailag hasonló az eredeti rendszerhez, körülötte (vagy benne) hasonló vagy az adott vizsgálat szempontjából ugyanolyan fizikai jelenségek játszódnak le. A műszaki életben a geometriai modelleket elsősorban a tervezés során használjuk fel. Ekkor a bonyolult elrendezésű építmények, szerkezetek térbeli elhelyezését előbb geometriai modellen készítjük el, ezért ezt térbeli tervezésnek is nevezzük. A térbeli tervezés adott esetben szükségtelemé teheti a szerelési műhelyrajzokat, mivel ezeket a kisminta egyes csomópontjainak fényképe helyettesítheti. Ennek eredményeképpen fokozódik a tervezés megbízhatósága is.

Például a gyakorlati aerodinamikában — a repülőgépek, épületek vagy gépkocsik tervezése, fejlesztése során — homológ modelleket alkalmaznak a szélcsatorna kísérletekben. (II.3. ábra)



II.3. ábra. Szélcsatorna mérőtere

**Fizikai modell** — vagy más néven **analóg modell** — esetén az eredetivel megegyező fizikai természetű modellen tanulmányozzuk a rendszerben lejátszódó jelenséget. Az eredeti és a modell hasonlóságának feltétele, hogy mindkettő matematikai leírása (azaz matematikai modellje) megegyezzen. Az analóg modell az eredeti rendszerhez viszonyítva hasonló behatásra hasonló módon válaszol. A fizikai modell semmilyen szemléletes kapcsolatban nem kell,

hogyan álljon az eredeti jelenséggel, csak az input-ok és az output-ok közötti kapcsolatot adja vissza hűen. Az ilyen modelleket realizáló berendezéseket analóg számítógépeknek is nevezik. A modellek ezen csoportjába tartoznak a különféle folyamatokat szimuláló áramkörök is.

Analóg számítógépekben az adatábrázolás folytonos fizikai mennyiségekkel (távolság, feszültség, ellenállás, nyomás stb.) történik. A műveletek végrehajtása a legtöbb analóg számítógépben gyakorlatilag az adatbevitel pillanatában megtörténik, így azt „zérus működési idejű”-nek is nevezzük. Az analóg számítógépek pontossága megegyezik azoknak a mérési módszereknek a pontosságával, amelyek segítségével az adatábrázoló fizikai mennyiségeket mérhetjük. Alkalmazások szempontjából az analóg számítógépek általában úgynevezett célgépek, amelyek kizárólag egy-egy speciális feladatkörben (például folyamatszabályozás, löelemképzés, hálózatméretezés) felmerülő számítások, illetve speciális matematikai feladatok elvégzésére alkalmasak. Példaképpen a II.4. ábra egy kitérített, majd magára hagyott inga lengőmozgásával analóg elektromágneses rezgőkörben lejátszódó folyamatokat és az a kettő közötti analógiát szemlélteti.

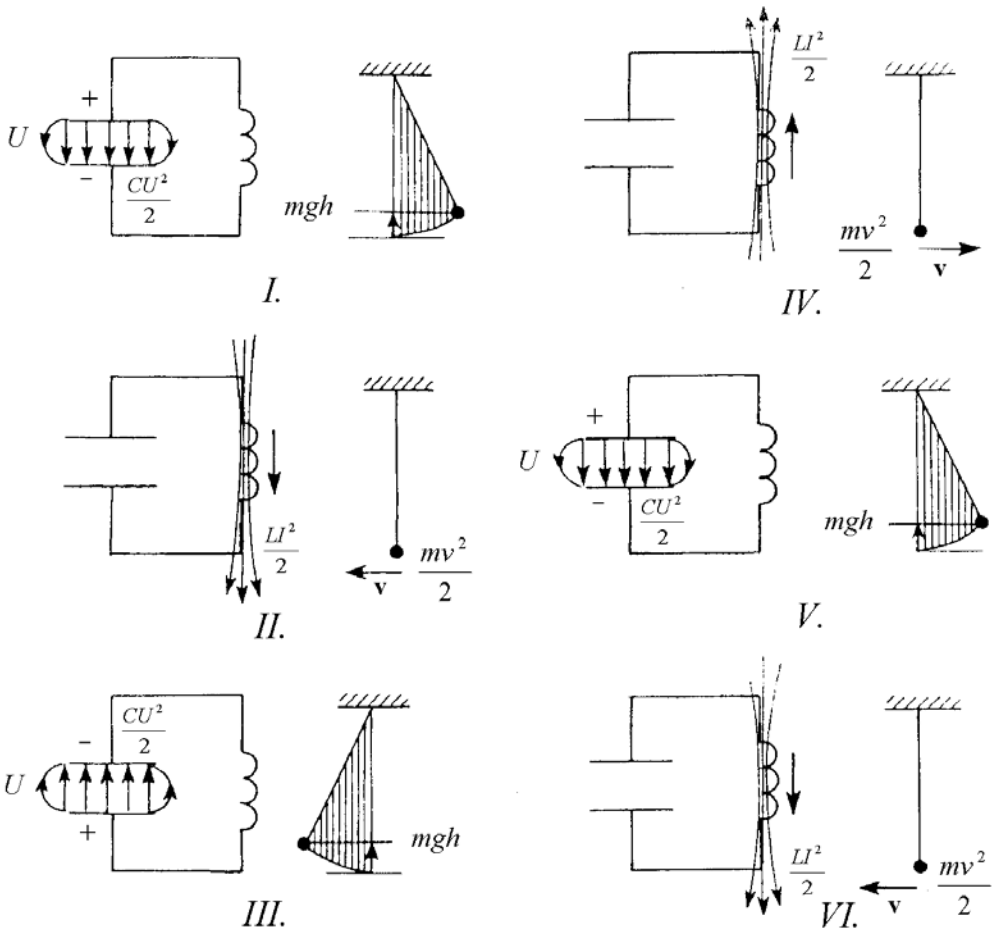
A **matematikai modell** a matematika szimbólum rendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői, illetve az elemzett folyamat paramétereinek között. A modellek közül a mérnöki gyakorlatban legelterjedtebb a matematikai modell. Mivel jelen könyv fő témája pont a matematikai modellek és alkalmazásuk a mérnöki gyakorlatban a modellek ezen osztályával a következő fejezetben részletesebben foglalkozunk.

### II.3.3. EGYSZERŰ PÉLDA A MODELLEKRE

Most vizsgáljuk meg a II.4. ábrán látható rezgőkört. Ehhez gondolatban állítsunk össze  $C$  kapacitású kondenzátorból és  $L$  induktivitású, elhanyagolható ohmos ellenállású tekercsből álló rezgőkört. Mint azt a fizikai, elektrotechnikai ismereteinkből tudjuk, ha a kondenzátort egy egyenáramú áramforrásra kapcsolva feltöltjük, akkor a fegyverzetek között elektromos tér keletkezik, vagyis a kondenzátorban elektromos energiát halmozunk fel (II.4. ábra I. helyzet)

Ha a kondenzátort a tekercsen keresztül zárjuk, akkor a kondenzátor kisül. A kisülés kezdetekor a kondenzátor feszültsége az  $U_0$  maximális értékű lesz. A kisütőáram a tekercsben mágneses teret létesít, amely akkor a legnagyobb, amikor a fegyverzetek között a feszültség zérus (II.4. ábra II. helyzet) [II.2]. Az elektromos tér energiája a mágneses tér energiájává alakul át. A mágneses tér változásakor önindukciós feszültség, illetve áram keletkezik, amely a kondenzátort ellenkező értelemben ismét feltölti (II.4. ábra III. helyzet).

A mágneses tér energiája újra elektromos energiává alakul át. A kondenzátor ismét kisül a tekercsen keresztül (II.4. ábra IV. helyzet) és az elektromos energia újra mágneses energiává alakul át. Ez a folyamat többször megismétlődik. A kondenzátor lemezei között az elektromos, a tekercsben a mágneses erőter periodikusan változik, az elektromos tér energiája periodikusan átalakul a mágneses tér energiájává és megfordítva. De, a valóságos esetekben az ohmos ellenállás következtében nem teljes mértékben. Ezért az elektromos és a mágneses tér energiája az idővel csökken, az egymást követő feszültség- és intenzitásmaximumok egyre kisebbek lesznek. A rezgőkörben mozgó elektronok rezgési „állapotát” szabad elektromágneses rezgésnek nevezzük [II.12], melynek ismétlődési gyakoriságát az  $\omega_0$  körfrekvenciával jellemezhetjük.



II.4. ábra Az inga mozgása és a rezgőkörben lejátszódó folyamat összehasonlítása

Ha egy, a II.4. ábrán látható  $m$  tömegű (úgynevezett matematikai) ingát egy bizonyos magasságra (vízszintes irányban a hozzátartozó  $x_{max}$  legnagyobb mértékben) kitérítünk nyugalmi helyzetéből, akkor annak helyzeti energiája megnő. (Ekkor a kondenzátor feltöltéséhez hasonlóan energiát juttatunk a rendszerbe.) Ha az ingát elengedjük (lásd: „kondenzátort a tekercsen keresztül zárjuk” az előző esetben), az a nyugalmi helyzete körül lengő mozgást fog végezni. Ekkor a tömegpont helyzeti energiája mozgási energiává, majd a mozgási ismét helyzetivé fog átalakulni (mint a rezgőkörnél az elektromos és a mágneses erőkterek változása). Legnagyobb értékét az alsó holtponthoz (II.4. ábra II. és IV. helyzeti) éri el [II.1]. Ezen a periodikus mozgás ismétlődési gyakoriságát az  $\omega$  körfrekvenciával tudjuk megadni.

Most, a fogalmi modellre egy kicsit visszatérve, célszerű itt megjegyezni, hogy a fenti kísérletet „csak” gondolatban végeztük el. Az általános fizikai, elektrotechnikai ismereteink alapján írtuk le a rezgőkörben, illetve az inga kitérítések lejátszódó folyamatot. Azaz a rezgőkör, majd a kitérített inga (igaz csak egy egyszerű) fogalmi modelljét állítottunk fel.

A két jelenség főbb jellemzői értékeinek változását matematikai egyenletekkel is le tudjuk írni. Itt, a teljesség és részletesség igénye nélkül — mely a [II.2]; [II.12] irodalmakban részletesen megtalálható —, az alábbi összefüggések írhatók fel a rezgőkör esetén az  $U$  feszültség változása a:

$$U(\tau) = U_0 \cos(\omega_0 \tau) \quad , \quad (\text{II.3.1})$$

illetve — az [II.1]; [II.12] irodalmak alapján — a matematikai inga vízszintes irányú  $x$  kitérése:

$$x(\tau) = x_{max} \cos(\omega \tau) \quad , \quad (\text{II.3.2})$$

függvénnyel írható le. A fenti két egyenlet a rezgőkör, illetve a kitérített inga matematikai modelljének tekinthető. (Ezen matematikai modellekre a II.4 fejezetben még visszatérünk.)

A két egyenlet összehasonlításával könnyen belátható, hogy a megfelelő változók formai behelyettesítésével a másik egyenletet kapjuk meg. Azaz a rezgésjelenség mechanikai analógiája a veszteségmentes, (valós esetekben a veszteséges) inga lengése. Az elektromos energiának a helyzeti, a mágneses energiának a mozgási energia, a kondenzátor  $U$  feszültségének az inga  $x$  vízszintes irányú kitérése, illetve az  $I$  áramerősségnek az inga  $v$  sebessége felel meg. Ezért az adott inga lengését, egy megfelelően megválasztott kapacitású kondenzátorból, és induktivitású tekercsből álló rezgőkörrel tudjuk modellezni, azaz annak analóg modelljeként tudjuk felhasználni.

Most visszatérve a jelképes modellre, kijelenthetjük, hogy a II.2a. ábrán



a csillapodás nélküli rezgőkör feszültségváltozásának grafikonja, azaz a lejátszódó folyamat jelképes modellje látható — mely a (II.3.1) egyenlet függvénygörbéje.

## II.4. A MATEMATIKAI MODELLEK

A modellek közül napjaink mérnöki gyakorlatában leggyakrabban alkalmazott a matematikai modell. Ennek fő oka a számítástechnika robbanásszerű elterjedése.

A matematikai modell valamilyen vizsgált rendszerben lejátszódó jelenség, folyamat vagy tevékenység a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságai közötti összefüggések matematikai megfogalmazása [II.7]. A matematikai modell egyrészt nem definiált (absztrakt, szimbolikus) matematikai objektumokból (például számokból, vektorokból) áll, másrészt az objektumok közötti relációkból [II.5]. A matematikai modell a matematika szimbólumrendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között [II.9].

A matematikai reláció olyan összefüggés, amely két vagy több nem definiált objektumot kapcsol össze. Sok reláció matematikai műveletekkel kapcsol össze egy vagy több objektumot egy másik objektummal vagy objektumok egy halmazával. A matematikai modell akkor írja le jól az adott fizikai szituáció megfelelően választott vonásait, ha alkalmas megfeleltetés létesíthető a vizsgált fizikai objektumok és a matematikai modellhez tartozó matematikai objektumok között, valamint a fizikai objektumok közötti kapcsolatok és a matematikai modellben definiált relációk között.

A matematikai formulák ismert, valamint ismeretlen mennyiségeket tartalmaznak, és a feladat határozottsága esetén az ismeretlen kimenő jellemzők meghatározhatók az ismert bemenő és belső jellemzők birtokában. A feladat határozatlan, ha az ismeretlen, kimenő jellemzők száma több mint a folyamatot leíró matematikai egyenletek száma. Ekkor a függő változók vektora becsülhető, vagy bármelyik output paraméter csak a többi függvényeként fejezhető ki. A feladat túlhatározott, ha az output jellemzők számánál több, egymástól lineárisan független matematikai egyenlet írható fel. A matematikai modell kellően definiált kezdő és peremfeltételekkel együtt egyben az adott jelenség algoritmusát is szolgáltathatja.

A homológ és analóg modellalkotás legtöbbször nem közvetlenül, hanem a matematikai modellen keresztül történik. Lényegében ezt végeztük el a II.3.3. alfejezetben is. Ezek az úgynevezett másodlagos leképezések. Jellemzőjük, hogy a jelenség lényegét tükröző absztrahált modellhez először a matematikai modellt alkotjuk meg. Ezután — felhasználva a hasonlóságelmélet azon törvényszerűségét, hogy a hasonló jelenségeket leíró matematikai összefüggések formálisan azonosak vagy azonos alakra transzformálhatók — létrehozuk a matematikai modellnek megfelelő, az eredeti jelenséggel homológ

vagy analóg modellt. Az ily módon másodlagos jellegű, a leíró matematikai formulát leképező analóg modell már semmilyen szemléletes kapcsolatban nem áll az eredeti jelenséggel, csak a be- és kimenő jellemzők közti kapcsolatot adja vissza.

Példaként említhető a II.3. fejezetben olvasható rezgőkör—matematikai inga összehasonlítás. Az ott szereplő (II.3.1), illetve (II.3.2) egyenletek másodlagos analógmodelleknek tekinthetők.

A rendszer viselkedését leíró matematikai összefüggések jellege, vagy meghatározásának módszere szerint — páronként — az alábbi matematikai modelleket különböztetjük meg [II.6]; [II.9] és [II.13]. A bemutatásra kerülő felsorolás természetesen nem teljes, mivel egy konkrét, gyakorlatban megvalósított matematikai modell általában az alábbi jellegek szintézisét jelenti.

A bemutatásra kerülő párosításokon túl, a matematikai modelleket szokás a bemeneti és kimeneti változók száma szerint is csoportosítani. Ezek alapján a II.1. Táblázatban szereplő modelleket különböztetünk meg.

<b>Modell típus</b>	<b>Felhasznált matematikai egyenlet</b>
egybemenetű — egykimenetű (Single Input Single Output — SISO)	Skalár—skalár
egybemenetű — többkimenetű (Single Input Multi Output — SIMO)	Vektor—skalár
több-bemenetű — egykimenetű (Multi Input Single Output — MISO)	Skalár—vektor
több-bemenetű — többkimenetű (Multi Input Multi Output — MIMO)	Vektor—vektor

### II.1. Táblázat Modellek osztályozása a be- és kimenő jellemzők számai alapján

Az utóbbi három modell esetében a leíró egyenletek formailag vektor, illetve mátrix formalizmussal kezelhetők.

Fontos megjegyezni, hogy a matematika modellek és a rendszerek osztályai megnevezésükben gyakran egyeznek. Bizonyos szakirodalmak (például [II.15]) már magán a rendszer fogalmán is lényegében nem is a valós technikai rendszert, hanem annak matematikai modelljét értik.

Egy adott rendszer tulajdonságai meghatározhatják, de nem determinálják egyértelműen, hogy milyen matematikai modellel írható le a benne lejátszódó folyamat. Például egy nemlineáris rendszert közelítő elemzés

során lineáris matematikai modellel, vagy diszkrét paraméterű rendszert folytonos paraméterű modellel is leírhatunk.

#### II.4.1. STATIKUS ÉS DINAMIKUS MODELLEK

A **statikus modell** egy időben nem változó állapotot ír le. Matematikailag megfogalmazva, ilyenkor rendszer állapota algebrai egyenletekkel, vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó differenciálegyenletekkel írható le. Jellemzésére elterjedt még a stacionárius (vagy stacioner), állandósult, illetve egyensúlyi modell kifejezés is.

A **dinamikus modellek** a vizsgált rendszer, folyamat jellemzőinek időbeni változását írják le. Megjelenési formájuk közönséges vagy parciális differenciálegyenlet, vagy egyenletrendszer. Lehetséges, hogy a tárgyalás nem az idő-, hanem valamely célszerűen megválasztott transzformált tartományában valósul meg.

Példaképpen nézzünk egy gyártósort. Ha a teljes soron lejátszódó folyamatot elemezzük, amikor a termelés már beállt, akkor ezt egy stacioner modell segítségével tudjuk megtenni. De, ha ezen a gyártósoron végig haladó egy munkadarabot vizsgálunk, ahogyan az végighalad a különböző technológiai helyeken, akkor egy instacioner modellt kell felállítanunk.

A helikopter forgószárnyak működésének modellezése során a lapátok változó aerodinamikai helyzetének elemzése — a forgószárny-tengely körülfordulása során változó — úgynevezett azimut szög függvényében történik, mely így az idő — a tengely forgási szögsebessége alapján — transzformált időtartománynak tekinthető.

#### II.4.2. LINEÁRIS ÉS NEMLINEÁRIS MODELLEK

A **lineáris modellekben** csak a változók és deriváltjaik szerepelhetnek, általában állandó együtthatókkal szorozva. Egy matematikai modell akkor, és csak akkor lineáris, ha a folyamatot leíró egyenletrendszer kielégíti az I.5.2. fejezetben meghatározott szuperpozíció elvét. A szuperpozíció elvéből következik, hogy lineáris matematikai modellek alakjai csak a homogén, lineáris egyenlet, illetve egyenletrendszer lehet.

A **nemlineáris modellek** az előző kötöttségektől mentesek. Az adott rendszerben lejátszódó folyamatot leíró egyenletek legalább egyike nemlineáris, azaz valamilyen hatvány szög-, vagy egyéb más függvény is tartalmaz.

A nemlineáris modellek — az egyszerűbb vizsgálat érdekében —

valamilyen linearizálási módon alakíthatók át lineáris modellekké. Ezekkel az eljárásokkal a VI. fejezetben, a linearizálásból származó modellbizonytalansággal a VIII. fejezetben fogunk részletesebben foglalkozni.

A matematikai modellvizsgálatok kezdetén — a korlátozott numerikus számítási lehetőségek miatt általában — csak lineáris modellek felállításával és alkalmazásával foglalkoztak a szakemberek. Fontos azonban tudnunk, hogy a linearizálással nyert lineáris modellek csak viszonylag szűk paramétertartományban alkalmazhatóak megfelelő pontossággal. Napjainkban a számítási módszereket és főleg a számítógépes lehetőségeket kihasználva egyre jobban terjednek el a nemlineáris matematikai modellek. Ez viszont magával vonja, hogy a modellezések során megjelennek különféle kaotikus jelenségek is.

### II.4.3. DETERMINISZTIKUS ÉS SZTOCHASZTIKUS MODELLEK

A **determinisztikus modellek**ben szereplő jellemzők, valamint maguk a változók egyértelmű függvényekkel térben és időben egyaránt megadhatók.

A **sztochasztikus modellek** ugyanezen jellemzői és/vagy változói csak bizonyos valószínűségi összefüggések felhasználásával határozhatók meg.

Egy egyszerű példának vegyünk egy dobókockát. Ha az eldobása utáni röppályáját vizsgáljuk, akkor determinisztikus modellt kell alkalmaznunk. Ha viszont azt elemezzük, hogy milyen számmal felfelé esik le, akkor sztochasztikus modellt kell választanunk vizsgálatunkhoz.

A valóságos technikai folyamatok lényegében mindegyike sztochasztikusnak tekinthető, az adott rendszer inputjai és belső paraméterei bizonytalanságainak következtében. Ezért a determinisztikus modellek alkalmazásával a kimenő jellemzőknek „csak” várható értékei határozhatóak meg. A fenti egyszerű példát is, ha „közelebbről megnézzünk”, kijelenthetjük, hogy a dobókocka röppályájának meghatározási is sztochasztikus modellel írható le. Mert például, nem tudjuk, hogy az adott kocka tömege (mint belső paraméter) milyen mértékben tér el a névleges értékétől, illetve, hogy — a meteorológiai jelenségek következtében pontosan milyen a levegő sűrűsége (mint input paraméter), így a légellenállás nagysága. Ezzel a kérdéskörrel, mely a modellezési bizonytalanságot jelenti — a VI. fejezetben még részletesebben fogunk foglalkozni.

### II.4.4. FOLYTONOS IDEJŰ ÉS DISZKRÉT IDEJŰ MODELLEK

A **folytonos idejű modellek** esetén a modellezett rendszert vagy folyamatot leíró jellemzők, független és függő változók a vizsgált idő alatt bármelyik pillanatban vehetnek fel valamilyen értéket. Azaz a folytonos idejű modellek

inputjai és outputjai egyaránt folytonos idejű, FI jelek (lásd. I.4.3. alfejezet).

**Diszkrét idejű modell** esetében a jellemzők csak adott, konkrét időpillanatokban vehetnek fel értékeket. Más megfogalmazásban, a diszkrétidejű modell független és függő változói diszkrét idejű, DI jelek lehetnek.

A matematikai modellek folytonos vagy diszkrét idejű jellegét csak a dinamikus (instacioner) modellek esetén kell vizsgálnunk, mivel a stacioner modellben a paraméterek nem változnak az idő vagy annak valamilyen transzformált paramétere függvényében. Ha a modellezet folyamatot egy időben folytonos egyenlettel vagy egyenlet-rendszerrel írunk le, akkor az egy folytonos idejű modellt jelent. De a modell alkalmazásakor általánosan azt bizonyos időléptetéssel fogjuk megoldani, azaz az eredeti folytonos idejű modellt diszkrét idejűvé alakítjuk át. Például, ha a modell egy időszerinti differenciálegyenlet, akkor azt átalakítjuk differencia egyenleté.

#### II.4.5. FOLYTONOS PARAMÉTERŰ ÉS DISZKRÉT PARAMÉTERŰ MODELLEK

A **folytonos paraméterű** (vagy folytonos állapotterű) **modellekben** a változók egy adott tartományon, értékhatáron belül bármilyen értéket felvehetnek, azaz folytonos paraméterű jelek.

**Diszkrét paraméterű** (vagy diszkrét állapotterű) **modellek** esetén a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel. Azaz a diszkrét paraméterű modellek inputjai és outputjai egyaránt diszkrét paraméterű jelek (lásd. I.4.3. fejezet).

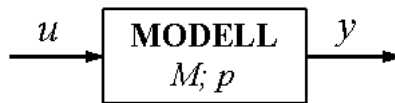
A lottószámokat adott időben húzzák és azok csak konkrét, egész számok lehetnek. Ezért a lottóhúzást egy diszkrét idejű, diszkrét állapotterű, sztochasztikus modellel tudjuk matematikailag leírni és vizsgálni.

Életünk során — sajnos — folyamatosan öregszenk, azaz matematikailag megfogalmazva: életünk egy folytonos idejű folyamat. De mivel életkorunkat években mondjuk meg, így az csak diszkrét értékeket vehet fel. Ez példa arra, hogy egy folytonos paraméterű (esetleg, idejű) folyamatot diszkrét paraméterűként (vagy idejűként) is vizsgálhatunk.

#### II.5. MODELLEZÉS ÉS SZIMULÁCIÓ

A matematikai modellek alkotási eljárásokról és alkalmazásáról kiterjedt szakirodalom található. Ezek közül — figyelembe véve a későbbi fejezetek témaköreit — jelen fejezetben a [II.6]; [II.8]; [II.9]; [II.10] és a [II.13] irodalmakban található információk és vélemények összegzése olvasható.

A matematikai modellalkotás lényegében az adott rendszert, illetve a benne lejátszódó folyamatot leíró egyenletek, a kezdeti- és peremfeltételeket, valamint a kapcsolódó adatrendszer felállítását, illetve a megoldó algoritmust jelenti. Azért kell ide sorolnunk a megoldó algoritmust is, mert az meghatározza a megoldás pontosságát, így a modell alkalmazhatóságát is. A természettudományi, műszaki problémák kezelésénél ezek az összefüggések általában differenciálegyenletek. Amennyiben a vizsgált rendszer vagy folyamat időbeli változásának leírása a térbeli eloszlási probléma megoldásával is kiegészül, akkor természetesen parciális differenciálegyenletet vagy egyenletrendszert kell felírunk és megoldanunk.



II.5. ábra Mérnöki probléma matematikai modelljének egyszerűsített sémája

Egy mérnöki probléma matematikai modelljének egyszerűsített sémája látható a II.5. ábrán. Az ábra alapján a modellalkotási feladat lényegében az alábbi három fő mozzanattól áll:

- a modell  $M$  szerkezetének megadása;
- a modell  $p$  paramétereinek megadása;
- a modell validálása.

A szimuláció egy adott probléma megoldására felállított matematikai modell felhasználása a vizsgált jelenség vagy rendszer — a vizsgálat szempontjából — minél teljesebb mértékű megismerése érdekében. A szimuláció során az adott rendszer bemenetén megjelenő változók (a gerjesztések és a zavarások), valamint a rendszert jellemző úgynevezett belső paraméterek (például geometriai és/vagy anyagjellemzők) a rendszer kimenő paramétereire gyakorolt hatásait elemezhetjük. Mindezekhez először is szükségünk van az adott problémát — a megkívánt mérnöki pontossággal — leíró modell felállítására és ellenőrzésére. A szimulációs eredmények pontosságát nagymértékben az alkalmazott modell szabja meg. A matematikai modell kimenő paramétereinek tulajdonságai alapján megkülönböztethetünk analitikus és digitális szimulációt.

### II.5.1. MODELLALKOTÁSI ELJÁRÁSOK

Egy rendszer matematikai modelljének megalkotásához alapvetően két szélsőséges elméleti módszer kínálkozik:

#### ***white-box eljárás***

Ebben az esetben a modell felállítása alapvetően a rendszerről vagy folyamatról kapott előzetes információk alapján, fizikai megfontolásokra, törvényszerűségekre támaszkodva történik az analitikus formájú, közvetlen matematikai modell előállítására.

A módszer előnye, hogy a modell fizikai paramétereinek valós tartalma, jelentése van, hátránya viszont, hogy a modell felépítése általában rendkívül bonyolult. Többnyire tervezési, a rendszerről történő részletes információszerzési igény kielégítése esetén alkalmazzuk, azaz a mérnöki gyakorlatban ez fordul elő leggyakrabban.

#### ***black-box eljárás***

Ez a másik szélsőséges elméleti — megfigyelési, illetve kísérleti — módszer. Ekkor a modell felállításához csak kísérletekkel, mérésekkel lehet információkat szerezni. Lehetséges megfigyelési kísérlet lehet ebben az esetben a I.4.4. fejezetben ismertetett vizsgálójelekre adott rendszerválaszok (például az átmeneti függvény) elemzése. Ha nincs más alapinformáció, akkor kiindulásként, mint matematikai modell, például polinommal történő közelítést biztosító egyenleteket lehet felhasználni.

Az black-box modellek lényeges előnye a viszonylagos egyszerűségük. Viszont egyértelműen az a hátrányuk, hogy a paramétereknek, adott esetben, nincs valós fizikai jelentése. Bizonyos esetekben, az egyszerűségből fakadóan ezek a modellek is nagyon jól alkalmazhatók. Mivel az ilyen a modelleket a vizsgált rendszer kimeneti és bemeneti jellemzői alapján állítjuk elő, egyes idegen nyelvű szakirodalmak Input/Output (I/O) modelleknek is nevezik.

A két fenti, elvi szélsőségeket jelentő eljárás „között” található az úgynevezett vegyes modell alkalmazása.

#### ***grey-box eljárás***

Ez a megközelítési eljárás lényegében az előző két módszer kombinációja. A valóságos a műszaki gyakorlatban legtöbbször ez az eset fordul elő. Mivel egy mérnöki probléma megoldása sorár nem kell teljes egészében „a sötétben tapogatóznunk”, mindig vannak kapaszkodók, ugyanakkor vannak nem ismert „sötét foltok” is.

## II.5.2. A MATEMATIKAI MODELLALKOTÁS CÉLJAI

Az alkalmazott modell milyenségét, annak pontosságát mindig az adott felhasználási cél dönti el. Így a vizsgálat során a modell létrehozásának egyik legfontosabb eleme a modellképzés céljának meghatározása. A modellalkotás célja szerint a műszaki gyakorlatban lehet:

- tudományos;
- fejlesztési;
- rutin mérnöki tevékenységet segítő.

A különböző célú modelleket elsősorban a modell pontossága, illetve a modell pontosságának — azaz a modell hibájának és bizonytalanságának — ellenőrzése szempontjából különböztethetjük meg egymástól.

Egy **tudományos modellnek** egy szűkebb jelenség vizsgálatából általánosít. Így a hibás modell későbbiekben hibás következtetéseket vonhat maga után, amit a tapasztalat már nem igazol. Ezért a tudományos modellek megalkotásánál különösen fontos, hogy:

- a modell jól és egyértelműen meghatározott hibáját közölni kell, amit a modell tapasztalati, kísérleti ellenőrzésével kell megadni;
- a modell alkalmazhatósági határait meg kell határozni, és azt közölni kell.

A **fejlesztési**, tervezési célú **modellezés** során a modellalkotás pontosságát igazítani kell az adott feladathoz. Minden ilyen esetben, még egy új berendezés megalkotásánál is, valamilyen előzményekre építhet a modell felállító és alkalmazó mérnök. Az első feladat ezért mindig az, hogy megismerjük a tudományos é szakmai előzményeket.

A **rutin mérnöki tevékenységet segítő modellezés** a modellalkotás „legveszélyesebb” területe. Ugyanis sokszor a mérnök egy, akár „szokványos” számítás elvégzése során nem is gondol arra, hogy ez a számítás valamilyen modellalkotás eredménye. Pedig ez alapvető kérdés! Az ugyanis, hogy milyen modelltől — azaz milyen szakmai megfontolás, fizikai törvényszerűségek alapján — származik az adott számítási módszer, és hogy az adott modell az adott esetben kielégítő-e, valamint az, hogy hol vannak a modell alkalmazhatóságának határai.

Egy mérnöki eljárás rutinszerű alkalmazása elvezethet oda, hogy észrevétlenül túllépjük az alkalmazhatósági határokat. Ezért mindig tudatosítani kell az alkalmazóval a modellt, amelynek eredménye az eljárás, a számítás, valamint azt, hogy melyek az alkalmazásának feltételei.



Összességében a modellezési célok lehetnek:

- modellezés (tervezés alatt álló rendszerek vagy speciális jelenségek vizsgálata, lehetséges műszaki megoldások kiválasztása, egyes szerkezeti jellemzők eltéréseinek tanulmányozása);
- tervezés (optimális rendszerek kialakítása, gazdaságosabb megoldások keresése, valamint élettartam- és költségtervezés);
- vizsgálat (üzemi jellemzők értékelése, szerkezeti, üzemeltetési jellemzők eltérései hatásainak elemzése, diagnosztikai jellemzők kiválasztása);
- vizsgálat tervezése (kísérleti próbajaratok, üzembe helyezési programok meghatározása, diagnosztikai üzemmódok kijelölése, alkalmassági vizsgálatok programjainak összeállítása);
- minősítés (alkalmassági előírások, minőségi követelmények kidolgozása);
- irányítás, szabályozás (optimális és adaptív irányítás, egyedi állapot-szabályozás megvalósítás);
- állapot-felismerés (adatgyűjtő és feldolgozórendszerben alkalmazható, könnyen azonosítható, adaptív modellek kidolgozása).

### II.5.3. A MATEMATIKAI MODELLEZÉS ÉS SZIMULÁCIÓ FOLYAMATA

A számos szakirodalom eltérő módon fogalmazza meg a matematikai modellezés és szimuláció folyamatát, annak főbb lépéseit. Az irodalmak mindegyike lényegében a fejezet elején már meghatározott három mozzanatot írja le, a szerzőik eltérő szemlélete függvényében. Ezen a különbségek fő okai — a szakemberek eltérő szemléletén túl — az, hogy modellalkotást más-más elemzési célból írják le és elemzik.

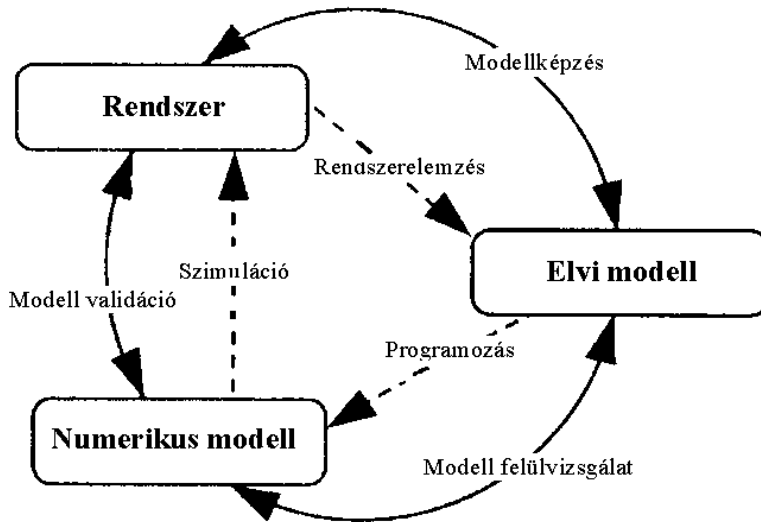
A Számítógépes Szimulációs Társaság (Society for Computer Simulation) 1979-ben meghatározta a modellezés, és a szimuláció elsődleges fázisainak és feladatainak egy másik sémáját. Bár ez a séma is egyszerű szerkezetű, jól mutatja a modellezés és a szimuláció legfőbb feladatait, illetve szemlélteti a modell képzésének, felülvizsgálatának, és validálásának helyét, szerepét a folyamatban.

A II.6. ábra azt szemlélteti, hogy a rendszerelemzés az adott rendszer elvi modelljének megalkotásához alkalmazza. A modellképzés, azaz a modell  $M$  szerkezetének megadása, tulajdonképpen a matematikai modell felépítésének, fokszámának rögzítését jelenti, a leíró egyenleteinek formalizált megadásával együtt. Ez történhet a fentiekben már ismert white-, black- vagy gray-box eljárások valamelyikével.

A programozás során az elvi modellt konvertáljuk matematikai (számítógépes) modellé. Ekkor kell megadnunk a rendszert jellemző belső paraméterek alapján az adott modell  $p$  paramétereit.

A matematikai modell egyik alapvető megoldási módja az analitikus

megoldás, de napjainkban a számítógépek rendkívül széles körű elterjedésével egyre jobban előtérbe kerülnek a különböző numerikus megoldások alkalmazása is.



II.6. ábra A modellezés és szimuláció elsődleges fázisai és feladatai ([II.8])

A numerikus megoldások során gyakorlatilag csak a digitális számítógépeknek van igazán szerepe a hétköznapi életben előforduló alkalmazásoknál. Nem elfelejtendő azonban az, hogy néhány területen a dinamikus rendszerek vizsgálatára igen hatékonyan alkalmazhatók az analóg számítógépek is. Az analóg számítógépek lényegében az adott folyamat vagy rendszer elektromos analóg modelljeit jelentik (mint ahogy azt a II.3.2. alfejezetben már olvasható volt). Legnagyobb hátrányuk a bemeneti adatok megadásának, illetve az eredmények megjelenítésének nehézkes kezelése. Ezen problémák megoldásának egyik lehetséges módja a hibrid számítógépek, vagy hibrid-analóg szimulációs programrendszer alkalmazása digitális számítógép esetén. Ezen utóbbi megoldási módszer azért nagyon népszerű, mert kikerüli az összes, az analóg gépek esetén fennálló nehézséget, de kihasználja annak minden előnyét.

A modell „jóságának” ellenőrzése tulajdonképpen a mért eredményekkel való összevetést jelenti. Amennyiben az ellenőrzés során kiderül, hogy a feltételezett modell nem teljesíti az adott mérnöki vagy tudományos probléma kapcsán megkövetelt pontossági előírásokat, akkor minden esetben egy iterációs feladatot kell megoldanunk. Ez azt jelenti, hogy vissza kell térnünk a modellalkotási algoritmus elejére, és esetleg újabb paraméterek bevonásával, figyelembevételével egy újabb, javított felépítéssel kell elvégezni a modell

azonosítását. Ezután természetesen újból végre kell hajtanunk a modell validálásához leírt feladatokat.

A vizsgált rendszer viselkedésének leírására felállított matematikai modell jósága igazolásának legegyszerűbb módja az, hogy az eredeti rendszerben méréseket végzünk, és azok eredményeit összevetjük a modell által szolgáltatott eredményekkel. Ezek alapján lehet a modell végleges szerkezetét és a leíró egyenletben szereplő paraméterek ( $p_i, i = 1; 2; \dots; k$ ) értékeit megadni. A fizikai alap megközelítés esetében a modellszerkezet adott, ezért ott elsősorban a paraméterek értékeinek meghatározására kell figyelniük.

A modellalkotás során — matematikai értelemben a modell ( $\hat{y}$ ) és a mérések ( $y$ ) által szolgáltatott eredmények eltéréseit kell minimálni (identifikáció):

$$y(\tau) - \hat{y}(p_i; \tau) \Rightarrow \min \quad . \quad (II.5.1)$$

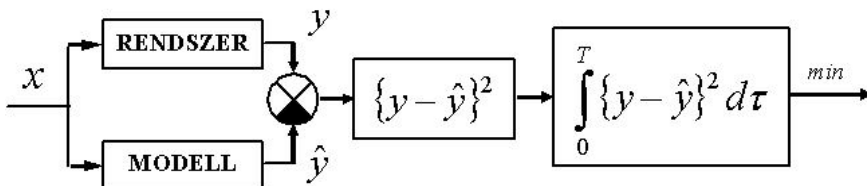
Az előjeles eltérések kompenzáló hatásának elkerülésére, a minimálási feladat megoldására leggyakrabban az úgynevezett legkisebb négyzetek módszerét alkalmazzuk. Ennek alapján a (II.5.1) egyenlet — a négyzetes eltérések összegének minimálási feltételével — a vizsgált folyamat teljes T időtartamára vonatkozóan a következő módon írható át:

$$\int_0^T \{y(\tau) - \hat{y}(p_i; \tau)\}^2 d\tau \Rightarrow \min \quad . \quad (II.5.2)$$

Ha a rendszer vagy a modell diszkrét idejű, a (II.5.2) egyenletet módosítani kell, és a  $j = 1; 2; \dots; m$  véges számú mintavételezési időpontokban vett értékek alapján felírni:

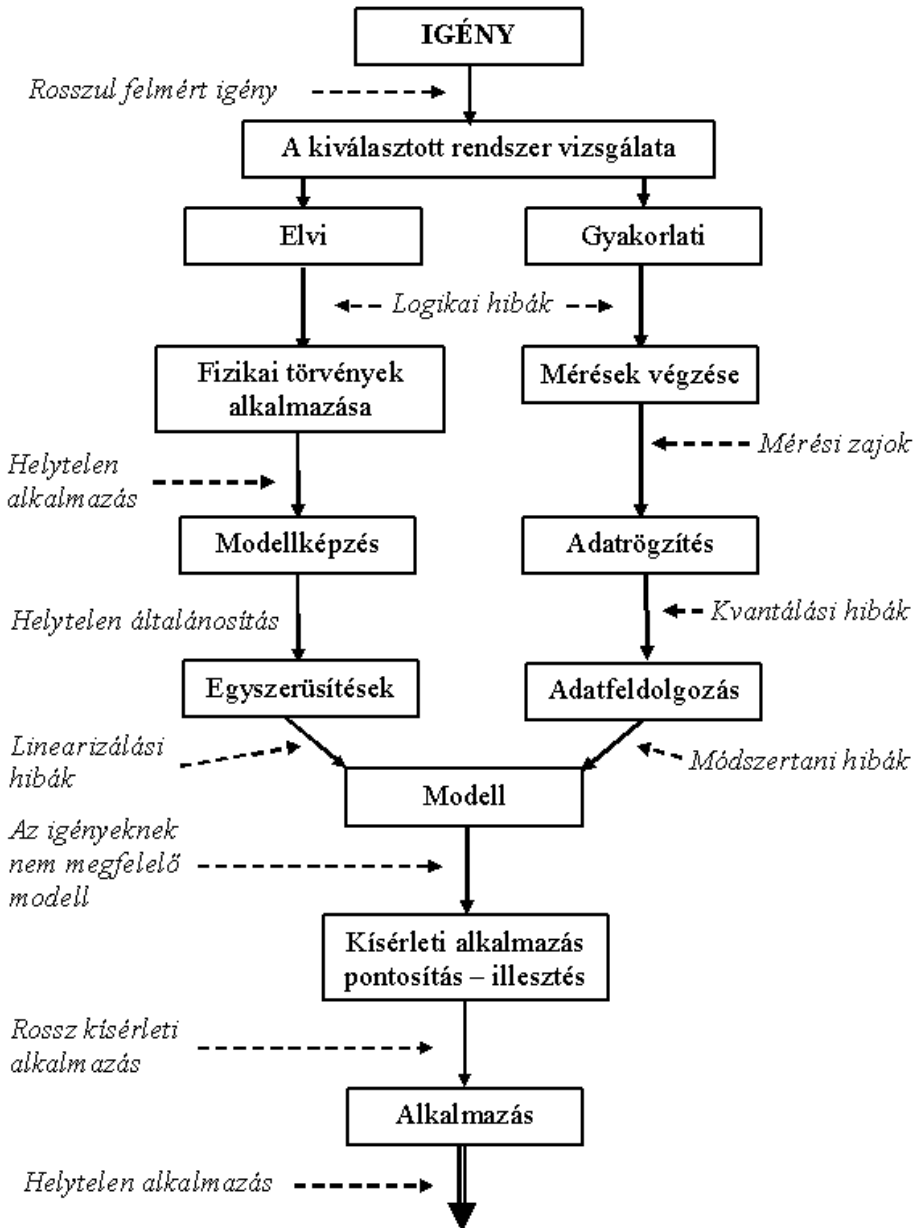
$$\sum_{j=1}^m \{y_j - \hat{y}_j(p_i)\}^2 \Rightarrow \min \quad . \quad (II.5.3)$$

A fentiekben elmondottak szerint a kísérleti ellenőrzés megvalósításának hatásvázlatát a II.7. ábra mutatja be.



II.7. ábra A modell kísérleti ellenőrzésének hatásvázlata ([II.6] alapján)

A bemutatott hatásvázlat alapján megkaphatjuk az adott mérnöki problémát (rendszert) legjobban leíró matematikai modell (leíró egyenlet) végleges alakját. Az ellenőrzött modell további felhasználása elsősorban szimulációs célokra történhet.



II.8. ábra A modellképzés általános logikája ([II.10] alapján)

A bemutatott hatásvázlat alapján megkaphatjuk az adott műszaki problémát (rendszert) legjobban leíró matematikai modell végleges alakját. Az ellenőrzött modell további felhasználása elsősorban szimulációs célokra történhet.

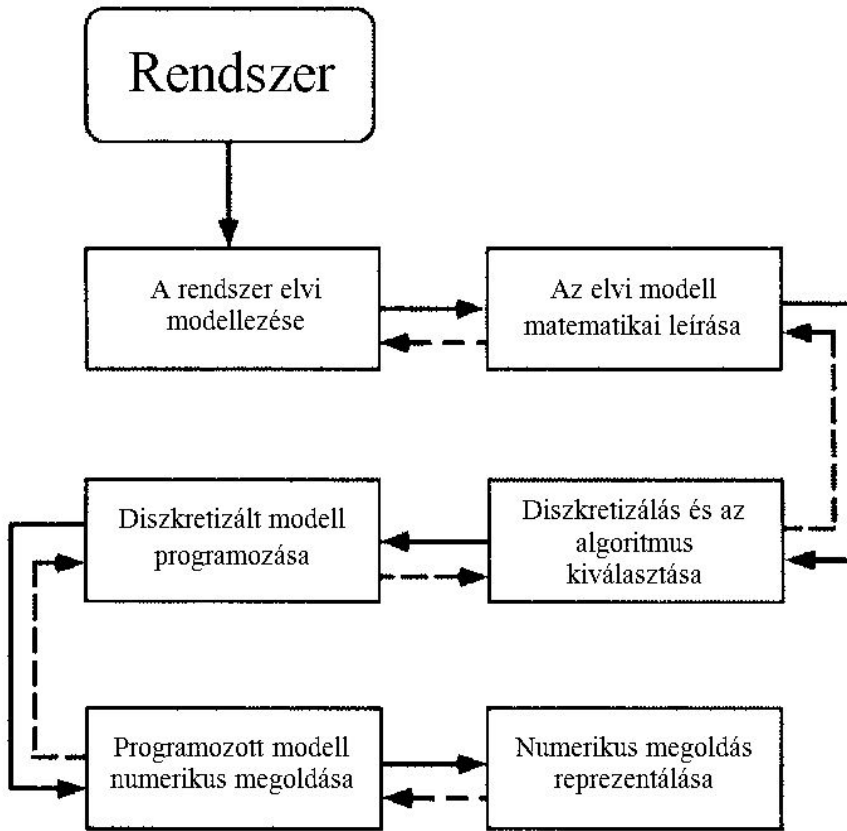
A már ellenőrzött és kellő pontossággal bíró matematikai modell legegyszerűbb felhasználási módja, a rendszer  $y$  kimenő változóit az  $u$  bemenő paraméterek különböző értékéi függvényében meghatározzuk. Tulajdonképpen ez a vizsgálati módszer a klasszikus értelemben vett szimuláció. A II.5. ábrával szemlélítve ez azt jelenti, hogy ismerjük a vizsgált rendszer  $M$  modelljét és  $p$  paramétereit. Ezek alapján elemezhetjük különböző  $u$  bemeneti változók hatását a rendszer  $y$  kimenetére. A kapott eredményekből vonhatunk le következtetéseket a rendszer viselkedésére, és tehetünk javaslatot a rendszer tervezésére, esetleg módosítására. Ez a feladat az úgynevezett paraméterérzékenységi vizsgálat (részletesebben lásd az VI.5. fejezetet). Fontos, hogy már a rendszer tervezésekor is gondot fordítsunk azon paraméterek azonosítására, amelyek a rendszer viselkedését döntően befolyásolják, amelyekre a rendszer a legérzékenyebben reagál.

Több be-, és kimenetű, MIMO rendszernél valamennyi kimeneti változóra meg kell határozni valamennyi bemenő paraméter okozta változást, amely elemzés eredménye az úgynevezett. érzékenységi mátrix.

Lényegében a fent leírt folyamat egy más szempontú, és részletesebb sémáját, általános logikáját szemlélteti a II.8. ábra, ahol a dőlt betűkkel a lehetséges hibák is olvashatók.

A II.9. ábra viszont a [II.8] irodalom szerzői interpretálásában szemlélteti a modellezés és a szimuláció fázisait.

Az itt megjelenített különböző fázisok tartalmazzák az összes nagyméretű szimulációs analízis részfeladatait, főleg arra az esetre, amikor a matematikai modell parciális differenciálegyenleteket tartalmaz. A fázisok sorrendje egyben az adat- és információáramlásokat is magában foglalja, megmutatva, hogy mely fázis lehet hatással a döntésekre vagy módszerekre későbbi fázisok valamelyikében. De, lehetséges jelentős visszacsatolás és interakció a fázisok között, melyeket a szaggatott vonalú nyilak jelképeznek az ábrán.



II.9. ábra A számítógépes modellezés és szimuláció ajánlott fázisai ([II.8])

A modellezési és a szimulációs folyamat a tervezők vagy döntéshozók által feltett kérdésekkel kezdődik, melyeknek legalább egy része szimulációs elemzéssel válaszolható meg. Most nézzük a fázisokat külön-külön:

### *A rendszer elvi modellezése*

Ebben a kezdeti fázisban meghatározzuk az adott rendszer és környezetének specifikációit. E specifikációk megfogalmazása során a rendszerben lejátszódó valós eseményeket és fizikai folyamatokat kell figyelembe venni. Szintén ekkor kell meghatározni azokat a rendszerelemeket és környezeti hatásokat, melyek valamilyen sztochasztikus jellemzőkkel bírhatnak. Ezek a meghatározások az adott modellezési feladat elvárásaira alapulnak, figyelembe véve a rendszer lehetséges érzékenységét ezekre a jelenségekre, folyamatokra és elemekre. A rendszer elvi modellezése során nem matematikai egyenleteket kell felírni, hanem a lehetséges események, és fizikai folyamatok alapvető feltételeit kell meghatározni.

A rendszer és a környezet specifikációinak meghatározása után a fizikai jellemzők kapcsolatainak különböző szintjeit kell meghatároznunk. Ha ez nem történik meg, akkor a későbbi fázisokból vissza kell térnünk ehhez a fázishoz.

### ***Az elvi modell matematikai leírása***

Ennek a fázisnak a legelsődlegesebb feladata a részletes és pontos matematikai modell felállítása. Egy rendszer vagy folyamat komplex matematikai modellje általában számos matematikai részmodellt tartalmaz. Ilyenek lehetnek például egy összetett rendszer esetén az elemek és berendezések modelljei. A modell komplexitása nagymértékben függ a fizikai paraméterek komplexitásától, azok számosságától és a köztük lévő kapcsolatok szintjeitől. Az ekkor felállított matematikai modellek parciális differenciálegyenletek, perem- és segédfeltételek, valamint kezdeti feltételek meghatározásának összességét is tartalmazza.

Szintén ezen fázis során kell meghatároznunk a modellel kapcsolatos nem-determinisztikus kérdések jelenlétét is. Számos elmélet és megfontolás segítheti a feladat megoldását.

Következő fontos kérdés a modell nem-komplexitása, mivel a modell a vizsgált rendszer „csak” egyszerűsített leképezése. (***„Minden modell rossz, néhány közülük használható.”*** [II.8]) Fontos itt egy kicsit megállnunk. A modellalkotás egyik lényegi kérdése pont a modell komplexitásának és nem-komplexitásának egyensúlya. NÁNDORI [II.6] könyvében ezt a kérdést az alábbi szerint fogalmazza meg:

***„Az a jó modell, amely a lehető legegyszerűbb,  
de a célnak megfelelő pontossággal közelíti a valóságot.”***

Mit is jelent ez az egyszerű, de nagyon tömör mondat? Az, és csak az a modellnek tekinthető jónak, amely a vizsgálat szempontjából fontos paramétereket, összefüggéseket és a peremfeltételeket megfelelő pontossággal figyelembe veszi, de mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak.

### ***Diszkretizálás és az algoritmus kiválasztása***

Ez a fázis két fő feladatból áll.

Ezek közül az első, hogy a folytonos (idejű és/vagy paraméterű) matematikai modellt diszkretizáljuk, úgy, hogy az numerikusan megoldható legyen, azaz létrehozzuk a rendszer numerikus modelljét. Egyszerűen megfogalmazva, a matematika segítségével a differenciál- és integrálszámítási feladatokat aritmetikai feladatokká alakítjuk át. A diszkretizálás során az összes térbeli és időbeli differenciálási módszert, a diszkrét formában meghatározott peremfeltételeket és geometriai határokat, valamint — ha az szükséges — a

rácsgenerálási módszereket analitikai formában kell meghatároznunk. Más szóval, az algoritmusokat és a módszereket matematikailag diszkrét formában kell leírni. Ekkor a folytonos matematikai formák diszkrété való átalakítására koncentrálunk, nem a numerikus megoldásra.

Ennek a fázisnak a másik fő feladata a diszkrétizált matematikai modell, az elérni kívánt modellezési pontosság és — ha az indokolt — az alkalmazandó számítógép sajátosságai alapján az algoritmus kiválasztása.

### ***A diszkrétizált modell programozása***

Ez a fázis mindegyik modellezése feladatnál megegyezik. Ekkor a korábbiakban felállított numerikus modell és a kiválasztott megoldási algoritmus adott programnyelvre való lefordítását kell elvégezni. A feladat nagyméretű, összetett rendszer és így modell esetén programozó bevonását teheti szükségessé. Viszonylag egyszerűbb esetekben felhasználhatunk valamilyen ismert kereskedelmi programrendszert (például MATLAB<sup>®</sup> Simulink) is.

### ***A programozott modell numerikus megoldása***

Ekkor az előző fázisban megírt számítógépes program futtatásával meghatározzuk a numerikus modell eredményeit, azaz a kimenő jellemzőket.

### ***A numerikus megoldás reprezentálása***

A modellezés és szimuláció utolsó fázisa a számítási eredmények reprezentálása, megjelenítése, valamint azok interpretálása, értelmezése. Ekkor különféle számsorok, táblázatok, grafikonok vagy diagrammok formájában jelenítjük meg az eredményeket. Ezt követően adott szakmai szempontok alapján — részben szubjektív módon — értelmezzük azokat. Az értelmezést és így annak eredményét nagyban befolyásolja, sőt lényegében meg is határozza a modellezési cél. Így az értelmezés eredménye alkalmazható új rendszer tervezésére, méretezésére, meglévő rendszer módosítására, felhasználható üzemeltetési vagy más szempontú döntések előkészítésére, támogatására. Ez utóbbi esetben fel kell hívni a figyelmet, hogy a döntési folyamat során alkalmazott modellek, illetve a velük kapott eredmények „csak” segédeszközök lehetnek a döntéshozó számára. A döntést az arra felhatalmazott személynek kell meghoznia.



## II.6. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [II.1] **BUDÓ Á.**, Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. pp. 517.
- [II.2] **BUDÓ Á.**, Kísérleti fizika II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. pp. 395.
- [II.3] **CSÁKI, F.**, Fejezetek a szabályzástechnikából Állapotegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973., pp. 487.
- [II.4] **FODOR, GY.**, Jelek és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006., pp. 470.
- [II.5] **KORN, G.A. – KORN, T.M.**, Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1975., pp.995.
- [II.6] **M. CSIZMADIA, B. – NÁNDORI, E.**, Modellalkotás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003., pp. 579.
- [II.7] Matematikai kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 443.
- [II.8] **OBBERKAMPF, W.L. – DELAND, S.M. – RUTHERFORD, B.M. – DIEGERT, K.V. – ALVIN, K.F.**, Error and uncertainty in modeling and simulation, Reliability Engineering & System Safety 75 (2002), p. 333–357.
- [II.9] **POKORÁDI, L.**, A matematikai modellek és alkalmazásuk a repülőműszaki gyakorlatban, az MHTT. Légvédelmi Repülő és űrhajózási Szakosztály pályázatán III. díjat nyert pályamunka, 1992., Jelige: *Mérnök*, pp. 29.
- [II.10] **ROHÁCS, J. – SIMON, I.**, Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Budapest, 1989., pp. 523.
- [II.11] **SZABÓ I.**, Rendszer- és irányítástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994. pp. 457.
- [II.12] **SZALAY, B.**, Fizika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 922.
- [II.13] **SZÜCS, E.**, Hasonlóság és modell, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 299.
- [II.14] Űrhajózási lexikon, Akadémiai kiadó, Zrínyi Katonai kiadó, Budapest, 1981., pp. 999.
- [II.15] **ZADEH, L.A. – POLAK, E.**, Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 476.



### III. FEJEZET

## RENDSZEREK GRÁF-MODELLEZÉSE

### III.1. BEVEZETÉS

A rendszerelmélet gyakorlati alkalmazásaiban, a megoldás lehetőségének megítélésében a vizsgált rendszer mérete az egyik legfontosabb tényező. A méret ekkor durván a rendszerben szereplő „elemek” számát jelenti, ahol az elemeket „intuitív” értelemben kell definiálnunk.

Egy rendszer vizsgálatának egyik fontos állomása az elemek közti — sok esetben bonyolult kölcsönhatásokat is jelenthető — kapcsolatok tényének feltárása és gráfban történő ábrázolása.

A diszkrét állapotterű — vagy valamilyen módon így approximált — folyamatok ábrázolása a lehetséges állapotok, és az állapot-váltások alkotta gráfok segítségével történhet. Ilyenek például a [III.5] irodalomban, illetve a VIII. fejezetben található üzemeltetési típusgráfok is.

A rendszert először diszkrét gráffal (vagy hálózattal) kell reprezentálni. Ez számos fizikai, tehát például elektromos, mechanikus, hidraulikus rendszer esetén megtehető. Sőt, parciális differenciálegyenletekkel leírt rendszerek gráfmodellje is megkonstruálható.

Egy nagyméretű, lineáris rendszer gráf-reprezentációjának meghatározása után a gráfot jelképes értelemben „fel kell vágni” kisebb részgráfokra, majd a részgráfok egyenleteinek megoldása után az egyes részek megoldásait „össze kell kapcsolni” (ha szükséges, akár több lépésben is), ami az eredeti rendszer megoldásához vezet. A gráf egyrészt fontos állomás az eredeti, teljes rendszer egyenleteinek felállításában, másrészt a vágási eljárás megtervezéséhez nyújt segítséget [III.7].

A gráfelméletnek és mérnöki alkalmazásának kiterjedt matematikai és műszaki szakirodalma található. Jelen fejezetben előbb a gráfelmélet — a rendszer- és folyamatmodellezés szempontjából fontos — (matematikai) alapfogalmait ismertetjük, alapvetően a [III.1]; [III.2] és [III.3] irodalmak alapján. A következő alfejezetben a rendszerek elérhetőség mátrixa egy, könnyen algoritmizálható — a Szerző által korábbi kidolgozott, de nem széles körben publikált — mátrixaritmetikai eljárását mutatjuk be.

### III.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

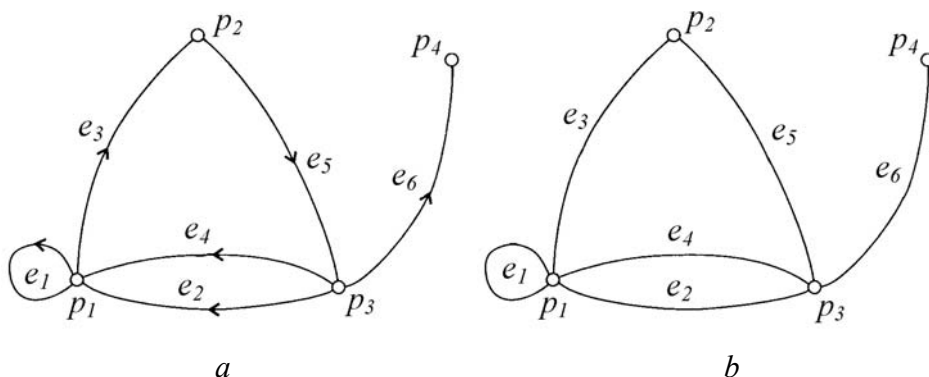
$E$	—	élek halmaza;
$e$	—	él;
$\mathcal{G}$	—	gráf;

$P$	—	szögpontok halmaza;
$p$	—	szögpont;
$A$	—	szomszédossági mátrix;
$B$	—	élmátrix;
$H$	—	összegmátrix;
$S$	—	szignum mátrix;
$Z$	—	elérhetőségi mátrix;
$\delta$	—	távolság;
$\varphi$	—	fokszám.

### III.3. GRÁFELMÉLETI ALAPFOGALMAK

A **gráf** olyan alakzat, amely pontokból és bizonyos pontpárokat összekötő (nem feltétlenül egyenes) vonaldarabokból áll. Matematikai megfogalmazásban a  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráfon olyan alakzatot értünk, amely a  $P$  pontokból és bizonyos pontokat összekötő  $E$  vonaldarabokból áll. A  $P$  halmaz elemeit **pontoknak** (esetleg gráf **szögpontjainak** vagy **csúcsainak**), az  $E$  halmaz elemeit pedig a gráf **éleinek** nevezzük. A fenti jelölésben szereplő  $f$  függvény az  $E$  halmazt képezi le a  $P \times P$ -re, azaz bármely  $e$  élhez hozzárendel egy pontpárt a  $P$  halmaz elemei közül. Ezért  $f$ -t szokás **illeszkedési leképezésnek** is nevezni..

**Irányított gráfról** akkor beszélünk, ha az élek végpontjainak sorrendjére is tekintettel vagyunk. Ha  $P$  és  $E$  valamelyike nem véges elemű halmaz, **végtelen gráfról** beszélünk. A **véges gráf** véges sok csúccsal és véges sok éllel bír.



III.1. ábra Irányított (a) és irányítatlan (b) véges gráf ([III.1] alapján)

A véges gráfokat úgy szemléltethetjük, hogy minden  $P_i$  csúcsához a sík egy pontját rendeljük, és két szögpontot akkor kötünk össze — egy irányított vagy irányítatlan — görbével, ha a gráf a két szögpont közt élt tartalmaz. A III.1. ábrán egy irányított (III.1.a), illetve egy irányítatlan (III.1.b) véges gráf

látható. (A végtelen gráfok szemléltetésétől — terjedelmi okok miatt — jelen könyvben eltekintünk.)

Írányítatlan gráf esetén, ha  $p_i$  és  $p_j$  csúcsokat összeköti valamely  $e_k$  él, akkor a  $p_i$  és  $p_j$  **szomszédos szögpontok**, és az  $e_k$  él **végpontjai**. Például a III.1.b ábrán szemléltetett  $p_3$  és  $p_4$  szögpontok szomszédosak, mert  $e_6$  él összeköti őket, így  $e_6$  végpontjai  $p_3$  és  $p_4$  szögpontok.

Írányított gráf esetén, ha az  $e_k$  él  $p_i$ -ből  $p_j$ -be irányul, akkor  $p_i$  a **kezdőpontja**,  $p_j$  pedig a **végpontja** az  $e_k$  irányított élnek, illetve  $p_j$  **szomszédja**  $p_i$ -nek. A III.1.a ábrán látható gráf  $e_5$  élének kezdőpontja  $p_2$ , végpontja  $p_3$ , és  $p_3$  szomszédja  $p_2$ -nek

Két gráfot **izomorf**nak tekintünk, ha  $P_1$ , illetve  $P_2$  pontjaik és  $E_1$ , illetve  $E_2$  éleik között illeszkedéstartó kölcsönösen egyértelmű leképezés létesíthető. Izomorf gráfok azonos ábrával szemléltethetők.

Ha egy gráf síkban úgy szemléltethető, hogy az éleknek megfelelő vonalak csak a gráf pontjaiban metszik egymást, **sík-gráfról**, vagy **síkba rajzolható gráfról**, ha nem, akkor **térbeli gráfról** beszélünk. A III.1. ábrán látható gráfok sík-gráfok, még a III.2. ábrán térbeli gráfok láthatók.

Azt az élt, melynek (irányított gráf esetén) a kiinduló és a célpontja, illetve (irányítatlan gráf esetén) mindkét végpontja azonos, **hurok élnek**, vagy **huroknak** nevezzük. Például a III.1 ábrán látható gráfok  $e_1$  élei hurkok. Ha több él ugyanaz a két szögpontot köti össze, **többszörös élekről** beszélünk. Többszörös él található a III.1. ábra gráfok  $e_2$  és  $e_4$  élei többszörös éleket alkotnak  $p_4$  és  $p_2$  szögpontok között.. Az **egyszerű gráfok** hurkokat és többszörös éleket nem tartalmaznak.

Egy gráf  $p_i$  csúcsához illeszkedő élvégek  $\varphi(p_i)$  számát a  $p_i$  **fokszámának**, vagy fokának nevezzük, azt mondjuk, hogy a  $p_i$  szögpont  $\varphi$ -edfokú. Irányított gráf esetén a  $p_i$ -hez kifelé, illetve befelé irányítottan illeszkedő élvégek száma a  $p_i$  csúcs

$$\varphi_{ki}(p_i) — a p_i pont kifoka,$$

illetve

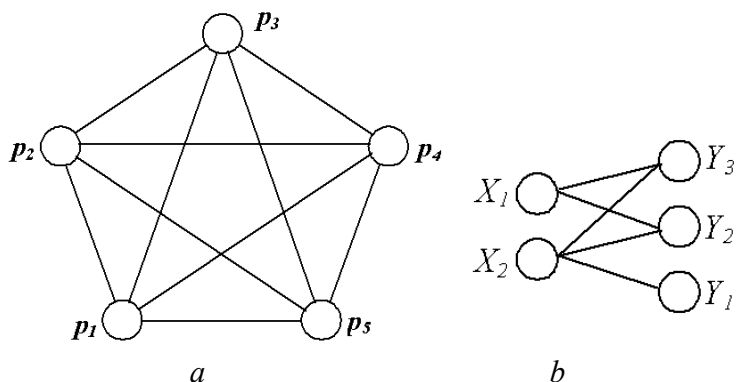
$$\varphi_{be}(p_i) — a p_i pont befoka.$$

A nulladik fokú csúcs neve: **izolált pont**. Például a III.1.b ábrán látható irányítatlan gráf  $p_3$  szögpontja negyedfokú, illetve a III.1.a ábra irányított gráfja  $p_3$  csúcsának kifoka: 3, befoka pedig 1.

Egy irányítatlan gráfot **teljes gráfnak** nevezzük,  $P$  bármely két csúcsa szomszédos. A III.2.a ábrán egy 5 szögpontú teljes (térbeli) gráf látható.

Amennyiben egy irányítatlan  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráf  $P$  szögpontjait  $X$  és  $Y$  diszjunkt részhalmazra úgy tudjuk felosztani, hogy a gráf mindegyik éle egy  $X$ -beli és egy  $Y$ -beli szögpontot köt össze, akkor  $\mathcal{G}(P;E;f)$  **páros gráf**. Egy ilyen páros gráfot **teljes páros gráfnak** nevezzük, ha  $X$  minden csúcsát  $Y$

mindencsúcsával él köti össze. A III.2.b ábra egy teljes páros gráfot szemléltet, ahol az  $X$  csúcshalmaz 2, az  $Y$  csúcshalmaz pedig 3 elemű.



III.2. ábra Teljes gráfok ([III.2] alapján)

A  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráfnak a  $\mathcal{G}(P';E';f')$  **részgráfja**, ha  $P'$ , illetve  $E'$  részhalmaza  $P$ -nek, illetve  $E$ -nek és bármely  $e \in E'$ , akkor  $f'(e) = f(e)$ . Amennyiben  $E'$  pontosan azokat az  $E$ -beli éleket tartalmazza, melyek a  $P'$  szögpontjait kötik össze, akkor  $\mathcal{G}(P';E';f')$  a  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráf  $P'$  által **feszített részgráfja**.

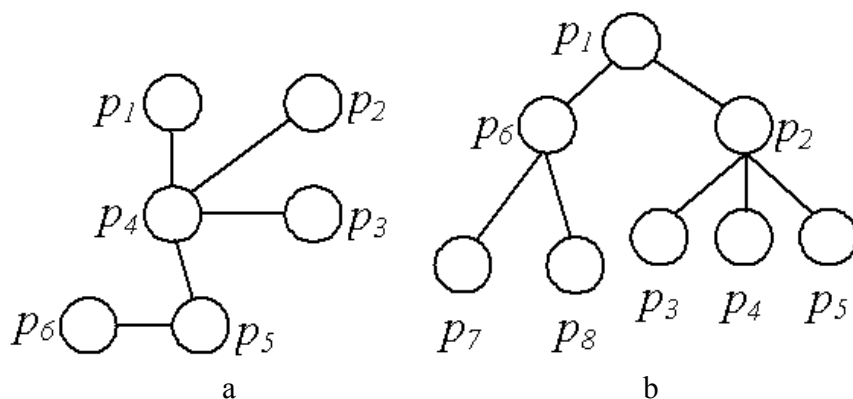
Írányítatlan gráf esetén minden az  $E$  elemeiből álló

$$F = (e_1\{p_1;p_2\}; e_2\{p_2;p_3\}; \dots e_s\{p_s;p_{s+1}\})$$

sorozatot **s hosszúságú élsorozatnak** nevezzük. Ha  $p_1$  és  $p_{s+1}$  pontok megegyeznek, de rajta kívül más pontot csak egyszer „érint” az élsorozat, akkor **zárt élsorozat**ról vagy **kör**ről, ellenkező esetben **nyitott élsorozat**ról beszélünk. **Összefüggő gráf** esetén a gráf bármely két szögpontja között létezik út. A III.1.b ábra irányítatlan gráfjában például nyitott az  $(e_6\{p_4;p_3\}; e_5\{p_3;p_2\})$  élsorozat, melynek hossza: 2, illetve egy 3 él hosszúságú kört alkot az  $(e_3\{p_1;p_2\}; e_5\{p_2;p_3\}; e_2\{p_3;p_1\})$  élsorozat.

Egy irányított gráfban a  $p_i$  és  $p_j$  csúc  $\delta(p_i;p_j)$  **távolsága** a két szögpontot minimális élszámmal összekötő élsorozat éleinek száma. Irányított gráf esetén az élek  $F = (e_1; e_2; \dots e_s)$  sorozatát **s hosszúságú láncnak** vagy **vonálnak** nevezzük, ha  $F$  egy élet sem tartalmaz kétszer, és minden, a sorozatban lévő  $e_i$  élre igaz, hogy az  $e_i$  kezdőpontja  $e_{i-1}$  végpontja, és végpontja az  $e_{i+1}$  kezdőpontja. Egy láncot akkor tekintjük **pályának**, ha az  $e_i$  él kezdőpontja az  $e_s$  él végpontja. A III.1.a ábrán látható irányított gráfban például az  $(e_5\{p_2;p_3\}; e_6\{p_3;p_4\})$  élsorozat egy láncot, illetve az  $(e_3\{p_1;p_2\}; e_5\{p_2;p_3\}; e_2\{p_3;p_1\})$  élsorozat egy 3 él hosszúságú pályát alkot. Megállapítható, hogy a  $p_2$  és  $p_4$  szögpontok távolsága 2.

Ha egy adott  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráf  $f$  leképezése minden élhez egy valós számot rendel, akkor az egy **súlyozott gráf**, és ekkor  $w(e_i)$  az  $e_i$  **él súlya**, vagy esetleg hossza. A technikai rendszerek modellezése során a gráfmodellek éleihez gyakran nem csak valós, hanem komplex számot, vektort, illetve valós skalár-, komplex- vagy vektorfüggvényt is rendelhetünk. Súlyozott gráffal fogunk találkozni a VII.5. fejezetben.



III.3. ábra Fa gráfok

Az olyan összefüggő irányítatlan gráf neve, mely nem tartalmaz köröket, a **fa**. Az  $n$  csúspontot tartalmazó fának pontosan  $n-1$  éle van. A III.3.a ábra egy 6 szögpontú fa gráf látható mely éleinek száma: 5. Egy fa gráfban bármely két pontot pontosan egy út köt össze. Egy kiválasztott szögponttal bíró fát **gyökeres fának** nevezzük, és a kiválasztott csúcs pedig a **gyökér**. A III.3.b ábra egy gyökeres fa gráfot mutat, melynek gyökere az  $p_1$  szögpont.

A gráfok egy másik ábrázolási, leírási módja a belőlük képezhető különböző mátrixok.

A gráf élei közti kapcsolatokat az úgynevezett **csúcs- (szomszédossági-, vagy adjacencia-) mátrixszal** lehet táblázatosan megadni.

Az irányítatlan gráf  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ -vel jelölt szomszédossági mátrixa  $i$ -edik sor  $j$ -edik elemének  $a_{ij}$  értéke jelöli a  $p_i$  és a  $p_j$  szögpontokat összekötő élek számát.

Irányított gráf esetén az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sor  $j$ -edik elemének  $a_{ij}$  értéke a  $p_i$  szögpontból induló és a  $p_j$  végpontú élek számát jelöli.

Könnyen belátható, hogy irányítatlan gráf esetén az adjacencia-mátrix mindig szimmetrikus, míg irányított gráfnak a szomszédossági mátrixa antiszimmetrikus is lehet — példaképpen lásd a (III.3.1) és (III.3.2) egyenletek. A III.1. ábrán látható gráfok adjacencia-mátrixai a következő módon írhatók fel:

→ irányított gráf (III.1.a ábra) csúcsmátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.1})$$

→ irányítatlan gráf (III.1.b ábra) csúcsmátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.2})$$

A gráfok élei és szögpontjai közti kapcsolatot az úgynevezett **élmátrixok** (**incidencia-mátrixok** vagy **illeszkedési mátrixok**) segítségével tudjuk szemléltetni.

A  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  incidencia-mátrixot a  $\mathcal{G}(P;E;f)$  gráfhoz alábbiak szerint rendeljük:

irányítatlan gráf esetén:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél, és illeszkedik a } p_i \text{ -hez} \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad (\text{III.3.3})$$

irányított gráf esetén:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél, és kezdőpontja } p_i \\ -1, & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél, és végpontja } p_i \\ 0, & \text{ha } e_j \text{ hurokél, vagy nem illeszkedik } p_i \text{ -hez} \end{cases} \quad (\text{III.3.4})$$

Példaként a III.1. ábrán látható gráfok incidencia-mátrixai a következő módon írhatók fel:

→ irányított gráf (III.1.a ábra) élmátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad (\text{III.3.5})$$



→ irányítatlan gráf (III.1.b ábra) élmátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3.6})$$

#### III.4. GRÁF-MODELLEK VIZSGÁLATA

A (főleg nem matematikai) szakirodalmak egy köre nem az előző alfejezetben leírt, a (III.3.1), illetve (III.3.2) egyenletekkel szemléltetett — definíciókat használja. A rendszerek és folyamatok modellezése szempontjából a legfontosabb kérdés a rendszer elemei, a folyamat állomásai közti kapcsolat létének feltárása. Ezért azt nem szükséges vizsgálnunk, hogy a szomszédos pontok között vannak-e többszörös élek és hurok élek, mint azt majd a következő alfejezetben tapasztalhatjuk. Így jelen alfejezetben az alábbi definíciókat fogjuk alkalmazni:

Az irányítatlan gráf  $\mathbf{A}$ -val jelölt szomszédossági mátrixa  $i$ -edik sor  $j$ -edik elemének értéke 1, ha az  $i$ -edik és a  $j$ -edik szögpontokat közvetlenül összeköti a gráf valamely éle, illetve 0, ha nem. Matematikailag felírva:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan él, amelynek két végpontja } p_i \text{ és } p_j \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad (\text{III.4.1})$$

Irányított gráf esetén az  $\mathbf{A}$  mátrix  $a_{ij}$  eleme pedig:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha van } p_i \text{-ből induló és } p_j \text{-be vezető él} \\ 0, & \text{minden más esetben} \end{cases} \quad (\text{III.4.2})$$

Könnyen belátható, hogy a korábban definiált csúcsmátrixból a szignum függvény felhasználásával — lásd (III.4.6) és (III.4.7) egyenletek — megkapható a fenti definíció szerinti szomszédossági mátrix.

Az elemek közti összetett kapcsolatokat a rendszer vizsgálati gráfjának úgynevezett elérhetőségi mátrixa jellemzi.

Egy  $m$  szögpontból álló gráf elérhetőségi mátrixán azt az  $m$  sorból és oszlopból álló  $\mathbf{D}_{m \times m}$  mátrixot értjük, ahol:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i \text{-csúcsból a } p_j \text{ szögpont elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \quad (\text{II.4.3})$$

Egy adott rendszer vagy diszkrét állapotterű folyamat gráfelméleti vizsgálatánál a fő feladat az elérhetőségi mátrix létrehozása. Ez a mátrix egy rendszer esetén például azt mutatja meg, hogy az egyik (az  $i$ -edik) elem anomáliája hatással van-e a másik ( $j$ -edik) elem működésére. Valamely folyamat vizsgálata esetén pedig megadja azt, hogy mely állapotokból lehet mely állapotokba eljutni.

A [III.3] irodalom alapján az elérhetőségi mátrixot a szomszédossági mátrix hatványai segítségével tudjuk felállítani. Ehhez a mátrixszorzás szabályainak megfelelően határozzuk meg az  $m \times m$  méretű  $\mathbf{A}$  adjacencia-mátrix  $\mathbf{A}^2$  jelű négyzetmátrixának  $a_{ij}^{[2]}$  elemét az:

$$a_{ij}^{[2]} = \sum_{s=1}^m a_{is} a_{sj} \quad (\text{III.4.4})$$

egyenlettel.

A korábbi definíciókat felhasználva kijelenthetjük, hogy

$$a_{is} a_{sj} = 0 \quad ,$$

ha nem tudunk egy lépésben eljutni az  $i$ -edik szögpontról az  $s$ -edikbe (azaz ha  $a_{is} = 0$ ), vagy ha az  $s$ -edikből a  $j$ -edikbe (vagyis ha  $a_{sj} = 0$ ).

Ha viszont egy-egy lépésben el tudunk jutni  $p_i$ -ből  $p_s$ -be és  $p_s$ -ből  $p_j$ -be, azaz, ha  $a_{is} = a_{sj} = 1$ :

$$a_{is} a_{sj} = 1 \quad ,$$

Így a (III.4.4) egyenlettel meghatározott  $a_{ij}^{[2]}$  értéke — a fenti szorzatok szummázása következtében — azt adja meg, hogy a gráf  $i$ -edik szögpontról hány különböző úton tudunk két lépéssel eljutni a  $j$ -edik szögpontra.

Fontos itt megjegyezni, hogy jelen tanulmányban az utak különbözőségén az általuk érintett szögpontok, vagy azok sorrendjének különbözőségét értjük. Az ugyanazon szögpontokat megegyező sorrendben tartalmazó, de más élekből álló utakat azonosaknak tekintjük. Ilyen eset fordulhat elő, ha a gráfon belül két szögpontot egynél több él köt össze. Ezt az egyszerűsítő feltételt azért vezetjük be, mert végső célunk az elérhetőség vagy el nem érhetőség tényének megállapítása a tényleges utak egymástól függetlenül. Vizsgálatunk fő célja a gráfok szögpontjai közt meglévő kapcsolatok feltárása.

Könnyen belátható az  $\mathbf{A}$  szomszédossági mátrix  $\mathbf{A}^k$ -val jelölt  $k$ -adik hatványmátrixának  $a_{ij}^{[k]}$  eleme azt mutatja meg, hogy  $k$  lépésben az  $i$ -edik szögpontról a  $j$ -edikbe hány egymástól — a fenti értelmezés szerint —

független úton lehet eljutni. Ennek a kijelentésnek pontos, matematikailag egzakt bizonyítása a [III.3] irodalomban található meg.

A hatványmátrixok

$$\mathbf{H}_k = \sum_{n=1}^k \mathbf{A}^n \quad (\text{III.4.5})$$

összegével kapott  $\mathbf{H}_k$  összegmátrix  $h_{ij}^{[k]}$  eleme azt adja meg, hogy legfeljebb  $k$  lépésben az  $i$ -edik szögpontról a  $j$ -edikbe hány — egymástól független — úton lehet eljutni.

Képezzünk a  $\mathbf{H}_k$  mátrixokból  $\mathbf{S}_k$  jelű mátrixokat az alábbi függvény szerint:

$$\mathbf{S}_k = \text{sign } \mathbf{H}_k \quad (\text{III.4.6})$$

$$s_{ij}^{[k]} = \text{sign } h_{ij}^{[k]}$$

ahol:

$$\text{sign } \eta = \begin{cases} 1, & \text{ha } \eta > 0 \\ 0, & \text{ha } \eta = 0 \\ -1, & \text{ha } \eta < 0 \end{cases} \quad (\text{III.4.7})$$

és nevezzük el ezeket a  $\mathbf{H}_k$  mátrix szignum mátrixának.

Az így kapott szignum mátrixok  $s_{ij}^{[k]}$  elemei azt adják meg, hogy legfeljebb  $k$  lépésben a gráf  $p_i$  szögpontjából el lehet-e jutni a  $j$ -edik szögpontjába — a (III.4.3) egyenlettel megadott elérhetőségi mátrixszal analóg módon — azaz:

$$s_{ij}^{[k]} = \begin{cases} 1, & \text{ha a } p_i \text{-csúcsból a } p_j \text{ szögpont maximum } k \text{ lépésben elérhető} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} \quad (\text{II.4.8})$$

Mivel egy  $m$  szögpontról álló gráfban a leghosszabb lehetséges élsorozat maximum  $m$  élből állhat, mely — a kiindulási szögpontról kivételével — minden hozzá tartozó szögpontról csak egyszer érint — azaz a lehetséges leghosszabb kör, vagy pálya —, a fenti mátrixműveleteket végezzük el  $m$ -szer.

Az így kapott  $\mathbf{S}_m$  szignum mátrix lesz a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa.

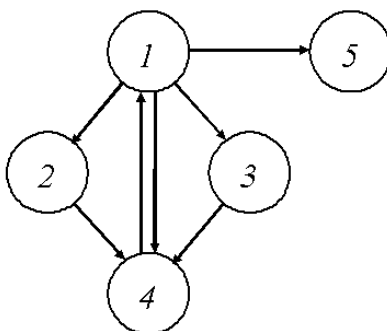
A fentiek alapján megállapítható, hogy egy  $m$  szögpontról álló gráf  $\mathbf{A}_{m \times m}$  szomszédossági mátrixának ismeretében a  $\mathbf{Z}_{m \times m}$  elérhetőségi mátrixa

$$\mathbf{Z} = \text{sign} \sum_{n=1}^m \mathbf{A}^n \quad (\text{III.4.9})$$

egyenlettel meghatározható.

**Egy egyszerű példa:**

A fentiekben leírt módszer szemléltetése érdekében elemezzük a III.4. ábrán látható irányított gráfot.



III.4. ábra Üzemeltetési folyamat típusgráfja

Ekkor a (III.4.2) egyenlet alapján felírt szomszédossági mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{III.4.10})$$

A fenti  $\mathbf{A}$  mátrixból kiindulva, a (III.4.4); (III.4.5) és (III.4.6) egyenletek felhasználásával a hatvány-, összeg-, és szignum mátrixok az alábbi alakot fogják felvenni:

$\mathbf{A}^k$	$\mathbf{H}_k$	$\mathbf{S}_k$
<p><b>2. lépés:</b></p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p><b>3. lépés:</b></p> $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p><b>4. lépés:</b></p> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p><b>5. lépés:</b></p> $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 & 13 & 5 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Így a vizsgált gráf elérhetőségi mátrixa:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.4.11})$$

Természetesen a bemutatott egyszerű példa esetén a gráf megtekintéséből belátható, hogy a  $p_5$  szögpont (állapot vagy rendszerem) kivételével bármely állapotból bármely szögpontba el lehet jutni. A (III.4.11) egyenlet  $\mathbf{Z}$  mátrixa azt is szemlélteti, hogy a  $p_5$  szögpont csak „nyelő”-ként

működik. Ez azt jelenti, hogy ha a gráf egy folyamatot szemléltet, az nem lehet stacioner.

A gráfból az is kitűnik, hogy benne a — fenti feltételeket kielégítő — leghosszabb út három élből áll. Ez utóbbival magyarázható az, hogy a 4. és 5. lépéshez tartozó szignum mátrixok már egyenlők. Mivel általános esetben, ha a szögpontok száma  $m$ , a fenti kritériumnak megfelelő leghosszabb út hosszát megadni nem tudjuk, ezért célszerű vizsgálatunkat mindig  $m$ -szer elvégezni.

Egy összetettebb rendszer, tehát bonyolultabb gráf esetén a fenti bekezdésben tett megállapítások belátása könnyen nem lehetséges, így az ismertetett — könnyen algoritmizálható — módszer alkalmazása szükségessé válhat.

### III.5. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [III.1] **ANDRÁSFALVI, B.**, Gráfelmélet, Polygon, Szeged, 1997., pp. 174.
- [III.2] **BRONSTEJN, I. N. – SZEMENGYAJEV, K. A. – MUSIOL, G. – MÜHLIG, H.**, Matematikai kézikönyv, Typotex, Budapest, 2006, pp. 1209.
- [III.3] **FAZEKAS, F.**, Alkalmazott matematika II., egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 347.
- [III.4] **POKORÁDI, L.**, Rendszerek és folyamatok gráfelméleti vizsgálata, Tudományos Kiképzési Közlemények, MH. SzRTF, Szolnok 1993/2-3, p. 33–44.
- [III.5] **POKORÁDI, L.**, Karbantartás elmélet, DE MFK, Debrecen, 2002., [http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb\\_elm.pdf](http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb_elm.pdf), pp. 101.
- [III.6] **SZABÓ, I.**, Gépészeti rendszertechnika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986., pp. 541.
- [III.7] **ZADEH, L.A. – POLAK, E.**, Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 476.

## IV. FEJEZET

# DIMENZIÓANALÍZIS ÉS HASONLÓSÁG

### IV.1. BEVEZETÉS

Egy fizikai változó többi jellemzőhöz való kapcsolatát azok dimenziói nagymértékben befolyásolják. A változók dimenzióinak elemzésével részben meghatározhatók azok kapcsolatai, illetve vizsgálhatók a valós jelenségek közti hasonlóságok. A fizikai változók mértékegységei, illetve a mértékegységrendszerek számos könyvben (például: [IV.1] és [IV.6]) ismerhetők meg. A dimenzióanalízissel kiterjedt mérnöki szakirodalom (például: [IV.3]; [IV.10] és [IV.11]) foglalkozik. Az fizikai folyamatok hasonlósági vizsgálatait, kritériumait lényegében minden hő-, és áramlástan irodalom (például: [IV.2]; [IV.8]; [IV.9] és [IV.12]) ismerteti.

A könyv jelen része a fenti irodalmakra támaszkodva összegzi a modellalkotáshoz szükséges a fizikai jellemzők dimenzióival, hasonlóságával kapcsolatos ismereteket. A IV.3. fejezetben a fizikai változók dimenzióival és mértékegységrendszereivel kapcsolatos alapismeretekre tehet szert a Tisztelt Olvasó. A IV.3 fejezet a dimenzióanalízis rövid ismertetése olvasható (A kérdéskört teljes körű, részletes leírása a [IV.10] irodalomban tekinthető meg). Végezetül, a hasonlóságelmélettel, valamint műszaki hő-, és áramlástan elemzések során alkalmazott hasonlósági kritériumokkal foglalkozunk.

### IV.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$f$	—	általános fizikai változó;
$I$	—	elektromos áramerősség dimenziója;
$J$	—	fényerősség dimenziója
$L$	—	hosszúság dimenziója;
$M$	—	tömeg dimenziója;
$N$	—	anyagmennyiség dimenziója;
$T$	—	idő dimenziója;
$\Theta$	—	termodinamikai hőmérséklet dimenziója;

### IV.3. A JELLEMZŐK DIMENZIÓI

Egy jellemző más mennyiségekkel való kapcsolatának jellegét annak dimenziója fejezi ki.

A fizikai mennyiségek között meghatározott összefüggések vannak. Ezért, ha e fizikai mennyiségek közül egyeseket alaplammennyiségeknek tekintünk,

akkor az összes többi fizikai mennyiség dimenziója meghatározott módon kifejezhető az alapmennyiségek dimenziójával. Az alapmennyiségekre vonatkozókat elsődleges, a többire vonatkozót másodlagos vagy leszármaztatott dimenzióknak nevezük.

Az alapegységek megválasztása után egyértelműen adódnak a leszármaztatott egységek dimenziói.

A dimenzió (általános jele  $\dim f$ ) olyan kifejezés (szimbólum), amely megadja, hogy milyen kapcsolat van a fizikai mennyiség és az alapmennyiségek, illetve alapegységek között. Tehát a mennyiségnek a tartalmát fejezi ki, és független a számértéktől és a mértékegységtől; csak azt fejezi ki, hogyan határoztuk meg (definiáltuk) az alapmennyiséggel.

Például a sebesség dimenziója:

$$\dim v = \frac{\dim l}{\dim \tau} = LT^{-1} \quad , \quad (\text{IV.3.1})$$

vagyis az  $l$  távolság dimenziója osztva a  $\tau$  idő dimenziójával.

A dimenzió a jelenség belső lényegére nem jellemző, ugyanis különböző mennyiségnek azonos dimenziója lehet (például a munka és a nyomaték dimenziója egyaránt  $L^2MT^{-2}$ ).

A dimenzió és a mértékegység fogalmát sokan összekeverik, amikor gyakran a mértékegység helyett dimenziót mondanak. Ugyanazon fizikai mennyiségnek csak egyféle dimenziója, de többféle mértékegysége lehet. Például a sebesség dimenziója — mint azt az (IV.3.1) kifejezésből is látszik — csak  $LT^{-1}$ , mértékegysége viszont több is lehet, például:

$$\frac{m}{s} = ms^{-1} \quad ; \quad \frac{km}{óra} \quad ; \quad csomó = \frac{\text{tengeri mérföld}}{óra} \quad .$$

Helytelen tehát azt mondani, hogy a sebesség dimenziója  $ms^{-1}$ .

Az alapidimenziók valamely megválasztásával adott egy mértékegységrendszer, vagyis a mértékegységek egyértelmű összessége. Ezután a fizikai változók egy-egy halmazához (az azonos nevű fizikai mennyiségekhez) tartozó bármely elem nagyságát megadhatjuk egy számmal, amely (általában) azt fejezi ki hányszorosa a mértékegységnek. Ezt a számot mérőszámnak nevezük.

#### IV.3.1. AZ SI MÉRTÉKEGYSÉGRENDSZER

Hazánkban jelenleg alkalmazható mértékegységrendszer az 1960-ban elfogadott és jelenleg alkalmazott SI (SYSTÈME INTERNATIONAL D'UNITÉS — NEMZETKÖZI MÉRTÉKEGYSÉG-RENDSZER) is [IV.1]. Az SI-egységek alkalmazásával a dimenzió gyakorlati jelentősége csökken, mert az SI-egység a dimenzióval



egyenértékű információt ad a mennyiségről, de ez csak akkor tűnik ki világosan, ha a külön nevű (például pascal, newton, joule stb.) egységeket alap és kiegészítőegységekkel fejezzük ki.

A nemzetközi mértékegység-rendszer mértékegységeit három csoportra osztjuk:

- alapegységek;
- kiegészítőegységek;
- származtatott egységek.

Az SI valamennyi egységét a hét alapegységből és a két kiegészítőegységből lehet származtatni. Ezen alap- és kiegészítőegységeket az IV.1. Táblázat tartalmazza. A származtatott egységek az alap- és kiegészítőegységekből származtathatók szorzással és/vagy osztással, mégpedig a fizikai fogalmat, állapotot, folyamatot definiáló egyenlettel.

A mennyiség			Az SI egység	
Neve	Jele	Dimenziójele	Neve	Jele
<b>Alapmennyiségek</b>			<b>Alapegységek</b>	
hosszúság	$l$	$L$	<i>méter</i>	$m$
tömeg	$m$	$M$	<i>kilogramm</i>	$kg$
idő	$\tau$	$T$	<i>másodperc (szekundum)</i>	$s$
elektromos áramerősség	$I$	$I$	<i>amper</i>	$A$
termodinamikai hőmérséklet	$T$	$\Theta$	<i>kelvin</i>	$K$
anyagmennyiség	$n$	$N$	<i>mól</i>	$mol$
fényerősség	$I_v$	$J$	<i>kandela</i>	$Cd$
<b>Kiegészítő mennyiségek</b>			<b>Kiegészítőegységek</b>	
síkszög	$\alpha; \beta; \gamma \dots$	$l$	<i>radián</i>	$rad$
térszög	$\Omega(\omega)$	$l$	<i>szteradián</i>	$sr$

IV.1. Táblázat Az SI rendszer alapmennyiségei és alapegységei.

Az SI egységrendszer szabályai szerint valamely fizikai mennyiség megadására az SI által megengedett törvényes mértékegységeknek és a tíz pozitív vagy negatív kitevős hatványait kifejező úgynevezett prefixumoknak a kombinációja használható. (Egyszerre legfeljebb egy prefixum alkalmazható, ezért szabálytalan például a korábban a spektroszkópiában széles körben

használt millimikron mértékegység.) Az SI által megengedett prefixumok a IV.2. Táblázatban tekinthetők meg. A fentiek mellett léteznek olyan nem SI mértékegységek, amelyek kizárólag bizonyos speciális területeken alkalmazhatók. Ilyenek a tengerhajózásban és légitözlekedésben a tengeri mérföld, illetve a csillagászatban a csillagászati egység, a fényév és a parsec.

Összetett prefixumot nem szabad alkalmazni, például tilos a millimikrométer ( $m\mu m$ ) használata a nanométer ( $nm$ ) helyett.

A prefixum		Decimális szorzó számértéke
Neve	Jele	
exa-	<i>E</i>	$10^{18}$
peta-	<i>P</i>	$10^{15}$
tera-	<i>T</i>	$10^{12}$
giga-	<i>G</i>	$10^9$
mega-	<i>M</i>	$10^6$
kilo-	<i>k</i>	$10^3$
hekto-*	<i>h</i>	$10^2$
deka-*	<i>da</i>	10
deci-*	<i>d</i>	$10^{-1}$
centi-*	<i>c</i>	$10^{-2}$
milli-	<i>m</i>	$10^{-3}$
mikro-	$\mu$	$10^{-6}$
nano-	<i>n</i>	$10^{-9}$
piko-	<i>p</i>	$10^{-12}$
femto-	<i>f</i>	$10^{-15}$
atto-	<i>a</i>	$10^{-18}$

IV.2. Táblázat Az SI egységekhez alkalmazható prefixumok és decimális szorzók

A hekto-, a deka-, a deci- és a centi- prefixumok használatát az SI a következők szerint korlátozza:

- a méterrel (és az ebből származó négyzetméterrel, köbméterrel) kapcsolatban a deci és a centi prefixum is alkalmazható;
- a literrel kapcsolatban a hekto-, a deci- és a centi- prefixum is alkalmazható;
- a grammal kapcsolatban a deka- és a centi- prefixum is alkalmazható (a dekagramm jelölésére megengedett a *dag* jelölés helyett *dkg* jelölés is).

A  $10^5 \text{ Pa}$  érték helyett alkalmazhatjuk a **bar** mértékegységet, de csak gázok és folyadékok nyomás értékének kifejezésére.

Megnevezés	Szimbólum	Jellegzetes alak	Alapdimenziókból származtatás	Leírás
bar	<i>bar</i>	$10^5 \text{ Pa}$	$10^5 \text{ m kg s}^{-2}$	gáz- és folyadéknomás
becquerel	<i>Bq</i>	$\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	radioaktivitás
coulomb	<i>C</i>	$\text{s A}$	$\text{s A}$	elektromos mennyiség, elektromos töltés
Celsius fok	$^{\circ}\text{C}$	<i>K</i>	<i>K</i>	Celsius hőmérséklet
farad	<i>F</i>	$\text{C/V}$	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2$	kapacitás
gray	<i>Gy</i>	$\text{J/kg}$	$\text{m}^2$	elnyelt ionizált sugárdózis
henry	<i>H</i>	$\text{Wb/A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$	induktivitás
hertz	<i>Hz</i>	$\text{1/s}$	$\text{s}^{-1}$	frekvencia
joule	<i>J</i>	$\text{Nm}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2}$	energia, munka, hőmennyiség
lumen	<i>lm</i>	$\text{cd sr}$	<i>cd</i>	fényáram
lux	<i>lx</i>	$\text{lm m}^{-2}$	$\text{m}^{-2} \text{ cd}$	megvilágítás
newton	<i>N</i>	$\text{m kg s}^{-2}$	$\text{m kg s}^{-2}$	erő
ohm	$\Omega$	$\text{V/A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-2}$	elektromos ellenállás
pascal	<i>Pa</i>	$\text{N m}^{-2}$	$\text{m kg s}^{-2}$	nyomás, feszültség
siemens	<i>S</i>	$\text{A/V}$	$\text{m}^{-2} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^3 \text{ A}^2$	elektromos vezetőképesség
sievert	<i>Sv</i>	$\text{J/kg}$	$\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$	dózisegyenérték
tesla	<i>T</i>	$\text{Wb m}^{-2}$	$\text{kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$	mágneses fluxussűrűség
volt	<i>V</i>	$\text{W/A}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3} \text{ A}^{-1}$	elektromos feszültség, potenciálkülönbség
watt	<i>W</i>	$\text{J/s}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-3}$	teljesítmény, sugárzási fluxus
weber	<i>Wb</i>	$\text{Vs}$	$\text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}$	mágneses fluxus

IV.3. Táblázat Az SI önálló nevű származtatott egységei

Tilos prefixumokat kapcsolni a következő egységekhez:

- a fokhoz, az ívperchez, az ívmásodperchez;
- perchez, az órához, a naphoz, a héthez, a hónaphoz, az évhez;
- a Celsius-fokhoz;
- a tengeri mérföldhöz, a csillagászati egységhez, a parsechez, a fényévhez;
- a hektárhoz.

### IV.3.2. AZ ANGOL-SZÁSZ MÉRTÉKEGYSÉGRENDSZEREK

Azokat a mértékegységeket és mértékegységrendszereket nevezzük angolszásznak, amelyek először Nagy-Britanniában, a Brit Nemzetközösség országaiban, valamint az Egyesült Államokban használatosak. Az angolszász mértékegységek meglehetősen szövevényes rendszert alkotnak. Ez több okra vezethető vissza. Az egyes mennyiségek különböző mértékegységei nem decimálisan kapcsolódnak egymáshoz, ugyanazon mennyiségre többféle rendszer is használatos, sok a rendszeren kívüli mértékegység, az Egyesült Királyságban és az USA-ban néhány mértékegység értelmezése eltérő, miközben nevük megegyezik.

A hosszúság legfontosabb mértékegységei ma már Nagy-Britanniában is az USA-ban egyaránt a *yard* alapegységre épülnek. A *yard*ot viszont 1959 óta hivatalos definíciója szerint a méterre alapozzák:

$$1 \text{ yard} = 0,9144 \text{ m.}$$

A többi hosszúság-mértékegységet ebből származtatják, többé-kevésbé egységes módon. Szigorúan véve az USA-ban kétféle rendszer van: néhány hosszúság-mértékegység alapja nem a *yard*, illetve ennek harmada a *foot* (láb):

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m,}$$

hanem az úgynevezett *survey foot*. Mivel azonban a két *foot* közötti relatív eltérés  $2 \cdot 10^{-6}$ , ezért ez az eltérés az átszámítások során többnyire figyelmen kívül hagyható.

A hosszúság-mértékegységek négyzeteként, illetve köbeként értelmezik terület-mértékegységeket, illetve térfogat mértékegységeket. De, a térfogat-(ürtartalom-) mértékegységekre azonban használatos egy másik rendszer is, amelynek alapja a gallon. Az USA-ban a gallon értéke pontosan rögzített ( $1 \text{ inch} = 25,4 \text{ mm}$ ), ezért a gallon köbméterben is pontosan kifejezhető:

$$1 \text{ (US) gallon} = 231 \text{ cubic inches} (= 3,78543 \text{ liter}).$$

Nagy Britanniában az *imperial gallon* SI-egyenértéke nincs pontosan rögzítve, ezért csak megközelítő átszámítása adható meg:

$$1 \text{ (UK) gallon} \approx 4,546 \text{ liter,}$$

ami természetesen vonatkozik a gallonból származtatott többi mértékegységre is. A gyakorlati nehézséget inkább az okozza, hogy a két gallon jelentékenyen (mintegy 20%-kal) eltér egymástól.

A tömegmértékegységek ma már az UK-ban és az USA-ban egyaránt a *pound* (font) alapegységre épülnek. A pound viszont az 1959 óta hivatalos definíciója szerint a kilogrammra van alapozva:

$$1 \text{ pound} = 1 \text{ lb} = 0,45359237 \text{ kg.}$$

A többi tömegmértékegységet ebből származtatják többé-kevésbé egységes módon. Fontos itt röviden még megemlíteni, hogy a fenti sajátosságokon túl két angol-szász mértékegységrendszert tudunk megkülönböztetni. Ezek:

***Az angol-szász erő alapú (mérnöki) rendszer:***

Ebben a rendszerben az alapmértékegységek a *foot*, vagy *inch*, a *pound* és *másodperc*. Ekkor a *pound* erőt jelent. Ennek megfelelően a tömeg mértékegysége a következő, melynek neve *slug*:

$$1 \text{ slug} = \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{ft}} .$$

Az erődimenziójaként használt *lb*-t olykor *lbf*-nek (*pound-force* — font-erő) írják, annak érdekében, hogy megkülönböztessük az angol-szász tömeg alapú rendszerben használt *lb* tömeg-dimenziótól.

Ez a rendszer még a birodalmi mérnöki vagy művaki rendszer néven is ismert.

***Az angol-szász tömeg alapú (tudományos) rendszer:***

A más néven birodalmi tudományos tömegrendszernek is hívott a rendszerben a tömeg mértékegysége a *pound* (*lb*). Következésképpen, az erő dimenziója származtatott egység. Egysége a *poundal*, amely azzal az erővel egyenlő, ami ahhoz szükséges, hogy az 1 fontnyi tömegnek 1 *fts*<sup>-2</sup> gyorsulást eredményez. Az 1 *poundal*-nyi erő SI-megfelelője:

$$1 \text{ poundal} = 0,138254951376 \text{ N,}$$

míg az angol-szász mérnöki rendszerben:

$$1 \text{ poundal} = 0,03108095017 \text{ lbf.}$$

### IV.3.3. A DIMENZIÓK ARITMETIKÁJA

Ebben az alfejezetben röviden a dimenziók aritmetikájával kapcsolatos legfontosabb tételekkel foglalkozunk. Ezen tételek meglehetősen intuitívnak látszanak, bizonyításuktól itt eltekintünk.

#### **Szorzatok tételei:**

Bármely két változó dimenziójának szorzata egyenlő a két változó szorzatának dimenziójával. Azaz,  $f_1$  és  $f_2$  jelű változók esetén:

$$[f_1][f_2] = [f_1 f_2] \quad . \quad (\text{IV.3.2})$$

Adott  $n$  változó dimenziójának szorzata megegyezik az adott  $n$  változó szorzatának dimenziójával:

$$\prod_{i=1}^n [f_i] = \left[ \prod_{j=1}^n f_j \right] \quad . \quad (\text{IV.3.3})$$

A dimenziók szorzata asszociatív tulajdonsággal bír.

#### **Hányadosok tétele:**

Bármely két változó dimenziójának hányadosa egyenlő a két változó hányadosának dimenziójával. Azaz,  $f_1$  és  $f_2$  jelű változók esetén:

$$\frac{[f_1]}{[f_2]} = \left[ \frac{f_1}{f_2} \right] \quad . \quad (\text{IV.3.4})$$

#### **Hatványok tétele:**

Egy  $f$  változó valamely ( $n$ -edik) hatványának dimenziója egyenlő az adott változó dimenziójának hatványával, azaz:

$$[f^n] = [f]^n \quad . \quad (\text{IV.3.5})$$

#### **Differenciálok tételei:**

Bármely két változó differenciáljaiból alkotott hányadosnak dimenziója a dimenziója egyenlő a két változó dimenziójának hányadosával, azaz:

$$\left[ \frac{df_1}{df_2} \right] = \left[ \frac{f_1}{f_2} \right] \quad . \quad (\text{IV.3.6})$$

Az  $f_1$  változó  $f_2$  szerinti  $n$ -edrendű deriváltjának dimenziója az  $f_1$  és  $f_2^n$  változók dimenziójának hányadosával egyenlő:

$$\left[ \frac{d^n f_1}{df_2^n} \right] = \left[ \frac{f_1}{f_2^n} \right] \quad . \quad (\text{IV.3.7})$$

**Integráltétel:**

Egy integrál dimenziója az integrandus és a független változó dimenziójának szorzatával egyenlő, azaz:

$$\left[ \int f(x) dx \right] = [f(x) \cdot dx] = [f(x)][x] \quad . \quad (\text{IV.3.8})$$

#### IV.4. A DIMENZIÓANALÍZIS

Egy valós rendszeren belüli fizikai folyamatok lejátszódását a rájuk jellemző természeti törvények determinálják. A rendszer a természettörvények alapján reagál az inputokra, annak függvényében, hogy milyen a kapcsolata a környezetével, illetve állapota a vizsgált folyamat megkezdése előtt. Ha ismerjük a rendszer matematikai modelljét, bizonyos egyértelműségi feltételezéseket biztosítva, következtetni tudunk a rendszer kimenet vagy eloszlás függvényre, ami tulajdonképpen a természeti törvényt leíró differenciálegyenlet megoldását jelenti, direkt vagy indirekt úton. A matematikai modell megfogalmazásához a transzportelmélet nyújt segítséget.

Lehetséges, hogy a vizsgált jelenség összetettsége, az egyértelműségi feltételek bonyolultsága következtében a matematikai modell megfogalmazása — jelenlegi ismereteink szerint — nem lehetséges. Ilyenkor a kísérleteink értékeléséhez felhasználhatjuk azt a tételt, hogy a matematikai modell megoldása dimenzió nélküli számok közötti függvénykapcsolat formájában adható meg.

A dimenzióanalízis a dimenzió nélküli hatványszorzatok képzési módjával foglalkozik. Célja a változók olyan csoportosítása, hogy a változók számánál kevesebb csoport közötti összefüggés felderítésével kaphassunk képet a rendszerben lejátszódó jelenségről.

Maga a dimenzióanalízis elnevezés BRIDGMANN-tól származik és alapját az úgynevezett BUCKINGHAM-tétel képezi:

*A dimenzionálisan homogén összefüggések visszavezethetők a változókból*

*képzett dimenzió nélküli hatványszorzatok „teljes készlete” közötti kapcsolatra.*

Teljesnek akkor nevezünk egy készletet, ha valamennyi, egymástól független elemét tartalmazza. Ez — adott esetben — azt jelenti, hogy a kapott dimenzió nélküli változók egymástól függetlenek, és az alapváltozókból képezett bármely más dimenzió nélküli számot a teljes készletben szereplő dimenzió nélküli változók hatványszorzataként adhatjuk meg.

A dimenzióanalízis nem fog mennyiségi információt adni, ezért kísérletekre mindenképpen szükség van. A dimenzióanalízis akkor, és csakis akkor használható, ha nem ismert a vizsgált folyamat matematikai modellje, de ismertek a jelenség input és output fizikai változói. Akkor nem szabad használni, amikor ismert a rendszer vagy folyamat matematikai modellje, mivel az egyenletanalízisnél lényegesen bizonytalanabb. Ha pedig nem ismertek a modellezett rendszer jellemző fizikai változói, akkor nem lehet alkalmazni.

#### IV.4.1. A DIMENZIONÁLIS HOMOGENITÁS

Bármely fizikai összefüggést leíró egyenlet, illetve megoldása helyességének két alapvető kritériumát kell megfogalmaznunk. Ezek:

- mindkét oldala numerikusan egyenlő kell, hogy legyen;
- mindkét oldala dimenzionálisan homogén kell, hogy legyen.

Az egyenlet oldalainak egyenlősége magától értetődik. Jelen alfejezetben a dimenzionális homogenitás követelményének teljesülését biztosító szabályokat foglaljuk össze.

Ha egy összefüggés dimenzionálisan homogén és numerikusan helyes valamely mértékegységrendszerben, akkor ugyancsak helyes bármelyik következetesen alkalmazott mértékegységrendszerben.

##### ***1. szabály:***

Minden analitikusan levezetett egyenlet bal és jobb oldala azonos dimenziójúnak, mértékegységűnek kell lennie. Minden szám, mely megjelenik az egyenletben, dimenziómentesnek (pontosabban 1 dimenziójúnak) kell lennie.

Egy kísérleti úton meghatározott vagy levezetett képlet esetén a szabály úgy módosul, hogy ekkor megengedettek a dimenziós konstansok. Ez az jelenti, hogy az egyenletben szereplő számhoz (beleértve magát az 1-t is) rendelhetünk valamilyen dimenziót. Ha valamelyik konstans rendelkezik dimenzióval, a képletben szereplő összes változó dimenzióját, mértékegységét meg kell határozni, különben az adott egyenlet fizikailag használhatatlan.



**2. szabály:**

Ha egy elméleti úton levezetett egyenlet egyik vagy mindkét oldalán több mint egy tag összeadással vagy kivonással összekötve szerepel, akkor minden ilyen tag dimenziója, mértékegysége azonos kell, hogy legyen.

**3. szabály:**

A zérus dimenziója bármennyi és bármi lehet.

**4. szabály:**

Elméletileg levezetett (de, csak a levezetés végeredményeként megjelenő) egyenletben egy transzcendens függvény kitevői és argumentumai dimenziómentesek.

Ha az egyenletet kísérleti úton határozzuk meg, akkor a benne megjelenő numerikus együtthatókat (beleértve az 1-et is) úgy kell beállítani, vagy szabályozni, hogy az említett kitevők és argumentumok dimenziómentesek legyenek.

**5. szabály:**

Minden dimenzionálisan és numerikusan helyes fizikai összekapcsolást leíró egyenlet csak egy függő (kimenő) változót tartalmazhat.

**6. szabály:**

Egy grafikon akkor és csakis akkor homogén, azaz bármely mértékegységrendszerben érvényes a koordinátaléptékek megváltoztatása nélkül, ha a változókhoz társított paraméter(ek) dimenziómentes(ek).

**7. szabály:**

Ha egy dimenzionálisan homogén egyenletben minden változó dimenziómentes, akkor a paraméterek is dimenziómentesek.

**8. szabály:**

Egy dimenziómentes változó nagysága invariáns azon dimenzió- és mértékegységrendszerre nézve, melyben a változó összetevőit kifejeztük.

**9. szabály:**

Ha egy mennyiség valamely mértékegységrendszerben dimenziómentes, akkor minden más mértékegységrendszerben is dimenziómentes.

## IV.4.2. A DIMENZIÓANALÍZIS MÓDSZERE

A dimenzióanalízis módszerének alkalmazásakor a vizsgált rendszert vagy folyamatot jellemző fizikai változók felsorolásából indulunk ki, majd felírjuk ezen változókra a dimenziómátrixot. Egy nagyon egyszerű példának vegyük a II.3.3. alfejezetben már vizsgált matematikai ingát, és határozzuk meg annak  $T_0$  lengésidejét. Ekkor a szóba jöhető fizikai jellemzők:

Változó neve:	Jele:	Dimenziója:	SI mértékegysége:
Lengésidő	$T_0$	$T$	s
Fonalhossz	$l$	$L$	m
Inga tömege	$m$	$M$	kg
Nehézségi térerő (gyorsulás)	$g$	$LT^{-2}$	$ms^{-2}$

## IV.4. Táblázat Vizsgált fizikai változók dimenziónális jellemzői

Ebben az esetben a dimenziómátrix:

$$\begin{bmatrix} & L & T & M \\ T_0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 \\ g & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (IV.4.1)$$

A dimenziómátrix alapján már meghatározhatók a vizsgált rendszer, folyamatot jellemző dimenzió nélküli számok. Többféle módszer ismeretes. A bázisfaktor-módszer próbálgatás nélkül ad eredményt. Az eljárás lényege, hogy a dimenziómátrixot úgynevezett bázisfaktorokra bontjuk, azaz olyan két mátrix szorzatára, amelyek közül az elsőnek oszlopai, a másodiknak pedig sorai lineárisan függetlenek. A bázismátrixból pedig meghatározhatók a fizikai mennyiségek báziselemei.

A bázisfaktorokra bontás (viszonylag hosszadalmas) művelete igen gyakran — gyakorlatilag minden esetben — elkerülhető, ezért annak ismertetésével nem foglalkozunk.

Írjuk az első sorba azt a változót, amelynek dimenziója valamelyik alapidimenzióval megegyezik. Ez legyen a vizsgált ingánk esetében az  $l$  fonalhossz. Ezzel meghatározott a dimenziómátrix első oszlopának értelme (nevezetesen az L-hez tartozó hatványkitevők kerülnek majd az első oszlopba). A többi oszlop még határozatlan marad:

$$\begin{array}{cccc} & L & ? & ? \\ l & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad (IV.4.2)$$

A következő sorba arra a változóra vonatkozó hatványkitevőket írjuk, amelynek dimenziója a hosszúságon kívül maximum egy alapidimenziót tartalmaz:

$$\begin{array}{cccc} & L & T & ? \\ l & 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad (IV.4.3)$$

Majd a fenti elv szerint folytatjuk a mátrix sorainak feltöltését, azaz esetünkben:

$$\begin{array}{cccc} & L & T & M \\ l & 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & -2 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (IV.4.4)$$

Ha az alapidimenzióink elfogytak, a sorok már tetszés szerint tölthetők fel. Célszerű a függő változót (vagy változókat) ekkor az első sorba (vagy sorokba) helyezni.

$$\begin{array}{cccc} & L & T & M \\ l & 1 & 0 & 0 \\ g & 1 & -2 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 \\ T_0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad (IV.4.5)$$

Majd az oszlopokat rendre  $z_1; z_2; \dots$ , a sorokat  $y_1; y_2; \dots$  betűkkel jelölve, a dimenziómátrix az alábbi alakot veszi fel:

$$\begin{array}{cccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 1 & 0 & 0 \\ y_2 & 1 & -2 & 0 \\ y_3 & 0 & 0 & 1 \\ y_4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad (IV.4.6)$$

Ezt követően fejezzük ki az  $y_i$ -ket a  $z_j$ -k függvényében (esetünkben: az első három) kifejezésből:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 \\ y_2 &= z_1 - 2z_2 \quad ; \\ y_3 &= z_3 \end{aligned} \tag{IV.4.7}$$

A lineárisan független kifejezésekből meghatározzuk a  $z_j$ -ket, mint  $y_i$ -k függvényét:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2} \quad ; \\ z_3 &= y_3 \end{aligned} \tag{IV.4.8}$$

Mivel:

$$y_4 = z_2 \quad , \tag{IV.4.9}$$

így felírható a

$$y_4 = z_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} \quad , \tag{IV.4.10}$$

egyenlőség. Visszatérve az eredeti értelmezéshez (az  $y_i$ -k az egyes fizikai változók dimenzióinak logaritmusát jelentik), a változók dimenzió nélküli hatványszorzatait kapjuk:

$$\ln T_0 = \frac{1}{2} (\ln l - \ln g) \quad , \tag{IV.4.11}$$

azaz:

$$T_0 \sim \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \tag{IV.4.12}$$

A (IV.4.10), illetve az abból következő (IV.4.12) egyenlet arra is rámutat, hogy az elemzés kezdetekor kiválasztott jellemzők közül az inga tömege nem befolyásolja a lengésidőt. — A  $T_0$  lengésidő nem függvénye az  $m$  tömegnek.

A fenti, egyszerű dimenzióanalízisből nem jön ki, de a mérési eredmények alapján megállapítható (valamint az irodalmakból — például [IV.3] — már ismert), hogy kis kitérések esetén a (IV.4.12) arányosság egy  $2\pi$  értékű, dimenzió nélküli ( $[l]$  dimenziójú) konstanssal kiegészülve adja meg a matematikai inga lengésideje a:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad (IV.4.12)$$

összefüggéssel határozható meg.

## IV.5. FOLYAMATOK HASONLÓSÁGA

A hasonlóság fogalma és vizsgálata rendkívül fontos szerepet játszik a mérnöki gondolkodásban és tevékenységben. Szigorúan vizsgálva a világ minden jelensége, rendszere egymástól különbözik, nem lehet két azonosat találni közöttük. De ugyanakkor mondott két jelenség sem lesz azonos egymással, ha két különböző időpontban vizsgáljuk. (Más megfogalmazásban: szigorúan nézve minden rendszer variáns.)

A fent leírtakból arra a következtetésre juthatunk, hogy a végtelen sok, egymástól különböző jelenség megismerése lehetetlen. Valójában ez is lenne a helyzet, ha az csak arra törekednénk, hogy minden egyes jelenséget teljességében írjon le.

A mérnöki gondolkodás alapja azonban az általánosítás, az absztrakció. A fogalomalkotás lényegében nem más, mint a lényeges közös tulajdonságok felismerésével és a lényegtelen különbözőségek elhanyagolásával történő csoportosítás. Másképpen megfogalmazva, a fogalomalkotás nem más, mint valamely közös halmazba rendezés. Ekkor a fogalom a halmaz „neve” egyben a halmaz elemeinek közös tulajdonságát is jelenti. Halmazba rendezni mindig csak valamilyen csoportosítási szempont szerint lehet.

Az egy halmazba tartozó elemeknek tehát (bizonyos) közös tulajdonságaik vannak. E közös tulajdonságok alapján az egy halmazba tartozó elemek hasonlóak egymáshoz. Ebből következik, hogy értelmetlen dolog általában hasonlóságról beszélni, mindig hozzá kell tenni: milyen szempontok, illetve tulajdonságok szerinti hasonlóságról van szó.

A hasonlóság felismerésére és feltételeinek meghatározására a műszaki életben és a természettudományokban azért szükséges, mert annak segítségével valamely jelenség vagy rendszer ismert adatainak ismeretében következtetéseket tudunk levonni egy másik jelenségre vagy rendszerre vonatkozóan. Így képesek leszünk megoldani valamilyen új tervezési, fejlesztési feladatot. Márpedig mindig a konkrét feladattól függ, hogy melyek a lényeges vizsgálati, modellezési szempontok, amelyeknek meg kell egyezniük, és melyek a lényegtelenek, amelyek elemzésétől eltekinthetünk. (Ne feledjük a II. fejezetben megfogalmazott kritériumot, hogy a jó modellnek a lehető legegyszerűbbnek kell lennie, de az adott rendszert, folyamatot a célnak megfelelő pontossággal kell közelítenie.) Így megkülönböztetjük a geometriai hasonlóságot és a jelenségek hasonlóságát.

A hasonlósági módszer alapja a fizikai változók közötti kapcsolatokat

kifejező egyenletek dimenzióanalízis homogenitása, ami azt jelenti, hogy az adott folyamatot leíró egyenletek a mértékegységrendszer transzformációjával szemben szimmetrikusak.

#### IV.5.1. A GEOMETRIAI HASONLÓSÁG

Két különböző tárgy geometriailag hasonló, ha a megfelelő nagyítással a kisebbik a nagyobbban teljesen megegyezik. Más megfogalmazásban: két idom geometriailag hasonló egymáshoz, ha egyiket a másikba folytonos, lineáris transzformáció viszi át.

A geometriai hasonlóság meghatározásakor figyelmen kívül kell hagyni a tárgyak „minőségét”, és csak a formát kell vizsgálni.

A geometriai hasonlóság könnyen felismerhető, de ugyanakkor nagyon félrevezető is lehet. Ha a méretek arányos növelése vagy csökkentése nem befolyásolná valamely berendezés működését, nagyon egyszerű dolgunk lenne. Nem kellene mást csinálni, csak egyszerűen megépíteni méretarányosan a berendezést, ez lenne a modell, és ezen tanulmányozhatnánk az eredeti tulajdonságait.

A párhuzamosok euklidészi axiómája tartalmazza a geometriai hasonlóság fogalmát: „vannak egymáshoz hasonló alakzatok”, azaz bármelyik geometriai idomot deformálás nélkül nagyobbíthatjuk (vagy kisebbíthetjük), és ezzel egy másik (az előzőhöz hasonló) geometriai idomot kapunk.

Ez a meghatározás egyenértékű azzal, hogy adott egyeneshez adott ponton át nem szerkeszthető egynél több párhuzamos egyenes. Ez utóbbi az euklidészi geometriai jellemző axiómájaként ismeretes. A párhuzamosokra és a hasonló idomokra vonatkozó megállapítások közül bármelyiket fogadjuk el bizonyítás nélkül igaznak (vagyis axiómának), a másik már tiszta logikai levezetéssel bizonyítható.

#### IV.5.2. HŐ- ÉS ÁRAMLÁSTANI HASONLÓSÁGOK

Az aero- és termodinamikai kísérletek döntő többségét az áramlásba helyezett test kicsinyített másán, szél- vagy vízcsatornában végzik el. Ahhoz, hogy két egymással geometriailag hasonló (például a valódi és a lekicsinyített hajótest körüli) térben az áramlás szintén geometriailag hasonló legyen — azaz az áramvonalak is hasonlóak legyenek —, nem elegendő a határoló felületek hasonlósága, hanem az is szükséges, hogy a különféle eredetű erők is azonos viszonyban legyenek egymással.

A hasonlóságelmélet lényegében a geometriai hasonlóság fogalmának általánosítása, a folyamatokat a hasonlósági kritériumok alapján veti egybe. Ezek úgynevezett dimenzió nélküli számok (pontosan fogalmazva a dimenziójuk 1). Ha két folyamat hasonlósági kritériumai megegyeznek, akkor az a két fizikai

folyamat egymással egybevethető, attól függetlenül, hogy a geometriai méretek, sebességek, erőhatások nem egyenlők.

Áramló közeg esetén az egyes folyadékreszekre hat a:

gravitációs térerő (súly): —  $\mathbf{G}$ ;  
nyomásból származó erő: —  $\mathbf{P}$ ;  
súrlódásból származó erő: —  $\mathbf{S}$ .

D'ALAMBERT<sup>1</sup> nyomán a mozgásegyenleteket úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ezekkel az erőkkel egyensúlyt tart a  $\mathbf{T}$  gyorsulásból származó úgynevezett tehetetlenségi erő. Így az áramlások hasonlóságának biztosításához e négy erőnek az arányát kellene állandó értéken tartani. Miután a négy erő egymással egyensúlyt tart, elegendő ezekből három erő között fennálló két viszonyt vizsgálni. Természetesen, ilyenkor az erők viszonya alatt azok abszolút értékeinek arányát értjük.

### **FROUDE<sup>2</sup>-szám:**

A FROUDE-szám meghatározásához vizsgáljuk meg a tehetetlenségi erő és súly a viszonyát:

az egységnyi térfogatú folyadékelemre ható súlyerő:

$$\mathbf{G} = \rho \mathbf{g} \quad ; \quad (\text{IV.5.1})$$

az egységnyi térfogatra ható tehetetlenségi erő:

$$\mathbf{T} = -\rho \mathbf{a} \quad . \quad (\text{IV.5.2})$$

A gyorsulásra a dimenzióanalízisben használt megfontolások alapján az alábbi arányosságot írhatjuk fel:

$$a \sim \frac{c^2}{l} \quad (\text{IV.5.3})$$

ahol:

$l$  — az áramlásba helyezett test jellemző hossz mértékegységű geometriai

<sup>1</sup> *D'Alambert, Jean-Baptiste le Rond (1717–1783)*: Francia fizikus, matematikus, természetfilozófus. A francia felvilágosodás vezető alakjai közé tartozott. Az analitikus mechanika egyik megalapítója.

<sup>2</sup> *Froude, William (1810–1879)*: brit mérnök. Ő alkalmazta elsőként gyakorlatban a hasonlósági törvényt a folyadékok mechanikájában. Modellkísérleteihez először használt kísérleti vízmedencét.

mérete.

Ellenőrizzük le a fenti (IV.5.3) egyenlet helyességét, behelyettesítve a két változó dimenzióját:

$$\frac{(LT^{-1})^2}{L} = (L^2T^{-2})L^{-1} = LT^{-2} \quad ,$$

ami gyorsulás dimenziójával egyezik, tehát az arányosság elfogadható. Beláthatjuk úgy is az egyenlet helyességét, hogy a centrifugális gyorsulásra gondolunk. Így, a fenti arányosság alapján felírhatjuk, hogy:

$$T \sim \rho \frac{c^2}{l} \quad . \quad (\text{IV.5.4})$$

Ekkor a tehetetlenségi és a térerő viszonya:

$$\frac{T}{G} = \frac{\rho \frac{c^2}{l}}{\rho g} = \frac{c^2}{lg} \quad . \quad (\text{IV.5.5})$$

Ezen viszonyszám

$$Fr = \frac{c}{\sqrt{lg}} \quad (\text{IV.5.6})$$

négyzetgyökét nevezzük a FROUDE-féle számnak. Az olyan áramlástanai jelenségek hasonlóságánál, amelyeknél a térerő lényeges szerepet játszik (például folyadékfelszínen keletkező hullámok vizsgálata) a FROUDE-számok egyenlősége a döntő.

### **REYNOLDS<sup>3</sup>-szám**

A REYNOLDS-szám meghatározásához vizsgáljuk meg a tehetetlenségi és a súrlódó erők viszonyát.

Az egységnyi térfogatra — példaként az  $x$  irányban — ható súrlódási erő a NAVIER-STOKES egyenlet (lásd V.5.1. alfejezetben) alapján:

---

<sup>3</sup> *Reynolds, Osborne (1842–1912)*: angol fizikus. Jelentős munkát végzett a közeg belső súrlódásának vizsgálatában.



$$S_x \sim \mu \frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} \quad . \quad (\text{IV.5.7})$$

Alkalmazva a IV.3.3. alfejezetben megfogalmazott  $n$ -ed rendű derivált dimenziójával kapcsolatos — a (IV.3.7) egyenlettel leírt — tételt::

$$S \sim \mu \frac{c}{l^2} \quad . \quad (\text{IV.5.8})$$

A (IV.5.4) és a (IV.5.8) egyenletek alapján írhatjuk fel a tehetetlenségi és a súrlódási erők arányát:

$$\frac{T}{S} = \frac{\rho \frac{c^2}{l}}{\mu \frac{c}{l^2}} = \frac{\rho c l}{\mu} \quad . \quad (\text{IV.5.9})$$

Felhasználva a kinematikai viszkozitási tényező meghatározásának

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{IV.5.10})$$

összefüggését kapjuk a REYNOLDS-szám egyenletét, azaz:

$$\text{Re} = \frac{c l}{\nu} \quad . \quad (\text{IV.5.11})$$

Az áramló közegbe teljesen alámerülő testek körüli áramlásnál, valamint az olyan térben történő áramlás esetén, melyet a közeg teljesen kitölt (például a hidraulikai rendszerekben) a REYNOLDS-szám azonossága a hasonlóság feltétele.

A hő- és áramlásban leginkább alkalmazott két fenti hasonlósági szám részletes ismertetése után, most az egyéb — köztük a hőtanban is — előforduló hasonlósági kritériumokat soroljuk fel, azok levezetése, igazolása nélkül.

**STROUHAL<sup>4</sup>-szám:**

Az áramlás instacionaritásának a gázdinamikai jellemzőkre gyakorolt hatását leíró szám:

$$Sh = \frac{c\tau}{l} \quad , \quad (IV.5.9)$$

ahol:

$\tau$  — az instacioner folyamatra jellemző idő.

**NUSSELT<sup>5</sup>-szám:**

A hőátadás jellemzésére szolgáló hasonlósági kritérium:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad , \quad (IV.5.10)$$

ahol:

$\alpha$  — hőátadási tényező.

**PECLET<sup>6</sup>-szám:**

A közeg belső energianövekedésének és a közölt hőnek a viszonyát leíró kritérium:

$$Pe = vl \frac{c_p \rho}{\lambda} \quad , \quad (IV.5.11)$$

ahol:

$c_p$  — a közeg állandó nyomáson vett fajhője;

<sup>4</sup> *Strouhal, Vincenz (1850–1922)*: cseh fizikus. A sűrűlási hangok vizsgálatában ért el kiemelkedő eredményeket.

<sup>5</sup> *Nusselt, Ernst Kraft Wilhelm (1882–1957)*: német mérnök. A róla elnevezett áramlástanai hasonlósági szám kidolgozója.

<sup>6</sup> *Péclet Jean Claude Eugène (1793–1857)*: francia fizikus. A párizsi École Normale-ben tanult a szintén neves GAY-LUSSAC-al együtt, majd a Collège de Marseille, az École Normale és az École Centrale des Arts et Manufactures professzoraként tevékenykedett.

**PRANDTL<sup>7</sup>-szám:**

A gázban végbemenő molekuláris impulzus-, és hőátviteli folyamatok viszonyát megadó szám:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad , \quad (IV.5.12)$$

ahol:

$\lambda$  — a közeg hővezetési tényezője.

A PRANDTL-szám meghatározható a PECKET-szám és a REYNOLDS-szám hányadosaként, azaz:

$$Pr = \frac{Pe}{Re} \quad . \quad (IV.5.13).$$

A PRANDTL-szám reciproka a **STANTON-szám**:

$$St = \frac{\lambda}{c_p \mu} \quad . \quad (IV.5.14)$$

A turbulens áramlásra vonatkoztatott  $\mu_t$  turbulens viszkozitással és a  $\lambda_t$  turbulens hővezetési tényezővel számított PRANDTL-szám az úgynevezett **turbulens PRANDTL-szám**:

$$Pr_t = \frac{c_p \mu_t}{\lambda_t} \quad . \quad (IV.5.15)$$

**KNUDSEN<sup>8</sup>-szám:**

A gázmolekulák ütközések közti  $s$  átlagos szabad úthossza és az  $l$  jellemző lineáris geometriai méret aránya:

$$Kn = \frac{s}{l} \quad . \quad (IV.5.16)$$

---

<sup>7</sup> **Prandtl, Ludwig (1875–1953):** német fizikus, aerodinamikus. Nevéhez fűződik a Göttingeni Kísérleti Aerodinamikai Állomás létrehozása. Fontos szerepe volt a véges szárny elméletének kidolgozásában és a határréteg-elmélet megalapozásában. Őt tekintik a modern hidro- és aerodinamika megalapítójának.

<sup>8</sup> **Knudsen, Martin (1871–1949):** dán fizikus. A hangelnyelést tanulmányozta és adta meg annak helyes magyarázatát.

$Kn \gg 1$  esetén: a közeg igen ritka (például vákuum);  
 $Kn \ll 1$  esetén: a közeg homogén (szilárd) testként kezelhető.

**EULER<sup>9</sup>-szám:**

A gáz tehetetlenségi, illetve a nyomáseséstől függő erők viszonyát kifejező szám:

$$Eu = \frac{\rho c^2}{\Delta p} \quad , \quad (IV.5.17)$$

ahol:

$\Delta p$  — a gáz nyomásesése.

**CHAUCHY<sup>10</sup>-szám:**

A közeg összenyomhatósága és az áramlásba helyezett test rugalmassága közötti viszonyt kifejező szám:

$$Ca = \frac{\rho c^2}{E} \quad , \quad (IV.5.18)$$

ahol:

$E$  — az áramlásba helyezett test rugalmassági modulusa.

**GRASHOF<sup>11</sup>-szám:**

Szabad áramlásban a térerő és a súrlódási erők arányát kifejező hasonlósági kritérium:

$$Gr = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \frac{g l^3}{c^2} \quad , \quad (IV.5.19)$$

ahol:

---

<sup>9</sup> **Euler, Leonard (1707–1783)**: svájci matematikus, fizikus. Munkássága meghatározó jelentőségű az analitikus geometria, a trigonometria, valamint az integrálszámítás területén. Maradandó eredményei fizikában az áramlásokra vonatkozó mozgásegyenletek, a merev testek mechanikáját leíró analitikus módszerek és a hangtani vizsgálatok.

<sup>10</sup> **Chauchy, Augustin (1789–1857)**: francia matematikus. A párizsi hadmérnökök képzésére szolgáló *École Polytechnique* hallgatója volt. 1848-tól a *Sorbonne* professzora.

<sup>11</sup> **Grashof Franc (1826–1893)**: német mérnök. A karlsruhei egyetemen az alkalmazott mechanika és a teoretikus gépészet tanára volt.

$\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$  — a statikus felhajtóerő kifejezése.

**MACH<sup>12</sup>-szám:**

Mivel az áramlási sebesség és a hang terjedési sebességének viszonya meghatározó egy zavarás hatásának kitett áramlási zóna kiterjedésének szempontjából, ezért a két sebesség dimenzió nélküli viszonzszámát, mint jellemző hasonlósági kritériumot fogjuk fel, amelyet MACH-számmak nevezünk:

$$M = \frac{c}{a} \quad , \quad (\text{IV.5.20})$$

ahol:

$a$  — a HELYI (!) hangsebesség.

A MACH-szám bevezetésével az áramlásokat feloszthatjuk (alapvetően):

$M < 1$  — hangsebesség alatti,

illetve

$M > 1$  — hangsebesség feletti

áramlásra.

Ha az áramlási sebesség kisebb a helyi hangsebességnél, a zavarás a teljes térben észlelhető, míg ha az áramlási sebesség nagyobb a hangsebességnél, a zavarforrás hatása csak a csúcsával ráilleszkedő, a térben rögzített helyzetű zavarási kúp — az úgynevezett MACH-kúp — belsejében terjed. Természetesen más fontos különbség is található a hangsebesség alatti és feletti áramlások közt. Továbbá lényeges műszaki kérdések merülnek fel amikor az áramló közeg sebessége átlépi a hangsebességet.

---

<sup>12</sup> *Mach, Ernst (1838–1916)*: osztrák fizikus, filozófus. Elsőként tanulmányozta a hangnál nagyobb sebességű áramlásokat. Filozófiai nézetei komoly hatással voltak a XX. század fizikájára.

## IV.6. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [IV.1] **CSENGERI PINTÉR, P.**, Mennyiségek Mértékegységek Számok SI, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981., pp. 384.
- [IV.2] **DOUGLAS, J.F. – GASIOREK, J.M. – SWAFFIELD, J.A.**, Fluid Mechanics, Longman House, Essex, 1995., pp. 819.
- [IV.3] **FARKAS H. – WITTMANN M.**, Mechanika. Készülő jegyzet a Fizika 1M tárgyhoz, pp. 29,  
[www.fke.bme.hu/Staff/Henrik/public\\_html/wmechj.doc](http://www.fke.bme.hu/Staff/Henrik/public_html/wmechj.doc)
- [IV.4] **FARKAS, M.**, Matematikai kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 443.
- [IV.5] **FODOR, GY.**, Jelek és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006., pp. 470.
- [IV.6] **FODOR, GY.**, Mértékegység-lexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990., pp. 299.
- [IV.7] **FOWLES, N.D. – MAHONY, J.J.**, An Introduction to Mathematical Modelling, John Wiley & Sons, pp. 477.
- [IV.8] **KALMÁR, F.**, Épületfizika, Studium KKT, Nyíregyháza, 2003., pp. 122.
- [IV.9] **POKORÁDI, L.**, Aerodinamika II., A súrlódásos és az összenyomható közeg áramlástana, főiskolai jegyzet, MH. SzRTF, 1993., pp. 170.
- [IV.10] **SZIRTES, T.**, Dimenzióanalízis és alkalmazott modellelmélet, Typotex, Budapest, 2006., pp. 810.
- [IV.11] **SZÜCS, E.**, Hasonlóság és modell, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 299.
- [IV.12] **WHITE, F.M.**, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1979., pp. 701.

## V. FEJEZET

# FIZIKAI FOLYAMATOK LEÍRÁSA

### V.1. BEVEZETÉS

Rendszerek matematikai modellezése során — explicit vagy implicit formában — az alapvető fizikai törvényszerűségeket alkalmazzuk. Tisztán gépészeti, mechanikai rendszerek esetén e fizikai törvényszerűségek alapvetően a merev testek mechanikája, illetve a hő- és áramlástan területeihez tartoznak. Korszerű, integrált rendszerek modellezése esetén más (például villamosságtani) törvényszerűségeket is figyelembe kell vennünk.

Egy determinisztikus stacioner rendszermodell felállításakor lényegében a részegységek közti anyagáram egyenlőséget, valamint az erő-, a nyomaték- illetve munka-, vagy teljesítményegyensúlyokat leíró matematikai egyenleteket alkalmazzuk. Stacioner modellezés esetén pedig az energia- vagy tömegváltozást, illetve — az erő-, vagy nyomaték egyenlőtlenség esetén alkalmazandó — az impulzus-, a perdület-, vagy a munka-tételt leíró formulákat alkalmazzuk.

A könyv jelen fejezetében a fizikai — ezeken belül a mechanikai, valamint a hő-, és áramlástan — folyamatokat leíró általános egyenletek ismertetésére kerül sor. Először a fizikai jellemzők változását, transzportját leíró általános transzportegyenlet differenciál-, és integrál alapjait ismerheti meg a Tisztelt Olvasó. Az V.4. fejezetben az anyagáramok vizsgálatát végezzük el — a már megismert általános transzportegyenlet alkalmazásával. Ezt követően az erő- és nyomaték egyensúlyok és egyenlőtlenségek elemzését, leírását végezzük el. Végezetül a munkatétellel kapcsolatos, a gépészeti matematikai modellalkotás szempontjából fontosabb ismereteket összegezzük.

### V.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$A$	—	felület;
$F$	—	általános extenzív fizikai jellemző;
$f$	—	általános fizikai jellemző;
$\mathbf{A}$	—	felületvektor
$\mathbf{c}$	—	sebesség
$\mathbf{r}$	—	helyvektor;
$\tau$	—	idő

### V.3 AZ ÁLTALÁNOS TRANSZPORTEGYENLET

A matematikai modellalkotás során fel kell írunk a vizsgált anyag, adott fizikai jellemző, vagy energiaforma változását, illetve áramlását a modellezett technikai rendszerben vagy fizikai térben. Ezt — a konkrét esetekben jelentős eltéréseket mutató — feladatot egyszerűen a most tárgyalásra kerülő törvényszerűség értelemszerű, az adott modellezési problémára történő alkalmazásával tudjuk megoldani.

#### V.3.1. A LAGRANGE- ÉS AZ EULER-FÉLE LEÍRÁSI MÓD

Az anyagáram kinematikájának vizsgálatakor két különböző tárgyalási mód szerint járhatunk el. A LAGRANGE<sup>1</sup>-tól származó leírási mód a pontrendszerek mechanikájában használatos eljárás, míg az Euler-féle leírás a kontinuum szemléleten alapszik.

##### *LAGRANGE-féle leírási mód*

A anyag mozgását mint az egyes elemi rendszerek helyzeteinek  $\tau$  idő szerinti változását írja le. Ehhez először is meg kell különböztetnünk az egyes elemi rendszereket. Az elemi rendszer lehet egy atom, molekula, egy kontinuum kiválasztott egyébként mozgó kis tartománya, az atomok adott halmaza által meghatározott mozgó, esetleg torzuló térfogatelem. Képzeljük el, hogy egy  $\tau_0$  időpillanatban ismerjük az összes elemi rendszer pillanatnyi helyzetét, vagyis — az  $i$ -edik elem esetén — az ezt megadó  $\mathbf{r}_i$  helyvektort. Ez az  $\mathbf{r}_i$  vektor — mint név a személyt — a vizsgálat során egyértelműen megkülönbözteti az adott elemi rendszert. Az  $f$  általános fizikai mennyiséget is az elemi rendszerhez, elemi tartományhoz kötjük. Az  $f$  „együtt mozog” a kijelölt tartománnyal. A tömegáram mozgását az egyes elemi rendszerek  $\tau$  időpillanatban elfoglalt térbeli helyzetét megadó

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_i; \tau) \quad (\text{V.3.1})$$

általános egyenlet írja le, amit a V.1. ábra szemléltet.

Egy kiszemelt — és az  $\mathbf{r}_i$  vektorral megjelölt — tömegelem  $f$  fizikai jellemzőjének értékét (miközben az  $\mathbf{r}_i$  vektor állandó) az:

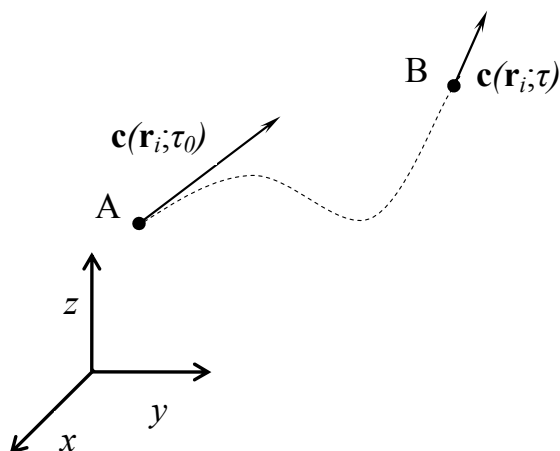
$$f_i = f_i(\mathbf{r}_i; \tau) \quad (\text{V.3.2})$$

egyenlettel írhatjuk le.

---

<sup>1</sup> *Lagrange, Joseph Louis (1736–1813)*: francia matematikus, fizikus. A newtoni mechanikát analitikus formába öntötte. Jelentősek az algebrai egyenletekre vonatkozó, a variációszámítás és a számelmélet terén elért eredményei. Már 19 évesen a torinói tüzériskolán tanított.





V.1. ábra LAGRANGE-féle leírási mód alkalmazása sebesség vizsgálata esetén  
 A — az elemi rendszer helye a  $\tau_0$  időpillanatban;  
 B — az elemi rendszer helye a  $\tau$  időpillanatban.

A LAGRANGE-féle szemlélet így az  $f$  fizikai jellemzőt is (például hőmérséklet, mozgásmennyiség) az adott elemi rendszerhez köti. Így jól tükrözi a fizikai valóságot, mivel ezen jellemzőket valóban az anyagi részecskék hordozzák. Ezért ezt a tárgyalási módot szokás **anyagi leírásnak**, vagy másképpen **szubsztanciális reprezentációnak** is nevezni.

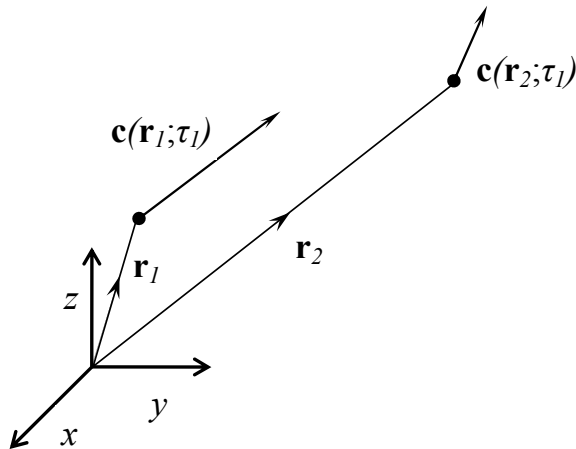
Ezt a szemléletet ott célszerű alkalmazni, ahol a vizsgálat során egy kiszemelt anyagalmaz egyedi sorsát, jellemzőinek változását elemezzük. De alkalmazásával lehet általános, az anyag egészére vonatkozó következtetéseket is levonni. A LAGRANGE-féle leírási módot alkalmaztunk például a II.3.3. alfejezetben, amikor a matematikai inga sebességét, kitérését írtuk le. A leírási mód hátrányaként egyértelműen az mutatkozik, hogy konkrét műszaki feladat megoldására, egyszerű matematikai formája ellenére is, nehezen alkalmazható. Gondoljunk csak bele, hogy az  $1 \text{ cm}^3$  térfogatú, fizikai normálállapotú ( $T_N = 273,15 \text{ K}$ ;  $p_N = 101325 \text{ Pa}$ ) gázban  $2,7 \cdot 10^{19}$  számú molekula található. Mindegyikjük mozgásának leírása elég hosszadalmas lenne.

### ***EULER-féle leírási mód***

Ez a tárgyalási mód nem az egyes tömegelemek mozgásának részletes időbeni lefolyását követi nyomon, hanem a közeg  $f$  fizikai jellemzőjét a tér és az idő függvényeként adja meg a

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) \quad (\text{V.3.3})$$

általános alakban, attól függetlenül, hogy a közeg melyik elemi része tartózkodik a tér  $\mathbf{r}$  helyvektorral jelölt pontjában a  $\tau$  időpillanatban (V.2 ábra).



V.2. ábra Euler-féle tárgyalási mód alkalmazása sebesség vizsgálata esetén

Az (V.3.3) egyenlet  $\mathbf{r}$  és  $\tau$  független változóit *Euler*-féle változóknak is nevezzük.

Ezen felfogás szerint például a sebesség és a gyorsulás nem az anyaghoz, hanem a térhez kötött jellemző, szemben a szubsztanciális leírási móddal. Ezért ezt a tárgyalásmódot **térbeli leírásnak** is nevezik.

Az *Euler*-féle tárgyalásmód matematikailag sokkal egyszerűbb, jobban megfelel a mérési gyakorlatban általánosan alkalmazott módszereknek is. Mivel az áramló közegben a fizikai jellemzőket rendszerint nem az áramlással együtt mozgó, hanem a mérőtérben rögzített műszerrel tudjuk mérni.

A későbbiekben — néhány kivételtől eltekintve — az *Euler*-féle leírási módot fogjuk követni (például az 1.4. fejezetben is már ezt tettük).

A (V.3.3) egyenlet egy általános, az úgynevezett **háromméretű fizikai teret** ír le — amely lehet instacioner és inhomogén is. Különleges esetekben természetesen ez az egyenlet módosulni, egyszerűsödni fog. A következőkben az ilyen fizikai tereket mutatjuk be, röviden.

Találhatunk olyan fizikai tereket, ahol az egymással párhuzamos síkok állapotjelző eloszlásai megegyeznek. Az ilyen áramlásokat **kétméretű** vagy **síkáramlásoknak** nevezzük. Síkáramlásnak tekinthetjük például a végtelen szárny körüli áramlást. Ekkor, az úgynevezett **kétméretű fizikai tér** esetén az (V.3.3) általános egyenlet az

$$f = f(\mathbf{r}; \tau) = f(x, y; \tau) \quad (\text{V.3.4})$$

alakot veszi fel.

Ha a közeg mozgása lehet olyan is, hogy az áramvonalak párhuzamos egyenesek vagy egymással egybevágó térgörbék, ekkor **egyméretű**, vagy **egydimenziós áramlásról** — más fizikai jellemzők leírása esetén **egyméretű fizikai térről** — beszélünk. Ekkor az  $f$  fizikai jellemző eloszlását leíró (V.3.3) egyenlet általában a

$$f = f(x; \tau) \quad (\text{V.3.5})$$

skalár–skalár függvényként kezelhető. Egyméretű áramlásnak feltételezzük — a közeget súrlódásmentesnek feltételezve — a csővezetékben történő áramlást.

### V.3.2. AZ ÁLTALÁNOS TRANSZPORT EGYENLET DIFFERENCIÁL ALAKJA

Az áramló közeg fizikai jellemzőinek változása és mozgása között szoros kapcsolat áll fenn. Az *Euler*-féle szemléletmód helyhez kötöten adja meg a fizikai jellemzők időbeni változását — lásd az (V.3.3) egyenletet. Ezek összessége viszont nem azonos az anyag fizikai állapotának változásával. Ezért most az *Euler*-féle reprezentáció felhasználásával írjuk le ugyanazon kontinuum elem (elemi rendszer)  $f$  fizikai jellemzője időbeni változásának vizsgálatát.

Az  $f$  általános fizikai jellemző időbeli változását — vagy más (például fizikai) szemlélet esetén változási gyorsaságát — az (V.3.3) egyenlet idő szerinti deriváltjával kapjuk meg, amely

$$\frac{d(f(\mathbf{r}; \tau))}{d\tau} = \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial\tau} + \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tau} \quad (\text{V.3.6})$$

alakú lesz.

Az egyenlet jobb oldalának első tagja az  $f(\mathbf{r}; \tau)$  függvény  $\tau$  idő szerinti parciális deriváltja. A második tag pedig az  $f(\mathbf{r}; \tau)$  függvény  $\mathbf{r}$  helyvektor szerinti parciális deriváltjának és a közegelem helyzetét leíró  $\mathbf{r}(\tau)$  belső függvény  $\tau$  idő szerinti deriváltjának szorzata (az összetett függvények deriválásánál alkalmazott úgynevezett láncszabály alapján). Ez utóbbi differenciálhányadosról pedig köztudott, hogy a vizsgált elemi rendszer sebességét jelenti. (mivel a sebesség a helyvektor idő szerinti változása — matematikailag deriváltja), azaz:

$$\frac{d(f(\mathbf{r}; \tau))}{d\tau} = \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial\tau} + \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial\mathbf{r}} \mathbf{c} \quad (\text{V.3.7})$$

A fenti, (V.3.7) kifejezés az **általános transzportegyenlet differenciál alakja**. Fizikailag mit is jelent ez az egyenlet?

- Az (V.3.7) egyenlet bal oldala egy kontinuum elem (szubsztancia)  $f(\mathbf{r}; \tau)$  függvénnyel leírható fizikai jellemzőjének időbeni változását adja meg. Ezt a

$$\frac{d(f(\mathbf{r}; \tau))}{d\tau} \quad . \quad (\text{V.3.8})$$

változást az  $f$  jellemző **szubsztanciális változásának** nevezzük.

- Az (V.3.7) egyenlet jobb oldalának első

$$\frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \tau} \quad . \quad (\text{V.3.9})$$

tagja a **lokális változás**, amely az  $f$  fizikai jellemzőnek a tér egy rögzített helyén időben bekövetkező változását fejezi ki.

- **Konvektív változásnak** nevezzük az (V.3.7) egyenlet jobb oldalának második

$$\frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} \quad . \quad (\text{V.3.10})$$

tagját. Ez a kontinuum elem  $f$  jellemzőjének azt a változását fejezi ki, amelyet az adott időpillanatban az elemi rendszer az  $f$  mennyiség fizikai terében történő saját mozgása következtében szenved el.

Könnyen belátható, hogy az (V.3.7) egyenlet a *Lagrange*- és az *Euler*-féle reprezentáció között képez hidat.

Ha a fizikai tér homogén, vagyis

$$\left| \frac{\partial(f(\mathbf{r}; \tau))}{\partial \mathbf{r}} \right| = 0 \quad , \quad (\text{V.3.11})$$

akkor az áramló közeg fizikai jellemzője csak az idő függvényében változhat, azaz a szubsztanciális változás azonosan egyenlő lesz a lokális változással. Hasonló eset áll fenn, ha a fizikai tér inhomogén, de a közeg nem áramlik, mivel.

$$\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad .$$

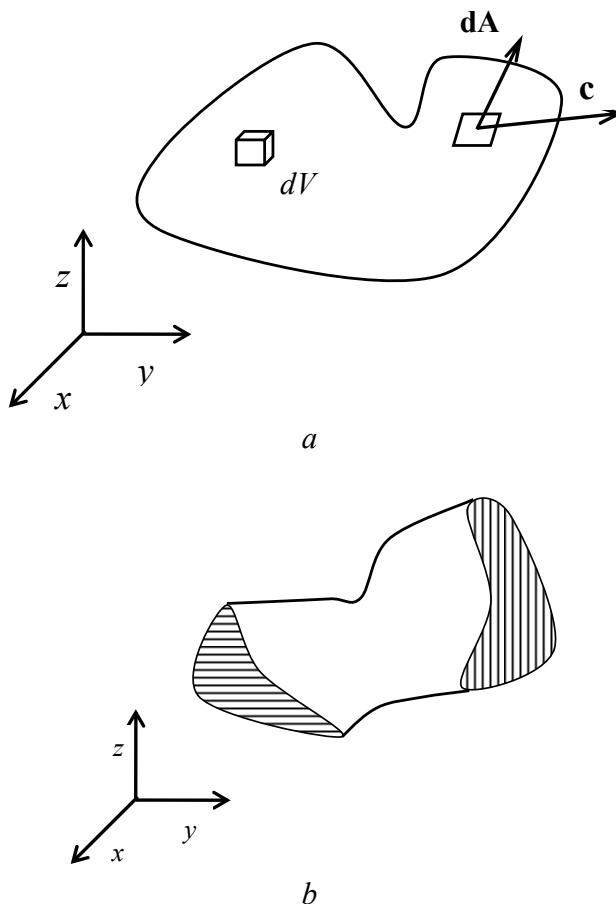
Stacioner fizikai tér esetén, ha

$$\left| \frac{\partial(f(\mathbf{r};\tau))}{\partial\tau} \right| = 0 \quad , \quad (\text{V.3.12})$$

az áramló kontinuum elem fizikai jellemzője csak akkor változhat, ha ez a jellemző a térben változik, azaz ha van konvektív változása.

### V.3.3. AZ ÁLTALÁNOS TRANSZPORT EGYENLET INTEGRÁL ALAKJA

Az általános transzport egyenlet felírásához most kössük ki, hogy az  $f$  egy  $F$ -el jelölt extenzív általános fizikai jellemző sűrűsége legyen.



V.3. ábra Az általános transzportegyenlet felírása

Egy  $V$  térfogatú rendszer esetén a két változó közti összefüggés az

$$F(\tau) = \int_{V(\tau)} f(\mathbf{r}; \tau) dV \quad (\text{V.3.13})$$

integrállal írható le. Az  $F(\tau)$  jellemző időbeli változását a

$$\frac{d}{d\tau} F(\tau) = \frac{d}{d\tau} \int_{V(\tau)} f(\mathbf{r}; \tau) dV \quad (\text{V.3.14})$$

integrállal adhatjuk meg, melynek levezetéséhez használjuk fel a differenciálhányados definícióját. Határozzuk meg a

$$\left[ \frac{d}{d\tau} \int_{V(\tau)} f(\mathbf{r}; \tau) dV \right]_{\tau=\tau_0} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left[ \int_{V(\tau_0+\Delta\tau)} f(\mathbf{r}; \tau) dV - \int_{V(\tau_0)} f(\mathbf{r}; \tau) dV \right] \quad (\text{V.3.15})$$

határértéket.

A jobb oldal első integrálját ki kell terjesztenünk a  $V(\tau_0)$  térfogat  $\tau_0 + \Delta\tau$  időpillanatban lévő

$$V(\tau_0 + \Delta\tau) = V(\tau_0) + \Delta V(\tau_0 + \Delta\tau) \quad (\text{V.3.16})$$

megváltozott térfogatára. Ez a térfogatváltozás két összetevő eredője. Ez első összetevő az úgynevezett belépő térfogat, melyet a V.3.b ábrán vízszintesen vonalkázott területtel jelölünk. A másik komponens pedig — az ábrán függőleges vonalkázással látható — úgynevezett kilépő térfogat. Ezek figyelembevételével az (V.3.15) egyenlet az alábbi alakúvá válik:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{d\tau} \int_{V(\tau)} f(\mathbf{r}; \tau) dV \right]_{\tau=\tau_0} &= \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left[ \int_{V(\tau_0)} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) dV + \int_{\Delta V(\tau_0 + \Delta\tau)} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) dV - \int_{V(\tau_0)} f(\mathbf{r}; \tau_0) dV \right] = \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \left[ \int_{V(\tau_0)} \{f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) - f(\mathbf{r}; \tau_0)\} dV + \int_{\Delta V(\tau_0 + \Delta\tau)} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) dV \right] = \\ &= \int_{V(\tau_0)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \{f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) - f(\mathbf{r}; \tau_0)\} dV + \int_{\Delta V(\tau_0 + \Delta\tau)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) dV \end{aligned} \quad (\text{V.3.17})$$

Az egyenlet jobb oldalának első integrandusa — a differenciálhányados

definíciója alapján — az  $f$  fizikai jellemző  $\tau$  idő szerinti parciális deriváltjával egyenlő, azaz:

$$\int_{V(\tau_0)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \{f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) - f(\mathbf{r}; \tau_0)\} dV = \int_{V(\tau_0)} \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} dV, \quad (\text{V.3.18})$$

amely a már rögzített alakú-, és helyzetű tartományra számított integrál lesz, és amit célszerű az (V.3.8) egyenlet jobb oldalának első tagjával (az  $f$  fizikai jellemző lokális változásával) összehasonlítani.

A jobb oldal második tagja további vizsgálatához — mivel az a közeg áramlásából adódó  $\Delta V(\tau_0 + \Delta\tau)$  térfogatváltozás hatását fejezi ki — a  $dV$  differenciált elemi térfogatáramnak vegyük és vezessük be a

$$dV = \Delta \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}; \tau) d\mathbf{A} \quad (\text{V.3.19})$$

kifejezést, ahol:

$d\mathbf{A}$  — elemi felületvektor.

Ekkor:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V(\tau_0 + \Delta\tau)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) dV &= \int_{(A)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) \Delta \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}; \tau_0) d\mathbf{A} = \\ &= \int_{(A)} \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}; \tau_0) d\mathbf{A} = \int_{(A)} f(\mathbf{r}; \tau_0) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}; \tau_0) d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{V.3.21})$$

Ez utóbbi egyenlőség a

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\mathbf{r}; \tau_0 + \Delta\tau) = f(\mathbf{r}; \tau_0)$$

határérték miatt áll fenn.

Figyelembe véve, hogy vizsgálatunkat tetszőleges  $\tau_0$  időpillanatban végeztük, annak külön jelölése elhagyható. Így az (V.3.18) egyenlet és az (V.3.20) egyenlőségek figyelembevételével az (V.3.15) egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} F(\tau) = \int_{V(\tau_0)} \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} dV + \int_{(A)} f(\mathbf{r}; \tau) \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}; \tau) d\mathbf{A}} \quad , \quad (\text{V.3.21})$$

amely az **általános transzport-egyenlet integrál alakja**.

Az egyenlet fizikailag úgy értelmezendő, hogy az áramló közegben tetszés szerint kijelölt rendszer valamely  $F$  extenzív jellemzőjének

$$\frac{d}{d\tau} F(\tau)$$

szubsztanciális megváltozása két részből tevődik:

- egyrészt az extenzív jellemző a rendszerrel éppen fedésben lévő  $V$  térfogatban bekövetkező

$$\int_{V(\tau_0)} \frac{\partial f(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} dV$$

lokális változásból.

- másrészt az extenzív jellemző a  $V$  térfogatot körülhatároló  $A$  felületen időegység alatt áthaladó anyaggal érkező, illetve távozó

$$\int_{(A)} f(\mathbf{r}; \tau) \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau) d\mathbf{A}$$

mennyiségéből, azaz a konvektív változásból.

#### V.4. AZ ANYAGÁRAM VIZSGÁLATA

A műszaki rendszerek matematikai modelljének egyik általánosan előforduló fontos részfeladata a modellezett rendszeren belüli kontinuum áram leírása. Az összenyomható — vagy összenyomhatatlannak nem tekinthető — közeg áramlása esetén létezik egy fontos kérdés, melynek tárgyalását célszerű külön vizsgálnunk. Ehhez célszerű alkalmaznunk, majd azt — a levonandó következtetések szempontjából — elemeznünk az előző fejezetben leír általános transzportegyenletet az áramló közeg mennyiségére, azaz az anyagmegmaradásra.

##### V.4.1. A FOLYTONOSSÁGI TÖRVÉNY

Az anyagmegmaradás elvét áramló (cseppfolyós vagy légnemű) kontinuumra leíró összefüggést hívjuk a folytonosság törvényének.

A folytonosság törvénye kimondja, hogy tetszőleges zárt rendszerben a közeg  $m$  tömege az áramlás során nem változhat, mai matematikai formában felírva:



$$\frac{dm}{d\tau} = 0 \quad . \quad (\text{V.4.1})$$

Mivel  $m$  tömeg extenzív jellemző, a V.3.3. alfejezetben leírtak szerint, annak sűrűsége a  $\rho$  (tömeg)sűrűség. Így az (V.3.21) egyenlet alapján az

$$F = m \quad \text{és az} \quad f = \rho$$

formális behelyettesítéssel a folytonossági törvény integrál alakja az alábbi formában írható fel:

$$\boxed{\frac{dm}{d\tau} = \int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{c} d\mathbf{A} = 0} \quad . \quad (\text{V.4.2})$$

Az (V.4.2) egyenlet szerint, ha a  $V$  ellenőrző térfogatba az azt határoló  $A$  ellenőrzőfelületen keresztül adott idő alatt nagyobb tömeg áramlik be, mint amennyi távozik, akkor túlsúlyban kell lenni azon térfogatrészeknek, ahol a közeg sűrűsége időben növekszik, és fordítva.

A közeg áramcsőben történő — vagyis egyméretű — stacioner áramlása esetén az áramvonalakra merőleges keresztmetszet minden egyes pontjában egyforma sebességgel és sűrűséggel rendelkezik, azaz e két jellemző csak az áramvonal mentén mért ívhossznak a függvénye. Mivel az áramcső palástján közeg nem léphet át csak az  $A_1$  és  $A_2$  jelölésű be-, és kilépő keresztmetszeten léphet ki vagy be közeg. Ekkor az (V.4.2) egyenlet a

$$\rho_1 c_1 A_1 = \rho_2 c_2 A_2$$

vagy egyszerűbben: (V.4.3)

$$\rho c A = \text{állandó}$$

alakot fogja felvenni, mely bal oldalának differenciáljáról tudjuk, hogy zérus, azaz:

$$d\dot{m} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \dot{m}}{\partial c} dc + \frac{\partial \dot{m}}{\partial A} dA = 0 \quad . \quad (\text{V.4.4})$$

Ha az (V.4.3) egyenletből a parciális differenciálhányadosokat meghatározzuk:

$$c A d\rho + \rho A dc + \rho c dA = 0 \quad , \quad (\text{V.4.5})$$

amit  $\rho c A \neq 0$ -val osztva, megkapjuk a keresett egyenletet:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dc}{c} + \frac{dA}{A} = 0 \quad . \quad (\text{V.4.6})$$

#### V.4.2. ÖSSZENYOMHATÓ KÖZEG EGYMÉRETŰ ÁRAMLÁSA

Az összenyomható közeg változó keresztmetszetű áramcsőben történő izentrópikus áramlásának vizsgálatához kiindulásként a nyitott rendszerre érvényes energia egyenletet alkalmazzuk [V.4]; [V.6]. Ez a

$$\frac{c^2}{2} + i = \text{állandó} \quad (\text{V.4.7})$$

alakban írható fel, ahol:

$i$  — az áramló közeg fajlagos entalpiája és a

$$i = c_p T \quad , \quad (\text{V.4.8})$$

illetve a

$$di = v dp = \frac{dp}{\rho} \quad (\text{V.4.9})$$

módokon számítható, ahol:

$c_p$  — a közeg állandó nyomáson vett fajhője.

A elemzésünkhöz írjuk fel az energia egyenlet

$$di + c dc = \frac{dp}{\rho} + c dc = 0 \quad , \quad (\text{V.4.10})$$

illetve a folytonossági törvény egyméretű áramlására felírt

$$\frac{dc}{c} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (\text{V.4.11})$$

differenciál alakját. Az (V.4.10) egyenletet alakítsuk át felhasználva a hang gázokban történő terjedése sebességének

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

összefüggését [V.6]:

$$\frac{dp}{\rho} + cdc = \frac{d\rho}{d\rho} \frac{dp}{\rho} + cdc = a^2 \frac{d\rho}{\rho} + cdc = 0 \quad . \quad (\text{V.4.12})$$

Ebből:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{cdc}{a^2} \quad , \quad (\text{V.4.13})$$

amit ha az (V.4.11) egyenletbe behelyettesítünk, és azt átrendezzük, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{dA}{A} = \frac{cdc}{a^2} - \frac{dc}{c} = \frac{cdc}{a^2} - \frac{dc}{c} \quad . \quad (\text{V.4.14})$$

Alkalmazva a MACH-szám fogalmát — lásd a (IV.5.20) egyenletet —, alakul ki a keresett kifejezés:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dc}{c} \quad . \quad (\text{V.4.15})$$

A fenti egyenlet fontos gázdinamikai törvényszerűséget fejez ki, az áramlási keresztmetszet és az áramlási sebesség változásának kapcsolatáról:

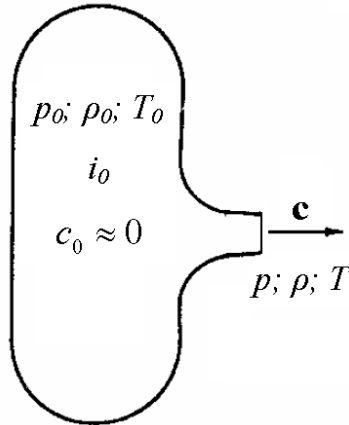
- ha az áramlás hangsebesség alatti — azaz  $M < 1$  —, akkor az áramlási keresztmetszet növekedéséhez sebességcsökkenés tartozik és fordítva;
- hangsebesség feletti áramláskor — azaz  $M > 1$  —, a keresztmetszet növekedéséhez sebességnövekedés tartozik és fordítva;
- az áramlási csatorna legszűkebb keresztmetszetében, amikor  $dA = 0$  vagy  $M = 1$ , vagy  $dc = 0$  érték tartozik.  $M = 1$  eset — azaz a hangsebesség elérése — csak az áramlási csatorna legkisebb keresztmetszetében történhet.

Most vizsgáljuk meg egy tartályból szűkülő csatornán keresztül történő izentrópiikus gázkiáramlást (V.4. ábra) a következő gondolatmenet tükrében:

Ha a kiáramló gáz sebessége a szűkülő csatornában növekszik — az

energia egyenlet (és az energia megmaradás) értelmében entalpiája, azaz hőmérséklete csökken. Ha csökken a gáz hőmérséklete, csökken a gázban a hang terjedési sebessége. Így kialakulhat egy olyan állapot, amikor a gáz áramlási sebessége egyenlő lesz a helyi hangsebességgel.

Mikor következik be ez a jelenség?



V.4. ábra A kritikus állapotjelzők meghatározása

Ehhez alkalmazzuk az adiabatikus hangsebesség

$$a_{ad} = \sqrt{\kappa RT} \quad . \quad (V.4.16)$$

egyenletét [V.6], ahol:

$\kappa$  — a gáz adiabatikus kitevője;  
 $R$  — a gáz gázálándója.

Valamint határozzuk meg a

$$i + \frac{c^2}{2} = i_0 \quad ,$$

azaz a

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} RT + \frac{c^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT_0$$

energia egyenletből az áramló közeg sebességét:

$$c = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T_0 - T)} \quad . \quad (\text{V.4.17})$$

A fenti gondolatmenet szerint az (V.4.16) és az (V.4.17) egyenletek bal oldalai az adott esetben egyenlők, tehát akkor a jobb oldalak is, azaz:

$$\sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T_0 - T)} = \sqrt{\kappa R T} \quad . \quad (\text{V.4.18})$$

Határozzuk meg és  $T_{krit}$ -ként jelöljük azt a hőmérsékletet, ahol a sebességek egyenlővé válnak.

$$2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T_0 - T_{krit}) = \kappa R T_{krit} \quad . \quad (\text{V.4.19})$$

$$T_0 - T_{krit} = \frac{\kappa - 1}{2} T_{krit} \quad (\text{V.4.20})$$

$$T_0 = \left( \frac{\kappa - 1}{2} + 1 \right) T_{krit} = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right) T_{krit} \quad . \quad (\text{V.4.21})$$

Ebből:

$$T_{krit} = \frac{2}{\kappa + 1} T_0 \quad . \quad (\text{V.4.22})$$

A hozzá tartozó  $p_{krit}$  jelű kritikus nyomás:

$$p_{krit} = p_0 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad . \quad (\text{V.4.23})$$

A  $\rho_{krit}$  kritikus sűrűség:

$$\rho_{krit} = \rho_0 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad . \quad (\text{V.4.24})$$

A kritikus sebesség értéke a

$$c_{krit} = \sqrt{\kappa R T_{krit}} \quad (V.4.25)$$

$$c_{krit} = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1}} a_0 = \sqrt{\frac{2}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0}}$$

kifejezések segítségével határozható meg.

A fenti egyenletekkel meghatározott állapotjelzőket **kritikus állapotjelző**knak nevezzük.

Kétatomos gázok és keverékeik — például a levegő annak tekinthető — esetén a kritikus értékek:

$$\begin{aligned} p_{krit} &= 0,528 p_0 \\ \rho_{krit} &= 0,634 \rho_0 \\ T_{krit} &= 0,833 T_0 \\ c_{krit} &= 0,913 a_0 \end{aligned} \quad (V.4.26)$$

De miért kritikus az az állapot, amit ezek a paraméterek meghatároznak? Hol alakul ki ez az állapot az áramlási csatornában?

Kritikus sebesség — azaz a helyi hangsebesség — az áramlási csatorna legkisebb keresztmetszetében fog kialakulni. Ezt igazoltuk az (V.4.15) egyenlettel.

Vizont ha a kritikus hangsebességet a legkisebb keresztmetszetben éri el a kiáramló gáz, akkor ott helyi hangsebességnél nagyobb sebességet nem tudunk elérni. Ez pedig azt jelenti, hogy ha az áramlási csatorna legszűkebb keresztmetszetében elérjük a kritikus sebességet — kialakul a kritikus állapot —, tovább növelni nem tudjuk a csatornán átáramló közeg tömegáramát. Ezt a jelenséget szokás úgy is nevezni, hogy **a keresztmetszet**, vagy **a csatorna lezár**.

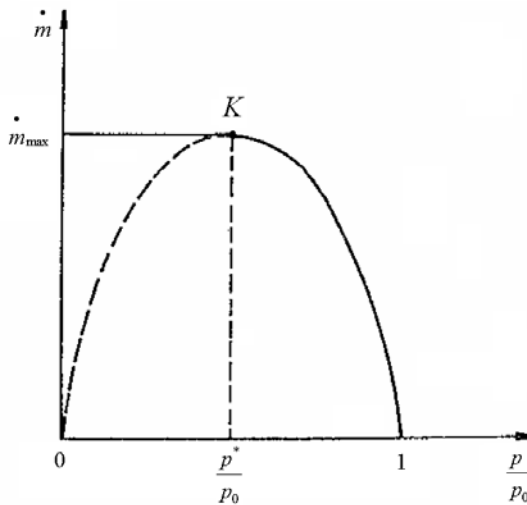
Ez a jelenség lép fel gázturbinák álló lapátkoszorúinál, illetve a sugárhajtóművek fűvócsöveinél, illetve (rossz méretezés esetén) kialakulhat a dugattyús hőerőgépek kipufogó rendszerében is.

Vizsgáljuk meg a tartályból kiáramló közeg tömegáramát a tartályban uralkodó, illetve a környezeti nyomások arányai függvényében. A folytonossági törvény és a hőtani alapegyenletek felhasználásával — a levezetést mellőzve —, a tömegáram az alábbi módon határozható meg:

$$\dot{m} = A \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa-1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (V.4.27)$$

A fenti egyenlettel leírt függvény menetét láthatjuk az V.5. ábrán. A **K**-

val jelölt tetőponttól balra eső részét szaggatott vonallal rajzolt görbe szemlélteti.



V.5. ábra Tömegáram változása a nyomásviszony függvényében

Ha összehasonlítjuk az (V.4.27) összefüggés által meghatározott függvényt az előbb megismertekkel, érdekes képet kapunk.

A  $K$  maximum ponttól jobbra a tapasztalat és a függvény értéke megegyezik. Ha csökkentjük a környezeti, vagy más néven ellennyomást, a tartályból kiáramló gáz tömegárama növekszik.

A kritikus nyomásviszony elérése után hiába csökkentjük az ellennyomást, a kiáramló tömegáram állandó értékű (maximális) marad. Ekkor már nem fog az áramlási sebesség értéke növekedni a csatorna végkeresztmetszetében. Ezt mutatja az ábrán a  $K$  ponttól balra a folytonos vonal.

A maximális tömegáramot az alábbi egyenlettel tudjuk meghatározni:

$$\dot{m}_{\max} = A_{\text{krit}} \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} p_0 \rho_0 \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{2}{\kappa - 1}}} \quad (\text{V.4.28})$$

#### V.4.3. A GÁZDINAMIKAI FÜGGVÉNYEK

A fentiekben leírt fizikai törvényszerűségek figyelembevételével a kompresszibilis közeg egyméretű áramlásának vizsgálata (például a gázturbinás hajtóművek modellezése) során a közeg paramétereinek leírására az úgynevezett gázdinamikai függvényeket alkalmazzuk (lásd a VI.8. fejezetet). A dimenzió nélküli gázdinamikai függvények — a levezetések mellőzése nélkül:

**sebességviszony:**

$$\lambda = \frac{c}{c_{krit}} \quad ; \quad (V.4.29)$$

**hőmérsékletviszony:**

$$T(\lambda) = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \quad ; \quad (V.4.30)$$

**nyomásviszony:**

$$\Pi(\lambda) = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad ; \quad (V.4.31)$$

**sűrűségviszony:**

$$\varepsilon(\lambda) = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad ; \quad (V.4.31)$$

**tömegáram viszony:**

$$q(\lambda) = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{max}} = \lambda \varepsilon(\lambda) \left( \frac{\kappa - 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad . \quad (V.4.32)$$

## V.5. ERŐK ÉS NYOMATÉKOK VIZSGÁLATA

NEWTON<sup>3</sup> első törvénye kimondja, hogy:

*„Minden test megmarad a nyugalom vagy az egyenesvonalú egyenletes mozgás állapotában, amíg reá ható erők ennek az állapotnak a megváltoztatására nem kényszerítik.” [V.8]*

Ezen közismert fizikai alaptörvény alapján könnyen belátható, hogy egy gépészeti rendszer akkor fog időben állandó módon működni, ha a részegységeire ható erők és nyomatékok eredői zérusértékűek. Tehát stacioner

<sup>3</sup> *Newton, Sir Isaac (1643–1727)*: angol fizikus, matematikus. Kora tudományos életének s egyben a tudomány történetének is egyik legkiemelkedőbb alakja. Munkásságával a korábbi statikus világkép helyett dinamikus, egységes világszemléletet adott, amely megteremtette a mechanikus materializmus természettudományos alapjait.



matematikai modell felírása esetén az erő- és/vagy nyomatéki egyensúlyokat kell felírunk az adott részegységekre.

Instacioner rendszermodellezés esetén a kinetika tételeit kell alkalmaznunk, azaz felírunk a modellezett rendszer elemeire. Ezért jelen alfejezetben ezen fizikai törvényszerűségeket ismertetjük — ha szükséges, külön a merev testekre és az áramló közegre alkalmazva.

### V.5.1. NEWTON MÁSODIK TÖRVÉNYE

NEWTON második törvénye a dinamika alaptörvényének tekinthető, melynek megfogalmazása a következő:

*„A mozgás változása arányos a mozgató erővel, és a változás iránya egyezik az erő irányával.” [V.8]*

Matematikailag megfogalmazva:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad . \quad (\text{V.5.1})$$

Newton szövegéből kiderül, hogy az itt szereplő  $\mathbf{F}$  erő az anyagi pontra ható erők eredőjét jelenti. Így, az erők függetlensége alapján :

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i}{m} \quad , \quad (\text{V.5.2})$$

azaz a tömegpont gyorsulása a ráható  $\mathbf{F}_i$  erők által előidézett  $\mathbf{a}_i$  gyorsulások összegével egyenlő.

Merev testre — sajátosságaiból adódóan — koncentrált, vonalmentén-, felületen megoszló, és térbeli erők hathatnak. Vizsgálataink során mind a négy típusú erőt figyelembe kell vennünk, illetve azt eldöntenünk, hogy a vizsgálati, modellezési szempontok alapján, mely erők hagyhatók figyelmen kívül.

Például egy tömegközéppontjába koncentrált merevtestre ható erők ismeretében a test gyorsulásai (és az azokból számítható más paraméterek) meghatározhatók. A repülésmechanikai vizsgálataink során a repüléshez szükséges teljesítmény elemzésekor úgynevezett pontszerű (azaz tömegközéppontjába koncentrált) repülőgépet vizsgálunk. Ekkor, természetesen nem foglalkozunk a repülőgépre (pontosabban fogalmazva a repülőgép súlypontjára) ható nyomatékokkal.

A sűrűségmentes közeg áramlásának dinamikai alapegyenletét LEONARD EULER

svájci matematikus és fizikus írta fel Newton második törvényének alkalmazásával az ideális kontinuum áramlására.

Az **EULER egyenlet** felírásának első lépéseként, az (V.5.1) egyenlet bal oldalának meghatározása érdekében, vizsgáljuk meg egy tetszőleges alakú ellenőrző térfogatra ható erőket (V.3. ábra).

A rendszer egy adott, elemi térfogatú részére ható  $d\mathbf{F}_t$  úgynevezett elemi térfogati erő az alábbi módon határozható meg:

$$d\mathbf{F}_t = \rho \mathbf{g} dV \quad , \quad (\text{V.5.3})$$

Az egész rendszerre ható térfogati erők eredője pedig az

$$\mathbf{F}_t = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV \quad (\text{V.5.4})$$

térfogati integrállal lesz egyenlő.

Egy felületelemre ható  $d\mathbf{F}_f$  felületi erő nagysága egyenesen arányos a felületelem, valamint a rendszer, illetve a környezet közti nyomáskülönbség nagyságával. Iránya ellentétes a felületelem vektorának irányával (mivel az mindig a rendszerből kifelé mutat), azaz:

$$d\mathbf{F}_f = -p d\mathbf{A} \quad , \quad (\text{V.5.5})$$

Az egész rendszerre ható felületi erők eredője pedig az:

$$\mathbf{F}_f = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad (\text{V.5.6})$$

felületi integrállal határozható meg.

Mivel az ideális közeg áramlása esetén súrlódási erő nem lép fel, a rendszerre ható erők eredője az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad . \quad (\text{V.5.7})$$

A további vizsgálataink érdekében az (V.5.6) egyenletet alakítsuk át a GAUSS<sup>4</sup>–OSZTROGRADSKIJ<sup>5</sup> tétel felhasználásával:

<sup>4</sup> *Gauss, Karl Friedrich (1777–1855)*: német matematikus, fizikus. Sokoldalú, korszakalkotó munkássága révén kortársai "princeps mathematicorum" a matematika fejedelmének nevezték. Göttingeni tanulmányai alatt ismerkedett meg és kötött barátságot Bolyai Farkassal.

<sup>5</sup> *Osztrogradskij, Mihail Vasziljevics (1801–1862)*: orosz matematikus. Alapvető eredményei születtek az analízis, az elméleti mechanika és a matematikai fizika területein.

$$\int_{(A)} p d\mathbf{A} = \int_{(V)} \text{grad } p dV \quad . \quad (\text{V.5.8})$$

Ez alapján az eredő erőt meghatározó (V.5.7) egyenlet a

$$\mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(V)} \text{grad } p dV = \int_{(V)} \left[ \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right] \rho dV \quad (\text{V.5.9})$$

alakot veszi fel.

Következő lépésként az (V.5.1) egyenlet jobb oldalának részletes leírásához vegyük elő a korábban leírtakból a tömeg és a sűrűség közötti

$$m = \int_{(V)} \rho dV \quad (\text{V.5.10})$$

kapcsolatot — lásd (V.3.13) egyenlet.

Az áramló közeg gyorsulása meghatározható az általános transzport egyenlet differenciál alakjának — (V.3.7) egyenlet — felhasználásával. Figyelembe véve az áramló kontinuum mozgásformáit, a konvektív gyorsulás két összetevőre bontható. Ezek közül az első — az (V.5.11) egyenlet jobb oldalának második tagja — a sebességnagyságának térbeli változását adja meg. Még az (V.5.11) egyenlet jobb oldalának harmadik tagja a sebesség irányának helyszerinti változását fejezi ki. (Az összefüggés levezetésétől — terjedelmi okok miatt — itt eltekintünk. Vektor-analitikus igazolása az [V.6] irodalomban részletesen tanulmányozható.)

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \quad (\text{V.5.11})$$

egyenletét. Ezek alapján felírható, hogy:

$$\mathbf{m}\mathbf{a} = \int_{(V)} \left[ \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \right] \rho dV \quad . \quad (\text{V.5.12})$$

Az (V.5.9) és az (V.5.12) egyenletek alapján az (V.5.1) egyenlet az

$$\int_{(V)} \left[ \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right] \rho dV = \int_{(V)} \left[ \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \right] \rho dV \quad (\text{V.5.13})$$

alakot vesz fel.

Mivel vizsgálatunkat tetszőleges térfogatú rendszerre végeztük el, az

(V.5.13) egyenlőség a benne szereplő integrandus egyenlőségét is jelenti, azaz:

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{\partial \mathbf{c}(\mathbf{r}; \tau)}{\partial \tau} + \text{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \quad . \quad (\text{V.5.14})$$

Ez az EULER egyenlet, ami az áramlástan alapegyenlete. Maga az EULER egyenlet a köznapri műszaki gyakorlatban — bár alakilag egyszerű — nem alkalmazható. Ennek oka a benne szereplő matematikai műveletek konkrét esetre történő megoldásának bonyolultsága. De, a későbbiekben — a BERNOULLI egyenlet felírásánál — az EULER egyenletet fogjuk felhasználni.

A NAVIER<sup>6</sup>–STOKES<sup>7</sup> egyenlet a sűrűdésos közeg áramlásának alapegyenlete, Newton második törvényének felírása a sűrűdésos közeg áramlására. Mivel a NAVIER–STOKES egyenlet lényegében a korábban megismert EULER egyenlet úgymond sűrűdésos párja, levezetése hasonlóan történhet.

Sűrűdésos kontinuum esetén a felületi erők nem csak — az ideális közegnél már megismert — a felületre merőlegesen ható nyomásból, hanem a közeg sűrűdéséből is keletkezhetnek. Ezeket, mint felületegységre jutó erőket tudjuk jellemezni, amit — a szilárdságtanból átvett kifejezéssel — feszültségeknak nevezünk. A fenti fizikai megfontolást figyelembe véve, a bonyolult vektoranalitikus levezetést mellőzve az összenyomhatatlan közeg áramlására felírt NAVIER–STOKES egyenlet az alábbi alakot veszi fel:

$$\mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{c} - \text{grad} \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} + \text{grad} \left( \frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \quad . \quad (\text{V.5.15})$$

Az egyenlet bal oldalának második tagja fejezi ki a közeg sűrűdésa következtében fellépő erőket, és ahol:

$\Delta$  — a LAPLACE<sup>8</sup> operátor:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{k} \quad . \quad (\text{V.5.16})$$

Egy valós áramlás modellezésekor a NAVIER-STOKES egyenletet alkalmazzuk az áramlásba helyezett test fala mentén kialakuló határréteg

<sup>6</sup> Navier, Louis (1785–1836): francia fizikus. A rugalmasság elméletével és a folyadékok sűrűdésével foglalkozott. A „gyorsulásáról nevezetes” Coriolis közvetlen munkatársa volt.

<sup>7</sup> Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903): brit matematikus, fizikus. Nevéhez fűződik a mozgó folyadékok sűrűdésének modern elmélete valamint a nevét viseli egy általánosan alkalmazott integráltétel is.

<sup>8</sup> Laplace, Pierre Simon (1749–1827): francia matematikus, csillagász. Tanulmányait a beaumonti katonai iskolában végezte. Később az École Militaire matematika tanárává nevezték ki.

vizsgálatakor. A határréteken kívül — ahol a közeg súrlódásmentesnek tekinthető — az EULER egyenletet alkalmazzuk.

### V.5.2. AZ IMPULZUS TÉTEL

A merev testek mechanikájában alkalmazott első súlypont-tétel kimondja:

*Tetszőleges mechanikai rendszer impulzusa vagy mozgásmennyisége a súlypont  $c$  sebességének és a rendszer  $m$  tömegének szorzatával egyenlő, azaz:*

$$\mathbf{I} = mc \quad . \quad (\text{V.5.17})$$

A második súlyponttétel pedig a következőket mondja ki:

*Tetszőleges mechanikai rendszer impulzusának időszerinti deriváltja (változás) egyrészt a súlypont gyorsulásának és a rendszer tömegének szorzatával ( $m = \text{const.}$  esetén), másrészt a rendszerre ható erők összegével egyenlő, azaz:*

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(mc) = \mathbf{a}m = \sum \mathbf{F} \quad . \quad (\text{V.5.18})$$

Merev testek esetén az V.5.1. alfejezetben leírt megfontolások alkalmazhatóak, azaz figyelembe kell vennünk a koncentrált, vonalmentén-, felületen megoszló és térbeli erőket, illetve el kell hanyagolnunk azokat, melyek a modellezési vizsgálataink szempontjából nem célszerű figyelembe vennünk.

Az aerodinamika impulzus tétele általános alakjának felírását a fenti, (V.5.18) egyenlet alapján végezzük el (V.3. ábra).

Elsőként írjuk fel az (V.5.18) egyenlet jobb oldalát, a közegre ható erőket, az Euler egyenlet felírásánál már meghatározott módon, azaz:

$$\sum \mathbf{F} = \int_{(V)} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p \mathbf{dA} \quad . \quad (\text{V.5.19})$$

Az egyenlet bal oldalának felírásához az általános transzportegyenlet integrál alakját — az (V.3.21) egyenlet — felhasználjuk az

$$F = \mathbf{I} = mc \quad \text{és az} \quad f = \rho c$$

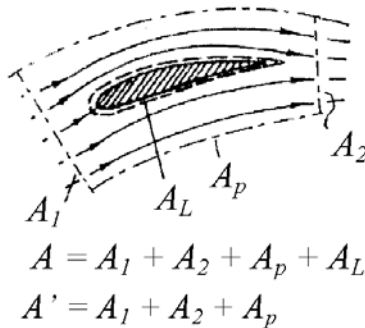
formális behelyettesítéssel. Így az **impulzus tétel általános alakja** az alábbi formában írható fel:

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \int_{(V)} \frac{\partial(\rho\mathbf{c})}{\partial\tau} dV + \int_{(A)} \mathbf{c} dm = \int_{(V)} \rho\mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad , \quad (\text{V.5.20})$$

Fizikai tartalma a következő: Egy nyitott rendszeren áthaladó közeg mozgásmennyiségének időegységre jutó megváltozása (a bal oldal) egyrészt a rendszerhatáron átlépő kontinuumhoz kötötten be-, és kiáramló impulzusok különbsége (a „középső oldal” második tagja, másrészt a rendszerre ható erőkre (jobb oldal) vezethető vissza. Meg kell jegyezni, hogy e fenti két hatás különbségét fejezi ki a „középső oldal” első tagja. Ez a tag az ellenőrző felületen belül maradó részecskék mozgásmennyiségének változását (a lokális impulzusváltozást) adja meg és stacioner áramlás esetén azonosan zérussal lesz egyenlő. Így az időálló áramlásra felírt impulzus tétel:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} dm = \int_{(V)} \rho\mathbf{g} dV - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad (\text{V.5.21})$$

alakú lesz



V.6. ábra Az impulzus tétel alkalmazása

A gyakorlati alkalmazás szempontjából célszerű a felületi erőket szétválasztani. Vegyük külön az ellenőrző felület  $A'$  jelű, úgynevezett szabad (például az V.6. ábrán a pontvonalak), az áramlásba helyezett testtel vagy az áramlást határoló fallal nem érintkező, részét, illetve a test áramlásra gyakorolt  $\mathbf{F}_R$  felületi erőket. Így:

$$\int_{(A)} p d\mathbf{A} = \int_{(A')} p d\mathbf{A} - \mathbf{F}_R \quad . \quad (\text{V.5.22})$$

AZ (V.5.22) kifejezés alapján az áramlástanban az impulzus tétel stacionárius áramlásra az

$$\int_{(A')} \mathbf{c} d\dot{m} = \int_{(V')} \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A')} p d\mathbf{A} + \mathbf{F}_R \quad (\text{V.5.23})$$

alakban írható fel.

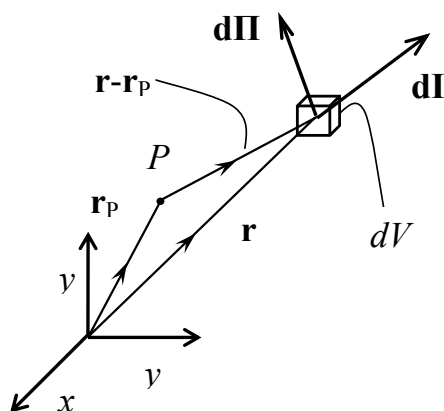
A fenti egyenlet felírásával és megoldásával meg tudjuk határozni, hogy egy nyitott rendszerbe be- és kilépő kontinuum mozgásmennyisége (pontosabban impulzusárama) hogyan változott meg, azaz milyen erők hatottak az közegre a rendszeren belül. Meghatározhatjuk azt, hogy rendszer (például egy csővezeték rendszer) vagy az áramlásba helyezett test (például a légcsavar vagy ventilátor) milyen erővel hat a kontinuumra. A D'ALAMBERT elv alapján viszont kimondható, hogy az áramló közeg ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erővel hat a rendszerre, illetve az áramlásba helyezett testre.

### V.5.3. A PERDÜLET TÉTEL

Egy  $m$  tömegű,  $\mathbf{c}$  sebességgel mozgó anyagi pontnak a tér valamely tetszés szerinti —  $\mathbf{r}_P$  helyvektorral megadott —  $P$  pontjára vett  $\mathbf{\Pi}$  impulzusnyomatékán (más néven perdületén) a

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{c} m \quad (\text{V.5.24})$$

vektort értjük.



V.7. ábra Perdület tétel felírása

Fontos itt megjegyezni, hogy több — általában a merevtestek mozgását vizsgáló — szakirodalom (köztük például az [V.8]) értelmezésében a fenti

egyenlet a perdület tétel. Más (alapvetően hő- és áramlástan) szakirodalmak (például [V.3] – [V.6]) viszont a későbbiekben szereplő összefüggéseket tekintik a perdület tételnek, melyek az előzőekben említett irodalmak a perdület-impulzus tételnek nevezik.

Továbbiakban — az egyszerűbb írásmód érdekében — a viszonyítási rendszer origóját a P pontban helyezük el, így:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{0} \quad .$$

Egy tetszőleges merev test súlypontjára vett impulzusnyomatékának időegységre eső megváltozása egyenlő a testre ható külső erők súlypontra vett nyomatékainak eredőjével, azaz:

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{d\tau} = \sum \mathbf{M} \quad . \quad (\text{V.5.25})$$

Ha a merev test síkmozgást végez, a súlyponti z tengelyre felírt perdület tétel az alábbi alakot veszi fel (a részletes, vektoralgebrai levezetés a [V.8] irodalomban tanulmányozható):

$$\frac{d\Pi_k}{d\tau} = J_z \dot{\omega} = \mathbf{M}_z \quad , \quad (\text{V.5.26})$$

ahol:

$J_z$  — a merev test z tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka.

A (V.5.25) egyenlet alapján kijelenthető, ha egy merev testre ható nyomatékok eredője nem zérus (vektor), akkor az adott test (például a gép fogórésze vagy tengelye) az eredő nyomaték és a test tehetetlenségi nyomatékának függvényében szöggyorsulást fog végezni, azaz szögsebessége, fordulatszámja változni fog. Ezt a törvényszerűséget használhatjuk fel például egy gázturbinás hajtómű instacioner termikus modelljének felállításakor is.

A perdület-tétel áramlástanban használatos formájának felírásához alkalmazzuk az általános transzportegyenlet integrál alakját — az (V.3.21) egyenletet — az

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Pi} = \mathbf{r} \times m\mathbf{c} \quad \text{és az} \quad \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \rho\mathbf{c}$$

formális behelyettesítéssel. Így — az impulzus tétel felírásával analóg módon — az (V.5.25) egyenlet bal oldala az alábbi formában írható fel:



$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{d\tau} = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV + \int_{(A)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} d\mathbf{A} \quad (\text{V.5.27})$$

Az (V.5.25) egyenlet jobb oldala részletesen a nyomaték és az erő közti

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

kapcsolat felhasználásával az (V.5.25) egyenlet jobb oldala alapján írható fel, az alábbi módon:

$$\sum \mathbf{M} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A')} \mathbf{r} \times p d\mathbf{A} + \mathbf{M}_R \quad , \quad (\text{V.5.28})$$

ahol:

$\mathbf{M}_R$  — az áramlásba helyezett test vagy az áramlást határoló fal közre gyakorolt erőinek nyomatéka, azaz:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R \quad .$$

Az (V.5.27) és az (V.5.28) kifejezések alapján az áramlásban impulzusnyomatéki tétele (figyelembe véve a V.5.2. alfejezetben leírt levezetést és annak indoklásait):

$$\int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV + \int_{(A)} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} d\mathbf{A} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A')} \mathbf{r} \times p d\mathbf{A} + \mathbf{M}_R \quad , \quad (\text{V.5.29})$$

illetve stacioner áramlás esetén, mivel akkor:

$$\int_{(V)} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c})] dV = \mathbf{0} \quad ,$$

$$\boxed{\int_{(A')} \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \mathbf{c} d\mathbf{A} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} \mathbf{r} \times p d\mathbf{A} + \mathbf{M}_R} \quad . \quad (\text{V.5.30})$$

Az impulzusnyomatéki tétel legfontosabb alkalmazása az áramlástechnikai gépek (szivattyúk, kompresszorok, turbinák) területén van. Például, ezen gépek működésének alapelvét kifejező, úgynevezett *Euler-féle* turbina egyenlet legegyszerűbben a perdület tétel segítségével tudjuk modellezni.

## V.6. A MUNKA-TÉTEL

Ha egy anyagi pont egy  $\mathbf{F}$  erő hatására  $d\mathbf{s}$  elmozdulást végez, akkor az  $\mathbf{F}$  erő  $d\mathbf{s}$  elemi úton végzett fizikai munkáját a

$$dW = \mathbf{F}d\mathbf{s} \quad (\text{V.6.1})$$

skaláris szorzattal határozzuk meg. A fizikai munka csak az erőtől és az általa létrehozott elmozdulástól függ, az anyagi pont tömege és elmozdulás ideje közömbös.

Egy  $\mathbf{c}$  sebességgel mozgó,  $dm$  tömegű anyagi pont mozgási (kinetikus) energiáján a

$$dE_m = \frac{1}{2} \mathbf{c}^2 dm \quad (\text{V.6.2})$$

mennyiséget értjük.

A **kinetika munkatétele** kimondja, hogy:

*Tetszőleges mechanikai rendszeren a rendszerre ható erők egy időintervallumban végzett munkája egyenlő a rendszer mozgási energiájának az adott időintervallum alatti megváltozásával. [V.8]*

Az úgynevezett örvénymentes, **konzervatív**, vagy potenciális **erőtér**ről beszélünk, ha a hozzá tartózó térerősség a

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}; \tau) = -\text{grad} \phi(\mathbf{r}; \tau) \quad (\text{V.6.3})$$

formában határozható meg, ahol:

$\phi(\mathbf{r}; \tau)$  — az erőtér potenciálja, amely az egységnyi tömegű test munkavégző képességét jelenti.

Ha egy konzervatív erőtérben egy  $m$  tömegű anyagi pont mozog két tetszőleges pont között az erőtérből rá ható

$$\mathbf{F}_g = \mathbf{g}m$$

erő

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F}_g \, ds = m(\phi_2 - \phi_1) \quad (\text{V.6.4})$$

nagyságú munkát végez, azaz csak a kezdő és végpontbeli potenciális energia különbségével egyenlő. Ekkor bármely két tetszőleges pont között befutott pályagörbe nem befolyásolja az ehhez szükséges befektetendő, vagy így nyerhető munka csak a mozgás kezdő és végpontjától (pontosabban fogalmazva az azokhoz rendelt potenciáljától) függ.

A kinetika fent említett munkatétele szerint viszont a mozgási energia a

$$W_{12} = E_{m2} - E_{m1}$$

különbséggel egyenlő. A munka fenti két egyenlőségéből

$$E_{m2} - E_{m1} = m(\phi_1 - \phi_2)$$

vagy

$$E_{m1} + m\phi_1 = E_{m2} + m\phi_2 = W_0 \quad (\text{V.6.5})$$

A fenti egyenlet alapján kijelenthetjük, hogy egy konzervatív erőterben mozgó tömegre az erőter hatásán kívül más erő nem hat, a tömeg mozgási és potenciális, helyzeti energiáinak összege állandó. Az energiáknak az előbbi egyensúlyát azok az erők nem zavarják meg, amelyek a mozgás során fizikai munkát nem végeznek. Ha más, munkát végző erő is hat a merev testre, akkor a fenti egyensúly megbomlik.

Áramló kontinuumok energiaváltozásainak leírására a rájuk jellemző erőhatások és mozgásformák figyelembevételével, az EULER-egyenlet alapján írható le. Ezt a törvényszerűséget először DANIEL BERNOULLI<sup>10</sup> svájci matematikus és fizikus vezette le.

A BERNOULLI egyenlet az EULER egyenlet az áramlási tér két tetszőleges pontja közti vonalmenti integrálásával nyerhető. Így erő jellegű (dimenziójú) mennyiségek „elmozdulással való szorzásával” munka, energia jellegű skalár változókat kapunk — lásd az (V.6.1) egyenletet —, melyek mérése és számítási kezelése egyszerűbb, a gyakorlati életben jobban használhatóbb.

A BERNOULLI egyenlet levezetéséhez először tételezzük fel, hogy a  $\mathbf{g}$  erőter örvénymentes és örvényes erőterek eredője, azaz:

<sup>10</sup> *Bernoulli, Daniel (1700–1782)*: svájci matematikus, fizikus. A híres Bernoulli család — mely három generáción belül kilenc matematikust adott — tagja. Tudományos munkáját főleg Szentpéterváron és Bázelen folytatta.

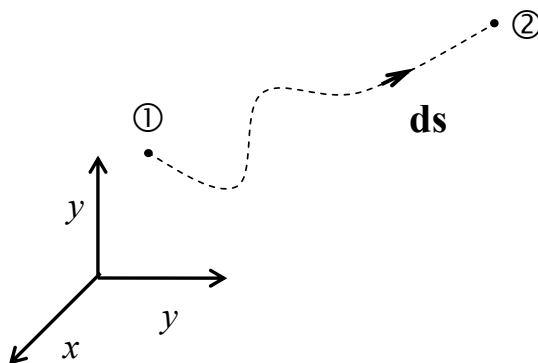
$$\mathbf{g} = -\text{grad } \phi + \mathbf{g}_{\text{II}} \quad , \quad (\text{V.6.6})$$

ahol:

$\mathbf{g}_{\text{II}}$  — az örvényes erőter térerősség vektora.

Így a kiinduló Euler — azaz a (V.5.14) — egyenlet (átrendezés után) az alábbi alakot veszi fel:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} - \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} + \text{grad} \left( \frac{\mathbf{c}^2}{2} \right) + \text{grad } \phi - \mathbf{g}_{\text{II}} + \text{grad} \frac{p}{\rho} = \mathbf{0} \quad . \quad (\text{V.6.7})$$



V.8. ábra A BERNOULLI egyenlet felírása

A BERNOULLI egyenlet ezen kifejezés vonalmenti integráljából adódik. Az integrálást az áramlási tér bármely (① és ② jelű) két pontja között, tetszőleges útvonalon végezhetjük el (V.8. ábra). Ekkor:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} \mathbf{ds} - \int_1^2 \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \mathbf{ds} + \frac{\mathbf{c}_2^2 - \mathbf{c}_1^2}{2} + [\phi_2 - \phi_1] - \int_1^2 \mathbf{g}_{\text{II}} \mathbf{ds} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (\text{V.6.8})$$

ahol a bal oldal:

1. tagja:  $\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \tau} \mathbf{ds}$  a sebesség nagyságának időbeni változásából;
2. tagja:  $\int_1^2 \mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c} \mathbf{ds}$  a sebességtér örvényességéből;

3. tagja:  $\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}$  az eltérő sebességnagyságokból;
4. tagja:  $[\phi_2 - \phi_1]$  a potenciális (örvénymentes) erőteréből;
5. tagja:  $\int_1^2 \mathbf{g}_{II} \cdot d\mathbf{s}$  a nem potenciális (örvényes) erőteréből;
6. tagja:  $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$  a változó nyomáseloszlásból

származó, vagy ellenükben befektetendő munkákat jelentik.

A „köznap” mérnöki gyakorlatban általában a **BERNOULLI egyenlet inkompresszibilis közeg gravitációs erőterben történő stacioner, örvénymentes áramlásra felírt alakja** is elegendő. De azt fontos hangsúlyoznunk, hogy csak a fenti feltételeket kielégítő áramlást lehet vizsgálnunk a továbbiakban felírásra kerülő összefüggésekkel. Ekkor az (V.6.8) egyenleten az alábbi egyszerűsítések végezhetőek el:

1. tag: zérussal lesz egyenlő, mert az áramló közeg jellemzői időben nem változnak;
2. tag: zérussal lesz egyenlő, mert az áramlás örvénymentes;
4. tag: felhasználva, hogy a gravitációs erőterben a közeg potenciálja

$$\phi = gh \quad (\text{V.6.9})$$

egyenlettel határozható meg, ahol:

- $h$  — a vizsgált pont zérus helyzeti energiájú helyhez viszonyított magassága.
- $g$  — a nehézségi gyorsulás;

5. tag: értéke zérussá válik, mert a gravitációs erőter örvénymentes;
6. tag: az alábbi alakot veszi fel:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int_1^2 dp = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \quad , \quad (\text{V.6.10})$$

mert az összenyomhatatlan közeg sűrűsége állandó, ezért a  $\rho$  sűrűség az integrál jel elé kiemelhető.

A fenti átalakítás után a BERNOULLI egyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} &= \frac{c_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho} \\ \frac{c^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} &= \text{állandó} \end{aligned} \quad (\text{V.6.11})$$

alakot veszi fel. Az (V.6.11) egyenlet mindkét oldalának  $g$  nehézségi gyorsulással való osztása esetén:

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho g} &= \frac{c_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho g} \\ \frac{c^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} &= \text{állandó} \end{aligned} \quad (\text{V.6.12})$$

egyenletet kapjuk, melynek minden tagja hossz („magasság”) dimenziójú. Az első tagot **sebességi**, a másodikat **geometriai**, míg a harmadikat **nyomásmagasságnak** is nevezzük. A BERNOULLI egyenlet ezen alakját gyakran energia egyenletként is értelmezik. Az első tag valóban az egységnyi tömegű közeg kinetika, a második tag pedig a potenciális (helyzeti) energiáját jelenti a tér valamely pontján. Viszont fogalmilag helytelen a harmadik tag „nyomásenergia” elnevezése, mert ez nem energia, hanem az egységnyi tömegű kontinuum által a nyomásból származó erő ellenében végzett munka, amikor a közeg a vizsgált ponton áthalad — ez az áttolási munka.

Ha az (V.6.11) egyenlet oldalait a  $\rho$  sűrűséggel szorozzuk, azt a

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} c_1^2 + \rho gh_1 + p_1 &= \frac{\rho}{2} c_2^2 + \rho gh_2 + p_2 \\ \frac{\rho}{2} c^2 + \rho gh + p &= \text{állandó} \end{aligned} \quad (\text{V.6.13})$$

formában írhatjuk fel. Ekkor nyomásdimenziójú tagokat kapunk. Könnyen belátható, hogy az egyenlet első tagja a térfogategységnyi közeg kinetikai, a második pedig a potenciális energiáját jelenti a tér valamely pontján. Ezek a tagok tehát energia sűrűségként is értelmezhetők.

Vízszintes vagy elhanyagolható szintkülönbségű áramlás esetén a  $h$  geometriai magasság különbség zérusnak tekinthető. Ilyen esetekben az (V.6.13) egyenlet a

$$\frac{\rho}{2} c^2 + p = \text{állandó} = p_\delta \quad (\text{V.6.14})$$

alakot veszi fel, ahol az első tagot **dinamikus nyomásnak**, a második tagok **statikus nyomásnak** nevezzük. A két nyomás összege — a „középső oldalon” található állandó — pedig az úgynevezett **össznyomás**.

Az áramlásba helyezett merev test felületének azon pontjaiban, ahol az áramlási sebesség zérusra csökken, a (V.6.14) kifejezés értelmében össznyomást mérhetünk. Az ilyen pontokat **torlópontok**nak nevezzük.

## V.7. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [V.1] **BUDÓ Á.**, Kísérleti fizika I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. pp. 517.
- [V.2] **DOUGLAS, J.F. – GASIOREK, J.M. – SWAFFIELD, J.A.**, Fluid Mechanics, Longman House, Essex, 1995., pp. 819.
- [V.3] **PÁSZTOR, E. – KONECSNY, F. – STEIGER, I.**, Műszaki hő- és áramlástan I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981., pp. 789.
- [V.4] **PÁSZTOR, E. – KONECSNY, F. – STEIGER, I.**, Műszaki hő- és áramlástan II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1981., pp. 481.
- [V.5] **POKORÁDI, L.**, Aerodinamika I., Ideális közeg általános aerodinamikája, főiskolai jegyzet, MH. SzRTF, Szolnok 1992., pp. 141.
- [V.6] **POKORÁDI, L.**, Aerodinamika II., A súrlódásos és az összenyomható közeg áramlástan, főiskolai jegyzet, MH. SzRTF, Szolnok 1993., pp. 170.
- [V.7] **POKORÁDI, L.**, Áramlástan, elektronikus jegyzet, DE MFK, Debrecen, 2002., pp. 86.,  
<http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/aramlastan.pdf>.
- [V.8] **SÁLYI, B.**, Mechanika III. (Kinematika-kinetika), Tankönyvkiadó, Budapest, 1982., pp. 328.
- [V.9] **SZALAY, B.**, Fizika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979., pp. 922.
- [V.10] **SZŰCS, E.**, Hasonlóság és modell, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972., pp. 299.
- [V.11] **WHITE, F.M.**, Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1979., pp. 701.





## VI. FEJEZET

# DETERMINISZTIKUS RENDSZERMODELLEZÉS

### VI.1. BEVEZETÉS

A valós technikai rendszerekben lejátszódó fizikai folyamatokat általában determinisztikus modellek írjuk le. Jelen fejezetben a determinisztikus matematikai rendszermodellezés különböző módszereit ismertetjük. Természetesen, a mérnöki gyakorlatban az ismertetésre kerülő eljárásokon túl több is alkalmazható. Mivel jelen könyv egyik fő célja a Szerző eddigi tudományos munkájának rendszerező összegzése, így csak az általa korábban alkalmazott technikák bemutatására kerül sor.

A VI.3. fejezetben a nemlineáris matematikai modellek felállítási és megoldási lehetőségeit ismerheti meg az Olvasó, egy „állatorvos egyetemi ló”-ra emlékeztető rendszer példáján keresztül. Itt röviden kitérünk a különféle numerikus matematikai megoldási algoritmusokra is, melyekről részletesen többek közt a felhasznált irodalmakban felsorolt publikációkban olvashatunk. A VI.4. fejezet a lineáris diagnosztikai modellezést mutatja be. Az ezt követő fejezetek a matematikai modellek alkalmazási lehetőségeit szemlélteti a mérnöki gyakorlatban. A Szerző ezen témakörrel kapcsolatos eredményei, többek között, a [VI.8] – [VI.13] és [VI.16] irodalmakból ismerhető meg részletesebben.

### VI.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$D$	—	szórás;
$M$	—	várható érték;
$R; r$	—	korrelációs együttható
$x_i$	—	$i$ -edik független változó
$y_i$	—	$i$ -edik függő változó
$\varepsilon$	—	megkívánt közelítési pontosság;
$\eta$	—	általános paraméter (valószínűségi változó);
$\mu$	—	általános valószínűségi változó.

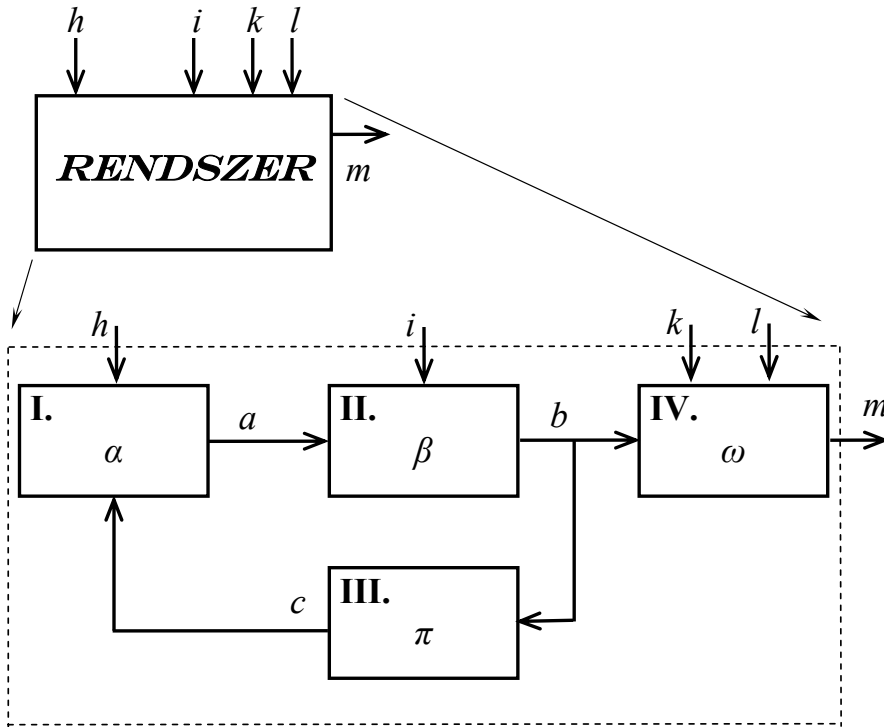
### VI.3. NEMLINEÁRIS MODELLEZÉS

Jelen fejezetben egy nemlineáris determinisztikus matematikai modell felállítását és megoldási módjait ismertetjük, egy mintapéldán keresztül. A VI.1. ábra szemlélteti a modellezendő rendszer blokkdiagramját.

Ekkor kijelenthetjük, hogy az I.; II.; III. és IV. aggregátokból álló halmaz jelenti a rendszert, mivel ezek együttes működését vizsgáljuk. Ez a

rendszer a környezettől  $h$ ;  $i$ ;  $k$  és  $l$  gerjesztő jeleket kap és azokra  $m$  válaszcíjjel reagál — azaz a rendszer több bemenetű, egy kimenetű (MISO).

Egy rendszer matematikai modelljének felállítását a rendszer funkcionális — a modellezett üzemmód szempontjából fontos — részegységeinek (aggregátjainak) meghatározásával kell kezdeni.

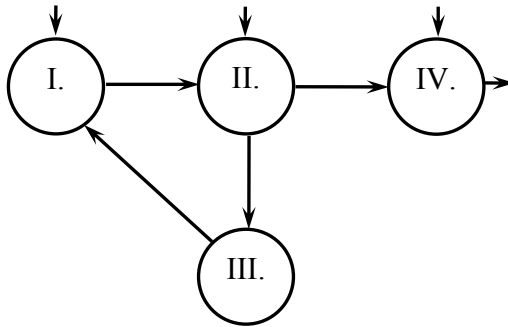


VI.1. ábra A modellezett rendszer blokkdiagramja

A funkcionális részegységekre bontáskor először ki kell szűrni azokat az aggregátokat, melyek a rendszer modellezett összműködésében alapvetően nem vesznek részt — azaz passzív elemek. Ezt a feladatot alapvetően a rendszerben lejátszódó folyamat fogalmi modellezésével tudjuk elvégezni. Például egy pneumatikus rendszer állandósult üzemmódjának modellezésekor el kell tekintenünk a szűrőktől. Mivel a szűrők előtti és utáni nyomások a rendszer állandósult — például befékezett — állapotában kiegyenlítődnek, ezért azokat, mint fojtások nem szükséges figyelembe venni. De, ugyanezen rendszer ki-, vagy befékezési folyamatának modellezésekor figyelembe kell vennünk.

Ezt követően a részegységek közti kapcsolatot célszerű megvizsgálni — a kapcsolati gráf felrajzolásával és annak vizsgálatával. Ezt az elemzést főleg akkor javasolt elvégezni, ha a rendszer sok részegységet tartalmaz, mert akkor a köztük lévő kapcsolat nehezen kezelhető „fejben”.

A VI.2. ábra a fenti, mintapélda rendszer kapcsolati gráfját, illetve a (VI.3.1) egyenlet a gráf szomszédossági mátrixát szemlélteti.



VI.2. ábra. A modellezett rendszer kapcsolati gráfja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.3.1})$$

A (VI.3.1) egyenlettel megadott szomszédossági mátrix alapján a gráf (azaz a rendszer) elérhetőségi mátrixa — a III.4. fejezetben ismertetett eljárás alapján:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (\text{VI.3.2})$$

Az elérhetőségi mátrixból jól látható, hogy a IV. jelű aggregátban lejátszódó folyamat nincs hatással a rendszer többi elemére. Ezzel egy időben megállapítható, hogy a másik három elemben fellépő valamilyen paraméter eltérés, meghibásodás hatást gyakorol a többi elem működésére is.

Következő feladat a kiválasztott részségegek be- és kimenő jellemzőit kell megvizsgálnunk és a köztük lévő fizikai kapcsolatot felírunk — a II.5.1. alfejezetben már ismertetett eljárások valamelyikével. Ez esetünkben:

→ I. berendezés:

$$a = hc\alpha \quad ; \quad (\text{VI.3.3})$$

→ II. berendezés:

$$b = a - i + \beta \quad ; \quad (\text{VI.3.4})$$

→ III. berendezés:

$$c = b\pi^k \quad ; \quad (\text{VI.3.5})$$

→ IV. berendezés:

$$m = \frac{2kl\omega^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{b} \quad , \quad (\text{VI.3.6})$$

vagy formailag egyszerűbb, vektor–vektor függvény alakban:

$$f(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{VI.3.7})$$

ahol:

$\mathbf{x}$  — független paraméterek vektora:

$$\mathbf{x}^T = [a \quad b \quad c \quad m] \quad ; \quad (\text{VI.3.8})$$

$\mathbf{y}$  — függő paraméterek vektora:

$$\mathbf{y}^T = [h \quad \alpha \quad i \quad \beta \quad \pi \quad k \quad l \quad \omega] \quad . \quad (\text{VI.3.9})$$

A fenti összefüggésekben  $\alpha$  ;  $\beta$  ;  $\pi$  és  $\omega$  a berendezések úgynevezett belső paraméterei. Például rugómerevség, áramlási keresztmetszet. Az  $a$  ;  $b$  ;  $c$  ;  $m$  ;  $h$  ;  $i$  ;  $k$  és  $l$  változók pedig a rendszer, illetve elemei bemeneti (gerjesztő) és kimeneti (válasz) jelei. Például környezeti nyomás, tömegáram, vagy leadott (esetleg felvett) teljesítmény.

A felállított modellt ezek után a numerikus megoldása és alkalmazása érdekében fel kell tölteni adatokkal — a II.5.3. alfejezetben leírtak szerint. Ekkor vagy a rendszerrel kapcsolatos leírásokat kell tanulmányoznunk, vagy a valós rendszeren kell méréseket végeznünk.

A nemlineáris — esetleg implicit — függvény, egyenletek, egyenletrendszerek (azaz matematikai modellek) megoldására számtalan matematikai módszer ismert, melyek részletesen megismerhetők például a [VI.1] [VI.2] [VI.3] és [VI.5] irodalmakból. Fontos azt is megjegyeznünk, hogy napjainkban jelentős számú matematikai programcsomag található kereskedelmi forgalomban. Ilyen például a MATLAB<sup>®</sup> program, mely szabályzástechnikai alkalmazásait a

[VI.18] és [VI.19] irodalmak mutatják be. A publikációk alapvető célja, hogy segítse és támogassa a műszaki szakemberek munkáját különféle szabályozástechnikai problémák, feladatok számítógépes megoldása során. Ezek segítségével a már viszonylag nagyméretű, és implicit nemlineáris modellek viszonylag gyorsan megoldhatók — a numerikus módszerek elmélyült ismerete nélkül is. A következőkben csak az alábbi módszereket fogjuk röviden ismertetni, melyeket leggyakrabban alkalmaznak különféle modellek megoldása során. Ezek:

- NEWTON-RAPHSON módszer;
- gradiens módszer.

### VI.3.1. NEWTON-RAPHSON MÓDSZER

Az

$$\begin{aligned} f_1(x_1; \dots; x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1; \dots; x_n) &= 0 \end{aligned},$$

vagy rövidebben felírva:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

(VI.3.10)

nemlineáris egyenletrendszer megoldásához feltételezzük, hogy a változók közelítő értékei ismertek és azokat az

$$\mathbf{x}^{(0)T} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \quad (\text{VI.3.11})$$

úgynevezett kezdővektorba rendezzük. A nulladik megközelítést adó  $\mathbf{x}^{(0)}$  vektorból kiindulva képezzük az  $\mathbf{x}^{(1)}$  vektort, úgy, hogy az  $f_1, f_2, \dots, f_n$  függvényeket linearizáljuk az  $\mathbf{x}^{(0)}$  pont körüli TAYLOR-sorok konstans és elsőfokú tagjainak felhasználásával. Szemléletes megfogalmazásban a felületeket érintősíkjaikkal helyettesítjük. Ha az így kapott

$$\begin{aligned} f_1(x^{(0)}) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n}(x_n - x_n^{(0)}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x^{(0)}) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{(0)}) + \dots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n}(x_n - x_n^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.3.12})$$

lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor azt választjuk az  $\mathbf{x}^{(1)}$  vektornak. Ezt mátrixalgebrai formában felírva, és a függvényrendszerhez

tartozó

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) = \left[ j_{il} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \right] \quad (\text{VI.3.13})$$

JACOBI mátrixot alkalmazva:

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{0} \quad . \quad (\text{VI.3.14})$$

Ha létezik egyértelmű megoldás, akkor az  $\mathbf{x}^{(1)}$  vektor a JACOBI mátrix inverzének felhasználásával meghatározható, azaz általános formában írva az  $\mathbf{x}^{(k+1)}$  vektor:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})f(\mathbf{x}^{(k)}) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad . \quad (\text{VI.3.15})$$

A fenti leírt közelítést addig kell alkalmaznunk, amíg:

$$\left| \frac{x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \quad , \quad i = 1 \dots n \quad (\text{VI.3.16})$$

egyenlőtlenség nem teljesül mindegyik változóra, ahol:

$\varepsilon$  — a megkívánt közelítési pontosság.

### VI.3.2. A GRADIENS MÓDSZER

A gradiens módszer lényege, hogy az  $n$  dimenziós térben a

$$|f(\mathbf{x})| = 0 \quad (\text{VI.3.17})$$

egyenlettel megadott nemlineáris függvény értékeinek változását mindig a szintfelületekre merőleges irányban haladva vizsgáljuk.

Kiindulva a nulladik megközelítést jelentő  $\mathbf{x}^{(0)}$  pontról, az  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(0)})$  szintfelülethez tartozó normális mentén addig haladunk, amíg el nem jutunk az  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(1)})$  szintfelületre — az első megközelítést jelentő  $\mathbf{x}^{(1)}$  pontba. Majd az előbbi módon meghatározzuk az  $\mathbf{x}^{(2)}$  pontot, és így tovább...

Azaz egy függvény gradiense az alábbi módon határozható meg:

$$\text{grad}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{VI.3.18})$$

ahol:

$\nabla$  — HAMILTON (nabla) operator:

$$\nabla^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1, \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{e}_n \right] ,$$

ahol  $\mathbf{e}_i$  az  $i$ -edik tengelyirányú egységvektor.

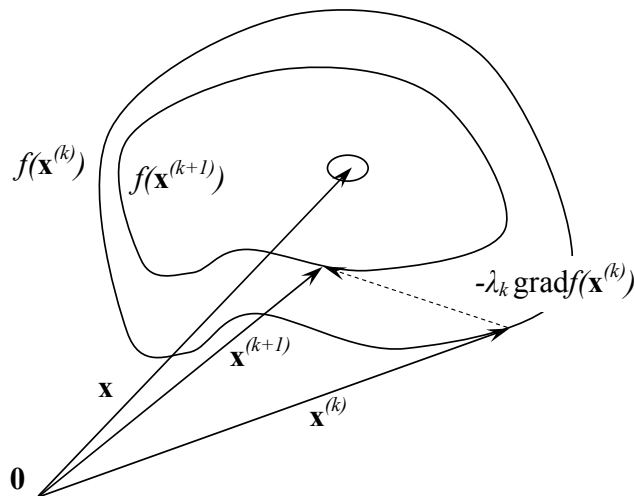
Így:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \lambda_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) , \quad (\text{VI.3.19})$$

Mivel

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) > f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(2)}) > \dots , \quad (\text{VI.3.20})$$

ha folytatjuk az eljárást, akkor gyorsan fogunk közeledni ahhoz a ponthoz, melyben az  $f(\mathbf{x})$  függvény kellő pontossággal kielégíti a (VI.3.17) egyenletet.



VI.3. ábra A gradiens módszer szemléltetése

A gradiens módszert főleg olyan technikai problémák megoldásánál célszerű alkalmaznunk, ahol az  $f(\mathbf{x})$  függvénynek van gradiense. Hátránya az, hogy könnyen „kifuthat” valamely helyi, lokális minimumra. Ezért alkalmazása előtt célszerű tanulmányozni, hogy a függvény milyen mértékben rendelkezhet lokális minimumokkal. Ha a függvényünk jelentős helyi minimumokkal bír, a gradiens módszer alkalmazása előtt az abszolút minimum hely környezetének behatárolásához például a RANDOM módszert célszerű használni. A

RANDOM módszer használatakor a kijelölt térrészben véletlenül generált pontok közül a legkisebb eltérést adó pontot kiválasztjuk. Majd következő lépésként az így kiválasztott pont körül egy kisebb teret kijelölve folytatjuk a minimum pont közelítését.

### VI.3.3. MINTAPÉLDA MEGOLDÁSA

A VI.1. ábrán szemléltetett rendszer matematikai modelljének tekinthetjük a (VI.3.3) — (VI.3.6) egyenletek alkotta egyenletrendszert. A modell feltöltése érdekében meghatároztuk a bemenőjelek, illetve a rendszer belső paramétereinek névleges értékeit, melyeket a VI.1. Táblázat tartalmazza.

A modell megoldására a NEWTON-RAPSHON módszert alkalmaztuk az I. üzemmód esetében felvett kiinduló adatok felhasználásával. A másik két üzemmód esetén pedig az előző üzemmód eredményeit használtuk fel a kezdővektor feltöltésére. A közelítési pontosságot

$$\varepsilon = 10^{-2}$$

értékben vettük fel.

Paraméter:	Névleges érték:		
	I. üzemmód	II. üzemmód	III. üzemmód
$h$	$1500^{\pm 10}$	$1600^{\pm 10}$	$1700^{\pm 10}$
$i$	$450^{\pm 10, -5}$		
$k$	$630^{\pm 5, -6}$		
$l$	$15,2^{\pm 0,05, -0,2}$		
$\alpha$	$0,75^{\pm 0,01}$		
$\beta$	$1,35^{-0,01}$		
$\pi$	$2,10^{\pm 0,03, -0,02}$		
$\omega$	$3,5^{\pm 0,02}$		
$\kappa$	1,4		

VI.1. Táblázat A modellezett rendszer névleges (független) paramétereit



A modelleredmények, a névleges és számított értékei, valamint azok relatív eltérései a VI.2. Táblázatban olvashatók. A modelleredmények értékelési és felhasználási lehetőségeit, azok módszereit a későbbi alfejezetekben fogjuk ismertetni.

Paraméter:	Érték:		
	I. üzemmód		
	modell eredmény:	névleges érték:	relatív eltérés:
<i>a</i>	448,791	450	0,002687
<i>b</i>	0,14118	0,14	-0,00843
<i>c</i>	0,39892	0,40	0,0027
<i>m</i>	194033,787	194000	-0,00017
	II. üzemmód		III. üzemmód
<i>a</i>	448,782		448,775
<i>b</i>	0,13236		0,12457
<i>c</i>	0,37398		0,35198
<i>m</i>	206973,445		219913,102

VI.2. Táblázat Modelleredmények

#### VI.4. LINEÁRIS MODELLEZÉS

Egy rendszer lineáris diagnosztikai modelljének felállításához az eredeti — általában nem lineáris — modellt, azaz egyenletrendszert valamilyen módon linearizálni kell. Ekkor egy olyan lineáris egyenletrendszert kapunk, amely a vizsgált rendszer paramétereinek relatív változásai közti kapcsolatot írja le. A linearizáláshoz általában az alábbi módszerek valamelyikét célszerű választani:

- logaritmikusan linearizálás;
- teljes deriválás;
- TAYLOR-sorfejtés módszere;
- LIE-MAGNUS-sorfejtés módszere.

Ezek közül részletesen a — kevésbé ismert — logaritmikusan linearizálást fogjuk bemutatni. Ezt a linearizálási módszert sok esetben célszerű alkalmazni hőtani folyamatokat leíró modellek esetén, amikor a különféle (például nyomás) arányok hatványai szerepelnek az egyenletekben.

## VI.4.1. LOGARITMIKUS LINEARIZÁLÁS

Ennek a módszernek a lényege az, hogy a korábban leírt

$$y = f(x_1; x_2; \dots x_n) \quad (\text{VI.4.1})$$

egyenlet mindkét oldalának

$$\ln y = \ln f(x_1; x_2; \dots x_n) \quad (\text{VI.4.2})$$

természetes alapú logaritmusát vesszük és ezt az egyenletet mindegyik (kiválasztott) változó szerint differenciáljuk, kihasználva az

$$(\ln \eta)' = \frac{1}{\eta} \quad , \quad (\text{VI.4.3})$$

elemi derivált függvényt. Ekkor egy olyan egyenletet kapunk, mely a paraméterek

$$\frac{d\eta}{\eta} \approx \frac{\Delta\eta}{\eta} = \delta\eta \quad (\text{VI.4.4})$$

relatív változásai közti kapcsolatot írja le, azaz az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\delta y = K_1 \delta x_1 + K_2 \delta x_2 + \dots K_n \delta x_n \quad . \quad (\text{VI.4.5})$$

Most nézzük az előző fejezetben felállított nemlineáris modell — a (VI.3.3) – (VI.3.6) egyenletek alkotta egyenletrendszer — esetére a logaritmusos linearizálás folyamatát:

→ A (VI.3.3) egyenlet mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát:

$$a = hc\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln a = \ln(hc\alpha) = \ln h + \ln c + \ln \alpha \quad , \quad (\text{VI.4.6})$$

majd annak teljes deriválása:

$$\frac{da}{a} = \frac{dh}{h} + \frac{dc}{c} + \frac{d\alpha}{\alpha} \quad , \quad (\text{VI.4.7})$$

azaz:

$$\delta a = \delta h + \delta c + \delta \alpha \quad . \quad (\text{VI.4.8})$$

→ A (VI.3.4) egyenlet esetén:

$$b = a - i + \beta \quad \Rightarrow \quad \ln b = \ln(a - i + \beta) \quad . \quad (\text{VI.4.9})$$

annak teljes deriváltja:

$$\frac{db}{b} = \frac{1}{a - i + \beta} da - \frac{1}{a - i + \beta} di + \frac{1}{a - i + \beta} d\beta \quad (\text{VI.4.10})$$

Ebben az esetben mindegyik tagok meg kell bővítenünk  $\frac{x_i}{x_i}$ -vel, így:

$$\frac{db}{b} = \frac{a}{a(a - i + \beta)} da - \frac{i}{i(a - i + \beta)} di + \frac{\beta}{\beta(a - i + \beta)} d\beta \quad , \quad (\text{VI.4.11})$$

azaz:

$$\delta b = \frac{a}{a - i + \beta} \delta a - \frac{i}{a - i + \beta} \delta i + \frac{\beta}{a - i + \beta} \delta \beta \quad . \quad (\text{VI.4.12})$$

→ Az (VI.3.3) egyenlet esetén:

$$c = b\pi^\kappa \quad \Rightarrow \quad \ln c = \ln b + \kappa \ln \pi \quad , \quad (\text{VI.4.13})$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{db}{b} + \kappa \frac{d\pi}{\pi} \quad , \quad (\text{VI.4.14})$$

így:

$$\delta c = \delta b + \kappa \delta \pi \quad . \quad (\text{VI.4.15})$$

→ A (VI.2.4) egyenlet esetén:

$$e = \frac{2kl\omega^\kappa}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln e = \ln 2 + \ln k + \ln l + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \ln \omega - \ln b \quad . \quad (\text{VI.4.16})$$

Mivel az állandó ( $\ln 2$ ) deriváltja zérus:

$$\frac{de}{e} = \frac{dk}{k} + \frac{dl}{l} + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{d\omega}{\omega} - \frac{db}{b} \quad , \quad (\text{VI.4.17})$$

vagy más formában:

$$\delta e = \delta k + \delta l + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \delta \omega - \delta b \quad . \quad (\text{VI.4.18})$$

### VI.4.2. TELJES DERIVÁLÁS

Ezen eljárás alkalmazása során az eredeti

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (\text{VI.4.19})$$

egyenlet mindkét oldalának

$$dy = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_n} dx_n \quad (\text{VI.4.20})$$

teljes deriváltját képezzük, majd mindkét oldal mindegyik tagját bővítjük  $\frac{x_i}{x_i}$ -vel, azaz:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_1} \frac{x_1}{f(x_1; x_2; \dots; x_n)} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_n} \frac{x_n}{f(x_1; x_2; \dots; x_n)} dx_n \quad (\text{VI.4.21})$$

A

$$K_i = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x_1; x_2; \dots; x_n)} \quad (\text{VI.4.22})$$

együttható bevezetésével, és a (VI.4.4) egyenlet felhasználásával az alábbi lineáris egyenletet kapjuk:

$$\delta y = K_1 \delta x_1 + \dots + K_n \delta x_n \quad (\text{VI.4.23})$$

### VI.4.3. TAYLOR (LIE-MAGNUS) SORFEJTÉS

Ekkor az eredeti

$$y = f(x_1; x_2 \dots x_n) \quad (\text{VI.4.24})$$

egyenletet az

$$y + \Delta y = f(x_1; x_2 \dots x_n) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_1^i} \frac{1}{i!} \Delta x_1^i + \dots + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_n^i} \frac{1}{i!} \Delta x_n^i \quad (\text{VI.4.25})$$

TAYLOR-sorba fejtjük, majd a magasabb rendű (magasabb fokszámú) tagokat elhanyagoljuk, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\Delta y = \frac{\partial f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_n} \Delta x_n \quad , \quad (\text{VI.4.26})$$

melynek mindkét oldalát elosztuk az eredeti — (VI.4.24) — egyenlet azonos oldalával, azaz:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\partial f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_1} \frac{1}{f(x_1; x_2 \dots x_n)} \frac{x_1}{x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(x_1; x_2 \dots x_n)}{\partial x_n} \frac{1}{f(x_1; x_2 \dots x_n)} \frac{x_n}{x_n} \Delta x_n \quad . \quad (\text{VI.4.27})$$

Felhasználva a (VI.4.4) és a (VI.4.22) egyenleteket kapjuk meg a

$$\delta y = K_1 \delta x_1 + \dots + K_n \delta x_n \quad (\text{VI.4.28})$$

keresett lineáris egyenletet.

Ezt az eljárást akkor célszerű alkalmazni, ha az eredeti egyenlet többször is deriválható. Többek között a lineáris repülésmechanikai modellek felállításakor alkalmazzák.

A LIE-MAGNUS-sorfejtést, mátrixegyenletek linearizálására alkalmazhatjuk, (durván egyszerű megfogalmazásban) mint „mátrixos TAYLOR-sorba fejtés” nevezhetjük. A módszerről, illetve annak alkalmazásáról (a rakétatestek szilárdsági méretezésben) a [VI.7] irodalomban olvashatunk.

#### VI.4.4. A DIAGNOSZTIKAI MÁTRIX

A (VI.4.8); (VI.4.12); (VI.4.15) és (VI.4.18) egyenletek alkotják a VI.1. ábrán szemléltetett rendszer lineáris (linearizált) matematikai diagnosztikai modelljét. Ezek az egyenletek — mint már azt korábban is hangsúlyoztuk — a függő ( $\delta \mathbf{y}$ ) és független ( $\delta \mathbf{x}$ ) jellemzők relatív eltérései közti kapcsolatot írják lineárisan — lásd (VI.3.8) és (VI.3.9) egyenleteket. Ez a kapcsolat mátrix formában az alábbi módon írható fel:

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{y} = \mathbf{B} \delta \mathbf{x} \quad , \quad (\text{VI.4.29})$$

ahol:  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  a rendszer külső és belső paramétereinek együttható mátrixai, melyek a fenti példa rendszer esetén az alábbiak lesznek:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{a}{a-i+\beta} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.4.30})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{a-i+\beta} & \frac{\beta}{a-i+\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{\kappa-1}{\kappa} \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.4.31})$$

Bevezetve a

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{VI.4.32})$$

diagnosztikai mátrixot, a (VI.4.29) egyenlet a

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{D}\delta\mathbf{x} \quad (\text{VI.4.33})$$

alakúra módosul.

#### VI.4.5 MINTAPÉLDA MEGOLDÁSA

Figyelembe véve a VI.1., valamint a VI.2. Táblázatban meghatározott paraméterértékeket, a vizsgált rendszer együtttható mátrixai (azok elemei) az alábbi értékeket fogják felvenni — az I. ( $h = 1500$ ) üzemmód esetén:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3178,77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.4.34})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3187,33 & 9,562 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0,285 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.4.35})$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0003 & -0,0003 & -0,0003 & 0,0000 \\ -1,0003 & -0,0003 & -1,0003 & 0,0000 \\ -1,0003 & -0,0003 & -0,0003 & 0,0000 \\ 1,0003 & 0,0003 & 1,0003 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.4.36})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0,00031 & -0,00031 & 1,00300 & -0,00301 & -0,00044 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ -1,00031 & -1,00031 & 1,00301 & 0,00301 & -1,40044 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ -1,00031 & -1,00031 & 1,00301 & -0,00301 & -0,00044 & 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 \\ 1,00031 & 1,00031 & -1,00301 & 0,00301 & 1,40044 & 1,00000 & 1,00000 & 0,28500 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.4.37})$$

Az így meghatározott lineáris diagnosztikai modell, diagnosztikai mátrix alkalmazási lehetőségeit a következő fejezetben fogjuk ismertetni.

## VI.5. ÉRZÉKENYSÉGVIZSGÁLAT

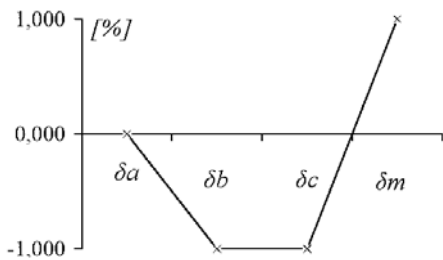
Az előző fejezetben felállított lineáris és nem lineáris matematikai modellek felhasználhatók a vizsgált rendszer érzékenységvizsgálatának elvégzésére. Ezen elemzés lényege, hogy a független változók értékeinek — azaz az  $\mathbf{x}$ , illetve a  $\delta\mathbf{x}$  vektor elemeinek — megváltoztatásával szimuláljuk az adott részegység vagy alkatrész meghibásodását, elhasználódását, a gyártási eltéréseket, vagy a környezeti hatások megváltozását. A felállított matematikai modellek felhasználásával — az adott egyenletek megoldásával — meghatározható, hogy miként fognak változni a függő változók — azaz az  $\mathbf{y}$ , illetve a  $\delta\mathbf{y}$  vektorok elemei. Így ez az elemzés megmutatja a rendszer érzékenységét a különféle modellezett paraméter-eltérésre, vagy eltérésekre. Ha egyszerre csak egy független változó értékét változtatjuk — egyparaméteres (lásd a VI.3. ábrát), ha több értékét módosítjuk — többparaméteres érzékenységvizsgálatról (lásd VI.4. ábra grafikonjait) beszélünk.

Fontos itt hangsúlyozni, hogy ezt a vizsgálatot — mint, minden modell vizsgálatot — nem a valós rendszeren, hanem annak (jelen esetben a matematikai) modelljén tudjuk elvégezni. Ez jelenti a modellvizsgálatok egyik legnagyobb előnyét, mivel az elemzéshez nem kell a valós rendszer részegységeit tönkretenni, hogy annak káros — esetleg katasztrofális — következményeit megismerhessük. A matematikai modell esetén történő alkalmazására a VI.8. fejezetben olvashatunk konkrét példát.

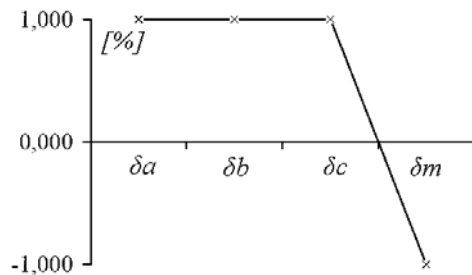
Az érzékenységvizsgálat elvégzésekor mindig figyelembe kell vennünk azt, hogy a vizsgált rendszerünk, így az (eredeti) modellünk nemlineáris. Ezért a vizsgálat során — az (eredeti) modell, vagy a rendszer „nemlinearitása” függvényében — a független változók értékeit általában csak 1 ~ 2 %-al lehet változtatni.

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>m</i>
<b><math>\delta h = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
$-3,14686 \cdot 10^{-4}$	-1,00031	-1,00031	1,00031
<b><math>\delta h = + 1 \% \text{ — } h = 1600</math></b>			
$-2,94216 \cdot 10^{-4}$	-1,00029	-1,00029	1,00029
<b><math>\delta h = + 1 \% \text{ — } h = 1700</math></b>			
$-2,78614 \cdot 10^{-4}$	-1,00028	-1,00028	1,00028
<b><math>\delta \alpha = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
1,00301	1,00301	1,00301	-1,00301
<b><math>\delta \pi = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
$-4,40560 \cdot 10^{-4}$	-1,40044	$-4,40560 \cdot 10^{-4}$	1,40044
<b><math>\delta \omega = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
0,00000	0,00000	0,00000	0,28571
<b><math>\delta h = + 1 \% \text{ és } \delta \alpha = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
$-6,2937 \cdot 10^{-4}$	-2,00062	-2,00062	2,00062
<b><math>\delta \beta = + 1 \% \text{ és } \delta \pi = + 1 \% \text{ — } h = 1500</math></b>			
$-3,44958 \cdot 10^{-3}$	-1,40344	$-3,44959 \cdot 10^{-3}$	1,40344

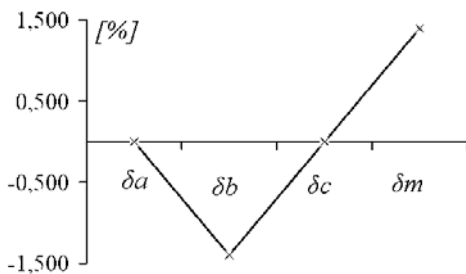
VI.3. Táblázat Az érzékenységvizsgálat eredményei



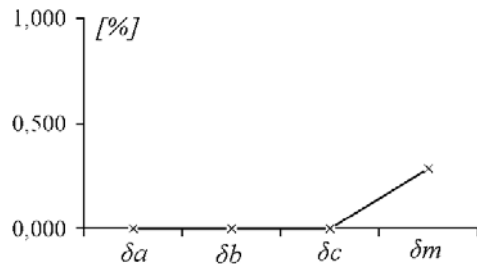
$\delta h = + 1 \% \quad h = 1500$



$\delta i = + 1 \% \quad h = 1500$



$\delta \pi = + 1 \% \quad h = 1500$

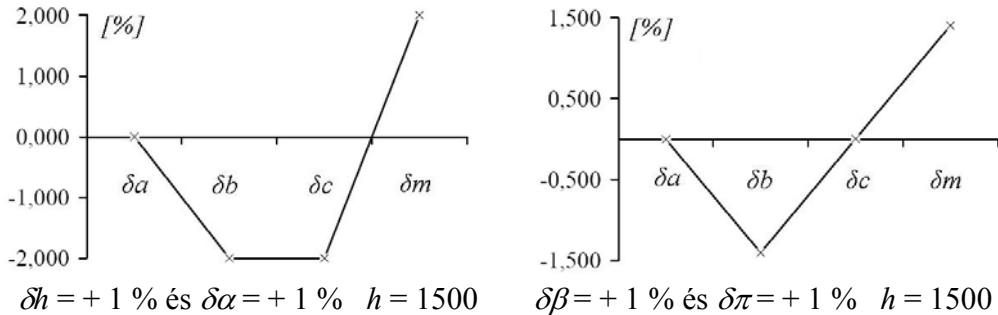


$\delta \omega = + 1 \% \quad h = 1500$

VI.4. ábra Egyparaméteres érzékenységvizsgálatok eredményei

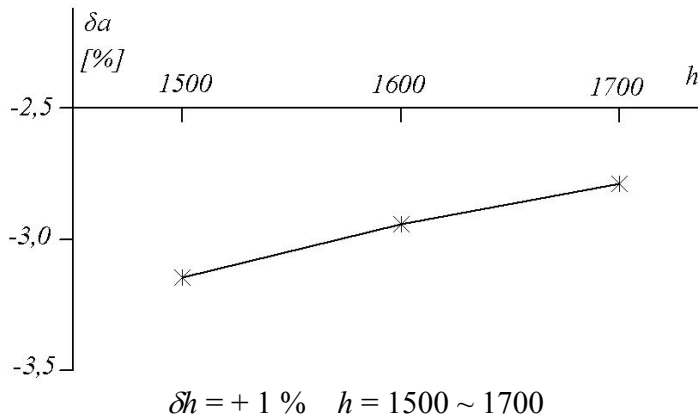


Példaképpen, az előző fejezetben felállított nemlineáris mintapélda modell felhasználásával elvégzett érzékenységvizsgálat eredményeit a VI.3. Táblázat, valamint a VI.4. – VI.6. ábrák szemléltetik. Természetesen ez az elemzés még ennél az egyszerű rendszer esetén is számtalan modellezhető szituációt enged meg az elemzést végző szakemberek számára. (Az érzékenységvizsgálat eredményeinek egy másik felhasználási lehetőségét ismerteti a VI.6. fejezet.)



VI.5. ábra Kétparaméteres érzékenységvizsgálatok eredményei

Természetes az érzékenységvizsgálat elvégezhető a rendszer több munkapontján is. Erre mutat példát a VI.6. ábra, mely az  $a$  paraméter  $h$  független jellemző 1 %-os növekedésére mutatott érzékenységét szemlélteti a rendszer VI.3. fejezetben már modellezett üzemmódjai esetén.



VI.6. ábra Az  $a$  paraméter érzékenysége különböző üzemmódokon

A fenti eredményekből több következtetést lehet levonni a modellezett rendszer viselkedésével kapcsolatban. Ezek például az alábbiak:

→ a IV berendezés (és a teljes rendszer)  $m$  kimenő jele a legtöbb esetben

ellentétes értelmű (előjelű) érzékenységet mutat a többi függő paraméterhez képest;

- a IV. berendezés belső paramétereinek változásai nincsenek hatással a rendszer többi elemének kimenő jeleire. (ez az eredmény már várható volt a VI.3. fejezet elején meghatározott elérhetőségi mátrix vizsgálata alapján).

## VI.6. KORRELÁCIÓS-CSALÁD VIZSGÁLAT

A különféle technikai rendszerek diagnosztikai elemzésének egyik formája a vizsgált rendszer mérhető, külső jellemzőinek korrelációs-család vizsgálata.

Az elemzés célja statisztikai módszerrel megállapítani, hogy a rendszer külső jellemzői milyen korrelációs kapcsolatban vannak egymással a belső jellemzők eltéréseinek hatására fellépő változásukkor [VI.17]. A korrelációs együttható a valószínűségi változók közötti sztochasztikus kapcsolat erősségét jellemzi [VI.14]. A vizsgálati eredmény — az úgynevezett korrelációs gráf — felhasználásával határozhatók meg a külső jellemzők azon családjai, melyeken belül a paraméterek erős egymás közti korrelációval rendelkeznek. Ezekből a családokból kiválaszthatók azok a fizikai vagy technikai mennyiségek, melyek mérésével a legkevesebb számú, kellő pontosságú és technikailag könnyen kivitelezhető méréssel, de a megfelelő biztonsággal megállapítható a rendszer pillanatnyi műszaki állapota.

Két erős, pozitív korrelációval bíró jellemző közül, ha az egyik valamely irányba változik — a korrelációs együtthatónak megfelelően — nagy valószínűséggel a másik is abban az irányban módosul. Erős negatív korreláció esetén természetesen ellenkező előjelűek a változások. Ebben az esetben pedig elegendő csak az egyik — pontosabban vagy technikailag könnyebben mérhető — paramétert mérni.

A korrelációs-család vizsgálattal a rendszer mérhető, külső jellemzőinek egymás közti sztochasztikus kapcsolatait vizsgáljuk. A módszer segítségével állapíthatjuk meg, hogy *optimálisan* mely jellemzőket célszerű mérni a rendszer üzemeltetése során.

Két valószínűségi változó közötti sztochasztikus kapcsolat erősségét a korrelációs együtthatóval jellemezhetjük. Az  $\eta$  és a  $\mu$  véges pozitív szórású valószínűségi változók korrelációs együtthatójának a

$$R(\eta, \mu) = \frac{M[(\eta - M(\eta))(\mu - M(\mu))]}{D(\eta)D(\mu)} \quad (\text{VI.6.1})$$

mennyiséget nevezzük [VI.15], ahol:

- $M$  — a valószínűségi változó várható értéke;  
 $D$  — a valószínűségi változó szórása.

Ha  $\eta$  és  $\mu$  egymástól független valószínűségi változók, akkor

$$R(\eta, \mu) = 0 \quad . \quad (\text{VI.6.2})$$

Ha

$$R(\eta, \mu) > 0 \quad , \quad (\text{VI.6.3})$$

akkor  $\eta$  és  $\mu$  között pozitív korrelációról beszélünk. Ebben az esetben ha fennáll az

$$\eta > M(\eta) \quad (\text{VI.6.4})$$

egyenlőtlenség általában arra következtethetünk, hogy a

$$\mu > M(\mu) \quad (\text{VI.6.5})$$

egyenlőtlenség is fennáll, és fordítva . Ez azt jelenti, hogy ekkor várhatólag mindkét változó értékének eltérése a várható értékétől azonos előjelű lesz. Negatív korreláció esetén pedig a két valószínűségi változó várható értékeiktől való eltérése nagy valószínűséggel ellentétes előjelű lesz.

Fontos megjegyeznünk, hogy a korrelációs együttható értéke mindig -1 és +1 közé esik, azaz:

$$-1 \leq R(\eta, \mu) \leq 1 \quad . \quad (\text{VI.6.6})$$

Az  $R(\eta, \mu)$  korrelációs együtthatót az  $\eta$  és  $\mu$  változókra vonatkozó  $x_1; x_2; \dots; x_n$ ; illetve  $y_1; y_2; \dots; y_n$  minták alapján az

$$r_{\eta\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \left( y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)^2}} \quad . \quad (\text{VI.6.7})$$

képletel becsüljük [VI.6].

Több valószínűségi változó esetén a (VI.6.7) egyenlet alapján páronként statisztikailag meghatározott  $r_{ij}$  együtthatókat az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & r_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.8})$$

korreláció-mátrixba rendezhetjük. A korreláció-mátrix mindig szimmetrikus és főátlójának elemei mindig eggyel egyenlők, azaz:

$$r_{jj} = 1 \quad (\text{VI.6.9})$$

$$r_{ij} = r_{ji}$$

A korrelációs-család vizsgálathoz — a statisztikai elemzés elvégzése érdekében — a külső jellemzők értékeinek kellő számú sokasága szükséges. Ezen adathalmaz ismeretéhez a vizsgált rendszert, vagy annak modelljét tudjuk alkalmazni. A gyakorlati megvalósíthatóság szempontjából legcélszerűbb a rendszer lineáris vagy nemlineáris matematikai modelljét felhasználnunk.

Első lépésként a nem mérhető belső, illetve a környezeti jellemzők valós értékeinek eloszlását határozzuk meg. Ehhez felhasználhatók a modell feltöltésekor, illetve a rendszer üzemeltetési sajátosságainak elemzésekor kapott adatok. Az első esetben példaként említhetjük a különböző geometriai adatok felvételét vagy valamely technikai jellemző (például rugómerevség) meghatározását. A másodikon pedig rendszer környezete által meghatározott környezeti paraméterek vizsgálatát értjük.

A fenti statisztikai eloszlások jellege, és paraméterei ismeretében gerjesztjük a modellt. Ekkor a fentiekben meghatározott eloszlások alapján a belső és a környezeti jellemzők véletlenszerűen felvett értékeit, mint kiinduló adatokat felhasználva oldjuk meg a rendszer matematikai modelljét a mérhető, külső jellemzőkre. A kapott eredmények alapján meghatározzuk — a (VI.6.7) egyenlet felhasználásával — a vizsgálandó külső jellemzők közti korrelációs együtthatókat és azokat a korreláció-mátrixba rendezzük — példaként lássuk az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,00 & -0,40 & 0,95 & -0,80 & -0,20 \\ -0,40 & 1,00 & 0,60 & 0,15 & 0,70 \\ 0,95 & 0,60 & 1,00 & -0,30 & 0,45 \\ -0,80 & 0,15 & 0,30 & 1,00 & 0,51 \\ -0,20 & 0,70 & 0,45 & 0,51 & 1,00 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.6.10})$$

korrelációs mátrixot, majd

- kiválasztjuk a legnagyobb abszolút értékű együtthatót a mátrixból — a főátló elemeinek figyelmen kívül hagyásával — és a hozzá tartozó két paramétert egy gráf szögpontjaiként ábrázoljuk. Az összekötő élre felírjuk a korrelációs együttható értékét (VI.7a. ábra).
- Az utolsó két paraméter sorában vagy oszlopában megkeressük a legnagyobb abszolút értékű korrelációs együtthatót úgy, hogy a már ábrázolt paramétereket és a főátló elemeit figyelmen kívül hagyjuk. Az így kiválasztott újabb paramétert illetve az együtthatót — fenti módon — ábrázoljuk a gráfban (VI.7b. ábra).
- Ez utóbbit addig ismételjük, míg az összes paramétert nem ábrázoljuk a gráfon (VI.7c. – VI.7d. ábrák).
- A gráfon a meghatározott határértékkel kijelöljük a korrelációs-családokat úgy, hogy a család rész grábján belül nem lehet a határértéknél kisebb kapcsolat.

A fenti módon meghatározott családokból kell kiválasztanunk azokat a jellemzőket, melyeket a legcélszerűbb mérni. A kiválasztásnál figyelembe kell vennünk, hogy az adott paraméter milyen kapcsolatban van a család többi tagjával, mérése technikailag hogyan oldható meg, vagy mérésével milyen információtartalmú adatot kapunk.

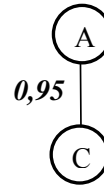
A korrelációs-család vizsgálat alkalmazásának egyik jelentős kérdése a családok elválasztásához szükséges határérték meghatározása. Ekkor figyelembe kell vennünk a rendszer sajátosságait, technikai és anyagi lehetőségeinket, illetve a műszaki állapot meghatározásának szükséges pontosságát. Fontos szempontként kell kezelnünk a rendszer meghibásodásának, hibás működésének következményeit (például katasztrófa, vagy csak zavar). Általában határértéknek 0,5 ~ 0,8 közötti értéket célszerű választani [VI.12].

Ha magas határértéket választunk, akkor több családot kapunk. Ekkor a mérések alapján pontosabb képhez jutunk a rendszer pillanatnyi műszaki állapotáról, de a több család több mérendő paramétert is jelent. Ez nagyobb technikai és így anyagi befektetést igényel. Ha viszont alacsony határértéket választunk, a családok, és így a mérendő paraméterek száma csökkeni fog. Ebben az esetben kisebb lesz a technikai és anyagi befektetés, de a rendszerről kapható információ is jelentősen csökken, vagy csökkenhet. Ezért igényel megfontolást a határérték megállapítása.

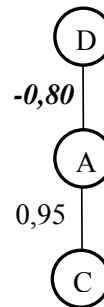
A vizsgálat elvégzésének másik fontos kérdése a korrelációs együtthatók meghatározásához szükséges minták (gerjesztések) számának meghatározása. Ezen probléma megoldásához a statisztikai minták, azaz a modell gerjesztésének számát fokozatosan célszerű növelnünk és a korrelációmátrixok elemeit meghatároznunk. Ezt addig szükséges folytatnunk, amíg az előző minta-számhoz tartozó korrelációmátrixhoz képest az azonos elemek közti legnagyobb különbség nem csökkent egy határérték — általában 0,01 — alá [VI.11].

A korrelációs-család vizsgálat elvégzése után a kijelölt családokból a mérendő paramétereket technikai, mérhetőségi és más diagnosztikai szempontok figyelembevételével kell kiválasztanunk.

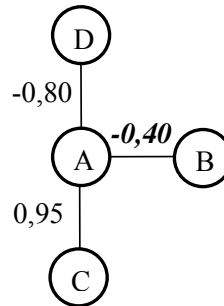
	A	B	C	D	E
A		-0,40	0,95	-0,80	-0,20
B	-0,40		0,60	0,15	0,70
C	<b>0,95</b>	0,60		-0,30	0,45
D	-0,80	0,15	-0,30		0,51
E	-0,20	0,70	0,45	0,51	



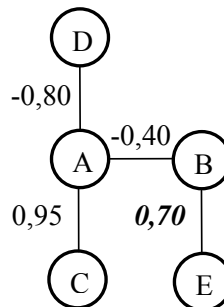
	A	B	C	D	E
A		-0,40	0,95	-0,80	-0,20
B	-0,40		0,60	0,15	0,70
C	0,95	0,60		-0,30	0,45
D	<b>-0,80</b>	0,15	-0,30		0,51
E	-0,20	0,70	0,45	0,51	



	A	B	C	D	E
A		-0,40	0,95	-0,80	-0,20
B	<b>-0,40</b>		0,60	0,15	0,70
C	0,95	0,60		-0,30	0,45
D	-0,80	0,15	-0,30		0,51
E	-0,20	0,70	0,45	0,51	



	A	B	C	D	E
A		-0,40	0,95	-0,80	-0,20
B	-0,40		0,60	0,15	0,70
C	0,95	0,60		-0,30	0,45
D	-0,80	0,15	-0,30		0,51
E	-0,20	<b>0,70</b>	0,45	0,51	



d

VI.7. ábra A korrelációs-család vizsgálat

## VI.7. ÁLLAPOTBECSLÉS

A VI.4. fejezetben felállított

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{B}\delta\mathbf{x}(\tau) \quad . \quad (\text{VI.7.1})$$

alakú lineáris matematikai diagnosztikai modell felhasználható a modellezett rendszer pillanatnyi műszaki állapotának meghatározására. Ekkor a mérhető külső jellemzők ismeretében, alkalmas numerikus módszer felhasználásával megbecsülhetjük a közvetlenül nem mérhető, nem meghatározható belső jellemzők pillanatnyi értékét, és így a rendszer műszaki állapotát.

Az állapotbecslés lehetővé teszi, hogy a belső jellemzők, azaz az alkatrészek állapota meghatározható a diagnosztizált rendszer szétszerelése nélkül. Így jelentősen csökkenthető a kemény idő (kötött üzemidő) szerinti karbantartási stratégiára jellemző az időszakos ellenőrzések során történt tévedések, illetve az ezekből származó meghibásodások száma és következménye.

A (VI.7.1) egyenlet felhasználásával, a mérhető, külső jellemzők, illetve az  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  együttható-mátrixok elemeinek ismerete alapján határozhatók (becsülhetők) meg a belső jellemzők értékei, azaz a rendszer pillanatnyi műszaki állapota.

Ha a belső jellemzők  $\mathbf{A}$  együtthatómátrixa invertálható, hagyományos módon, a

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad (\text{VI.7.2})$$

diagnosztikai mátrix felhasználásával, azaz a

$$\delta\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{D}\delta\mathbf{x}(\tau) \quad ,$$

azaz

$$\delta\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{D}\delta\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{0} \quad (\text{VI.7.3})$$

egyenlet alapján kell megbecsülni a belső jellemzők relatív eltéréseinek  $\delta\mathbf{x}$  vektorát.

Abban az esetben, amikor belső jellemzők  $\mathbf{A}$  együtthatómátrixa nem invertálható, az

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\delta\mathbf{y}(t) \quad (\text{VI.7.4})$$

segédvektor bevezetésével módosítható a (VI.7.3) egyenlet. Ekkor azt a  $\delta\mathbf{x}$  vektort kell megbecsülnünk, amely teljesíti az

$$\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{B}\delta\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{0} \quad (\text{VI.7.5})$$

egyenlőséget [VI.9].

A (VI.7.3.), illetve a (VI.7.5) egyenletekkel meghatározott feladat valamilyen numerikus módszerrel oldható meg, melyekkel — röviden — a VI.3. fejezetben már megismerkedtünk. Ekkor

$$f(\delta\mathbf{x}) = (\delta\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{D}\delta\mathbf{x}(\tau))^2, \quad (\text{VI.7.6})$$

illetve

$$f(\delta\mathbf{x}) = (\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{B}\delta\mathbf{x}(\tau))^2 \quad (\text{VI.7.7})$$

skalár–vektor függvény minimumát kell keresnünk.

A technikai rendszer pillanatnyi műszaki állapotainak egyszerűen kezelhető, de egzakt összehasonlítása érdekében úgynevezett jellemző paramétereket célszerű meghatározni. Jellemző paraméter a rendszer felhasználásával, üzemeltetésével kapcsolatos legfontosabb jellemző lehet. Ez vagy egy belső jellemző, vagy azokból közvetlenül meghatározható paraméter lehet. Például ilyen jellemző sugárhajtóművek esetén a tolóerő vagy a leadott hasznos teljesítmény.

A [VI.12] irodalomban részletesen tanulmányozható egy, a Mi-8 *Hip* helikopter fékfelegő rendszer állapotbecslését végző eljárást. Ekkor külső és belső változók relatív eltéréseinek vektora:

$$\delta\mathbf{y}^T = [\delta p_H \quad \delta p_b \quad \delta p_a \quad \delta z_1 \quad \delta z_2 \quad \delta z_3 \quad \delta z_4 \quad \delta p_t] , \quad (\text{VI.7.8})$$

$$\delta\mathbf{x}^T = [\delta p_c \quad \delta F_{s1} \quad \delta F_{s2} \quad \delta F_{s3} \quad \delta s_1 \quad \delta F_1 \quad \delta s_2 \quad \delta F_2 \quad \delta s_3 \quad \delta F_3 \quad \delta s_4 \quad \delta F_4] , \quad (\text{VI.7.9})$$

voltak, ahol:

$p_H$	—	környezeti nyomás;
$p_b$	—	féknyomás;
$p_a$	—	fékezés utáni tartálynomás;
$z_i$	—	$i$ -edik fékpofa fékérése;
$p_c$	—	vezérlőnyomás;
$F_{si}$	—	$i$ -edik rugó ereje;



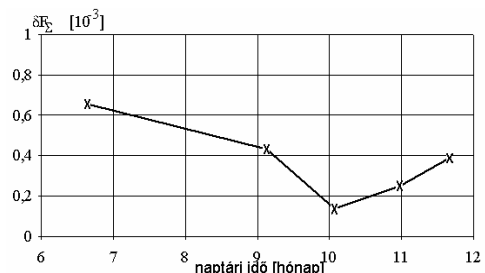
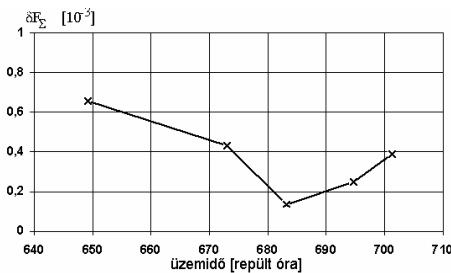
$s_i$  —  $i$ -edik visszahúzó rugó rugómerevsége;  
 $F_i$  —  $i$ -edik fékpofa nyomó ereje

A vektorok meghatározása úgy történt, hogy a külső jellemzők vektorába a jelenleg is mérhető paramétereket kerültek. Azért volt szükséges ezen megoldás választása, mert a kidolgozott módszert egy olyan technikai eszközön kellett — lehetett — alkalmazni, amelyiket eredetileg nem az állapotszerinti üzemeltetésre tervezték. Az így kapott együtthatómátrixokat adják meg a (VI.7.10) és (VI.7.11) egyenletek (a mátrix elemeinek részletes kifejezésétől, terjedelmi okok miatt eltekintünk).

Mivel az  $\mathbf{A}$  mátrix nem négyzetes, az állapotbecslésre a (VI.7.4) és (VI.7.7) egyenleteket, valamint a gradiens módszert alkalmazták.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -K_4 & 0 & K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_9 & -K_8 & 0 & K_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_9 & -K_8 & 0 & 0 & K_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_9 & -K_8 & 0 & 0 & 0 & K_{10} & 0 & 0 & 0 \\ -K_9 & -K_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{10} & 0 & 0 \\ -K_{15} & K_{14} & 1 & -K_{16} & -K_{16} & -K_{16} & -K_{16} & -K_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.7.10})$$

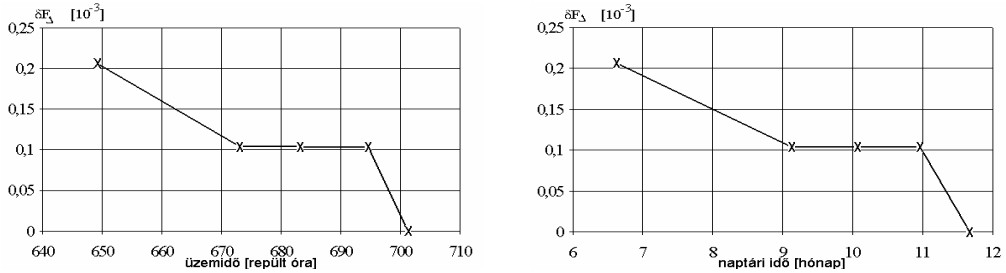
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & K_1 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_5 & 0 & 0 & -K_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{11} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{11} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{11} & -1 \\ -K_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{VI.7.11})$$



VI.8. ábra Fékhatás becslt relatív eltérései

Szemléltetésképpen, a fékhatás csökkenés a fenti módon, egy öt

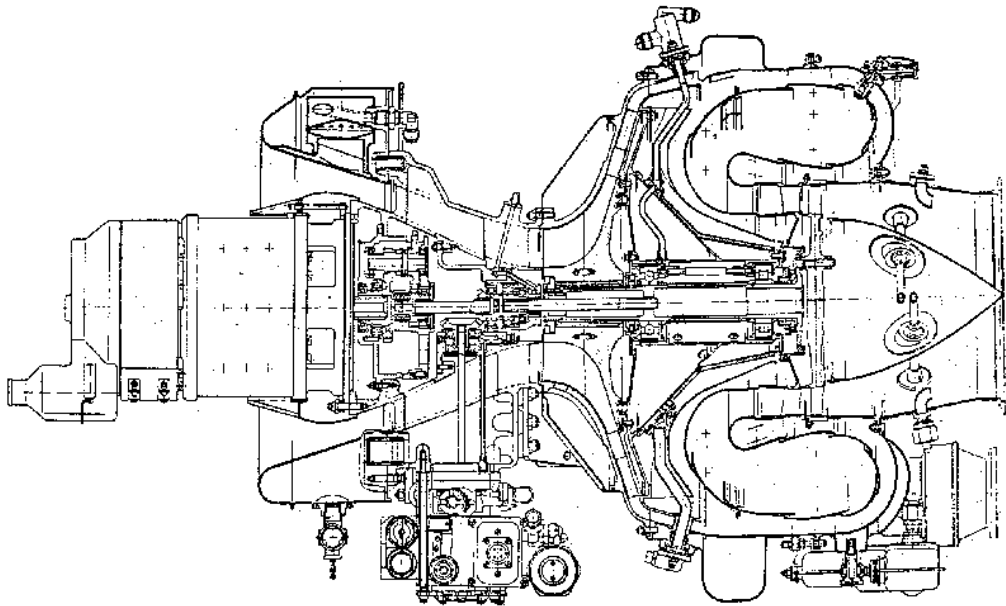
mérésből álló mérésorozattal meghatározott értékeit szemlélteti a VI.8. ábra az üzemidő (repült idő), illetve a naptári idő függvényében. A fékaszimmetria relatív változásának értékeit szemlélteti a VI.9. ábra az üzemidő, illetve a naptári idő függvényében.



VI.9. ábra Fékaszimmetria relatív eltérései

## VI.8. KÜLÖNLEGES ÜZEMMÓDOK VIZSGÁLATA

A felállított matematikai modellek jól alkalmazhatóak különleges — adott esetben tiltott — üzemmódok elemzésére is. Jelen fejezetben egy ilyen példáról olvashatunk, röviden — a felállított és alkalmazott modell részletesebben a [VI.12] irodalomból ismerhető meg.



VI.10. ábra Az AI-9V hajtómű

Az AI-9V gázturbinás hajtómű (VI.10. ábra) feladata a légi jármű fő hajtóművei indító rendszereinek (indító turbináinak) sűrített levegővel történő táplálása, vagy a fedélzeti egyenáramú hálózat táplálása, ha — valamilyen ok miatt — a főgenerátorok nem működnek. A hajtóműnek az alábbi három üzemmódját különböztetjük meg:

→ üresjáratú üzemmód;

A hajtómű üzemi ( $35300 \sim 39150 \text{ perc}^{-1}$ ) fordulatszámokon működik, a levegő a nyomáskiegyenlítő térből a környezetbe kerül, valamint a generátor nincs terhelve. A maximálisan megengedett turbina utáni ( $T_4$ ) gázhőmérséklet:  $700 \text{ }^\circ\text{C}$ .

→ generátor üzemmód;

A hajtómű indítómotor–generátora generátorként legfeljebb  $3 \text{ kW}$  teljesítménnyel egyenáramot szolgáltat a hálózatba. A levegő a nyomáskiegyenlítő térből a környezetbe jut. A maximálisan megengedett turbina utáni gázhőmérséklet:  $750 \text{ }^\circ\text{C}$ .

→ levegőelvezetés üzemmód.

A hajtómű a nyomáskiegyenlítő téren keresztül sűrített levegőt biztosít a főhajtóművek indításához. Ekkor a generátor nincs terhelve. A maximálisan megengedett turbina utáni ( $T_4$ ) gázhőmérséklet:  $750 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Fontos üzemeltetési utasítás, hogy nem megengedett egyidejűleg a levegőelvezetés és a generátor üzemmódok alkalmazása.

A hajtómű termikus matematikai modelljének felállításához az alábbi fő fizikai törvényszerűségeket kell felírunk, és azok belső összefüggéseit feltárunk:

→ kompresszor és turbina közti anyagáram egyenlőség:

$$\dot{m}_k - \dot{m}_1 + \dot{m}_f - \dot{m}_T = 0 \quad , \quad (\text{VI.8.1})$$

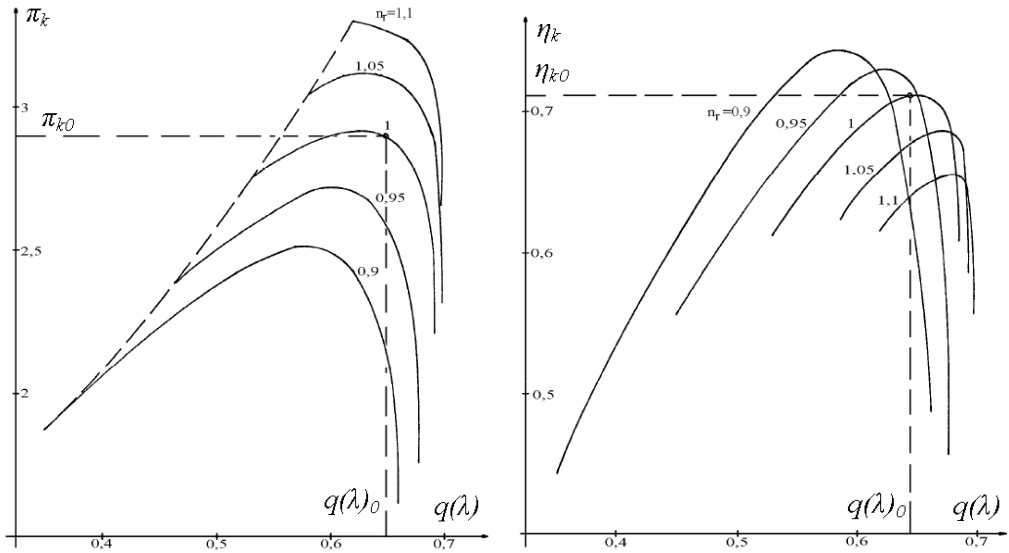
ahol:

$\dot{m}_k$  — kompresszor tömegárama, ami a VI.11. ábrán látható jelleggörbék alapján határozható meg;

$\dot{m}_1$  — a főhajtómű indításához elvezetett levegő tömegárama;

$\dot{m}_f$  — tüzelőanyag tömegáram;

$\dot{m}_T$  — turbina tömegárama, ami a VI.12. ábrán látható jelleggörbék alapján határozható meg.



VI.11. ábra Kompresszor jelleggörbéi  
 $\pi_k$  — nyomásviszony;  $\eta_k$  — hatásfok;  $q(\lambda)$  — tömegáram viszony

→ turbina és gázvezető közti anyagáram egyenlőség:

$$\dot{m}_T - \dot{m}_{en} = 0 \quad , \quad (VI.8.2)$$

ahol:

$\dot{m}_{en}$  — gázvezető tömegárama.

→ kompresszor és turbina közti energia (teljesítmény) egyenlőség:

$$P_t \eta_m - P_k - P_a = 0 \quad , \quad (VI.8.3)$$

ahol:

$P_t$  — turbina teljesítménye, ami a VI.12. ábrán látható jelleggörbék alapján határozható meg;

$\eta_m$  — a forgórész mechanikai hatásfoka;

$P_k$  — kompresszor teljesítményigénye, ami a VI.11. ábrán látható jelleggörbék alapján határozható meg;

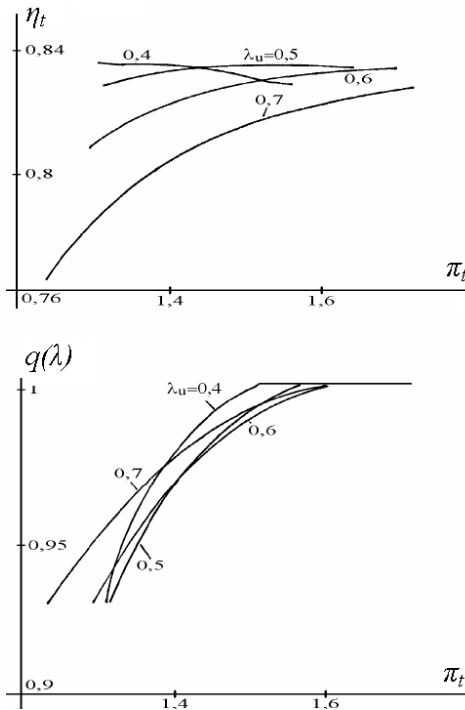
$P_a$  — segédberendezések teljesítményigénye.

→ szabályzási törvényszerűség:

$$n = const. \quad , \quad (VI.8.4)$$

ahol:

$n$  — forgórész pillanatnyi (fizikai) fordulatszáma;



VI.12. ábra Turbina jelleggörbéi

$\pi_t$  — nyomásviszony;  $\eta_t$  — hatásfok;  $q(\lambda)$  — tömegáram viszony

A fenti — (VI.8.1) ~ (VI.8.4) — egyenletek, és azok belső összefüggései alkotta nemlineáris termodinamikai matematikai modell felhasználásával tudjuk modellezni és elemezni az AI-9V hajtómű működését. Az elemzésekről és az azokból levont következtetésekről részletesen lehet olvasni a [VI.12] irodalomban.

A fejezet elején említett tiltott — levegőelvezetés és generátor — üzemmód modellezése érdekében a (VI.8.3) egyenletet az alábbi módon módosítottuk:

$$P_t \eta_m - P_k - P_a - P_{gen} = 0 \quad (VI.8.5)$$

ahol:

$P_{gen}$  — a generátor teljesítményigénye.

Ekkor a tiltott üzemmód modelljét a (VI.8.1); (VI.8.2); (VI.8.5) és (VI.8.4) egyenletek (valamint azok belső összefüggései) fogják alkotni. A két modell futtatásának eredményeit mutatja a VI.4. Táblázat, összevetve a megengedhető (névleges) értékekkel.

A VI.4. Táblázat eredményeinek összehasonlításával modellezett nem megengedhető üzemmóddal kapcsolatban az alábbi főbb következtetéseket tudjuk levonni:

- a turbina előtti ( $T_3$ ) hőmérséklet  $36\text{ °C}$ -al megnőtt;
- a turbina utáni ( $T_4$ ) hőmérséklet  $31\text{ °C}$ -al megnőtt, sőt  $27\text{ °C}$ -al túllépi a megengedhető maximális üzemeltetési értéket.

Paraméter			Megengedhető (névleges) értékek
	módosított	„eredeti”	
	modell eredményei		
Kompresszor utáni hőmérséklet	443 K	434 K	
Kompresszor utáni nyomás	307889 Pa	294344 Pa	
Turbina előtti hőmérséklet	1251 K	1164 K	
Turbina előtti nyomás	289425 Pa	276684 Pa	
Turbina utáni hőmérséklet	1050 K (777 °C)	979 K (706 °C)	1023 K (750 °C)
Turbina utáni nyomás	114020 Pa	112877 Pa	
Elvezetett levegő tömegárama	0,403 kg s <sup>-1</sup>	0,399 kg s <sup>-1</sup>	0,4 kg s <sup>-1</sup>

#### VI.4. Táblázat Modellek eredményei

Ezek következtetések azért is fontosak, mert köztudott, hogy a gázturbinás hajtóművek legnagyobb szerkezeti problémája a turbinák hőterhelése.

A modellfuttatási eredmények egyértelműen igazolták, hogy az együttes üzemmód alkalmazása esetén a turbina túlzott hőterhelést kapna, ami nem megengedhető. Fontos itt ismételtlen megjegyeznünk, hogy a fenti elemzést a matematikai modellen végeztük el, nem egy valós hajtóművön, így annak nem okoztunk szerkezeti károsodást.

## VI.9. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [VI.1] **БАХВАЛОВ, Н.С.**, Численные методы, Наука, Москва, 1975., pp 631
- [VI.2] **CIRA, O.**, Numerical Methods for Algebraic Equations, Editura Academiei Române, București, 2005.pp.490.
- [VI.3] **ÉGERTNÉ MOLNÁR, É., HUJTER, M., KÁLOVICS, F., MÉSZÁROS, JNÉ.**, Numerikus matematika mérnököknek, AGRO-PRINT, Gyál, 1995., pp. 205.
- [VI.4] **FOWKES, N.D., MAHONY, J.J.**, An Introduction to Mathematical Modelling, John Wiley & Sons, Melbourne,1994.
- [VI.5] **GISBERT, S.**, Numerikus módszerek, ELTE – TypoTEX, Budapest, 1993., pp. 388.
- [VI.6] **LUKÁCS, O.**, Matematikai statisztika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [VI.7] **ÖRY, H.**, Structural Design of Aerospace Vehicles, Institut für Leuchtbau, Achen, 1991.
- [VI.8] **POKORÁDI, L.**, Study of Influences of Deviations in Operational Parameters by Using the Airplane Pneumatic System, Proceeding of 1<sup>st</sup> Mini Conference on Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies, Budapest, 1988., p. 421–429.
- [VI.9] **POKORÁDI, L.**, Diagnostics of the Aircraft Pneumatic System Based on Mathematical Modelling, Informator 4<sup>th</sup> International Conference Aircraft and Helicopters' Diagnostics AIRDIAG '95, Warsaw, 1995., p. 59–69.
- [VI.10] **POKORÁDI, L.**, Mathematical Modeling of Aircraft Systems for State Estimation, Bulletins for Applied Mathematics BAM-1239/96, LXXX, p. 19–28.
- [VI.11] **POKORÁDI, L.**, The Correlation-Family Test, Bulletins for Applied Mathematics BAM-1296/97, LXXXI-A, p. 41–50.
- [VI.12] **POKORÁDI, L. – SZABOLCSI R.**, Mathematical Models Applied to Investigate Aircraft Systems, nomográfia, Monographical Booklets in Applied and Computer Mathematics, MB-12, PAMM, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1999., pp. 146.
- [VI.13] **POKORÁDI, L.**, Linearized model-based investigation of manufacturing anomalies, Проблемы машиностроения и автоматизации, Москва, № 3, 2002, p. 44–49.
- [VI.14] **PRÉKOPA, A.**, Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
- [VI.15] **RÉNYI, A.**, Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [VI.16] **ROHÁCS, J. – ROHÁLY, G. – POKORÁDI, L.**, Исследования возможности диагностирования авиационных гидравлических и воздушных систем по данным, зарегистрированных во время

нормального функционирования, "Доклады третьей конференции по авиации, 22-24 ноября 1988 г. Будапешт", СЭВ, Отраслевое бюро Но 16. IV-я секция 4.10 - 4.36. стр.

- [VI.17] **ROHÁCS J. – SIMON I.**, Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.
- [VI.18] **SZABOLCSI, R.**, A MATLAB<sup>®</sup> programozása, egyetemi jegyzet, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Budapest, 2004, pp. 258.
- [VI.19] **SZABOLCSI, R.**, Szabályzástechnikai feladatok megoldás a MATLAB<sup>®</sup> alkalmazásával, egyetemi jegyzet, Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetem, Budapest, 2004, pp. 243.



# SZTOCHASZTIKUS MODELLEZÉS

### VII.1. BEVEZETÉS

A mérnöki gyakorlat egyik fő része a különböző technikai berendezések és rendszerek üzemeltetése, karbantartása. Az üzemeltetés tágabb értelemben a technikai eszközök használatának, különböző szintű kiszolgálásának és javításának összetett folyamata, az üzemeltetés során az üzemeltetők (az alkalmazó szervezeti egységek) használják (üzemben tartják), tárolják, az üzemfenntartás keretében kiszolgálják, karbantartják, javítják a technikai eszközöket. Egy technikai eszköz üzemeltetése az eszközzel, vagy annak valamely rendszerével, berendezésével a gyártás és a kiselejtezés között történtek összessége. Ez a valós, fizikai folyamat matematikai szempontból sztochasztikus folyamatnak tekinthető.

Jelen fejezetben alapvetően a Szerző eddigi sztochasztikus (üzemeltetési) folyamatmodellezési tevékenységét, eredményeit mutatja be. A VII.3. fejezetben röviden a sztochasztikus folyamatok matematikai alapjai ismerhetők meg — a [VII.2]; [VII.3]; [VII.4]; [VII.8]; [VII.9]; [VII.24]; [VII.25]; [VII.26] és [VII.32] irodalmak alapján. Fontos itt külön megemlíteni SZABOLCSI ezirányú publikációit, melyek jelentős hatást gyakoroltak a Szerző tudományos gondolkodására. SZABOLCSI a [VII.28] cikkében összefoglalta a sztochasztikus jelek, és sztochasztikus rendszerek statisztikai jellemzőit, majd automatikai alaptagokon, illetve egy zárt szabályozási rendszeren bemutatta az egyes jelek jellemzőinek (például korreláció, sűrűség-függvény) számítását, és számítógépes forráskódot írt a jelek, és a rendszerek modellezésére. SZABOLCSI [VII.29] cikkében a légköri turbulencia sztochasztikus modellezésével is foglalkozik: különféle időjárási viszonyokra meghatározza a sztochasztikus légköri turbulencia modell statisztikai jellemzőit, számítógépes forráskódot készít a folyamatok modellezésére. A szerző bemutatja továbbá a légköri turbulencia egyes sebességi idősorait, amelyek jól alkalmazhatóak a mérnöki tervezői feladatok megoldása során. SZABOLCSI [VII.30] cikkében a dinamikus rendszerek additív, és multiplikatív paraméterbizonytalanságainak matematikai modellezésével foglalkozik. A szerző mindkét tipikus paraméterbizonytalanságra meghatározta a robusztus stabilitás fogalmát, és annak matematikai-irányítástechnikai kritériumait, valamint a stabilitási tartalékok meghatározásával megadja a minőségvizsgálat egyik fontos lépését is. SZABOLCSI a [VII.31] cikkében automatikus repülésszabályozó rendszerek robusztusságának vizsgálatával foglalkozik. A szerző igazolta, hogy a repülőgéptörzs szabad lengései irányítástechnikai értelemben additív

paraméterbizonytalanságként értelmezhetőek. Egy gyakorlati példán keresztül bemutatta, hogyan végezhető el a stabilitásjavító csillapító automata robusztusságának vizsgálata. Eme irányítástechnikai feladata megoldására a szerző új számítógépes forráskódot készített, és alkalmazott a szimuláció során. A következő fejezetekben a sztochasztikus rendszer, illetve folyamatmodellezés különböző szintű módszerei, eljárásai olvashatók. A VII.4. fejezetben egy egyszerű valószínűségi modell alkalmazásának bemutatására kerül sor. A VII.5. beállt — azaz stacioner — üzemeltetési folyamat valószínűségi modellvizsgálatát szemlélteti. Végül, a VII.7. fejezet repülőgépek üzemeltetési folyamatának többszempontú sorbanállási modellvizsgálatát írja le röviden.

## VII.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$m$	—	átlag;
$P$	—	valószínűség;
$\sigma$	—	szórás;
$\eta$	—	általános változó;
$\lambda$	—	beérkezési intenzitás;
$\mu$	—	kiszolgálási intenzitás;
$\tau$	—	idő;
$\sim$	—	empirikus várhatóérték;
$\wedge$	—	empirikus szórás;
$\cdot$	—	időszerinti derivált („sebesség”).

## VII.3. A SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK

Egy  $\eta(\tau)$  folyamat sztochasztikus, ha minden lehetséges  $\tau$  időponthoz tartozik egy  $\eta(\tau)$  valószínűségi változó, és az időpontok minden véges  $[\tau_1, \tau_2, \dots]$  halmaza esetében adott az  $\eta(\tau_1), \eta(\tau_2), \dots$  valószínűségi változók együttes eloszlása. A sztochasztikus folyamatot diszkrétnek, illetve folytonosnak nevezzük, ha  $\eta(\tau_1), \eta(\tau_2), \dots$  együttes eloszlása diszkrét, illetve folytonos a  $\tau$  értékek minden véges  $[\tau_1, \tau_2, \dots]$  halmazára. Abban a speciális esetben, ha a  $\tau$  független változó értékeinek halmaza megszámlálható, sztochasztikus sorozatról beszélünk. Általánosabban, egy sztochasztikus folyamat az  $\boldsymbol{\eta}(\tau) \equiv [\eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \dots]$  többdimenziós változóval írható le. Gyakran vizsgálnak olyan sztochasztikus folyamatokat is, amelyekben az  $\eta$  változó egy többdimenziós euklideszi tér pontjain fut keresztül.

A sztochasztikus folyamatokat általában aszerint osztályozzuk, hogy a különböző  $\tau_1, \tau_2, \dots$  időpontoknak megfelelő  $\eta_1, \eta_2, \dots$  valószínűségi változók között milyen jellegű a függőségi kapcsolat van. A fontosabb fajták a következők: MARKOV folyamat, POISSON folyamat, stacionárius folyamat,

valamint GAUSS folyamat. A következőkben mi csak a MARKOV folyamatokkal foglalkozunk.

### VII.3.1. MARKOV FOLYAMATOK

Az olyan sztochasztikus folyamatot, amelynek jövőbeli alakulását a múltbeli alakulása csak a jelenlegi állapoton keresztül befolyásolja, azaz amely utóhatásmentes, MARKOV folyamatnak nevezzük. Azaz amikor az adott véletlen folyamat jövőbeni lefolyását csak a jelen állapot határozza meg. Ilyen például a lottósorsolás, amikor a lehetséges második húzott számot csak az első szám befolyásolja, függetlenül a korábbi sorsolások eredményeitől. Ilyenkor mindegyik szám ugyanakkora valószínűséggel lehet a második, csak a már elsőnek kihúzott nem.

Az üzemeltetési folyamatok rendszerszemléletű vizsgálata esetén megállapítható, hogy az egyes, jól definiált állapotokból való távozások függetlenek az előzőekben történtektől. Ezen tulajdonság alapján a technikai eszközök üzemeltetési folyamata MARKOV folyamatnak tekinthető és így matematikailag MARKOV láncsal modellezhető.

Egy üzemeltetési rendszerről vagy valamely belső folyamatáról, illetve azok irányításának hatásosságáról bizonyos jellemzők ismeretében dönthetünk. Ilyen jellemző lehet például az egységnyi üzemidőre eső költség, vagy kiszolgálási munkaidény. Ezen jellemzők meghatározása az adott üzemeltetési folyamat rendszerszemléletű vizsgálatakor, annak folytonos idejű, diszkrét állapotterű markovi modelljeinek segítségével történhet.

Matematikailag felírva egy  $\eta(\tau)$  valószínűségi folyamat MARKOV folyamat, ha minden  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1}$ ; és  $X_1 < X_2 < \dots < X_n < X_{n+1}$  valós számra teljesül a:

$$P(\eta(\tau_{n+1}) = X_{n+1} | \eta(\tau_1) = X_1; \dots; \eta(\tau_n) = X_n) = P(\eta(\tau_{n+1}) = X_{n+1} | \eta(\tau_n) = X_n) \quad (\text{VII.3.1})$$

feltételes valószínűségek egyenlősége.

Ha az  $\eta(\tau)$  folyamat a vizsgált időintervallum bármely pillanatában felvehet valamilyen  $X$  értéket, akkor az folytonos, ha  $\eta$  csak kitüntetett időpontokban rendelkezhet értékkel, diszkrét idejű. Diszkrét állapotterűnek tekintjük azt a sztochasztikus folyamatot, ahol az  $\eta$  valószínűségi változó lehetséges értékei véges, vagy megszámlálhatóan végtelen elemű halmazt alkotnak.

Egy MARKOV folyamat az állapotokból való távozások eloszlásai és az átmenet valószínűségek megadásával egyértelműen jellemezhető. Ha az állapotokból való távozások eloszlásainak jellegei nem exponenciálisak — legalább egy eltér —, akkor az adott utóhatásmentes sztochasztikus folyamatot fél-markovinak nevezzük.

A véges vagy megszámlálhatóan végtelen — azaz diszkrét — állapotterű, utóhatásmentes sztochasztikus folyamat MARKOV láncot alkot.

Összességében megállapíthatjuk, hogy az üzemeltetési folyamat egy folytonos idejű, diszkrét állapotterű markovi- vagy fél-markovi folyamatként (azaz láncként) modellezhető és megfelelő statisztikai adatok birtokában elemezhető.

### VII.3.2. SORBANÁLLÁSI FOLYAMATOK

Sorbanállási, kiszolgálási rendszeren olyan rendszert értünk, amelybe a fogyasztók véletlenszerűen érkeznek be, az eltérő igényeik kielégítésére várnak, majd a kiszolgálásuk után a rendszerből távoznak. Ilyen sorbanállási rendszernek tekinthetjük az olyan üzemeltetési folyamatokat, melyekben nagyobb tömegű technikai eszköz hasonló típusú műszaki kiszolgálása történik.

A fogyasztók rendszerbe való belépése az érkezési folyamat. Az érkeзések közti idők egy  $\{X_n\}$  sorozattal jellemezhetők. Ekkor  $X_1$  az első fogyasztó rendszerbe történő beérkezéséig eltelt időt,  $X_i$  az  $i-1$ -edik és az  $i$ -edik fogyasztó beérkezése között eltelt időt jelenti.

A kiszolgálási mechanizmus leírható az egymásután beérkezett fogyasztók  $\{W_n\}$  kiszolgálási idejének véletlen sorozatával. Ahol  $W_i$  az  $i$ -edik fogyasztó kiszolgálásának idejét jelenti. Ez az úgynevezett kiszolgálási sorrend, vagy kiszolgálási mechanizmus is véletlenszerűnek tekinthető.

A várakozó sor  $N_t$  hossza azon fogyasztók számával egyenlő a  $\tau$  időpillanatban, melyek kiszolgálása folyamatban van, vagy amelyek kiszolgálásra várnak. Ez az előzőekhez hasonlóan, egy folytonos idejű, diszkrét állapotterű sztochasztikus folyamat. Ezen folyamat  $i$ -edik állapotán azt értjük, hogy a kiszolgálási rendszerben  $i$  mennyiségű fogyasztó tartózkodik.

Egy kiszolgálási rendszer modelljének felhasználásával meghatározható a fogyasztók várakozási ideje; a foglaltsági intervallum hossza (vagyis az a folyamatos idő, amely alatt a kiszolgáló egység állandóan foglalt); az üresjáratidő hossza; a pillanatnyi munkahátralék, a rendszerben lévő igények száma. A fenti mennyiségek mindegyike valószínűségi változónak tekinthető.

A fent említett  $\{X_n\}$  és  $\{W_n\}$  véletlen sorozatok határozzák meg a kiszolgálási rendszer, a várakozási sor viselkedését. Jellemzésükre szolgál a  $\lambda$  jelű beérkezési intenzitás, illetve a  $\mu$  kiszolgálási intenzitás. E két paraméter statisztikai meghatározása az alábbi módon történhet:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{X}} \quad , \quad (\text{VII.3.2})$$

illetve

$$\mu = \frac{1}{\bar{W}} \quad , \quad (\text{VII.3.3})$$

ahol:

$\tilde{X}$  — a beérkezések közti idők átlaga;  
 $\tilde{W}$  — a kiszolgálási idők átlaga.

Egy egyszerű markovi sorbanállási rendszer az alábbi tulajdonságokkal bír:

**(I)** — Egy érkezés valószínűsége egy kellően kicsiny  $\Delta\tau$  időintervallum alatt:

$$\lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau) ,$$

ahol:

$o(\Delta\tau)$  — a lehetetlen esemény bekövetkezésének valószínűsége.

**(II)** — Egy kiszolgálás befejezésének valószínűsége az előzővel megegyező  $\Delta\tau$  időintervallum alatt:

$$\mu\Delta\tau + o(\Delta\tau) ,$$

feltéve, hogy az intervallum kezdeti pillanatában a sor nem üres.

**(III)** — Annak a valószínűsége, hogy egynél több beérkezés vagy kiszolgálás történik a vizsgált  $\Delta\tau$  idő alatt:

$$o(\Delta\tau) ,$$

mely valószínűség határértéke:

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} o(\Delta\tau) = 0 .$$

**(IV)** — Az **(I)** és **(II)** tulajdonságok a rendszerben korábban történtektől és minden más feltételtől függetlenek, azaz markoviak.

Az **(I)** – **(IV)** tulajdonságokból következik, hogy az  $\{X_n\}$  érkezések közti és a  $\{W_n\}$  kiszolgálási idők kielégítik a felújítási folyamatokat jellemző „feledékenységi” tulajdonságot. Mindkét sorozat — egymástól is — független valószínűségi változók sora és

$$\lambda e^{-\lambda\tau} , \text{ illetve } \mu e^{-\mu\tau} \quad (\text{VII.3.4})$$

sűrűség függvényekkel írható le.

A fenti folyamatok utóhatás-mentességéből következik, hogy a jövőbeni — nullához tartó —  $\Delta\tau$  időintervallum alatti a kiszolgálórendszerbe való belépés, illetve onnan történő kilépés valószínűsége érzéketlen a folyamat múltbeli történetére, ha adott a várakozási sor hossza néhány rögzített időpillanatban. Így  $N_\tau$  egy folytonos idejű,  $\{0; 1; 2; \dots; K\}$  véges állapotterű MARKOV láncot alkot. Az  $N_\tau$  folyamat állapotát a sor hossza határozza meg a  $\{0; 1; 2; \dots; K\}$  diszkrét állapotterben.

### **Többcsatornás kiszolgálási rendszer**

A kiszolgáló állomások vagy más néven a kiszolgálási csatornák  $r$  száma alatt az egyszerre, párhuzamosan és egymástól függetlenül működő kiszolgálók számát értjük. Több kiszolgálási csatorna esetén a rendszer **(II)** tulajdonsága az alábbiak szerint módosul:

**(IIa)** — Egy kiszolgálás valószínűsége a fentiekkel egyező  $\Delta t$  időintervallum alatt az  $N_i = i$  egyenlőség esetén:

$$\begin{aligned} \mu_i &= i \mu \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad \text{ha } i \leq r, \\ \mu_i &= r \mu \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad \text{ha } i > r. \end{aligned} \quad (\text{VII.3.5})$$

### **Korlátozott tárolási méretű kiszolgálási rendszer**

A korlátozott tárolási méret azt jelenti, hogy ha a sorban állók száma eléri a maximális  $K$  értéket, az újabb beérkező fogyasztókat a rendszer elutasítja, míg a sor hossza  $K$  alá nem csökken. Ebben az esetben a folyamatnak **(I)** tulajdonsága az alábbiak szerint változik:

**(Ib)** — Ha a sor hossza kisebb a  $K$  maximális tárolási méretnél, annak a valószínűsége, hogy a sor  $\Delta t$  időintervallum alatt eggyel növekszik:

$$\lambda \Delta\tau + o(\Delta\tau) \quad \text{ha } N_\tau < K \quad ; \quad (\text{VII.3.6a})$$

— Ha a sor hossza egyenlő a maximális tárolási mérettel, ez a valószínűség:

$$o(\Delta\tau) \quad \text{ha } N_\tau = K \quad (\text{VII.3.6b})$$

lesz.

## VII.4. MEGHIBÁSODÁSI FOLYAMAT MODELLEZÉSE

Egy technikai rendszer meghibásodási folyamatának egyik rendszerszemléletű elemzési módja, annak valószínűségi modellvizsgálata. Ez egy viszonylag egyszerű modell, de felhasználásával fontos döntések hozhatók meg. Például egy rendszeren belüli elemek meghibásodásai bekövetkezésének valószínűségi modelljei segítségével alakítható ki a rendszer karbantartási ciklusrendje.

Meghibásodási valószínűségi modell alapján történő ciklusidő meghatározásának általános menete a következő:

- megfelelő mennyiségű, valamint minőségű meghibásodási adattal feltöltött adatbázis gyűjtése a modellezett üzemeltetési folyamatról;
- meg kell határozni a meghibásodási adatok statisztikai jellemzőit (fel kell rajzolni a tapasztalati sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényt);
- meg kell állapítani, mely elméleti eloszlás közelíti meg leginkább a meghatározott tapasztalati függvényeinket;
- a megfelelő elméleti eloszlás ismert összefüggései alapján és a gyakorlati elvárásokat figyelembe véve meghatározzuk a szükséges kiszolgálási művelet időszakosságát.

Az elemző eljárást egy példán keresztül fogjuk bemutatni:

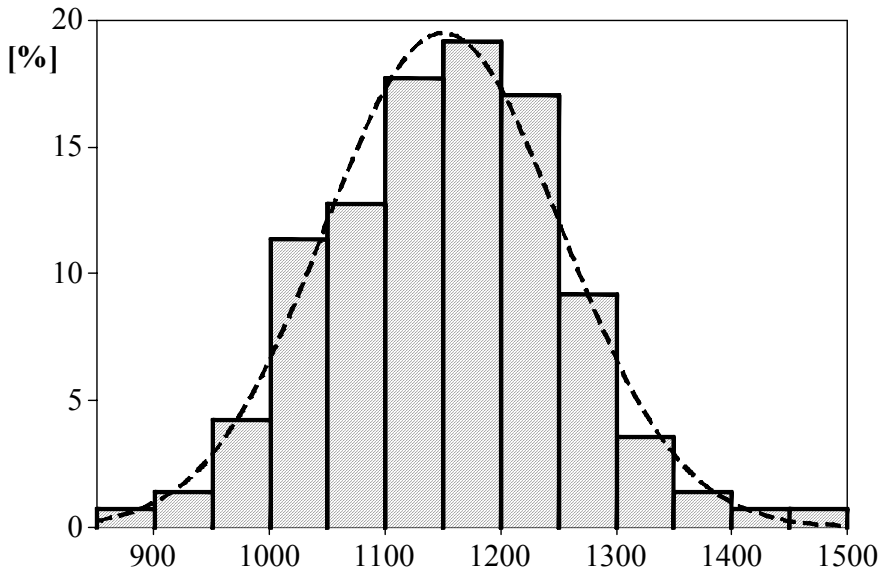
890,1	914,0	925,0	953,9	965,2	966,0	985,1	986,9	994,1	1006,1
1006,5	1015,0	1019,7	1020,6	1025,4	1025,5	1025,6	1028,6	1029,5	1029,5
1032,0	1036,5	1043,5	1048,8	1049,2	1052,1	1052,8	1054,1	1059,3	1060,0
1062,2	1063,5	1064,3	1068,3	1071,6	1076,6	1076,7	1079,9	1083,4	1087,3
1088,9	1089,8	1089,9	1100,6	1101,4	1105,7	1106,5	1112,5	1113,3	1115,6
1122,2	1124,3	1125,7	1129,9	1135,0	1136,1	1137,3	1138,4	1138,5	1138,5
1139,7	1142,7	1144,1	1146,3	1146,5	1149,3	1149,7	1149,9	1150,0	1150,7
1151,0	1151,0	1154,2	1155,2	1159,3	1159,3	1161,9	1162,6	1163,9	1166,6
1170,7	1172,3	1173,7	1175,0	1178,1	1178,8	1180,0	1180,8	1180,9	1188,0
1189,4	1193,5	1194,7	1194,8	1196,5	1200,3	1202,4	1203,2	1204,3	1204,6
1206,8	1207,3	1212,1	1213,0	1213,9	1214,9	1216,0	1217,0	1218,0	1218,7
1219,5	1222,2	1222,4	1227,1	1229,2	1232,8	1237,6	1240,4	1241,2	1250,0
1251,5	1253,3	1256,8	1258,8	1263,9	1266,9	1267,1	1267,7	1275,8	1275,9
1285,0	1288,7	1307,6	1323,1	1331,6	1334,5	1343,2	1354,7	1387,4	1420,2
1456,2									

## VII.1. Táblázat Meghibásodási adatok

Egy gyártóberendezés alkatrészénél elhasználódása következtében — az adott vizsgálati időszak alatt — 141 darab meghibásodást tapasztaltak, melyek a VII.1. Táblázatban megadott üzemórák után következtek be.

A vállalat vezetése elvárásként fogalmazta meg, hogy a berendezés karbantartási rendjét úgy kell kialakítani, hogy annak 90 %-os készlete biztosított legyen. Fontos itt még megjegyeznünk, hogy a példában vizsgált alkatrész megbízhatósági szempontból azonnal javítható, azaz számottevő javítási, cserélési időt nem igényel.

Az adatgyűjtés (melynek eredménye látható a VII.1. Táblázatban) után meg kell határoznunk a meghibásodások eloszlásának törvényszerűségét, az azt leíró, vagy legjobban megközelítő elméleti eloszlást, az eloszlás paramétereit.



VII.1. ábra. Gyakoriság-sűrűség diagram

A statisztikai jellemzők meghatározását a meghibásodások empirikus várható értéke (azaz a számtani átlaga) munkaóraban kifejezve:

$$\tilde{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^N \eta_i}{N} ,$$

esetünkben:

(VII.4.1)

$$\tilde{\eta} = 1150 \text{ munkaóra.}$$

A korrigált tapasztalati szórás:



$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\eta_i - \tilde{\eta})^2}{N-1}} \quad ,$$

esetünkben: (VII.4.2)

$$\hat{\eta} = 102,3 \quad \text{munkaóra.}$$

Az illeszkedési kritériumok alapján végzendő vizsgálatokat a matematikai-statisztikai szakirodalom bőven tárgyalja, illetve a különböző szoftverek segítségével könnyen, különösebb statisztikai jártasság nélkül elvégezhetők. Erre jelen könyvben külön nem térünk ki.

A gyakoriság-sűrűség diagramból, illetve a normalitás vizsgálatból megállapíthatjuk, hogy az alkatrészek meghibásodásai normális eloszláshoz közeli eloszlást követnek (elfogadási valószínűség 90 %-nál nagyobb). Ez egyben azt is jelenti, hogy a meghibásodások fokozatosak, azaz az alkatrészek elhasználódásának, nem pedig valamilyen, az üzemeltetési rendszerben vagy annak környezetében beállt változások következményei. A további vizsgálatokhoz ezért a tényleges (tapasztalati) gyakoriság-sűrűség diagramot egy

$$\begin{aligned} m &= \tilde{\eta} = 1150 \quad , \\ \sigma &= \hat{\eta} = 102,3 \end{aligned}$$

jellemzőkkel bíró normál eloszlással helyettesíthetjük. Így a vizsgálandó normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(\eta) = \frac{1}{\hat{\eta}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta-\tilde{\eta})^2}{2\hat{\eta}^2}} \quad ,$$

ami esetünkben: (VII.4.3)

$$f(\eta) = \frac{1}{102,3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\eta-1150)^2}{2 \cdot 102,3^2}} \quad ,$$

Annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó — amely jelen esetben a munkaóra — adott értéknél kisebbet vesz fel, a változó eloszlásfüggvénye adja meg (amit a sűrűségfüggvényből határozott integrálással kapunk meg).

$$P(\eta < X) = F(X) = \int_{-\infty}^X f(t) dt \quad . \quad (\text{VII.4.4})$$

A fokozatos meghibásodásokat akkor célszerű megelőzni, amikor még azok bekövetkezése megfelelően nagy valószínűséggel megelőzhető. A gyakorlati tervezőmunkánál természetesen a műszaki-matematikai mérlegelés mellett tekintettel kell lenni a gazdaságossági és megbízhatósági szempontokra is. A gazdaságossági szempontok figyelembevételének egyik módja az, amikor az ellenőrzések, illetve cserék, javítások és eszközkiebélések költségeit elemzik. Megbízhatósági elemzések során mérlegelni kell a várható meghibásodás biztonsági következményeit.

A fokozatos meghibásodások esetén előforduló normál eloszlás sajátossága, hogy a (VII.4.4) egyenlettel felírt eloszlásfüggvénynek nincs zárt alakú megoldása. Ezért, — ha az elemzést nem valamilyen statisztikai szoftverrel végezzük — a fentiekben meghatározott paraméterű normál eloszlást át kell transzformálnunk az úgynevezett standard ( $m = 0$  ;  $\sigma = 1$ ) normál eloszlásra, melynek eloszlásfüggvénye valószínűség számítási, statisztikai táblázatokban megtalálható.

Az eloszlásfüggvény, és a megengedhető meghibásodási valószínűség ismeretében tudjuk meghatározni a javítások, karbantartások vagy ellenőrzések közti ciklusok hosszát.

Példánkban, mivel a fentiekben leírt feltételek alapján 10 % meghibásodási valószínűséget engedünk meg, a standard normál eloszlás táblázatát felhasználva:

$$X = m - 1,281\sigma = 1150 - 1,280 \cdot 102,3 = 1018,954 \quad .$$

Azaz, 1018,954 munkaóránként kell kicserélnünk, esetleg ellenőriznünk az adott alkatrészt. A fenti módszerrel meghatározott üzemidőt, vagy más teljesítményjellemzőt (például futott kilométer, vagy gyártott termékszám) kerekíteni célszerű, illetve bizonyos tűrésértéket kell megadnunk. Az ellenőrzési ciklus tűréseit a névleges érték +20 és -10%-ában, kerekítve szokás meghatározni. Esetünkben tehát az ellenőrzéseket:

$$1000^{+200}_{-100}$$

munkaóránként célszerű elrendelni.

Ha a fenti valószínűségi modellelemzést egy technikai eszköz minden rendszerére, fődarabjára elvégezzük a kapott eredmények összegzéseként tudjuk meghatározni annak karbantartási ciklusrendjét.

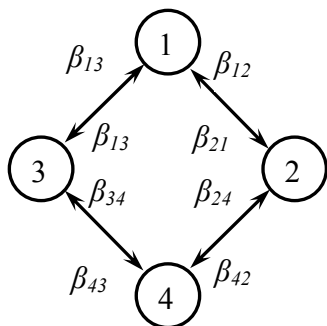
## VII.5. ÜZEMELTETÉSI, KARBANTARTÁSI FOLYAMAT MODELLEZÉSE

Úgynevezett beállt üzemeltetési, karbantartási folyamatokat stationer Markov folyamattal tudjuk matematikailag modellezni [VII.27]. Beállt üzemeltetési folyamaton olyan folyamatot értünk, ahol a különféle állapotváltási — főleg a meghibásodási — valószínűségek időben nem (vagy csak elhanyagolható mértékben) változnak. Ilyen üzemeltetési folyamatot tapasztalhatunk a bejáratási és a kiöregedési szakaszok között, ha nem lép fel jelentős változás az üzemeltetési körülményekben. Jelen fejezetben ezt a modellezési eljárást egy mintapélda megoldásán keresztül szemléltetjük, bemutatva egy, a Szerző által kidolgozott, jól algoritmizálható modellmegoldási eljárást is.

<b>Meghibásodás</b>	<b>A típusú</b>	<b>B típusú</b>
meghibásodási átlagidő:	51,6 óra	39,35 óra
meghibásodási intenzitás	$\beta_{12} = 1,938 \cdot 10^{-2}$	$\beta_{13} = 2,541 \cdot 10^{-2}$
átlagos javítási idő	10,2 óra	4 óra
javítási intenzitás	$\beta_{21} = 9,803 \cdot 10^{-2}$	$\beta_{31} = 0,25$
átlagos munkai igény	10,2 munkaóra	8 munkaóra
átlagos költség	5430 HUF	1432 HUF
a másik hiba javítása közben történő bekövetkezési intenzitás	$\beta_{24} = 0,2145$	$B_{34} = 0,0511$
átlagos javítási idő	3,5 óra	
javítási intenzitás	$\beta_{42} = \beta_{43} = 0,286$	
átlagos munkai igény	4,6 munkaóra	
átlagos költség	6458 HUF	

### VII.2. Táblázat Statisztikai elemzés főbb adatai

Egy gyártósor egyik berendezésének üzemeltetése során két eltérő típusú meghibásodást tapasztaltak. Mindkét fellépett hiba javítása közben gyakran előfordult, hogy a másik típusú hiba fellépése is hamarosan bekövetkezik. Ekkor, a másik típusú hiba megelőző javítását is elvégezték a karbantartók. A meghibásodási adatok — VII.4. fejezetben leírt — statisztikai elemzése kimutatta, hogy a mindkét típusú meghibásodás bekövetkezési gyakoriságai exponenciális jellegű eloszlásokkal bírnak és a gyártósor működési idejétől függetlenek. A meghibásodások és a javításaik statisztikai főbb adatait a VII.2. Táblázat tartalmazza.



- 1 — Rendeltetészerű használat.
- 2 — **A** típusú meghibásodás javítása;
- 3 — **B** típusú meghibásodás javítása;
- 4 — Mindkét típusú meghibásodás egyidejű javítása;

VII.2. ábra A folyamat gráfmodellje

A karbantartási folyamat stacioner valószínűségi modelljének felállítását a gráfmodell felrajzolásával kezdjük. A folyamatot súlyozott élű irányított gráffal tudjuk szemléltetni (VII.2. ábra).

Az adatok elemzése alapján kijelenthető, hogy a folyamat MARKOV modellje felállítható, és azzal elemezhető. A gráfmodell szerint a KOLMOGOROV-féle differenciál-egyenletrendszer — mely az állapotokban való tartózkodás valószínűségeinek időbeni változását írja le — az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_1(\tau) &= -(\beta_{12} + \beta_{13})P_1(\tau) + \beta_{21}P_2(\tau) + \beta_{31}P_3(\tau) \\
 \dot{P}_2(\tau) &= -(\beta_{21} + \beta_{24})P_2(\tau) + \beta_{12}P_1(\tau) + \beta_{42}P_4(\tau) \\
 \dot{P}_3(\tau) &= -(\beta_{31} + \beta_{34})P_3(\tau) + \beta_{13}P_1(\tau) + \beta_{43}P_4(\tau) \\
 \dot{P}_4(\tau) &= -(\beta_{42} + \beta_{43})P_4(\tau) + \beta_{24}P_2(\tau) + \beta_{34}P_3(\tau)
 \end{aligned}
 \quad , \quad (VII.5.1)$$

ahol  $\beta_{ij}$  az állapotváltási intenzitások, melynek értékeit a VII.2. Táblázat tartalmazza.

Mivel az általunk vizsgált folyamatot beálltnak, azaz időben változatlanoknak tekintjük, így az állapotokban való tartózkodási valószínűségek időszerinti deriváltjaira teljesül, hogy:

$$\dot{P}_1(\tau) = \dot{P}_2(\tau) = \dot{P}_3(\tau) = \dot{P}_4(\tau) = 0 \quad . \quad (VII.5.2)$$

Ekkor a (VII.5.1) egyenlet mátrixaritmetikai alakban is felírható:

$$\mathbf{0} = \mathbf{Bp} \quad , \quad (VII.5.3)$$

ahol:

$\mathbf{0}$  — nullvektor:

$$\mathbf{0}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad ;$$

**B** — a (VII.5.1) egyenletrendszer együtthatómátrixa:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -(\beta_{12} + \beta_{13}) & \beta_{21} & \beta_{31} & 0 \\ \beta_{12} & -(\beta_{21} + \beta_{24}) & 0 & \beta_{42} \\ \beta_{13} & 0 & -(\beta_{31} + \beta_{34}) & \beta_{43} \\ 0 & \beta_{24} & \beta_{34} & -(\beta_{42} + \beta_{43}) \end{bmatrix} \quad ;$$

**p** — az állapotokban való tartózkodások valószínűségvektora:

$$\mathbf{p}^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4] \quad .$$

A megoldás további feltétele, hogy

$$\sum_{i=1}^4 P_i(\tau) = 1 \quad , \quad (\text{VII.5.4})$$

amely azt fejezi ki, hogy az üzemeltetés tárgya csak a fenti négy állapot (melyek esetünkben a teljes eseményteret alkotják) valamelyikében tartózkodhat.

Az egyenletrendszer megoldásakor problémaként jelentkezett, hogy a numerikus algoritmusok könnyen a triviális megoldást adják (vagy adhatják) meg. Mivel a Szerző kutatási célja egy könnyen algoritmizálható vizsgálati eljárás kidolgozása volt, ezért a fenti eljárást módosította, lásd a [VII.17], [VII.18] és [VII.23] irodalmakat. Ekkor az  $N$ -ismeretlenes (esetünkben négy-ismeretlenes) egyenletrendszert  $N+1$ -ismeretlenesre alakította át. Az állapotokban tartózkodások valószínűségeinek vektora  $N+1$ -edik elemének a teljes eseménytér bekövetkezésének valószínűségét — a (VII.5.4) egyenletet — tekintve. Így a (VII.5.3) egyenlet az alábbi alakura módosult:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 1 \quad \dots \quad 1 & \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{VII.5.5})$$

Ez a lineáris egyenletrendszer már bármely ismert numerikus módszerrel kapott eredménye a (VII.5.3) egyenlet triviálistól eltérő megoldása lesz.

A fenti egyenletrendszer VII.2. Táblázat értékeinek felhasználásával történő megoldása az alábbi állapotokban való tartózkodási valószínűségeket

jelenti:

$$P_1 = 0,7689 ; P_2 = 0,0855 ; P_3 = 0,1044 ; P_4 = 0,0414 \quad .$$

A fenti eredmény alapján elsősorban ki tudjuk jelteni, hogy a berendezés esetén 76,89 %-os készenlélet tudunk biztosítani a jelenlegi karbantartási rendszerrel. Mivel ismert a javítási költségek, illetve a javítási munkaigények, így prognosztizálhatjuk, egy adott  $T$  vizsgálati idő alatti  $K_\Sigma$  javítási költséget, illetve  $M_\Sigma$  munkaigényt. Ez az alábbi összefüggések segítségével oldható meg:

$$K_\Sigma = T \sum_{i=2}^4 \frac{k_i P_i}{\tau_i} \quad , \quad (\text{VII.5.6})$$

illetve

$$M_\Sigma = T \sum_{i=2}^4 \frac{m_i P_i}{\tau_i} \quad , \quad (\text{VII.5.7})$$

ahol:

- $k_i$  —  $i$ -edik javítás költsége;  
 $m_i$  —  $i$ -edik javítás munkaigénye.

Példánk esetén 10000 órával számolva:

$$K_\Sigma = 10000 \left( \frac{5430 \cdot 0,0855}{10,2} + \frac{1432 \cdot 0,1044}{4,0} + \frac{6458 \cdot 0,0414}{3,5} \right) = 1592802,9 \text{ HUF} \quad ,$$

illetve

$$M_\Sigma = 10000 \left( \frac{10,2 \cdot 0,0855}{10,2} + \frac{8 \cdot 0,1044}{4} + \frac{4,6 \cdot 0,0414}{3,5} \right) = 3487,1 \text{ munkaóra} \quad .$$

## VII.6. AZ ÜZEMELTETÉS ÁLLAPOTFIGYELÉSRE ÉPÜLŐ IRÁNYÍTÁSA

Egy technikai rendszert, illetve annak rendszereit, berendezéseit üzemeltetésük során sztochasztikus hatások érik: külső zavarások, illetve belső zajok terhelik. Ezen hatások következtében műszaki állapotuk halmozottan, és véletlenszerűen változik. Általában, használat során üzemállapotuk romlik, míg javítás, karbantartás során javul. A vizsgált rendszer pillanatnyi műszaki állapotát az úgynevezett belső paraméterek (például rugómerevség, elektromos ellenállás, vagy egy részegység hatásfoka) határozzák meg. Ezért — matematikailag — a műszaki állapotot a belső paraméterek által meghatározott, többdimenziós tér egy pontjával jellemezhetjük.

A műszaki diagnosztika feladata a rendszer eme paramétertérben elfoglalt pillanatnyi helyének meghatározása (ez ismerhető meg a VI.7. fejezetben), mozgási sebességének, és irányának prognosztizálása.

A jellemző technikai paraméter pillanatnyi értéke, és változási sebességének ismeretében dönthetünk, hogy a következő ellenőrzésig szükséges-e karbantartást vagy javítást végezni a rendszeren. Ehhez a jellemző, meghibásodáshoz tartozó értékének ismeretében meg kell határozni annak az üzemképes működéshez megengedhető értékét, és megengedhető változási sebességét.

Egy  $\eta$  paraméter meghibásodáshoz tartozó  $\eta_h$  értékének és az ellenőrzései közti  $\Delta\tau$  idő ismeretében az üzemképes működéshez megengedhető  $\eta_m$  értéke és  $\dot{\eta}_m$  sebessége meghatározásához az alábbi egyszerűsítő feltételezéseket tesszük:

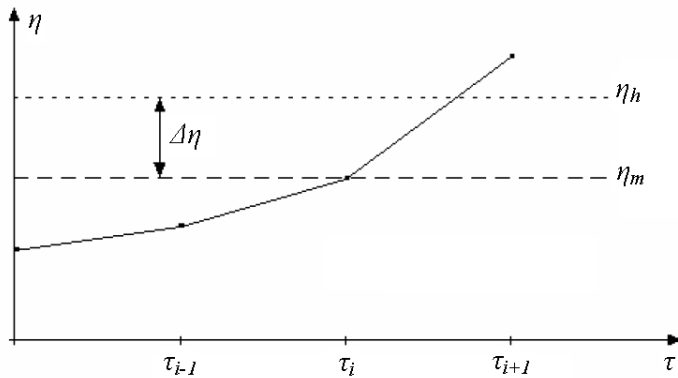
- az  $\eta$  paraméter változása a  $\Delta\eta$  hosszú  $[\eta_m; \eta_h]$  intervallumban lineáris;
- a paraméter változásának  $\dot{\eta}$  sebessége egy, a vizsgált rendszer üzemidejétől független  $f(\eta)$  valószínűségi sűrűséggel jellemezhető.

A feltételezésekből esetleg származó pontatlanságokat az  $\dot{\eta}$  változási sebesség véletlen voltát az  $f(\eta)$  valószínűségi sűrűséggel bíró valószínűségi változóként történő kezelésével egyensúlyozzuk ki.

Ha az  $i$ -edik ellenőrzésnél  $\eta$  eléri az  $\eta_m$  megengedhető értéket és a paraméter ezt követően

$$\dot{\eta} > \frac{\Delta\eta}{\Delta\tau}$$

sebességgel változik, a jellemző a következő ( $i+1$ -edik) ellenőrzés előtt eléri az  $\eta_h$  meghibásodási értéket.



VII.3. ábra Megengedhető paraméterértékek meghatározása

Ezért az üzemképes működéshez megengedhető  $\dot{\eta}_m$  paramétermegváltozási sebesség értéke:

$$\dot{\eta}_m = \frac{\Delta\eta}{\Delta\tau} \quad , \quad (\text{VII.6.1})$$

a meghibásodási valószínűség:

$$P_h(\Delta\tau, \Delta\eta) = P(\dot{\eta} > \dot{\eta}_h) = 1 - P(\dot{\eta} \leq \dot{\eta}_h) = 1 - \int_{-\infty}^{\dot{\eta}_h} f(\dot{\eta}) d\dot{\eta} \quad . \quad (\text{VII.6.2})$$

A  $Q$  kockázati — megengedhető meghibásodási — valószínűség ismeretében, azt a (VII.6.2) egyenletbe behelyettesítve kapjuk:

$$Q = P_h(\Delta\tau, \Delta\eta) = 1 - \int_{-\infty}^{\dot{\eta}_m} f(\dot{\eta}) d\dot{\eta} \quad . \quad (\text{VII.6.3})$$

Ha statisztikai illeszkedésvizsgálattal nem tudjuk meghatározni az  $\eta$  paraméter változási sebességének sűrűségét, akkor valamely általánosan alkalmazott eloszlástípust célszerű feltételeznünk.

→ **Egyenletes eloszlás esetén:**

$$f(\dot{\eta}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \dot{\eta}_{\min} > \dot{\eta} \\ \frac{1}{\dot{\eta}_{\max} - \dot{\eta}_{\min}} = \frac{1}{\Delta\dot{\eta}} & \text{ha } \dot{\eta}_{\max} \geq \dot{\eta} \geq \dot{\eta}_{\min} \\ 0 & \text{ha } \dot{\eta} > \dot{\eta}_{\max} \end{cases} \quad , \quad (\text{VII.6.4})$$



ahol:

$\dot{\eta}_{\max}$  — maximális paraméterváltozási sebesség;  
 $\dot{\eta}_{\min}$  — minimális paraméterváltozási sebesség;

$$\Delta \dot{\eta} = \dot{\eta}_{\max} - \dot{\eta}_{\min} \quad . \quad (\text{VII.6.5})$$

Ekkor, felhasználva a (VII.6.3) egyenletet:

$$Q = 1 - \int_{-\infty}^{\dot{\eta}_m} \frac{1}{\Delta \dot{\eta}} d\dot{\eta} = 1 - \frac{\dot{\eta}_m}{\Delta \dot{\eta}} = 1 - \frac{\Delta \eta}{\Delta \tau \Delta \dot{\eta}} \quad , \quad (\text{VII.6.6})$$

azaz:

$$\Delta \eta = (1 - Q) \Delta \tau \Delta \dot{\eta} \quad . \quad (\text{VII.6.7})$$

→ **Exponenciális eloszlás esetén:**

$$f(\dot{\eta}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \dot{\eta} < 0 \\ \lambda e^{-\lambda \dot{\eta}} & \text{ha } 0 \leq \dot{\eta} \end{cases} \quad . \quad (\text{VII.6.8})$$

Ekkor:

$$Q = 1 - e^{-\lambda \dot{\eta}_m} \quad , \quad (\text{VII.6.9})$$

illetve:

$$\Delta \eta = -\frac{\ln(1 - Q)}{\lambda} \Delta \tau \quad . \quad (\text{VII.X10})$$

→ **Normális (GAUSS) eloszlás esetén:**

$$f(\dot{\eta}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\dot{\eta} - m)^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (\text{VII.6.11})$$

Normál (GAUSS) változási sebesség eloszlás esetén algebrailag könnyen levezethető megoldást nem találunk. Ezért a statisztikailag meghatározott, vagy felvett várható érték, és szórás adatok alapján, azokat standard normál eloszlásban kifejezve, határozhatjuk meg a megengedhető paraméterváltozási sebesség és a  $\Delta \eta$  tartomány nagyságát.

Az üzemképes működéshez megengedhető paraméter érték:

$$\eta_m = \eta_h - \Delta\eta \quad . \quad (\text{VII.6.12})$$

Ha az  $\eta$  és az  $\dot{\eta}$  értékek kisebbek a (VII.6.12), illetve a (VII.6.1) egyenletekkel meghatározott értékeknél, akkor a rendszer a következő ellenőrzésig, karbantartásig legkevesebb  $I-Q$  valószínűséggel nem hibásodik meg.

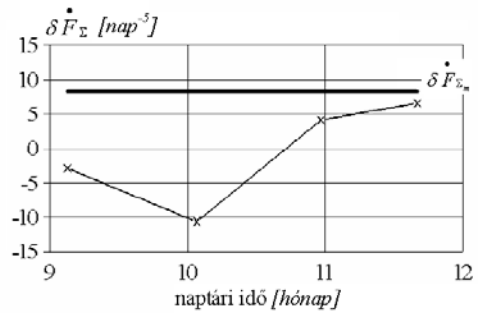
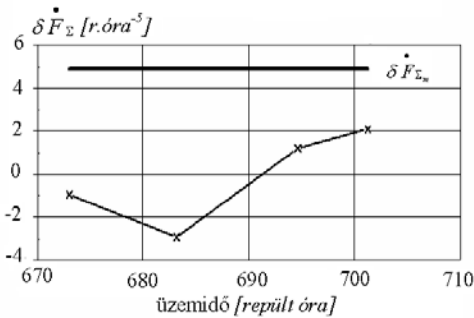
A [VII.16]; [VII.17] és [VII.19] irodalmakban részletesebben tanulmányozható a Mi-8 *Hip* típusú helikopter féklevégő rendszerének állapotfigyelésre épülő irányítórendszere, illetve a hozzá kapcsolódó sztochasztikus modell kidolgozása. Ekkor az elemzés során — mint az már a VI.7. fejezetben is olvasható volt — vezető paraméternek a fékhatás csökkenése, illetve a fékhatás aszimmetriája volt. Az üzemeltetési határértékek meghatározásához a paraméterváltozási sebesség sűrűségét egyenletes eloszlásúként modellezték — lásd a (VII.6.4) ~ (VII.6.7) egyenleteket. Elemzési adatoknak a VI.7. fejezetben bemutatott elemzés eredményei kerültek felhasználásra.

Az állapotfigyelő eljárásra épülő üzemeltetés-irányítási módszer kidolgozása érdekében szükséges volt a vezető paraméterek — a rendszer üzemképességét meghatározó — határértékeinek ismerete. A két vezető paraméter ezen értékeit sem légügyi előírások, sem egyéb más szabályzatok, vagy technológiai utasítások sem adták meg. Ezért szakértői kérdőívek felhasználásával az alábbi adatok meghatározására is sor került az elemzés során:

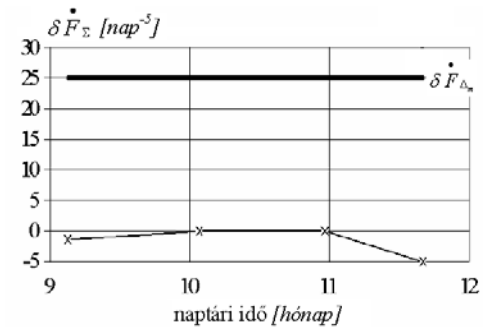
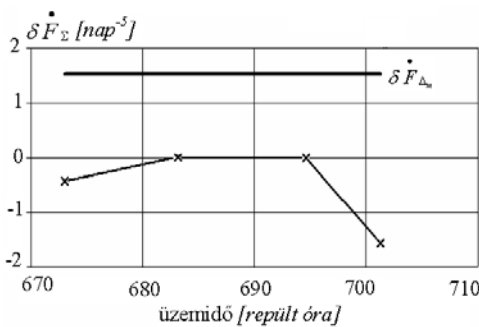
- az üzemeltetés szempontjából még megengedhető
  - fékhatás csökkenés;
  - fék-aszimmetria;
- az ellenőrzések közötti ajánlott
  - repült idő;
  - naptári idő.

A szakértői válaszok értékelésével részletesebben, a VIII.6 fejezetben, a fuzzy döntési modellalkotás ismertetése során foglalkozunk.

A VI.7., illetve VI.8. ábrához csatlakozóan a VII.4., illetve VII.5. ábrák a fékhatás, illetve fékaszimmetria változási sebességeit, valamint azok megengedhető értékeit szemlélteti repült-, valamint naptári idő függvényében.



VII.4. ábra Fékhatás változási sebességek



VII.5. ábra Fékaszimmetria változási sebességek

A VI.7., illetve VI.8. ábrához csatlakozóan a VII.4., illetve VII.5. ábrák a fékhatás, illetve fékaszimmetria változási sebességeit, valamint azok megengedhető értékeit szemlélteti repült-, valamint naptári idő függvényében.

## VII.7. SORBANÁLLÁSI MODELLEK

Egy kiszolgálási rendszer modelljének felhasználásával meghatározható a fogyasztók várakozási ideje, a foglaltsági intervallum hossza (vagyis az a folyamatos idő, amely alatt a kiszolgáló egység állandóan foglalt), az üresjáratú időszakok hossza, a pillanatnyi munkahátralék, a rendszerben lévő igények száma.

A sorbanállási modellek felhasználhatók különböző logisztikai, műszaki kiszolgálási rendszerek, folyamatok elemzésére. Ilyen vizsgálat lehet például a repülőterek előkészítő zónái szükséges befogadóképességeinek, a repülési feladatokat kiszolgáló különleges gépjárművek számának meghatározása.

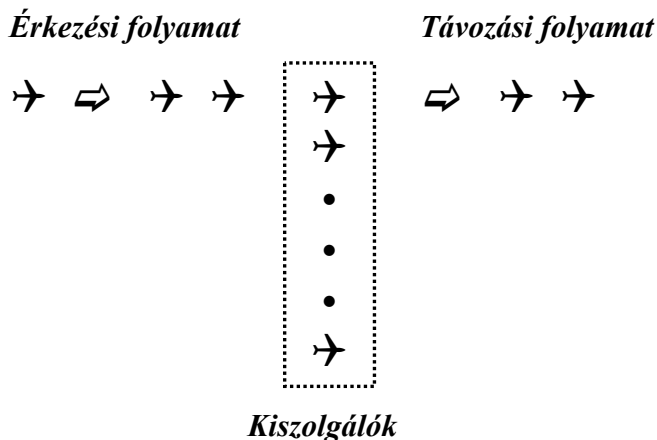
Ugyanezen matematikai módszerrel állapítható meg például a javító műhelyek szükséges kapacitása, illetve speciális szerszámainak, készülékeinek optimális száma is. Fontos kérdés egy kiszolgálási rendszer vagy folyamat

sorbanállási modell felállításakor — még a legelején — a fogyasztók, a kiszolgálók, a kiszolgálási csatornák, illetve a kiszolgálás pontos meghatározása.

A MiG-29 *Fulcrum* típusú repülőgépek harcrendbe állításával kapcsolatban merült fel a mérnök-műszaki kiszolgálására használt *zóna* szükséges mérete, azon belül a kiszolgáló helyek száma meghatározásának kérdése. A problémára a MARKOV-típusú sorbanállási folyamatok elméletének alkalmazásával kaphattunk korszerű, rendszerszemléletű megoldást.

A kiképzési repülés műszaki kiszolgálása matematikai szempontból egy többcsatornás, korlátozott tárolási méretű, markovi, vagy fél-markovi sorbanállási rendszert alkot. Ekkor a repülésen résztvevő gépeket tekintjük a fogyasztóknak, a repülőműszaki állományt pedig a kiszolgálóknak.

Vizsgálatunkban a kiszolgálás alatt nem csak a repülőgépek ismételt feladatra való előkészítését, hanem utána, a következő feladatra való várakozását is értjük, mivel mindkettő a kiszolgáló zónában (a kiszolgáló helyen) megy végbe. Így a távozási folyamaton a gépek a zónából a következő gyakorlatra való távozását értjük. Ezt a folyamatot alapvetően a repülési tervtábla határozza meg. Viszont a kiképzési repülés során az egyéb, véletlenszerű külső hatások miatt a tervtáblától történő eltérés léphet fel. Így ez a folyamat irányított (de!) sztochasztikus folyamatnak tekinthető. Ilyen külső hatás lehet például a kiképzési repülés során esetleg fellépő jelentős időjárás változás.



VII.6. ábra A kiképzési repülés, mint sorbanállási folyamat

Szintén a repülési tervtábla határozza meg az úgynevezett kiszolgálási sorrendet vagy kiszolgálási mechanizmus-t is, mely — a fent említett okok miatt — szintén véletlenszerűnek tekinthető.

Többszatsornásnak tekinthető a vizsgált rendszer, mert a zónában a műszaki állomány a kiszolgáló helyeken egyszerre, párhuzamosan végezheti az ismételt feladatra való előkészítések.

A kiszolgáló állomások, vagy más néven a kiszolgálási csatornák számát jelen esetben — a műszaki értelemben vett — kiszolgáló helyek (a töltőkutak vagy töltőkocsik, földi áramforrások) száma jelenti. Röviden fogalmazva: a kiszolgáló csatornák számát mindig a rendszer — szakmai szempontokból — „legszűkebb keresztmetszete” határozza meg.

A korlátozott tárolási méretet a repülésen résztvevő gépek számaként — mint a rendszer jellemzőjét — vettük fel. Feltételeztük, hogy a kiképzési repülés során újabb, illetve nem a repülőegységhez tartozó gép, vagy gépek kiszolgálására nem kerül sor. Ezzel a feltétellel a felállítandó átmenet-valószínűségi mátrix méretét határoztuk meg.

A modellvizsgálat során egy várakozási-hossz problémát kellett megoldani. Ekkor a kiszolgálásra váró fogyasztók számát, amely tartalmazza azokat is, melyek kiszolgálása éppen folyik, elemeztük az idő függvényében. Ugyanis a rendszerben lévő igények száma határozza meg elemzésünk során a kiszolgáló zóna szükséges befogadó képességét.

A kiképzési repülések műszaki kiszolgálásának többszatsornás, korlátozott tárolási méretű sorbanállási modellezése esetén a kiszolgáló zónában tartózkodó gépek száma egy folytonos idejű,  $\{0; 1; 2; \dots; K\}$  véges állapotterű  $N_T$  MARKOV-láncot alkot, az alábbi valószínűségi derivált mátrixszal:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \mu_k & -\mu_k \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.7.1})$$

ahol  $\mu_i$  értékeit a VII.3. fejezetben leírt **(IIa)** feltétel — a (VII.3.5) egyenlet — alapján lehet meghatározni.

A (VII.7.1) egyenlet felhasználásával — PRÉKOPA [VII.24] szerint — felírható az alábbi mátrixegyenlet

$$\frac{d\mathbf{p}(\tau)}{d\tau} = \Lambda \mathbf{p}(\tau) \quad . \quad (\text{VII.7.2})$$

A (VII.7.2) egyenlet jelenti a kiképzési repülések műszaki kiszolgálásának sorbanállási modelljét.

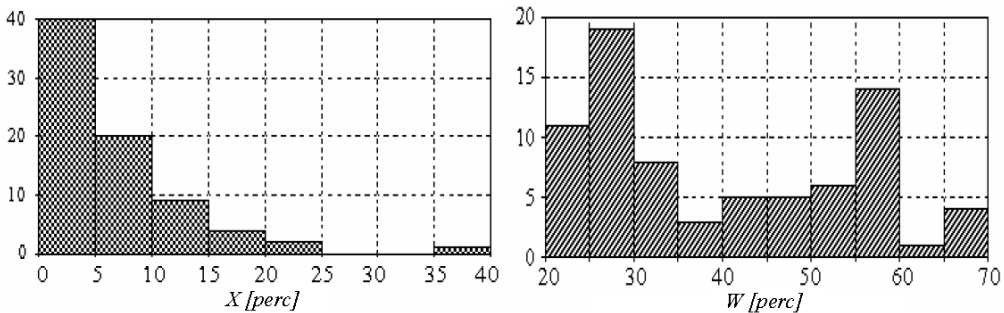
A modell feltöltése — a  $\mu$  és a  $\lambda$  tényezők meghatározása — érdekében felvett adatok statisztikai vizsgálatának eredményeit a VII.3. Táblázat, a VII.7.

ábra szemlélteti.

	Beérkezési folyamat	Kiszolgálási folyamat
megfigyelés	76	76
minimum	0	20
maximum	39	69
átlag	7,3314	34,7223
<b>intenzitás</b>	<b><math>\lambda = 0,1364</math></b>	<b><math>\mu = 0,0288</math></b>
szabadságfok	5	5
$\chi^2$	0,8460	10,6573
elf. valószínűség	$\approx 0,975$	$\approx 0,05$

VII.3. Táblázat Statisztikai vizsgálatok eredményei

Az elvégzett statisztikai vizsgálatok alapján határoztuk meg az  $\bar{X}$  beérkezések közti idők átlagát, abból a  $\lambda$  beérkezési intenzitást, illetve a  $\bar{W}$  a kiszolgálási idők átlagát és a  $\mu$  kiszolgálási intenzitást.



VII.7. ábra Beérkezési időközök és kiszolgálási idők hisztogramjai

A VII.3. táblázat és a VII.7. ábra alapján megállapítható, hogy míg az érkezési folyamat — jó közelítéssel — exponenciálisnak tekinthető, a távozási folyamat ettől jelentős eltérést mutat. Így az illeszkedési vizsgálatok eredményei alapján kijelenthető, hogy a statisztikailag feldolgozott műszaki kiszolgálási folyamatok fél-markovi kiszolgálási folyamatként kezelhető.

Stacioner, azaz már beállt, kiszolgálási folyamat esetén az  $N_r$  folyamat állapotokban tartózkodás valószínűségének vektora a

$$\Lambda p = 0 \tag{VII.7.3}$$

egyenlet, a VII.5 fejezetben leírt — lásd a (VII.5.5) egyenletet algoritmus szerint

— megoldásaként kapható meg.

A (VII.7.3) egyenlet alapján meghatározható az állapotokban való tartózkodások  $\mathbf{p}$  valószínűség-vektora, illetve a

$$P_q = \sum_{i=r+1}^K P_i \quad (\text{VII.7.4})$$

elutasítás, a mi esetünkben: a zónából történő kiszorulás, más szóval, a zóna előtti torlódás valószínűsége.

A modell gyakorlati alkalmazása szempontjából a legfontosabb jellemző lehet a kiszolgáló zóna fogadóképességének

$$P_{fk} = 1 - P_q \quad (\text{VII.7.5})$$

valószínűsége. Ez a paraméter annak a valószínűségét fejezi ki, hogy a zóna képes befogadni az összes, ismételt feladatra való előkészítést igénylő repülőgépet.

A modellhez az előzőekben megállapított beérkezési és kiszolgálási intenzitásokat felhasználva határoztuk meg a  $\Lambda$  mátrix elemeit.

A modellt működtető program futtatásával elemezhető adott számú repülőgép kiszolgálása különböző befogadó képességű zóna esetén, illetve egy adott befogadó képességű zónából, változó gépszám mellett történő kiszolgálás. Az első esetben a kiszolgáló zóna befogadóképességét tudjuk optimalizálni. A másikon pedig meghatározhatjuk egy adott — például egy úgynevezett manőver-repülőgépter fogadóképességét az általunk megállapított feltételek mellett.

### VII.7.1. A KISZOLGÁLÓ ZÓNA BEFOGADÓKÉPESSÉGÉNEK MEGHATÁROZÁSA

Egy kiképzési repülés beállt — stacioner — műszaki kiszolgálását modelleztük, a kiszolgáló zóna eltérő befogadóképességei esetén. A modellezett kiképzési repülésen 20 gép vett részt.

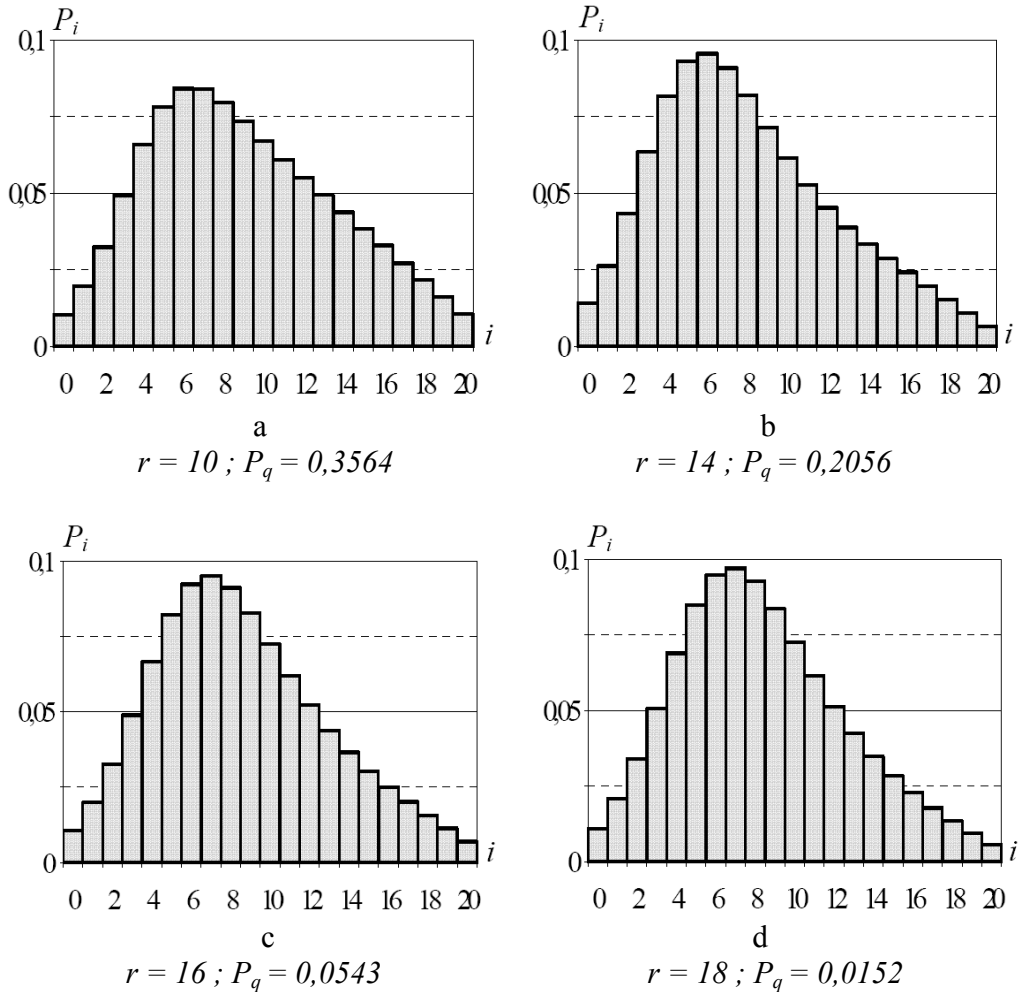
A futási eredményeket a VII.8. ábra szemlélteti. A grafikonokon a kiszolgálási folyamat állapotban való tartózkodási valószínűségeinek változásai láthatók különböző zónakapacitás esetén.

A fenti eredmények elemzésével választható ki adott számú repülőgép kiképzési repülésének mérnök-műszaki biztosításához szükséges kiszolgáló zóna befogadó képesség.

Ehhez első lépésként meg kell határozni annak a megengedhető valószínűségét, hogy a repülés során a kiszolgáló zóna előtt torlódás lép fel.

A zóna kapacitásának azt a legkisebb kiszolgáló csatorna számot célszerű választani, mely kielégíti a meghatározott határértéket.

Fontos megjegyezni, hogy az így kiválasztott értéket csak a rendszerszemléletű megközelítés eredményének szabad tekinteni. A zóna befogadó képességével kapcsolatos végleges döntés meghozatalánál figyelembe kell venni más, a következőkben felsorolásra kerülő, szempontokat is.



VII.8. ábra Az állapotokban való tartózkodások valószínűségei eltérő  $r$  kiszolgálóhely szám és 20 repülőgép esetén

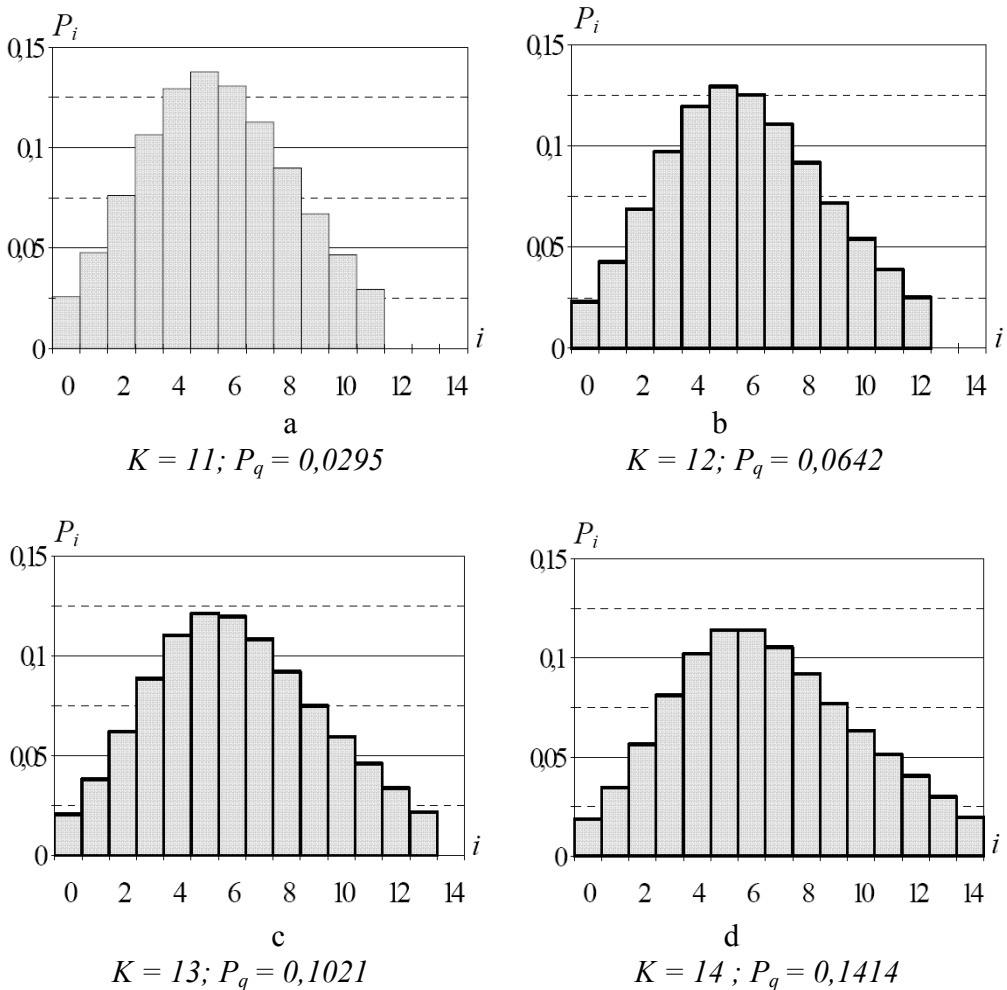
### VII.7.2. A KISZOLGÁLHATÓ GÉPSZÁM MEGHATÁROZÁSA

A kiképzési repülések műszaki kiszolgálásának beállt sorbanállási modellje felhasználható egy, már meglévő befogadó képességű zónából a kiszolgálható repülőgépek számának meghatározására.



Ez az elemzés szükséges például a vizsgált repülőtérre települt repülőegység gépszámának növelése esetén, vagy egy másik repülőegység repülőgépeinek — harcászati gyakorlat során, vagy a bázis repülőtér felújítása alkalmából történő — ideiglenes áttelepítésének tervezésekor, szervezésekor. Ezt a vizsgálatot célszerű elvégezni a manőver-repülőterek kijelölése, a róluk történő üzemeltetések tervezése során is.

Az elemzés elvégzéséhez a korábban felállított stacioner sorbanállási modellt kell alkalmazni azonos kiszolgáló csatorna szám esetén, eltérő repülőgépszámokkal. Az így elvégzett számítások eredményeit mutatja be a VII.9. ábra.



VII.9. ábra Az állapotokban való tartózkodások valószínűségei 10 kiszolgálólé hely és eltérő gépszámok esetén

A kapott eredmények alapján egy 10 férőhelyes szükség zóna esetén — a fentiekben meghatározott beérkezési és kiszolgálási intenzitásokkal számolva, és figyelembe véve az üzemeltetés ideiglenes jellegét — maximum 12 ( $P_q = 6,42\%$ ) repülőgép kiszolgálását célszerű tervezni folyamatos repülő üzemben.

## VII.8. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [VII.1] **APELAND, S. – AVEN, T.**, Risk based maintenance optimization: foundational issues, Reliability Engineering and System Safety 67 (2000) 285–292.
- [VII.2] **BHARUCHA-REID A.T.**, Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [VII.3] **CLARKE A.B. – DISNEY R.L.**, Probability and Random Processes for Engineers and Scientists, Jhon Wiely & Sons Inc., New York, 1970.
- [VII.4] **ÉLTETŐ Ö. – MESZÉNA, GY. – ZIERMANN, M.**, Sztochasztikus módszerek és modellek, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
- [VII.5] **FOWKES, N.D. – MAHONY, J.J.**, An Introduction to Mathematical Modelling, John Wiley and Sons Inc., New York.
- [VII.6] **GOSAVI, A.**, A risk-sensitive approach to total productive maintenance, Automatica 42 (2006) 1321 – 1330.
- [VII.7] **KALLEN M.J. – VAN NOORTWIJK, J.M.**, Optimal maintenance decisions under imperfect inspection Reliability Engineering and System Safety 90 (2005) 177–185.
- [VII.8] **KARLIN S. – TAYLOR H.M.**, Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, Budapest, 1985.,
- [VII.9] **KLEINROCK L.**, Sorbanállás – kiszolgálás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [VII.10] **MCGOUGH, J. – REIBMAN, A. – TRIVEDI, K.**, Markov Reability Models for Digital Flight Control System, J.Guid. Dyn. and Conrt., 1989/12 (p.209-219).
- [VII.11] **PAPOULIS A.**, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Company, Singapore, Hamburg, 1984.
- [VII.12] **PAPOULIS A.**, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill Book Company, Singapore, Hamburg, 1984.
- [VII.13] **POKORÁDI, L.**, Application of Markov Process Theory to Investigation of Aircraft Operational Processes, Proceedings of 19<sup>th</sup> Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, Anaheim, California, USA, 1994., volume 3, p. 2172–2180.

- [VII.14] **POKORÁDI, L.**, Investigation of Aircraft Operational System with Markov-Matrix, Proceeding of 4<sup>th</sup> Mini Conference on Vehicle System Dynamics Identification and Anomalies, Budapest, 1994., p. 437–444.
- [VII.15] **POKORÁDI, L.**, Aircraft Operation as a Markov-Process (An Queuing Model), Bulletins for Applied Mathematics, PAMM, Budapest, 1073/95, LXXV, p. 77–86.
- [VII.16] **POKORÁDI, L.**, Aircraft Operation as a Markov-Process (Wartime Operation), Bulletins for Applied Mathematics, PAMM, Budapest, 1183/96, LXXVII, p. 53–62.
- [VII.17] **POKORÁDI, L.**, Repülőgépek üzemeltetési folyamatainak markovi modellje, Kandidátusi értekezés, MTA DT., Budapest, 1996.
- [VII.18] **POKORÁDI, L.**, Markovian Modeling Wartime Operation of Military Aircraft, "International Aerospace Congress 1997", Sydney, Australia, Volume 2, p. 537–549.
- [VII.19] **POKORÁDI, L. – SZABOLCSI, R.**, Aircraft Operation Management Based on State-Estimation, Proceedings of 21<sup>st</sup> ICAS Congress, 13-18 September 1998., Melbourne, Victoria, Australia (CD-version).
- [VII.20] **POKORÁDI, L. – SZABOLCSI R.**, Mathematical Models Applied to Investigate Aircraft Systems, nomográfia, Monographical Booklets in Applied and Computer Mathematics, MB-12, Pannonian Applied Mathematical Meetings, ISSN 1417-278X, Technical University of Budapest, Budapest, 1999., Part II, pp. 146.
- [VII.21] **POKORÁDI L.**, Mathematical Model-Based Management of Technical Operation, Bulletin for Applied and Computing Mathematics, BAM-1779/2001 XCIV. p. 27–36.
- [VII.22] **POKORÁDI, L.**, Karbantartás elmélet, 2002., [http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb\\_elm.pdf](http://www.mfk.unideb.hu/userdir/pokoradi/karb_elm.pdf). pp. 101.
- [VII.23] **POKORÁDI, L.**, Döntés-előkészítési módszerek a repülőgépek üzemeltetésében, habilitációs tézisek, BME Közlekedésmérnöki Kar, 2002.
- [VII.24] **PRÉKOPA A.**, Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
- [VII.25] **REIMANN, J.**, A valószínűségszámítás és néhány katonai alkalmazása, MH.HTI., Budapest, 1966.
- [VII.26] **RÉNYI, A.**, Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [VII.27] **ROHÁCS, J. – SIMON, I.**, Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.
- [VII.28] **SZABOLCSI, R.**, Computer-Aided Simulation of Random Signals and Random Systems, Bulletins for Applied & Computer Mathematics, BAM-1693/'99, XC-B, ISSN 0133-3526, p(71-84), Göd, Hungary.

- [VII.29] **SZABOLCSI, R.**, Mathematical Models For Gust Modeling Applied in Automatic Flight Control Systems' Design, CD-ROM Proceedings of the "5<sup>th</sup> International Conference New Challenges in the Field of Military Sciences 2007", 13-14 November 2007, Budapest, Hungary.
- [VII.30] **SZABOLCSI, R.**, Robust Analysis of the Automatic Control Systems, Proceedings of the International Conference on Military Technologies ICMT'07, ISBN 978-80-7231-238-2, p(447-454), 2-4 May, 2007, Brno. Czech Republic.
- [VII.31] **SZABOLCSI, R.**, Robust Analysis of the Stability Augmentation System, Proceedings of the International Conference on Military Technologies ICMT'07, ISBN 978-80-7231-238-2, p(455-463), 2-4 May, 2007, Brno. Czech Republic.
- [VII.32] **WENTZEL E. – OVCHAROV L.**, Applied Problems in Probability Theory, Mir Publisher, Moscow, 1986.

# FUZZY MODELLEZÉS

### VIII.1. BEVEZETÉS

Napjaink korszerű technikai berendezései és döntéshozatali módszerei mind szélesebb körben alkalmaznak valamilyen fuzzy eszközt, fuzzy szabályzó vagy szakértői rendszert. A fuzzy halmazelmélet, és logika 1965-ben született meg, LOFTI ZADEH „Fuzzy Sets” című cikkében [VIII.24]. A fuzzy logika egy olyan új matematikai eszköz, mellyel a valós világ bizonytalanságait tudjuk modellezni.

Egyes magyar szakirodalmak minősítő logikának is nevezik a matematika ezen ágát. A szótárak szerint a „fuzzy” angol szó jelentése (többek között): homályos, elmosódott, lágy körvonalú, életlen kontúrú. Alapvetően a *fuzzyság* a pontatlanság egy típusa. Olyan elemek csoportosításából, halmazából származó pontatlanság, melyeknek nincsenek határozott körvonalai. A fuzzy teóriájának egyik fő célja olyan módszerek kidolgozása, melyekkel szabályokba foglalhatók és megoldhatók a túlságosan bonyolult, hagyományos vizsgálati módszerek segítségével nehezen megfogalmazható problémák. Mérnöki szempontból a fuzzy logika egy olyan módszer, mellyel az analóg folyamatokat digitális eszközökkel (például személyi számítógépekkel) lehet modellezni. Más — humán jellegű — tudományos fogalmazásban a fuzzy elmélet az intuíciót tekinti a központi magyarázó paradigmának.

A klasszikus logika főbb elveit először Arisztotelész fejtette ki, és legfontosabb eljárásait is ő határozta meg. Az arisztotelészi logikát talán legjobban a „kizárt közép törvényével” tudjuk jellemezni, ami szerint minden logikai következtetés csak igaz {1} vagy hamis {0} eredményű lehet.

A fuzzy logika egy olyan sokértékű logika, mely egy következtetés eredményének megengedi a klasszikus logikában felvehető igaz {1} és hamis {0} közti — azaz a [0;1] zárt intervallumban definiált — bármely valós értéket.

A fejezetben előbb fuzzy halmazelmélet — a [VIII.1]; [VIII.4]; [VIII.6]; [VIII.7]; [VIII.20]; [VIII.22] és [VIII.24] irodalmakban alapján összefoglalt — alapfogalmait olvashatók. Ezt követően a technikai eszközök üzemeltetése során alkalmazható különféle — a fuzzy halmazelméleten alapuló — modellezési döntés-előkészítési modell felállítási metódusát és alkalmazási lehetőségeit ismerheti meg a Tisztelt Olvasó, a Szerző [VIII.9] – [VIII.18] publikációiban már közreadott eredmények rendszerezett összefoglalásaként. A VIII.4. fejezet egy, a fuzzy halmazelméletre épülő kockázatbecslési eljárást mutat be. A VIII.5. fejezetben a fuzzy hibamód- és hatáselemzés kerül bemutatásra. Majd a VIII.6. fejezetben egy üzemeltetési döntés-előkészítő modell ismerhető meg, melyben a

szakértők véleményét fuzzy halmazelméleti módszerrel modellezzük.

## VIII.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$Y$	—	fuzzy következtetés értéke;
$\mu$	—	igazság érték;
$\mu(z)$	—	tagsági függvény.

## VIII.3. A FUZZY HALMAZELMÉLET ALAPJAI

A klasszikus logikával összekapcsolt BOOLE-algebra pontosan definiált, és éles határral rendelkező halmazokkal végzendő műveletekkel foglalkozik.

Vegyünk például egy  $B$  jelű paramétert, melynek értékeinek 3 és 4 között kell lennie, azaz:

$$3 \leq B \leq 4 \quad (\text{VIII.3.1})$$

feltételt kell (kéne) kielégíteni.

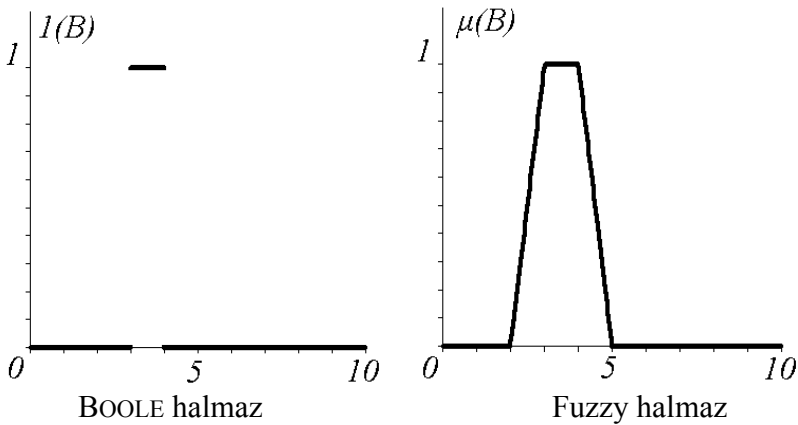
De, mi történik akkor, ha ezt a  $B$  értéket valamilyen mérés eredményeként kapjuk? Pontatlan a műszer, a skáláról rosszul olvassuk le az értéket. Ekkor fog „elfuzzysodni” az (1) egyenlőtlenség kielégítésének igaz volta. Ugyanis — figyelembe véve a fenti tévedési lehetőségeket — a  $B$  értékének meghatározásában pontatlanság lép fel. Ezt a pontatlanságot — azaz a  $3 \leq B \leq 4$  feltétel teljesítésének igaz voltának mértékét — a  $B$  jellemző  $\mu(B)$  jelű tagsági függvényével tudjuk jellemezni. A tagsági függvény — követve a klasszikus logikát — csak a:

$$0 \leq \mu \leq 1 \quad (\text{VIII.32})$$

értéket veheti fel.

Például, esetünkben ezt a pontatlanságot megadhatjuk az alábbi függvénnyel:

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2 \\ x-2 & \text{ha } 2 < x < 3 \\ 1 & \text{ha } 3 \leq x \leq 4 \\ 5-x & \text{ha } 4 < x < 5 \\ 0 & \text{ha } 5 \leq x \end{cases} . \quad (\text{VIII.3.3})$$



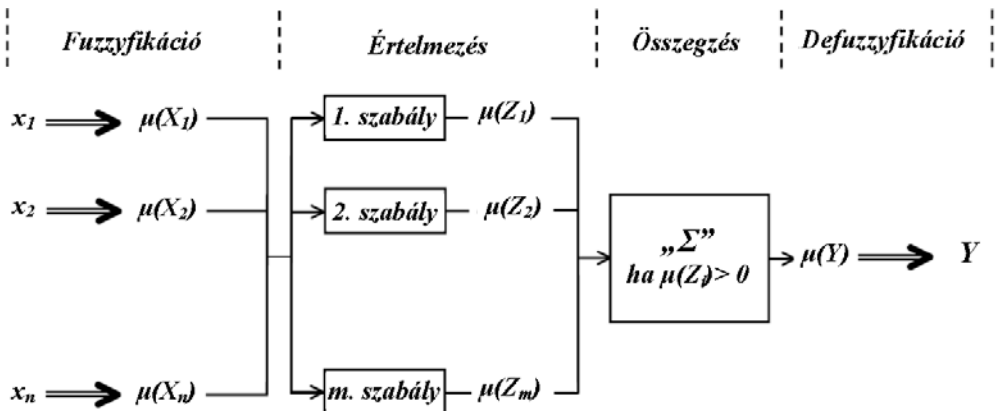
VIII.1. ábra BOOLE és fuzzy halmazok összehasonlítása

Természetesen a tagsági függvény megadására nem csak lineáris egyenletek alkalmazhatók.

L. A. ZADEH a BOOLE-algebrában alkalmazott metszet helyett a MINIMUM OPERÁTOR-t; az unió helyett a MAXIMUM OPERÁTOR-t javasolta bevezetni, a VIII.1. Táblázat szerint.

Boole-algebrai művelet	Fuzzy művelet	
Metszet	Minimum	$\mu(A \cap B) = \text{MIN}(\mu(A), \mu(B))$
Unió	Maximum	$\mu(A \cup B) = \text{MAX}(\mu(A), \mu(B))$
Negáció	Negáció	$\mu(\bar{A}) = 1 - \mu(A)$

VIII.1. Táblázat Fuzzy műveletek



VIII.2. ábra Fuzzy rendszerben lejátszódó folyamat

Egy fuzzy logikai módszert alkalmazó döntéshozatali eljárás vagy fuzzy szabályzó rendszer lényegében az alábbi folyamatot hajtja végre. Ezek a rendszerek, folyamatok egy időben több logikai szabályt — úgynevezett szabálybázist — alkalmaznak. A szabálybázis sajátossága, hogy a logikai szabályok arisztotelészi logika szerinti megoldásai — egy időben — eltérő eredményeket adhatnak. Lényegében ezen ellentmondást oldja fel a fuzzy logika alkalmazása. A folyamat főbb lépéseinek láncolatát szemlélteti a VIII.2. ábra.

### VIII.3.1. Fuzzyfikáció

Az első lépésben — melyet fuzzyfikációnak nevezünk — a rendszer konkrét értékekkel bíró bemenő jellemzőinek pillanatnyi éles értékeihez egy-egy fuzzy tagsági értéket rendelünk. Ekkor, például a (VIII.3.3) egyenlethez, illetve a VIII.1. ábrához hasonló meghatározásokat alkalmazunk például a bemeneti adatok pontatlanságainak, bizonytalanságainak jellemzésére. A fuzzyfikáció elvégzéséhez először is meg kell határozni — még a döntéshozatali modell felállításakor — a modellezés során alkalmazandó kategóriákat és a hozzájuk kapcsolódó tagsági függvényeket.

#### ***Kategóriák meghatározása***

A kategóriák meghatározásához először is meg kell állapítanunk, hogy az adott döntést mely tényezők befolyásolják. Például, általános kockázatbecslés esetén a kockázati szintet egyrészt az esemény bekövetkezésének gyakorisága (valószínűsége), másrészt a felléphető veszteség mértéke határozza meg. Ezzel ellentétben, például a hibamód- és hatáselemzés (FMEA) esetén a befolyásoló tényezők a bekövetkezés gyakorisága, a következmény mértéke és a hiba ok felderíthetőségének szintje [VIII.21].

Ekkor a következőket kell figyelembe vennünk. Először is minél több kategóriát határozunk meg, a vizsgálat annál bonyolultabbá válik, illetve az alkalmazás során a szakértők között jobban megnőhet a félreértések lehetősége is. Viszont előnyt az jelent, hogy árnyaltabb eredményeket kaphatunk. Fontos még arra is odafigyelnünk, hogy a kategóriák neve, és meghatározása a konkrét folyamathoz kapcsolódjon, annak szakmai szempontjait kielégítse.

Természetesen az is lehetséges, hogy a valószínűségi, például a bekövetkezési kategóriákat statisztikailag vagy szakértői vélemények alapján becsült valószínűségi értékek alapján határozzuk meg. Természetesen nem szükséges konkrét nevet adnunk a kategóriáknak, a fogalmuk alapján is alkalmazhatjuk és „csak” egy kóddal jelöljük azokat.

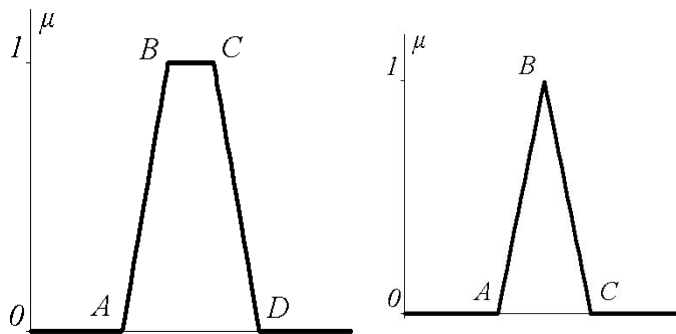
#### ***A tagsági függvények meghatározása***

Az előzőekben kiválasztott és definiált kategóriák fuzzy tagsági függvényeinek meghatározása többféle módon lehetséges. A  $\mu(x;A)$  tagsági függvény az  $x$



jellemző adott  $A$  halmazhoz való tartozásának mértékét adja meg. Ezek pontos meghatározása alapvetően nem fuzzy-halmazelméleti, hanem a konkrét kérdéskörhöz kapcsolódó szakmai feladat is. Itt csak a fuzzy logikában leginkább alkalmazott trapéz és háromszög függvények felvételi módjait mutatjuk be. A lehetséges tagsági függvényekkel kapcsolatban részletesebben lehet olvasni a [VIII.20] irodalomban.

Fontos kérdés itt az úgynevezett éles skála meghatározása. Ha tisztán szakértői véleményekre támaszkodunk a tagsági függvények felvételekor, akkor egy „0 – 10” vagy „1 – 10”, esetleg „0 – 100”, „1 – 100” skálát célszerű választani. Általában ez az az intervallum, melyben könnyen tudunk „mozogni”, különböző dolgokat, eseményeket összehasonlítani. Lehetséges másfajta skála alkalmazása is. Ilyen példát láthatunk a valószínűségi értékek (VII.4 Táblázat) alapján felvehető tagsági függvények esetében, melyet a VIII.10. ábra szemléltet. (Ebben az esetben a vízszintes skála logaritmikus, így az ábrán egyenesnek látszó függvények a valóságban logaritmikusak.)



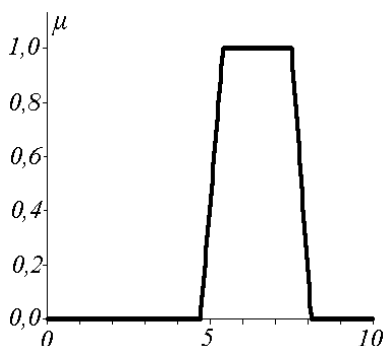
VIII.3. ábra. Tagsági függvények töréspontjai

Az első, és talán a legegyszerűbb megoldás a különböző kategóriák tagsági függvényei sarokpontjainak felvétele szakértői vélemények alapján. Ezt a módszert inkább akkor célszerű alkalmazni, ha a megkérdezett szakértők megfelelő szintű fuzzy-logikai ismerettel bírnak.

Ekkor a VIII.3. ábra alapján — egy táblázat segítségével — a trapéz  $A$ ;  $B$ ;  $C$  és  $D$ , illetve a háromszög függvény esetén a háromszög  $A$ ;  $B$  és  $C$  pontjainak vízszintes koordinátáit kell megkérdeznünk a szakértőktől. A tagsági függvények értékeit pedig a válaszok átlaga, vagy súlyozott átlaga képezi. Súlyozott átlag alkalmazása esetén a szakértőket, tapasztalatuk, a kérdéskörhöz való szakmai kapcsolatuk alapján egy úgynevezett  $K$  kompetenciatényezővel jellemezzük. Ezt szemlélteti a VIII.2. Táblázat, illetve a táblázat eredményei alapján felvett, a VIII.4. ábrán látható függvény.

Szakértő	„ $\alpha$ ”	„ $\beta$ ”	„ $\gamma$ ”	$\Sigma$	$\frac{\Sigma}{K_{\Sigma}}$
K	1,4	1,2	1	3,6	
A	5	4	4		
K·A	7	6	4	17	<b>4,7</b>
B	6	5	5		
K·B	8,4	6	5	19,4	<b>5,4</b>
C	7,5	7,5	7,5		
K·C	10,5	9	7,5	27	<b>7,5</b>
D	8,2	8	8		
K·D	11,48	9,6	8	29,08	<b>8,1</b>

VIII.2 Táblázat. Tagsági függvények felvétele (példa)



VIII.4. ábra. Tagsági függvények felvétele (példa)

A másik lehetséges módszer, hogy a különböző kategóriák intervallumait kérdezzük meg a szakértőktől. Erre mutat példát egy a vizsga nehézségét becsülő eljárás esetére a kérdőív, illetve a kiértékelési grafikon a VIII.5. ábrán. A grafikon a válaszok relatív gyakoriságát (szaggatott vonal), illetve annak korrigálásával meghatározott trapéz alakú tagsági függvényt szemlélteti esetünkben a tantárgy nehézségének a ***bonyolult*** kategóriájára.

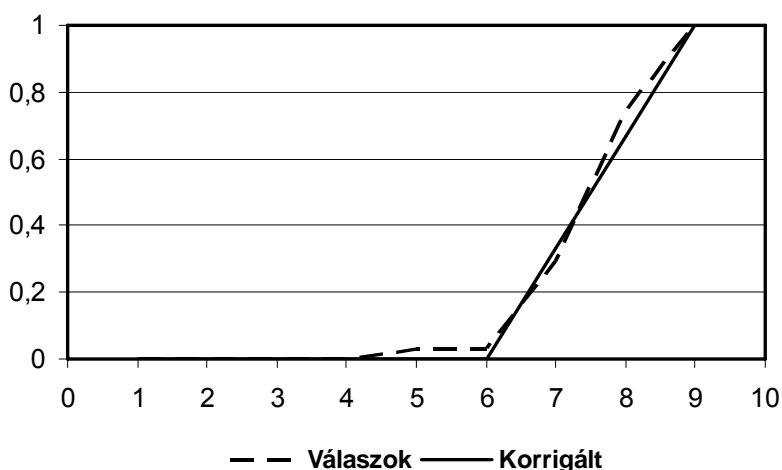
Kérem, hogy ... egy tantárgy nehézségének alábbi kategóriáit súlyozza egy 1–10 skálán, megadva mindegyik kategória minimum és maximum értékét!

A tantárgy:

Kategória	Definíció	Min.	Max.
<b>Bonyolult</b>	Ázaz az összetett és nehezen átlátható részek aránya jelentős, nagyrészt ilyen az egész jegyzet.		10
<b>Tanulható</b>	Ázaz az összetett és nehezen átlátható részek aránya a jegyzet egészéhez képest kb. 50%.		
<b>Olvasmányos</b>	Ázaz az összetett és nehezen átlátható részek aránya már legfeljebb csak 30% és az írott jegyzetet „olvasás közben nem lehet letenni, annyira érdekes”.		
<b>Könnyű</b>	Ázaz az összetett és nehezen átlátható részek aránya már legfeljebb csak egy tizede az egész jegyzetnek, és megtanulása egyszeri olvasatra is lehetséges.	1	

a — Kérdőív

**Bonyolult kategória**



b — tagsági függvény felvétele

VIII.5 ábra. Kérdőív és tagsági függvények felvétele a kérdőív alapján (példa)

### VIII.3.2. ÉRTELMEZÉS

Ebben a lépésben az előzőleg meghatározott fuzzy értékek felhasználásával határozzuk meg az összes szabály alkalmazásának eredményeit. Ezeket a szabályokat a rendszer felállításakor kell meghatároznunk. Ekkor használjuk a VIII.1. Táblázatban bemutatott — vagy az adott fuzzy döntési modell felállítója által definiált — műveleteket.

#### *Szabálybázis felállítása*

A korábban meghatározott kategóriák alapján a kockázatbecslés logikai szabályait, azaz a szabálybázisát kell meghatároznunk. Két befolyásoló tényező esetén egyszerűen ezt egy döntési mátrixszal tudjuk szemléltetni. Ilyen példát láthatunk a VIII.4. fejezetben (VIII.5 Táblázat). Három *ÉS* logikai kapcsolatban lévő meghatározó tényező — például hibamód és hatáselemzés esetén — a szabálybázist mint egy Rubik kocka tudjuk szemléltetni, ahogyan az később, a VIII.5. fejezetben (VIII.19. Táblázat), részletesen olvasható. *VAGY* logikai kapcsolatot tartalmazó döntési kifejezésekkel találkozhatunk a VIII.6. fejezetben — (VIII.6.1) és (VIII.6.4) egyenletek —, bár azok nem alkotnak teljes szabálybázist.

### VIII.3.3. ÖSSZEGZÉS

Az összegzésben az értelmezés során kapott, nem zérusértékű eredmények összefűzése történik. Az összegzés során valamelyik, a VIII.1. Táblázatban szemléltetett fuzzy logikai műveletet alkalmazzuk a vizsgált, vagy szabályozott folyamat sajátosságainak figyelembevételével.

A következtetési algoritmus eredményül egy fuzzy halmazt ad. Ez az elsődleges konklúzió, mely általában lingvisztikai kifejezésekkel közelíthető, vagy összetett rendszerek esetén más fuzzy irányítási rendszer bemeneti adataként hasznosítható.

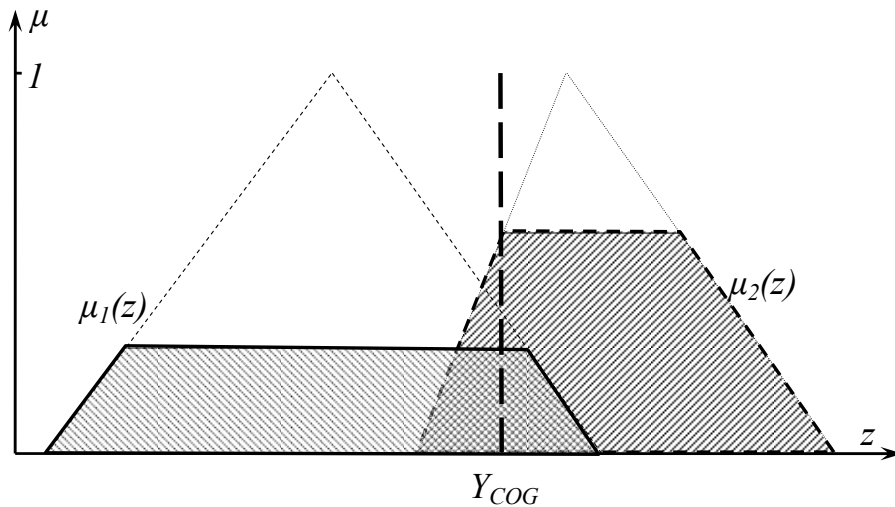
### VIII.3.4. DEFUZZIFIKÁCIÓ

A folyamat utolsó lépése az úgynevezett defuzzifikáció. Ekkor a fuzzy konklúzió alapján ki kell választanunk azt a konkrét értéket, mely az adott fuzzy halmazt az alkalmazástól, illetve modellezett rendszertől függően legjobban jellemzi. Az alkalmazás típusától függően a fuzzy halmaz értelme eltérő lehet, ezért a megfelelő eredmény eléréséhez különböző defuzzifikációs módszerek közül célszerű választani.

A szakirodalomban (például [VIII.6]) számos defuzzifikációs módszer ismert, melyek közül a legismertebbeket és leggyakrabban alkalmazottakat mutatjuk be.

**Súlypont módszer (COG)**

Ez az egyik leggyakrabban használt defuzzifikációs módszer. Előnyei közé tartozik, hogy háromszög és trapéz alakú szabályoknál viszonylag egyszerűen számolható, valamint hogy közvetlen irányítás esetén majdnem mindig folytonos viselkedést eredményez: ha a megfigyelés  $s$  ezzel együtt a szabályok alkalmazhatóságának mértéke kis mértékben változik, az nem okoz nagy eltérést az úgynevezett crisp (éles, már „nem fuzzy”) következmény értékében sem. Ez annak a következménye, hogy a módszer minden tüzelő szabályt az illeszkedési mértéküknek megfelelően veszi tekintetbe, így minden tüzelő (melynek igazságértéke zérustól eltérő) szabálynak van befolyása a defuzzifikált érték meghatározásában.



VIII.6. ábra. Defuzzifikálás súlypont módszerrel

A COG defuzzifikációs eredmény általános formában az:

$$Y_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(z) z dz}{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \mu_i(z) dz}, \quad (\text{VIII.3.4a})$$

vagy egyszerűbben:

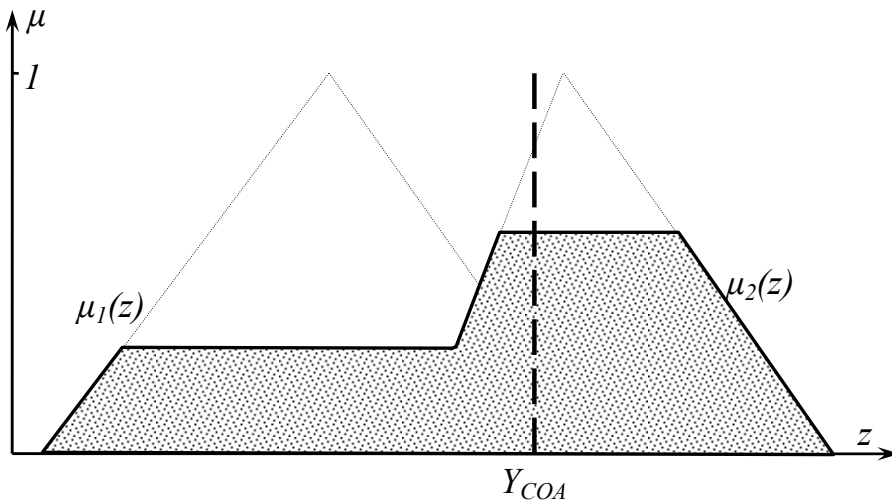
$$Y_{COG} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{z}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (\text{VIII.3.4b})$$

egyenlettel tudjuk meghatározni, ahol:

- $n$  – a nullától eltérő igazságértékű részkövetkeztetések száma;
- $\hat{z}_i$  – az  $i$ -edik részhalmaz súlypontjának vízszintes koordinátája;
- $A_i$  – az  $i$ -edik részhalmaz területe (súlyozó értéke).

### Geometriai középpont módszer (COA)

Nagyon hasonló a súlyponti módszerhez, s ezért itt említjük a geometriai középpont módszert (Center of Area). A két módszer közötti különbség, hogy a súlyponti módszer a több részkonklúzió által fedett területeket többszörösen számolja, míg a geometriai középpont módszer csak a összegzett  $\mu_\Sigma$  következmény alakját veszi figyelembe, így az átlapolt területeket természetesen csak egyszeres súllyal veszi figyelembe, mint például a VIII.6. ábrán a kétszeresen vonalkázott területet. Komoly hátránya a súlyponti módszerhez képest, hogy bonyolult alakú részkonklúziók esetén igen nehezen számolható.



VIII.7. ábra. Defuzzifikálás geometriai középpont módszerrel

A defuzzifikált érték COA eljárással az

$$Y_{COA} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_\Sigma(z) z dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_\Sigma(z) dz} \quad (\text{VIII.3.5})$$

általános alakú kifejezés alapján számolható.

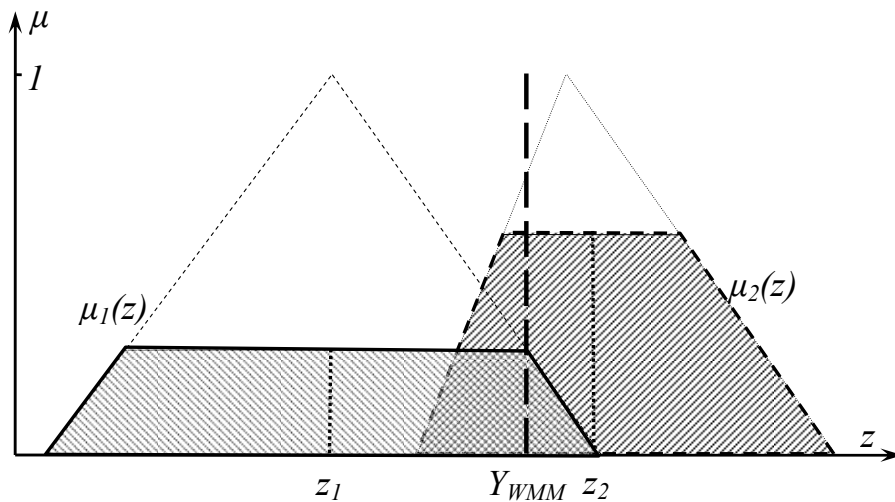
**Maximumok Súlyozott Átlaga módszer**

A defuzzifikáláshoz leggyakrabban a Weighted Mean of Maximum (Maximumok Súlyozott Átlaga) eljárást alkalmazzák. Ekkor a valós érték a

$$Y_{WMM} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i z_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad (\text{VIII.3.6})$$

módon számítható, ahol:

- $n$  — a nullától eltérő értékkel bíró következtetések száma;
- $z_i$  — az  $i$ -edik tagsági függvény súlyozó értéke;
- $\mu_i$  — az  $i$ -edik tagsági függvény tagsági értéke.



VIII.8 ábra WMM defuzzifikáció

A tagsági függvények súlyozó értékén vagy azt az egy értéket értjük, ahol a legnagyobb tagsági értéket eléri, ha csak egy pontban éri el. Abban az esetben, ha egy intervallumon a legnagyobb értékkel bír a függvény, akkor ennek a szakasznak a középértékét kell vennünk súlyozó értékek. Előnye, hogy egyszerűen számolható.

## VIII.4. FUZZY MODELL ALKALMAZÁSA A KOCKÁZATBECSLÉSSEN

Minden emberi tevékenység maga után von valamilyen formájú-, és mérvű kockázatot. Ez lehet például, hogy elvesztjük a focimeccset, megbukunk a vizsgán, vagy elesünk egy jelentős gazdasági bevételtől.

A kockázatkezelés folyamatának kiemelten fontos momentuma a kockázati szint becslése, amelynek során objektív értékítélet alakítható ki az egyes kockázati tényezőkről. Metodológiai szempontból célszerű ezt a fázist is jól elkülöníthető lépések sorozatára bontani [VIII.14].

A veszélyeztetettség becslésekor felmérések, vizsgálatok, megfigyelések és más feltérképezési technikák segítenek meghatározni és rögzíteni a veszélynek való kitettség szintjét.

A súlyosság (következmény) becslése során meg kell határozni a veszély súlyosságát, mint annak potenciális hatását személyekre, eszközökre vagy magára a folyamatra. A súlyossági kategóriákat meghatározhatjuk, mint a legrosszabb kimenetel kvalitatív mértékét, például, amely személyi hiba, környezeti körülmények, tervezési pontatlanság, rendszer-, alrendszer-komponens hiba következménye.

A veszély valószínűségének becslésekor meg kell határozni annak a valószínűségét, hogy a korábban azonosított veszély a már meghatározott súlyosságú kudarchoz, vagy veszteséghez vezet. A valószínűség meghatározható szubjektív becsléssel, kvantitatív módszerekkel, vagy ezek kombinációjával.

Teljes kockázat becslése a bekövetkezési valószínűség és a súlyosság ismeretében oldható meg. Fontos megjegyeznünk, hogy a kockázatot a súlyosság/kitettség és a veszély valószínűségének valamilyen kombinációjaként — de, nem feltétlen azok szorzataként — határozhatjuk meg.

A teljes kockázat meghatározására, becslésére alkalmazott módszereket két csoportba sorolhatjuk.

Az úgynevezett *kemény* (más néven kvantitatív) módszerek esetén a kockázat mértékét a várható veszteség számszerűsített nagyságának, és a veszteség bekövetkezés valószínűségének szorzatával határozzuk meg. A veszteség ilyen számszerűsített kifejezése lehet például a befektetett vagy hitelezett összeg vagy a kifizetendő kártérítés nagysága. A veszteség bekövetkezésének valószínűségét — KOLMOGOROV axiómarendszerét felhasználva — a  $[0;1]$  intervallumon belüli számmal jellemezhetjük. Számos, üzemeltetési, környezetvédelmi, katonai és politikai döntéshozatalban az ilyen típusú kockázatbecslés nem alkalmazható, szakmai és főleg erkölcsi okok miatt.

Az úgynevezett *lágú* kockázatbecslő eljárások valamilyen kvalitatív eljárást alkalmaznak. Az egyik ilyen módszer a fuzzy halmazelméleten alapuló kockázatbecslés.

A következőkben a fuzzy halmazelméletre épülő lágú kockázatbecslési eljárást mutatjuk be, egy esettanulmány példáján keresztül.



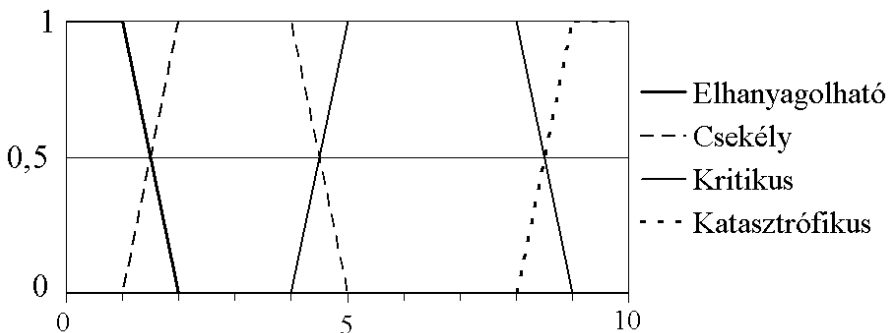
## VIII.4.1. ELŐKÉSZÍTÉSI SZAKASZ

A fuzzy logikai kockázatbecslést a szabálybázis és a hozzá kapcsolódó fogalmak, és kategóriák definiálásával kell kezdeni. A VIII.3. Táblázat az elemzés során alkalmazott súlyossági, a VIII.4. Táblázat a valószínűségi kategóriákat foglalja össze.

Katasztrófikus	A folyamat teljes kudarca, halál vagy a működtetett technikai eszköz elvesztése.
Kritikus	Jelentős feladat-erózió, erős károsodás, foglalkozási megbetegedés vagy technikai eszköz nagymérvű károsodás.
Csekély	Kismértékű feladat-erózió, károsodás, kismértékű foglalkozási megbetegedés, vagy rendszerkárosodás.
Elhanyagolható	A fentieknél kisebb mérvű feladat-erózió, károsodás, foglalkozási megbetegedés, vagy rendszerkárosodás.

VIII.3. Táblázat. Súlyossági kategóriák

$$\begin{aligned}
 \mu(Elh) &= \begin{cases} 0 & ha & x < 0 \\ 1 & ha & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & ha & 1 \leq x < 2 \\ 0 & ha & 2 \leq x \end{cases}, & \mu(Cse) &= \begin{cases} 0 & ha & x \leq 1 \\ x-2 & ha & 1 < x < 2 \\ 1 & ha & 2 \leq x \leq 4 \\ 5-x & ha & 4 < x < 5 \\ 0 & ha & 5 \leq x \end{cases}, \\
 \mu(Kri) &= \begin{cases} 0 & ha & x \leq 4 \\ x-4 & ha & 4 < x < 5 \\ 1 & ha & 5 \leq x \leq 8 \\ 9-x & ha & 8 < x < 9 \\ 0 & ha & 9 \leq x \end{cases}, & \mu(Kat) &= \begin{cases} 0 & ha & x < 8 \\ 9-x & ha & 8 \leq x < 9 \\ 1 & ha & 9 \leq x < 10 \\ 0 & ha & 10 \leq x \end{cases}.
 \end{aligned}
 \tag{VIII.4.1}$$

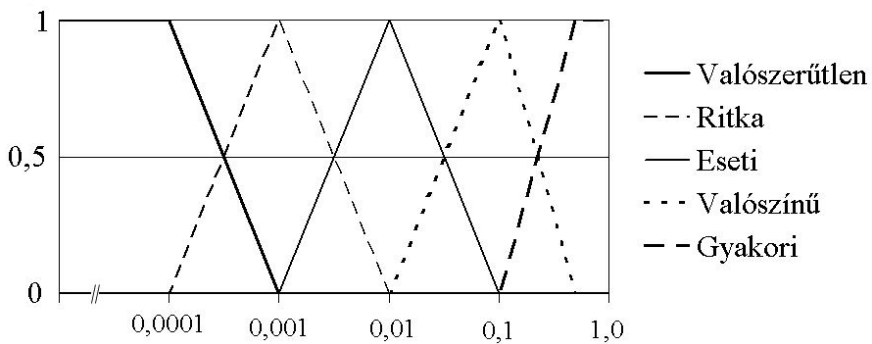


VIII.9. ábra Súlyossági kategóriák tagsági függvényei

Valószínűségi kategória	Valószínűségi érték
Valószerűtlen	0 — 0,001
Ritka	0,0001 — 0,01
Eseti	0,001 — 0,1
Valószínű	0,01 — 0,2
Gyakori	0,1 — 1

VIII.4. Táblázat Valószínűségi kategóriák

$$\begin{aligned}
 \mu(Vn) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x < 10^{-4} \\ |\lg x + 3| & \text{ha } 10^{-4} \leq x < 10^{-3} \\ 0 & \text{ha } 10^{-3} \leq x \end{cases}, & \mu(Ri) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 10^{-4} \\ 4 + \log x & \text{ha } 10^{-4} \leq x < 10^{-3} \\ |\lg x + 2| & \text{ha } 10^{-3} \leq x < 10^{-2} \\ 0 & \text{ha } 10^{-2} \leq x \end{cases}, \\
 \mu(V\ddot{u}) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 10^{-2} \\ 2 + \log x & \text{ha } 10^{-2} \leq x < 10^{-1} \\ |\lg x + \log 0,2| & \text{ha } 10^{-2} \leq x < 0,2 \\ 0 & \text{ha } 0,2 \leq x \end{cases}, & & \text{(VIII.4.2)} \\
 \mu(Es) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 10^{-3} \\ 3 + \log x & \text{ha } 10^{-3} \leq x < 10^{-2} \\ |\lg x + 1| & \text{ha } 10^{-2} \leq x < 10^{-1} \\ 0 & \text{ha } 10^{-1} \leq x \end{cases}, & \mu(Gy) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0,1 \\ \log 0,2 + \log x & \text{ha } 0,1 \leq x < 0,2 \\ 1 & \text{ha } 0,2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ha } 1 \leq x \end{cases}.
 \end{aligned}$$



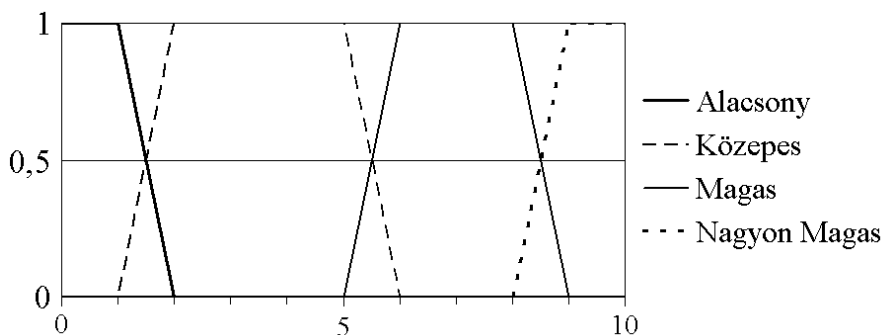
VIII.10. ábra Valószínűségi kategóriák tagsági függvényei

Kockázat súlyosság és valószínűség függvényében meghatározó szabálybázist a Kockázatbecslési Mátrix (Risk Assessment Matrix) meghatározásával írjuk le. A VIII.5. Táblázat egy Kockázatbecslési Mátrixot mutat, amely 20 **ÉS** kapcsolatot tartalmazó logikai kifejezést szemléltet. Ezek a kifejezések alkotják esetünkben a kockázatbecslési eljárás szabálybázisát.

	Gyakori	Valószínű	Eseti	Ritka	Valószínűtlen
Katasztrófikus	NM	NM	M	M	K
Kritikus	NM	M	M	K	A
Csekély	M	K	K	A	A
Elhanyagolható	K	A	A	A	A

Nagyon Magas; Magas; Közepes; Alacsony.

## VIII.5. Táblázat Kockázatbecslési Mátrix



VIII.11. ábra Kockázati kategóriák tagsági függvényei

$$\begin{aligned}
 \mu(\mathbf{A}) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{ha } 2 \leq x \end{cases}, & \mu(\mathbf{M}) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ x-2 & \text{ha } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{ha } 2 \leq x \leq 5 \\ 6-x & \text{ha } 5 < x < 6 \\ 0 & \text{ha } 6 \leq x \end{cases}, \\
 \mu(\mathbf{K}) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 5 \\ x-5 & \text{ha } 5 < x < 6 \\ 1 & \text{ha } 6 \leq x \leq 8 \\ 9-x & \text{ha } 8 < x < 9 \\ 0 & \text{ha } 9 \leq x \end{cases}, & \mu(\mathbf{NM}) &= \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 8 \\ 9-x & \text{ha } 8 \leq x < 9 \\ 1 & \text{ha } 9 \leq x < 10 \\ 0 & \text{ha } 10 \leq x \end{cases}.
 \end{aligned}
 \tag{VIII.4.3}$$

Következő lépésként a be- és kimenő jellemzők tagsági függvényeit kell felvenni. A VIII.9. ábra a súlyossági kategóriák tagsági függvényeit szemlélteti egy  $[0, 10]$  skálához viszonyítva. A VIII.10. ábrán a valószínűségi kategóriák tagsági függvényei láthatók. A VIII.11. ábra pedig a becsült kockázat — mint kimenő jellemző — kategóriáinak tagsági függvényeit mutatja.

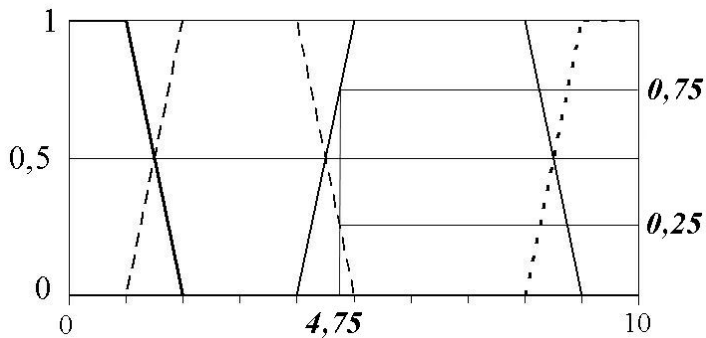
## VIII.4.2. ALKALMAZÁSI SZAKASZ

A szakértői felmérések eredményeként a vizsgált üzemeltetési esemény veszélyességének, várható negatív következményének súlyossága 4,75 értékű, a korábban felvett [0;10] skálán, illetve az esemény bekövetkezésének becsült valószínűsége 0,005.

Az első, fuzzyfikáció lépésben a rendszer konkrét értékekkel bíró bemenő jellemzőinek pillanatnyi értékeihez egy-egy fuzzy tagsági értéket rendelünk — a (VIII.4.1), illetve a (VIII.4.2) egyenletek alapján.

$$\mu(a\_súlyosság\_kritikus)=0,75;$$

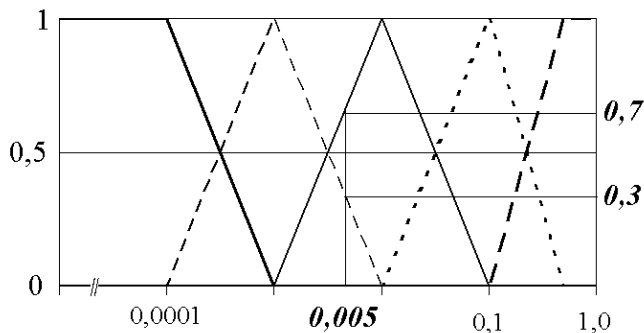
$$\mu(a\_súlyosság\_közepes)=0,25.$$



VIII.12. ábra Súlyossági kategóriák igazságértékeinek meghatározása

$$\mu(a\_valószínűség\_eseti)=0,7;$$

$$\mu(a\_valószínűség\_ritka)=0,3.$$



VIII.13. ábra Súlyossági kategóriák igazságértékeinek meghatározása

A fuzzyfikációval kapott eredmények alapján az alábbi megállapításokat tehetjük:

→ a veszély súlyossága bizonyos (0,75) mértékben kritikusnak, illetve

- bizonyos (0,25) fokig közepesnek tekinthető;
- a jelenség bekövetkezésének gyakorisága bizonyos (0,7) fokig esetinek, illetve bizonyos (0,3) mértékben gyakorinak minősíthető.

Az értelmezés szakaszban az előzőleg meghatározott fuzzy értékek felhasználásával határozzuk meg az összes szabály alkalmazásának eredményeit. Esetünkben a Kockázatbecslési Mátrix alapján az alábbi logikai szabályokat kell alkalmazni:

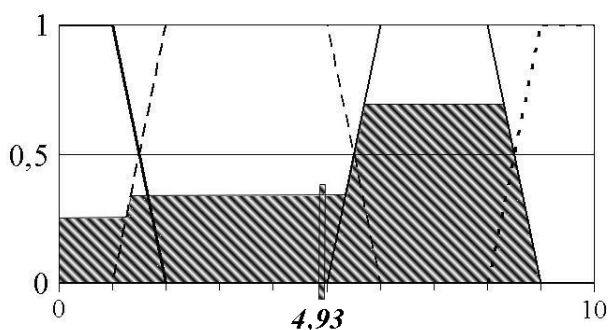
$$\begin{array}{ll} \text{HA} & a\_súlyosság\_kritikus \\ \text{ÉS} & a\_valószínűség\_eseti \Rightarrow \mu(z) = \min(0,75; 0,7) = 0,7 \quad ; \quad (\text{VIII.4.4}) \\ \text{AKKOR} & a\_kockázat\_magas \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{HA} & a\_súlyosság\_közepes \\ \text{ÉS} & a\_valószínűség\_eseti \Rightarrow \mu(z) = \min(0,25; 0,7) = 0,25 \quad ; \quad (\text{VIII.4.5}) \\ \text{AKKOR} & a\_kockázat\_közepes \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{HA} & a\_súlyosság\_kritikus \\ \text{ÉS} & a\_valószínűség\_ritka \Rightarrow \mu(z) = \min(0,75; 0,3) = 0,3 \quad ; \quad (\text{VIII.4.6}) \\ \text{AKKOR} & a\_kockázat\_közepes \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{HA} & a\_súlyosság\_közepes \\ \text{ÉS} & a\_valószínűség\_ritka \Rightarrow \mu(z) = \min(0,25; 0,3) = 0,25 \quad . \quad (\text{VIII.4.7}) \\ \text{AKKOR} & a\_kockázat\_alacsony \end{array}$$

Az összegzés lépésben az értelmezés során kapott nem zérus értékű, azaz tüzelő eredmények összefűzése történik.



VIII.14. ábra Az összegzés eredménye

Ha több logikai szabály a következmény ugyanazon kategóriáját adja, igazságértékének a legnagyobbat kell vennünk, azaz:

$$\mu(a\_kockázat\_közepes) = \max(\mu(z_{11}); \mu(z_{12})) = \max(0,25; 0,3) = 0,3 \quad ; \quad (\text{VIII.4.8})$$

$$\begin{aligned}\mu(a\_kockázat\_magas) &= 0,7 & ; \\ \mu(a\_kockázat\_közepes) &= 0,3 & ; \\ \mu(a\_kockázat\_alacsony) &= 0,25 & .\end{aligned}\tag{VIII.4.9}$$

A kockázatbecslési folyamat utolsó lépése az úgynevezett defuzzifikáció. Ekkor a kimenő jellemzők igazság értékeit konvertáljuk vissza valós, éles értékeké. Esetünkben — Maximumok Súlyozott Átlaga módszert alkalmazva:

$$Y = \frac{0,25 \cdot 0,85 + 0,3 \cdot 3,5 + 0,7 \cdot 7}{0,25 + 0,3 + 0,7} = \frac{6,1625}{1,25} = 4,93 \quad .$$

Ez azt jelenti, hogy a vizsgált jelenség kockázatának értéke az általunk felvett [0; 10] skálán 4,93-as értékű.

A fenti eredmény alapján tudjuk — szintén szakmai szempontból — meghatározni, hogy az adott kockázati szint elfogadható-e. Illetve — ha nem — a kockázatkezelési folyamat folytatásával kell dönteni a kockázati szint csökkentési módjáról.

### VIII.5. FUZZY FMEA

A technikai eszközök, rendszerek meghibásodásának kockázata alapvetően a bekövetkezés gyakoriságától (valószínűségétől), a következmény súlyosságától, és a hiba vagy az azt kiváltó ok felderíthetőségétől (detektálhatóságától) függ. Egy integrált technikai rendszer megbízhatóságának növelése — akár tervezés vagy az üzembenntartása során — a lehetséges hibák kockázati szintjének elemzésével együtt lehetséges. A hibamód- és hatáselemzés (FMEA – Failure Mode and Effect Analysis) célja egy technikai rendszer vagy folyamat hibalehetőségeinek, az azokat előidéző okok felismerése, valamint kockázati szint szerinti rangsorolása [VIII.21]. Az eljárás leírására és alkalmazása különböző szabványokat dolgoztak ki. Ilyen például az IEC Standard Publication 812 [VIII.3].

Az elemzés során egy szakértő csoport meghatározza a vizsgált rendszerben fellépő összes lehetséges hibát és azok kiváltó okait. Az így meghatározott okok kockázati mértékét azok bekövetkezési gyakorisága, súlyossága és észlelhetősége függvényében határozzák meg, általában a fenti három tényező szorzataként. Ha a tényezők meghatározásához nem rendelkezünk megfelelő statisztikai adathalmazzal, a szakértők véleményére épülő becslült értékeket kell alkalmaznunk [VIII.21]. A szakértői vélemények — az eltérően értelmezett nyelvi kategóriák, fogalmak következtében — bizonyos fokú bizonytalanságot tartalmaznak.

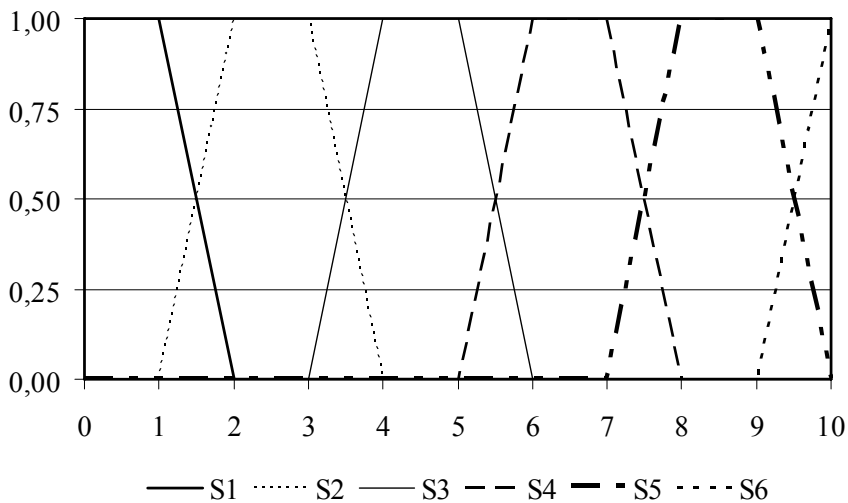
A következőkben egy Magyarországra is települt multinacionális vállalatnál elvégzett fuzzy logikai hibamód és hatás elemzés egy elemén keresztül — egy adott hiba kockázati szintjének meghatározását — mutatjuk meg. Mivel az elvégzett vizsgálat részleteinek közléséhez a megrendelő nem járult hozzá, a vizsgálatot a konkrét szakmai (nem az FMEA módszertanához kapcsolódó) részletek mellőzésével tesszük meg.

### VIII.5.1. ELŐKÉSZÍTÉSI SZAKASZ

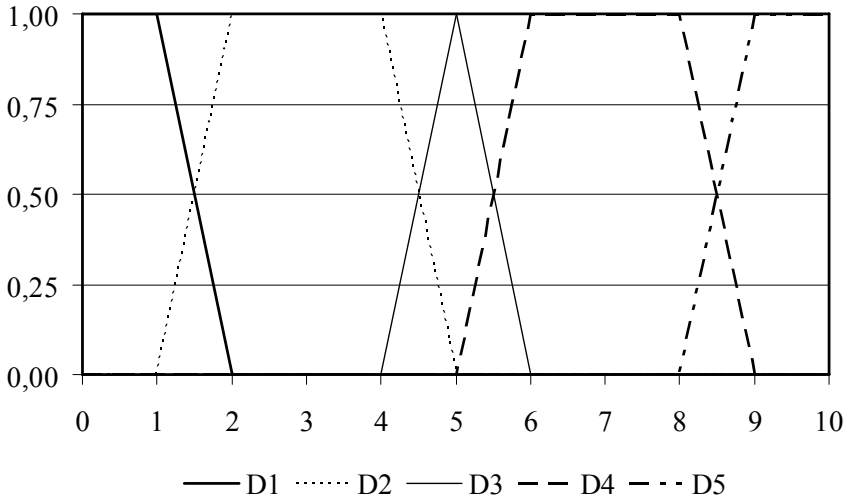
Az előkészítési szakaszban első lépéseként a fellépő hiba következményének, észlelhetőségének, gyakoriságának, majd az eredő kockázati szintjének fogalmait határoztuk meg. Ezeket szemlélteti a VIII.6. és a VIII.7. táblázat.

Következmény		Észlelhetőség	
S1	Kényelmetlenséget okoz	D1	Rendsz. adm. azonnal észreveszi
S2	Alternatív megoldás	D2	Rendsz. adm. később veszi észre
S3	Jövőbeli leállás	D3	Felh. azonnal észreveszi
S4	Csökkentett gyártás	D4	Felh. később veszi észre
S5	Gyártás leállás	D5	Később véletlenszerűen veszik észre
S6	Téves teszt eredmény		

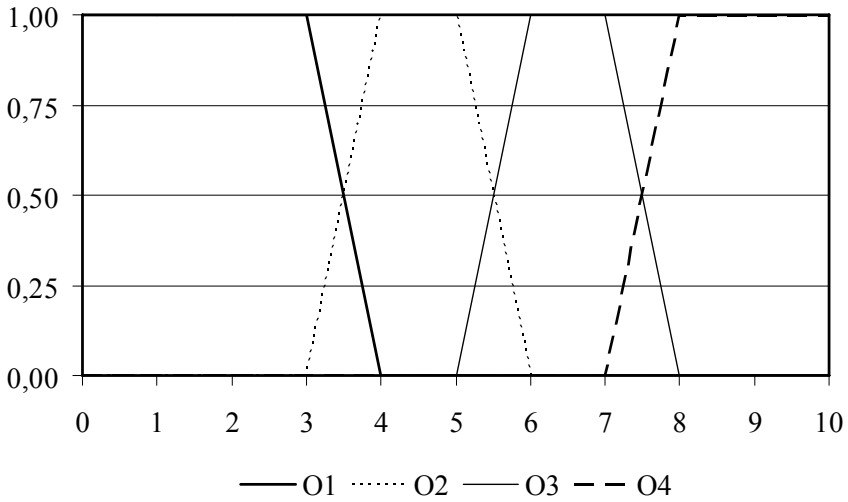
VIII.6. Táblázat Következmény és észlelhetőségi kategóriák



VIII.15. ábra A következmény kategóriák tagsági függvényei



VIII.16. ábra Az észlelhetőségi kategóriák tagsági függvényei



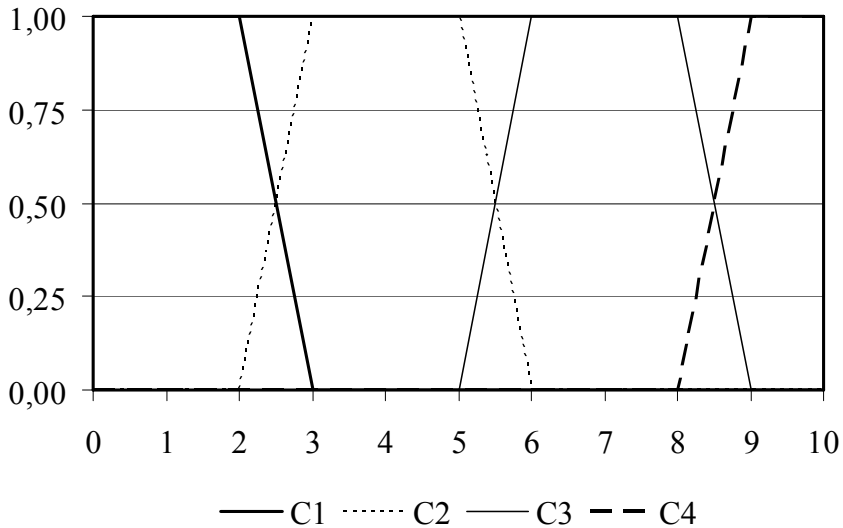
VIII.17. ábra A gyakorisági kategóriák tagsági függvényei

Gyakoriság		Kockázat	
O1	Évente vagy ritkábban	C4	Nagyon Magas
O2	Évente párszor	C3	Magas
O3	Havonta többször	C2	Közepes
O4	Hetente többször	C1	Alacsony

VIII.7. Táblázat Gyakorisági és kockázati kategóriák



Következő lépésként a különböző kategóriák tagsági függvényeit határoztuk meg. A függvények felvételénél a szakértők véleményére támaszkodtunk.

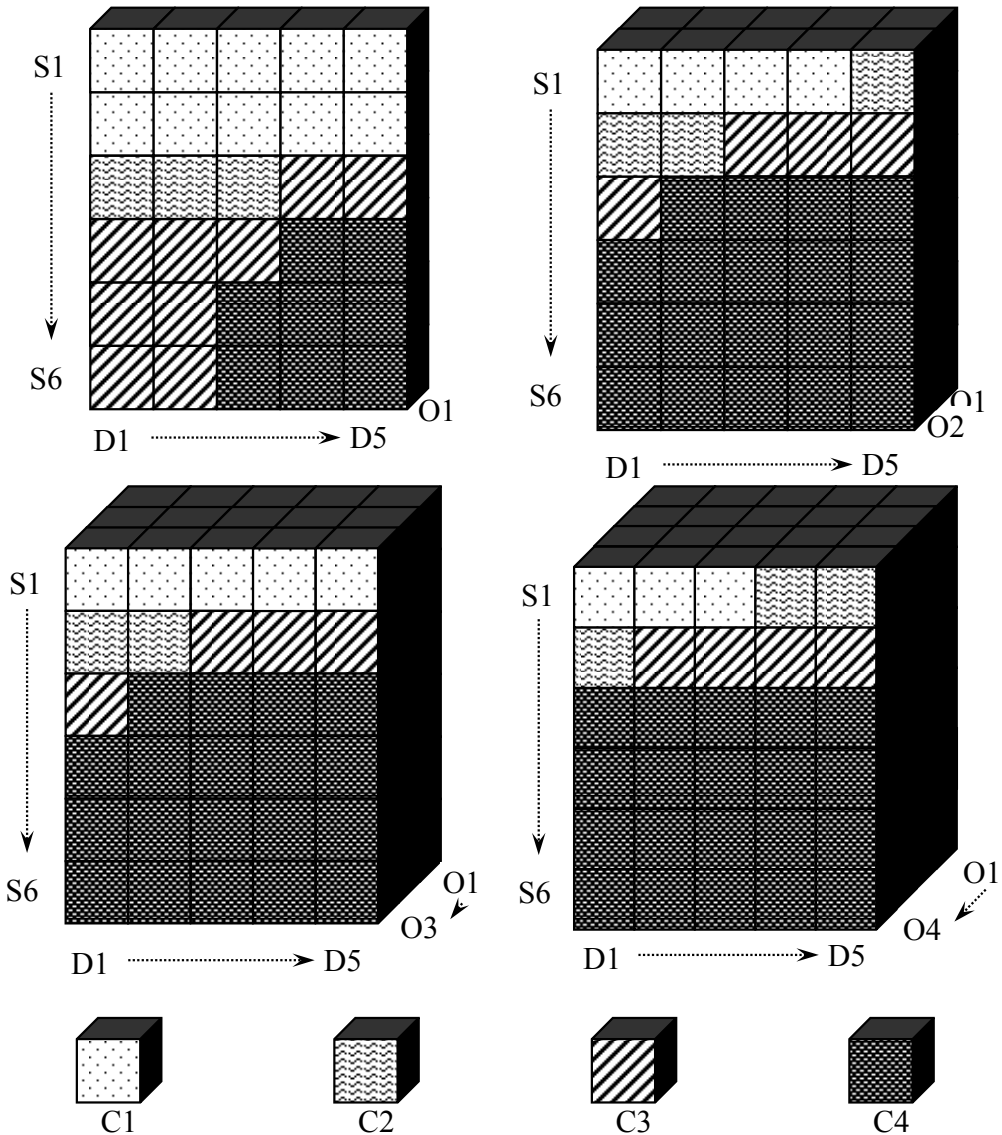


VIII.18. ábra A kockázati kategóriák tagsági függvényei

Végezetül meghatároztuk — kérdőívek felhasználásával — a kockázati szint meghatározásához szükséges logikai szabályokat, azaz a szabálybázist. Esetünkben a szabálybázis 120 logikai kifejezést tartalmaz.

A kérdőíves feldolgozás során a szakértők először önállóan állították fel a szabálybázisaikat. Azon következtetési szabályok esetén, ahol nem volt eltérés a javaslatok közül, ott azok kerültek a végleges szabálybázisba. Ahol eltérés volt a szakértők véleményei között, ott konszenzusos döntést hozott az elemző csoport, figyelembe véve a szakemberek érveit.

Mivel a kockázati szint három jellemző függvénye, így a szabálybázist szemléltetni egy — a RUBIK kockához hasonló — úgynevezett háromdimenziós mátrixszal lehetséges. Ezt mutatja a VIII.19. ábra.



VIII.19. ábra Kockázatbecslési szabálybázis

### VIII.5.2. ALKALMAZÁSI SZAKASZ

Az előkészítési szakasz befejezése után a szakértői csoport meghatározta a különböző lehetséges hibákat és azok kiváltó okait. Példánkban az egyik ilyen hiba kockázati szintjét határozzuk meg a fuzzy logikai kockázatelemzéssel.

A vizsgált hiba okot az alábbi adatokkal — a szakértők külön-külön megadott értékei súlyozott átlagaként — jellemezték a fent meghatározott tízes skálán:

Gyakoriság: 2,167; Súlyosság: 5,333; Észlelhetőség: 1,167 .

A fuzzyfikáció során — a korábban meghatározott tagsági függvények alapján — a különböző gyakorisági, súlyossági és észlelhetőségi kategóriák igazság értékét határoztuk meg:

$$S = 5,333 \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(S3) = 0,667 \\ \mu(S4) = 0,333 \end{array} ; \quad (\text{VIII.5.1})$$

$$D = 1,667 \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(D1) = 0,333 \\ \mu(D2) = 0,667 \end{array} . \quad (\text{VIII.5.2})$$

$$O = 2,167 \Rightarrow \mu(O1) = 1,000 ; \quad (\text{VIII.5.3})$$

Az értelmezés során a tüzelő szabályok igazságértékeit határoztuk meg. Mivel a három bemenő változó között *ÉS* logikai kapcsolat van, a *MINIMUM* operátorokat alkalmaztunk.

$$O1 \wedge S3 \wedge D1 \Rightarrow C2$$

$$\mu_1(C2) = \min(\mu(O1); \mu(S3); \mu(D1)) = \min(1; 0,667; 0,333) = 0,333$$

$$O1 \wedge S3 \wedge D2 \Rightarrow C2$$

$$\mu_2(C2) = \min(\mu(O1); \mu(S3); \mu(D2)) = \min(1; 0,667; 0,667) = 0,667$$

$$\mu(C2) = \max(\mu_1(C2); \mu_2(C2)) = \max(0,333; 0,667) = 0,667 \quad , \quad (\text{VIII.5.4})$$

illetve:

$$O1 \wedge S4 \wedge D1 \Rightarrow C3$$

$$\mu_1(C3) = \min(\mu(O1); \mu(S4); \mu(D1)) = \min(1; 0,333; 0,333) = 0,333$$

$$O1 \wedge S4 \wedge D2 \Rightarrow C3$$

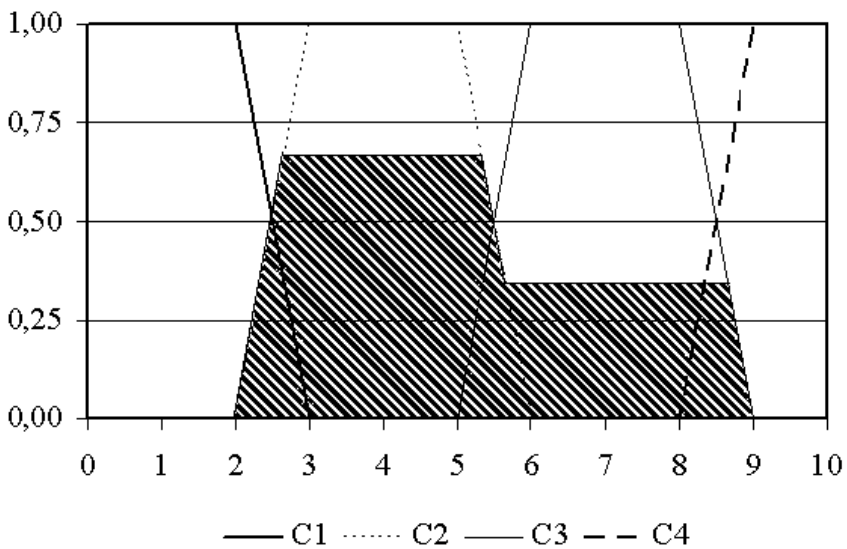
$$\mu_2(C3) = \min(\mu(O1); \mu(S4); \mu(D2)) = \min(1; 0,333; 0,667) = 0,333$$

$$\mu(C3) = \max(\mu_1(C3); \mu_2(C3)) = \max(0,333; 0,333) = 0,333 \quad . \quad (\text{VIII.5.5})$$

Az összegzés során a *C2* és *C3* fuzzy részhalmazokat összegezzük, mivel ezek bírtak nullától eltérő igazságértékkel. Ezt a VIII.20. ábra szemléltet. Végül is ez jelenti a vizsgálatunk fuzzy eredményét, amit adott esetben szakmailag is tudunk értékelni. Például ez mutathatja meg azt, hogy a különböző kockázati értékek milyen igazságértékkel fogadhatók el.

A defuzzyfikáció során a súlypont módszert alkalmazva határoztuk meg az fuzzy eredményt adó halmazhoz (VIII.20. ábra) kapcsolható éles érték az alábbi módon határozható meg:

	$\hat{C}_i$	$W_i$	$\hat{C}_i W_i$
C2	4,00	2,22	8,88
C3	7,00	1,22	8,55
$\Sigma$	—	3,44	17,43

$$C = \frac{17,43}{3,44} = 5,07 \text{ .}$$


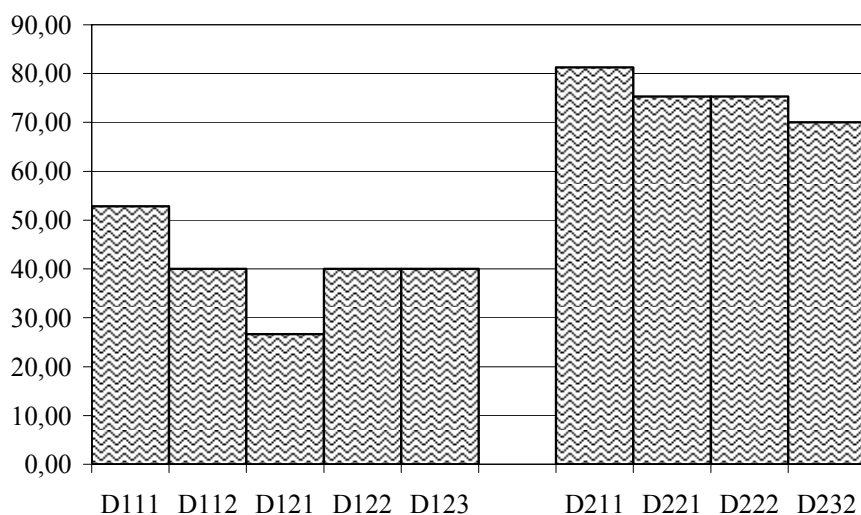
VIII.20. ábra Az összegzés eredménye

Rögzítette a vizsgálandó jellemzőket, azok lehetséges hibamódjait, majd a hibákat kiváltó lehetséges okokat.

Következő lépésként a csoport tagjai — egymástól függetlenül — az előzőekben felsorolt lehetséges hiba okok bekövetkezési gyakoriságát, a következmény súlyosságát és az észlelhetőség mértéket határozták meg, az előkészítő fázisban definiált kategóriák és skálák szigorú felhasználásával. Ezen meghatározások, valamint az elemzés eredményeit mutatja be a 4.19. és a 4.20. ábra

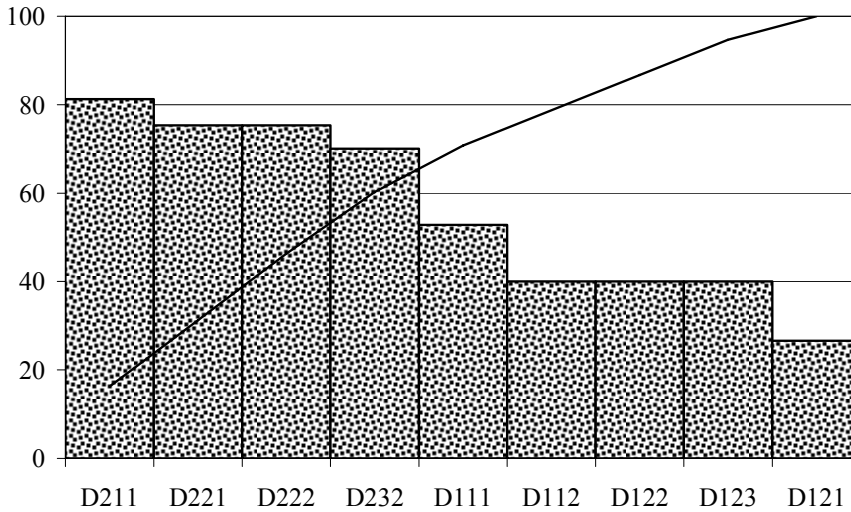
Kód	Vizsgálandó jellemző	Lehetséges hibamód	Inf.vezető			Rendsz.adm.			Tesztm.			C
			O	S	D.	O	S	D	O	S	D	
D111	Lotus Notes probléma	Adatbázis probléma	3,00	6,00	3,00	3,00	4,00	6,00	3,50	3,00	1,00	<b>52,815</b>
D112			2,00	6,00	3,00	1,00	7,00	1,00	3,50	3,00	1,00	<b>40,000</b>
D121		Replikációs probléma	2,00	4,00	9,00	3,00	4,00	6,00	3,00	3,00	1,00	<b>26,625</b>
D122			1,00	6,00	3,00	1,00	7,00	1,00	2,00	3,00	1,00	<b>40,000</b>
D123			3,00	6,00	3,00	3,00	4,00	6,00	2,00	3,00	1,00	<b>40,000</b>
D211	Kommunikációs hiba	Értesítés hiánya	2,00	4,00	7,00	4,00	4,00	7,00	4,00	5,00	10,00	<b>81,250</b>
D221		Hibás csatolt file	2,00	4,00	7,00	3,00	3,00	9,00	4,00	5,00	5,00	<b>75,310</b>
D222			2,00	4,00	7,00	3,00	3,00	9,00	4,00	5,00	5,00	<b>75,310</b>
D232		Téves értesítés	1,00	4,00	7,00	3,00	4,00	8,00	4,00	5,00	8,00	<b>70,000</b>

VIII.8. Táblázat Az elemzés eredményei



VIII.21. ábra Az elemzés eredményei

Az éles értéket már szakmai (nem fuzzy logikai) szempontból kell értékelnünk. Ezek részletes ismertetésétől jelen esettanulmányban eltekintünk.



VIII.22. ábra Kockázati rangsor

## VIII.6. FUZZY DÖNTÉSI MODELL

Az üzemeltetés irányítása során gyakran előfordulhat, hogy döntéshozatalhoz nem rendelkezünk megfelelő — például valamilyen hatósági vagy törvényi előírásban szereplő — határadattal. Ilyenkor úgynevezett szakértői riportok készítése és azok kiértékelése szükséges. Ilyen esettel találkozott a Szerző, amikor a Mi-8 *Hip* helikopter féklevégő-rendszerének diagnosztikára épülő irányítási rendszerét dolgozta ki (lásd VII.6. fejezetet). Fontos megjegyezni, hogy még a legkisebb, de már kellő ismerettel rendelkező szakember is jelentős mérvű tapasztalattal rendelkezik, de ennek korrekt számszerűsítése igen nehéz feladatot jelent. A szakértők kikérdezésével kapjuk meg a fuzzy-alapú döntéshozatali eljárás kiinduló adatait. Mivel ezek a szakértői vélemények egyéni tapasztalatok kiértékeléséből származnak, jelentős szubjektivitással bírnak. Ezért nem lehet ezeket „teljesen objektív” adatokként kezelni — de fuzzy tagsági értékeknek tekinthetők.

A helikopterek megengedhető fékhatás-csökkenésének, illetve fékaszimmetriájának, valamint az ellenőrzések közötti naptári és repült idő meghatározására végzett szakértői felmérés eredményeit szemlélteti a VIII.9. Táblázat.

A kérdésekre a négy — a Magyar Honvédségben akkor harcrendben lévő — helikoptertípus földi és légi üzemeltetői válaszoltak, azért, mert mind a négy típus féklevégő-rendszerének felépítése lényegében megegyezik, eltérések csak a működési paramétereik között találhatóak. Ezért a más típuson szerzett üzemeltetési tapasztalatok a vizsgált Mi-8 helikopter esetén is felhasználhatók.

A választ adók helikoptervezetők és műszakiak csoportra oszthatók. Ez

utóbbiak közé kerültek a — hajózó állományba tartozó — fedélzeti technikusokat is. A fedélzeti technikusok a helikoptert nem vezetik, így a fékrendszert sem használják közvetlenül, hanem — mint ahogy a földi üzemeltetők is — a műszaki üzemeltetését végzik.

		<b>műszaki</b>	<b>hel. vez.</b>	<b>összesen</b>
Megengedhető fékhatás-csökkenés [%]	min.	0,0	0,0	0,0
	max.	50,0	50,0	50,0
	átlag	20,5	17,8	18,6
	medián	20,0	17,5	20,0
Megengedhető fékaszimmetria [%]	min.	0,0	0,0	0,0
	max.	35,0	25,0	35,0
	átlag	10,1	7,4	8,3
	medián	5,0	5,0	5,0
Korreláció a megengedett fékhatás és aszimmetria között		0,475	0,164	0,313
Ellenőrzések közti üzemidő [repült óra]	min.	5,0		
	max.	200,0		
	átlag	79,8		
	medián	100,0		
Ellenőrzések közti naptári idő [nap]	min.	3,0		
	max.	365,0		
	átlag	121,7		
	medián	60,0		

VIII.9. Táblázat Szakértői felmérés statisztikai eredményei

Az ellenőrzések közti naptári és repült üzemidők vizsgálatánál csak a műszaki állomány válaszai kerültek elemzésre. A technológiákban és kiszolgálási utasításokban meghatározott műszaki kiszolgálási munkákat ők végzik, így csak az ő tapasztalatuk tekinthető mérvadónak.

#### VIII.6.1. ELLENŐRZÉSEK KÖZTI ÜZEMIDŐ MEGHATÁROZÁSA

Első feladat a VII.6. fejezetben kidolgozott állapotfigyelésre épülő üzemeltetés irányítási rendszerhez az ellenőrzési ciklusidők meghatározása — a szakértői felmérés eredményeinek felhasználásával.

Mivel már egy üzemeltetett, harcrendben lévő típusra kell az ellenőrzési ciklusidőt meghatározni, így azt egy már meglévő és működő ellenőrzési, karbantartási időrendbe kell beilleszteni.

Első lépésként fel kell írni az ehhez kapcsolódó döntési (logikai) kifejezést:

$$\begin{aligned} \text{HA} & \quad \text{az\_utolsó\_ellen\check{r}zés\_\acute{o}ta\_eltelt\_napt\acute{a}ri\_id\ddot{o}} \\ \text{VAGY} & \quad \text{a\_rep\ddot{u}lt\_\acute{o}ra\_miatt\_sz\ddot{u}ks\acute{e}ges} \\ \text{AKKOR} & \quad \text{ellen\check{r}z\acute{e}st\_kell\_v\acute{e}gehajtan i.} \end{aligned} \quad (\text{VIII.6.1})$$

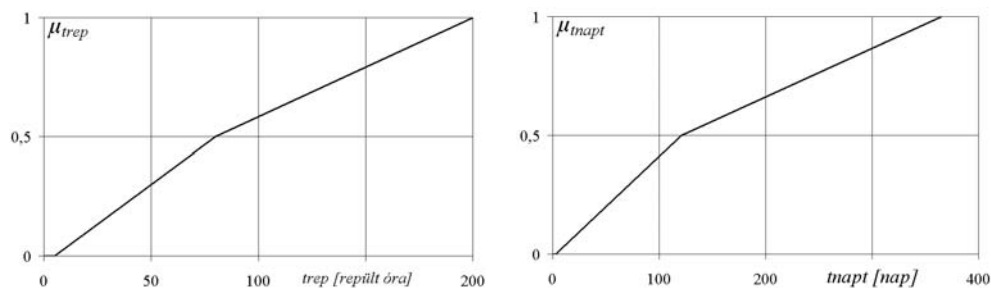
Így a feladat az, hogy a már meglévő ellenőrzési rendben szereplő lehetséges naptári és repült időkkal megvizsgáljuk a fenti logikai kifejezés igazságértékét.

A műszakiak válasza alapján az alábbi egyszerű tagsági függvények állíthatók fel:

$$\mu(t_{rep}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t_{rep} \leq 5 \\ \frac{t_{rep} - 5}{150} & \text{ha } 5 < t_{rep} \leq 80 \\ \frac{t_{rep} - 80}{240} + 0,5 & \text{ha } 80 < t_{rep} \leq 200 \\ 1 & \text{ha } 200 < t_{rep} \end{cases} ; \quad (\text{VIII.6.2})$$

$$\mu(t_{napt}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t_{napt} \leq 3 \\ \frac{t_{napt} - 3}{236} & \text{ha } 3 < t_{napt} \leq 121 \\ \frac{t_{napt} - 121}{488} + 0,5 & \text{ha } 121 < t_{napt} \leq 356 \\ 1 & \text{ha } 356 < t_{napt} \end{cases} ; \quad (\text{VIII.6.3})$$

A jelenlegi rendszer szerint az időszakos vizsgálatok közti maximális és minimális repült idők (VIII.6.2) egyenlet alapján meghatározott tagsági értékeit a VIII.10. Táblázat tartalmazza.



VIII.23. ábra Ellenőrzések közti idők tagsági függvényei

A VIII.11. Táblázat a naptári idő szerinti ellenőrzésekhez tartozó tagsági értékeket mutatja. Ezen kategóriába sorolhatók a téli, illetve nyári átállási feladatok végrehajtása is.



A (VIII.6.1) logikai — pontosabban az abban szereplő **VAGY** — kapcsolathoz a fuzzy logikában a **MAXIMUM** operátor tartozik. A lehetséges megengedhető időintervallum párokhoz tartozó igazság értékeket a VIII.12. Táblázat tartalmazza.

Időszakos vizsgálat	$t_{rep}$ [r. óra]	$\mu(t_{rep})$
<sup>+10</sup> 50 <sup>-5</sup> órás	60	0,367
	45	0,267
<sup>+20</sup> 100 <sup>-10</sup> órás	120	0,667
	90	0,542
<sup>+40</sup> 200 <sup>-20</sup> órás	240	1
	180	0,917

VIII.10. Táblázat

Naptári idő szerinti ellenőrzések	$t_{napt}$ [nap]	$\mu(t_{napt})$
60 <sup>+5</sup> nap utáni	65	0,263
	60	0,242
Téli és nyári átállások	240	0,745
	120	0,496

VIII.11. Táblázat

		<sup>+10</sup> 50 <sup>-5</sup> órás		<sup>+20</sup> 100 <sup>-10</sup> órás		<sup>+40</sup> 200 <sup>-20</sup> órás	
		45	60	90	120	180	240
60 <sup>+5</sup> nap	60	0,267	0,367	0,542	0,667	0,917	1,000
	65	0,267	0,367	0,542	0,667	0,917	1,000
Téli és nyári átállások	120	0,496	0,496	0,542	0,667	0,917	1,000
	240	0,745	0,745	0,745	0,745	0,917	1,000

VIII.12. Táblázat A (VIII.6.1) logikai kifejezés lehetséges igazságértékei

A táblázatban megadott — összesen 24 — logikai következtetés alapján ki tudjuk választani azt a repült és naptári idő párt, melyek kielégítik a megfelelően biztonságos ellenőrzési időközöket. Célszerűnek látszik, hogy a logikai következtetés igazságértéke 0,7 ~ 0,8 közt legyen, ami egyben azt is jelenti, hogy az ellenőrzés elvégzése 0,3 ~ 0,2-es igazságértékkal felesleges. Ekkor nem túl gyakran végzünk ellenőrzéseket, de még nem nagy kockázatot vállalunk, hogy két ellenőrzés között meghibásodás lépjen fel. Ezek alapján — a szakértői vélemények figyelembevételével — az ellenőrzéseket

$$100^{+20-10} \text{ repült óra}$$

üzemidő után, valamint

*a téli, illetve nyári átállási munkák során*

javasolt elvégezni.

## VIII.6.2. MEGENGEDHETŐ PARAMÉTERELTÉRÉSEK MEGHATÁROZÁSA

Következő feladat a megengedhető paraméter-eltérések (fékhatás-csökkenés és fék aszimmetria) meghatározása a szakértői felmérés alapján. Ekkor azt a két paraméterértéket kell kiválasztanunk, melyek megfelelő igazságértékkel kielégítik a

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{HA} & a\_f\acute{e}khat\acute{a}s-cs\acute{o}kken\acute{e}s \\
 \mathbf{VAGY} & a\_f\acute{e}kaszimmetria\_el\acute{e}ri\_a\_hat\acute{a}r\acute{e}rt\acute{e}ket \\
 \mathbf{AKKOR} & jav\acute{it}\acute{a}st\_kell\_v\acute{e}grehajtan\acute{i}
 \end{array} \quad (\text{VIII.6.4})$$

döntést — logikai kijelentést.

A fékhatás-csökkenés meg nem engedhetőségének tagsági függvényei a helikoptervezetők és a műszakiak válaszának értékelése alapján (VIII.24. ábra):

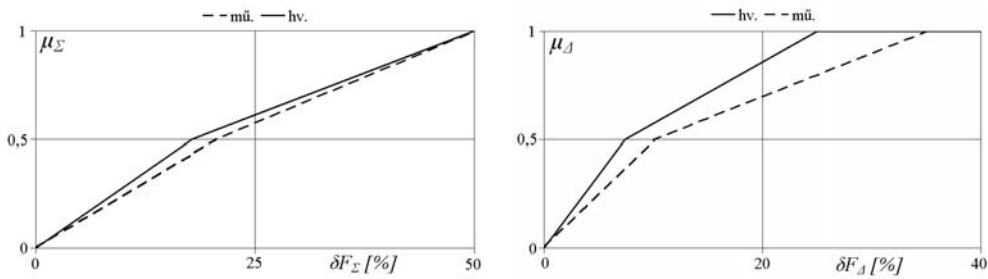
$$\mu(\Sigma)_{hv} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \delta F_{\Sigma} \leq 0 \\ \frac{\delta F_{\Sigma}}{35,6} & \text{ha } 0 < \delta F_{\Sigma} \leq 17,8 \\ \frac{\delta F_{\Sigma} - 17,8}{64,4} + 0,5 & \text{ha } 17,8 < \delta F_{\Sigma} \leq 50 \\ 1 & \text{ha } 50 < \delta F_{\Sigma} \end{cases} ; \quad (\text{VIII.6.5a})$$

$$\mu(\Sigma)_{m\acute{u}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \delta F_{\Sigma} \leq 0 \\ \frac{\delta F_{\Sigma}}{41} & \text{ha } 0 < \delta F_{\Sigma} \leq 20,5 \\ \frac{\delta F_{\Sigma} - 20,5}{59} + 0,5 & \text{ha } 20,5 < \delta F_{\Sigma} \leq 50 \\ 1 & \text{ha } 50 < \delta F_{\Sigma} \end{cases} , \quad (\text{VIII.6.5b})$$

illetve a megengedhető fékaszimmetria tagsági függvényei:

$$\mu(\Delta)_{hv} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \delta F_{\Delta} \leq 0 \\ \frac{\delta F_{\Delta}}{14,8} & \text{ha } 0 < \delta F_{\Delta} \leq 7,4 \\ \frac{\delta F_{\Delta} - 7,4}{35,2} + 0,5 & \text{ha } 7,4 < \delta F_{\Delta} \leq 25 \\ 1 & \text{ha } 25 < \delta F_{\Delta} \end{cases} ; \quad (\text{VIII.6.6a})$$

$$\mu(\Delta)_{m\acute{u}} = \begin{cases} 0 & \text{ha } \delta F_{\Delta} \leq 0 \\ \frac{\delta F_{\Delta}}{20,2} & \text{ha } 0 < \delta F_{\Delta} \leq 10,1 \\ \frac{\delta F_{\Delta} - 10,1}{49,8} + 0,5 & \text{ha } 10,1 < \delta F_{\Delta} \leq 35 \\ 1 & \text{ha } 35 < \delta F_{\Delta} \end{cases} . \quad (\text{VIII.6.6b})$$



VIII.24. ábra Megengedhető paraméter-eltérések tagsági függvényei

Érdekes itt megjegyezni, hogy mind két jellemzőre a helikoptervezetők kisebb megengedhető értékeket adtak meg, így a tagsági függvények is eltérnek egymástól. Ez azzal magyarázható, hogy a helikopter fékezését a pilóták végzik, ami miatt egy más, pontosabb szempontból látják a felvetett problémát is. Viszont az adott válaszok közti korreláció értéke, melyek a VIII.9. Táblázatban találhatóak, a műszakiak esetében nagyobb. Ami a műszaki állomány következetesebb technikai tudását igazolja. Ez pedig a végzett munka, a szakmai irányultság és az alapvetően több műszaki ismeret következménye. Lényegében a fuzzy logika a fenti szemléletbeli eltérésekből adódó logikai ellentmondások feloldására szolgál.

	$\delta F_{\Sigma h} [\%]$		$\delta F_{\Delta h} [\%]$	
	$\mu(\Sigma) = 0,7$	$\mu(\Sigma) = 0,8$	$\mu(\Delta) = 0,7$	$\mu(\Delta) = 0,8$
Helikoptervezetők	30,68	37,10	14,44	17,96
Műszakiak	32,30	38,20	20,06	25,04

VIII.12. Táblázat Igazság értékekhez tartozó eltérések

A (VIII.6.4) logikai kifejezésben a **VAGY** kapcsolat szerepel, aminek a **MAXIMUM** operátor fuzzy megfelelője. Ezért a kifejezés akkor fogja elérni a meghatározott igazságértéket, ha bármelyik feltétel tagsági értéke eléri azt. Így a határértékek meghatározása a tagsági függvények azon értékeinek keresését jelenti, ahol az eléri a megállapított értéket. Célszerűnek látszik itt is, hogy a (VIII.6.4) logikai következtetés igazságértéke  $0,7 \sim 0,8$  között legyen. Ez egyben azt is jelenti, hogy a javítás, karbantartás elvégzése  $0,3 \sim 0,2$  igazságértékkel feleslegesnek tűnik. A VIII.12. Táblázat szemlélteti a két értékhez tartozó, mind a helikoptervezetők, mind a műszakiak válaszai, tagsági függvényei alapján meghatározott megengedhető paraméter-eltérések értékeit.

Az így kapott eredmények és a VII.6. fejezetben ismertetett indokok alapján, az ott leírt matematikai diagnosztikára épülő üzemeltetés-irányítási eljáráshoz javasolt megengedhető paraméter-eltéréseket a VIII.13. Táblázat tartalmazza. Összehasonlítási céllal a harmadik oszlop a statisztikai elemzésekkel kapott eredményeket szemlélteti.

	Fuzzy eredmény	Statisztikai eredmény
$\delta F_{\Sigma h} [\%]$	20	10
$\delta F_{\Delta h} [\%]$	10	2,5

VIII.13. Táblázat Javasolt megengedhető paraméter-eltérések

A fuzzy logika alkalmazásával tett mindkét javaslat eltér a Szerző korábban tett javaslataitól, azoknál enyhébbek. A VI.6. fejezetben bemutatott állapotbecsléssel meghatározott eltérések (0,1 ~ 0,6 %) nagyságrendekkel kisebbek a szakértői válaszok statisztikai kiértékelésével megállapított (2,5 ~ 10 %) határértékeknél.

## VIII.7. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [VIII.1] **BORGULYA, I.**, Neurális hálók és fuzzy-rendszerek, Dialóg-Campus Kiadó, Pécs, 1998., pp. 226.
- [VIII.2] **BOWLES, J. B. – PELÁEZ, C. E.**, Fuzzy logic prioritization of failures in a system failure mode, effects and criticality analysis, Reliability Engineering & System Safety 50 (1995).
- [VIII.3] IEC (1985), Analysis techniques for system reliability Procedure for failure mode and effects analysis (FMEA), IEC Publication 812.
- [VIII.4] **ISOKANGAS, A. – JUUSO, E.**, Fuzzy modelling with linguistic equations, University of Oulu, Oulu, 2000., pp. 34.
- [VIII.5] **KAI-YUAN CAI**, System failure engineering and fuzzy methodology An introductory overview, Fuzzy Sets and Systems 83 (1996), p. 113-133.
- [VIII.6] **KÓCZY, T. L. – TIKK, D.**, Fuzzy rendszerek, Typotext Kiadó, Budapest, 2000., pp. 209.
- [VIII.7] **LANTOS, B.**, Fuzzy Systems and Genetic Algorithms, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002, pp. 336.
- [VIII.8] **PILLAY, A. – JIN WANG**, Modified failure and effects analysis using approximate reasoning, Reliability Engineering & System Safety 79 (2003), 69-85.

- [VIII.9] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Techniques in the Aircraft Engineering, Proceedings on the 7<sup>th</sup> Mini Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies, VSDIA 2000, Budapest 2000., p. 443–448.
- [VIII.10] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Logic – The Mathematical Base of Robot Technique, Robot Warfare, Hadtudományi tájékoztató, 2001/7, Robothadviselés – Robot Warfare című tudományos konferencia anyaga I. rész, p. 83–92.  
<http://www.zmne.hu/tanszekek/ehc/konferencia/april2001/pokoradi.html>.
- [VIII.11] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Logic in the Aircraft Diagnostics, Proc. of 7<sup>th</sup> International Conference Airplanes and Helicopters Diagnostics, AIRDIAG' 2001, Ameliówka, Poland, 16-19. October 2001., p. 191–197.
- [VIII.12] **POKORÁDI L.**, Reliability decision based upon fuzzy logic, Bulletin for Applied and Computing Mathematics, BAM-1957/2002 XCIX. p.6–15.
- [VIII.13] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Logic-Based Maintenance Decision, Bulletins in Aeronautical Sciences, XIV. volume 1. 2002., p. 153–158.
- [VIII.14] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Logic-Based Risk Assessment, AARMS, Academic and Applied Research in Military Science, Volume 1, Issue 1 (2002) p. 63–73. <http://www.zmne.hu/aarms/index.htm>
- [VIII.15] **POKORÁDI L.**, Usage of Fuzzy Tools in the Reliability Investigation, Gép Miskolc, 2002/1, p. 20–25.  
<http://niva4ever.freeweb.hu/gep/02jan/pokoradi/fuzzy.htm>
- [VIII.16] **POKORÁDI L.**, Application of fuzzy logic in the FMEA, Proceedings of Fourth Conference on Mechanical Engineering, „Gépészet 2004”, Budapest, 2004., volume 2., p. 475–479.
- [VIII.17] **POKORÁDI L.**, Fuzzy FMEA to Investigate Bearing Manufacturing Process, Bulletin for Applied and Computing Mathematics, BAM-CIX/2006, Nr. 2288, p.117–123.
- [VIII.18] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Modelling of Experts' Opinion, Proceedings of the Eleventh Symposium of Mathematics and its Applications, Timisoara, Rumania, 2–5 November, 2006., p. 224–229.
- [VIII.19] **QIMI JIANG – CHUN-HSIEN CHEN**, A multi-dimensional fuzzy decision support strategy, Decision Support Systems, in press, corrected proof, available online 13 November 2003.
- [VIII.20] **RETTÉR GY.**, Fuzzy, neurális genetikus, kaotikus rendszerek, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2006., pp. 432.
- [VIII.21] **VARGA EMILNÉ SZÚCS EDIT**, Minőségmenedzsment, Campus Kiadó, Debrecen, 2005., pp. 300.

- [VIII.22] **VERDEGAY, J-L.**, Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 2002., pp. 351.
- [VIII.23] **XU, K. – TANG L.C. – XIE, M. – HO, S.L. – ZHU, M.L.**, Fuzzy assessment of FMEA for engine system, Reliability Engineering & System Safety 75 (2002), 17-29.
- [VIII.24] **ZADEH, L.**, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965), p. 338–353.

## IX. FEJEZET

# A MODELLEZÉSI BIZONYTALANSÁG

### IX.1. BEVEZETÉS

Egy matematikai modell felállításakor, illetve a kapott eredmények elemzésekor mindig számolnunk kell valamilyen fajtájú, valamint mértékű bizonytalansággal. Ennek oka részben az, hogy ismereteink sosem teljeseek a modellezett rendszerrel kapcsolatban, illetve a rendelkezésre álló adataink is némi pontatlansággal bírnak.

Jelen fejezetben a Szerző előbb összegzi a modellezési bizonytalansággal kapcsolatos irodalmakat, melyek döntő hatást gyakoroltak gondolkodására, valamint megfogalmazza — a témakörrel kapcsolatos — gondolatait is, melyeket az elkövetkező kutatásai vezérgondolatainak tekint. Ezt követő fejezetek a Szerző korábban kidolgozott modellezési bizonytalanság elemzési módszereit mutatják be. A XI.4. fejezetben determinisztikus rendszermodell parametrikus bizonytalanságának valószínűségi, illetve intervallum elemzése, valamint ezek inverz feladatainak megoldása ismerhető meg. A XI.5. fejezet egy sztochasztikus folyamatmodell parametrikus bizonytalanság valószínűségi elemzésének elméleti megoldását, majd egy esettanulmányon keresztül gyakorlati alkalmazási lehetőségét szemlélteti.

### IX.2. A FEJEZETBEN ALKALMAZOTT ÁLTALÁNOS JELÖLÉSEK

$P$	—	valószínűség;
$\wedge$	—	szórás ;
$\sim$	—	átlag.

### IX.3. A BIZONYTALANSÁG ÉRTELMEZÉSE

A bizonytalanság értelmezésekor feltétlen figyelembe kell vennünk a kockázat fogalmát is, mely értelmezésével és különböző becslési módjaival a VIII.4 és VIII.5 fejezetekben már találkozhattunk. A kockázat tudományos vizsgálata XX. század elején kezdődött el, bár a klasszikus szerencsejátékokkal kapcsolatban már a XVII. században is voltak matematikai alapú kockázati megfontolások, amelyek később a valószínűségszámítás kialakulásához vezettek. A kockázat különböző meghatározásaiban közös vonás, hogy mindegyik a kockázatot elsősorban a bizonytalansággal kapcsolja össze. Például WILLET meghatározása: „*a kockázat egy nemkívánatos esemény bekövetkezésének objektív bizonytalansága*” [IX.26].

KNIGHT a múlt század húszas éveiben már megkülönbözteti a kockázatot és a bizonytalanságot. Úgy vélte, hogy kockázatos az, ami ellen valamilyen módon lehet védekezni, mert ismerteknek tételezhetőek fel a lehetséges kimenetek és azok valószínűségi eloszlása. A bizonytalanság ellen – véleménye szerint – viszont nem lehet védekezni, mert a kimenetek valószínűségi eloszlása nem ismert. A bizonytalanság fenti fogalmát strukturális bizonytalanságnak is szokás nevezni, ami azt jelenti, hogy a modellező, a döntéshozó nem tudja meghatározni vagy felbecsülni a lehetséges kimeneteket vagy alternatívákat. A bizonytalanság gyengébb formája az úgynevezett parametrikus bizonytalanság, ami akkor áll fenn, ha a képesek vagyunk meghatározni minden lehetséges kimenetet, de azt nem tudjuk, hogy ezek közül melyik fog bekövetkezni.

KNIGHT a kockázat és bizonytalanság tekintetében tett megkülönböztetése, bár sokan vitatták és vitatják napjainkban is, mindenképpen nagy jelentőségű, ahol a különbség az eredmények valószínűségi kimenetekhez rendelhetősége értelmében áll fenn. Ezzel kapcsolatban KEYNES az alábbiakat fogalmazta meg:

*„A 'bizonytalan' ismeretével kapcsolatban megjegyezhető, hogy nem tennék különbséget a bizonyosan ismert s a csupán valószínű között. A rulett játék eredménye ebben az értelemben nincs kitéve bizonytalanságnak. A kifejezést abban az értelemben használom, hogy az európai háború kilátása bizonytalan, avagy a réz ára és a kamatláb húsz év múlva milyen lesz. Ilyen esetekben nincs tudományos alap bármilyen valószínűség számításához. Egyszerűen nem tudjuk.” [IX.3]*

KEYNES véleménye szerint, az ismeret hiányának vagy részleges birtoklásának döntő szerepe van a kockázat, illetve a bizonytalanság definiálásában.

A „kockázat — bizonytalanság” vita nagyon régóta tart, még ma is messze van attól, hogy minden szakember által megoldásról lehetne beszélni.

A matematikai modellezés fő feladata valós fizikai jelenségek folyamatok vagy rendszerek modelljeinek felállítása. A numerikus modelleket és paramétereket a modellezett rendszer természete és a megkívánt pontosságú eredmény függvényében kell kiválasztanunk. A gerjesztések, valamint a belső jellemzők helyes feldolgozása biztosítja, hogy a rendszer valós tulajdonságai tükröződnek az eredményekben. Ezért kritikus kérdés a megfelelő modell és a rendelkezésre álló adatok helyes feldolgozása. A mérnöki gyakorlatban a rendelkezésre álló információ gyakran nem kellően megbízható vagy pontos — inkább pontatlan, diffúz, fluktuáló, nem teljes, töredékes, megbízhatatlan, félreérthető, és főleg a nyelvi változók jelentős szubjektivitással bírnak. Ezeket az információkat főleg tervek, tervrajzok, mérések, megfigyelések, tapasztalatok, szakértői ismeretek, és előírások alapján nyerhetjük. Ráadásul,



ezeket az adatokat a gyártás, üzemeltetés során bekövetkező emberi tévedések, hibák, illetve a környezet paramétereinek sztochasztikus változásai is befolyásolják. A fenti jelenségeket egy általános kifejezéssel tudjuk összegezni, ez a bizonytalanság [IX.5]. A bizonytalanság elválaszthatatlan egy modelltől, a gerjesztésektől és a modellparaméterektől. A bizonytalanság elemzés információt ad a kapott válaszok hibahatáraitól, a modell eredményeinek elfogadási szintjéről.

A rendelkezésre álló információk bizonytalansága megakadályozhatja a helyes modell, valamint pontos adatok, felesleges információk nélküli meghatározását. Itt fontos felidézni a II.5.3. alfejezetben leírtakat, azaz: *„Az a jó modell, amely a lehető legegyszerűbb, de a célnak megfelelő pontossággal közelíti a valóságot.”* Másképpen megfogalmazva: Az, és csak az a modell tekinthető jónak, amely a vizsgálat szempontjából fontos paramétereket, összefüggéseket és a peremfeltételeket megfelelő pontossággal figyelembe veszi, de mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitzűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak.

Ezért, a bizonytalanságot egy alkalmas modellel kell leírunk, mely összhangban van a fizikai rendszerről rendelkezésre álló információinkkal, és azt valamilyen numerikus módon oldunk meg. Ebből a szempontból a hiányosságok torzított számítási eredményekhez, rossz döntésekhez vezethetnek.

A bizonytalanság — annak forrása alapján történő — osztályozása megkülönböztet parametrikus (angol nevén: „aleatory uncertainty”, illetve a modern szabályozástechnikában inkább a „parameter uncertainty”) és ismereti (epistemic) bizonytalanságot. Bár ez a csoportosítás nem abszolút kategorikus terminológiát használ, alkalmas megkülönböztetés ad a nem redukálható parametrikus bizonytalanság, illetve a redukálható bizonytalanság között. Mivel az első a paraméteringadozáshoz köthető — szemben az utóbbi, az ismeretek hiányához kapcsolható — ismereti bizonytalansággal [IX.13]. Ez indokolja a parametrikus bizonytalanság értelmezését úgy, mint sztochasztikus (aleatory — véletlenül múltó, esetleges) bizonytalanság — ami a valós rendszerről szerzett véletlen tapasztalatok eredményeként jelenik meg.

Az ismereti bizonytalanság szubjektív bizonytalansággként szemlélhető, ami mint a valószínűségi modellezéssel szembenálló okok sorozataként vezethető be. Ezek az okok magukba foglalhatják például az információk hiányát, mely megakadályozhatja a helyes modell és a véletlen természet általános megfigyelési rendszereinek meghatározását.

A parametrikus bizonytalanság elsődlegesen az objektivitáshoz kapcsolható, szemben az ismereti bizonytalansággal, mely az objektivitáshoz és szubjektivitáshoz egyaránt köthető, esetleg külön-külön, illetve egyszerre. Következésképpen, a parametrikus bizonytalanság megfelelő módszerekkel modellezhető és dolgozható fel.

Például SZABOLCSI a repülőgéptörzs elasztikus mozgásának matematikai

leírásával foglalkozott, és igazolta, hogy az aeroelasztikus hajlító lengések irányítástechnikai jellemzői, az erősítési tényező, a sajátlengések frekvenciája, valamint a csillapítási tényező, a merev repülőgép repülésdinamikai jellemzőihez képest paraméterbizonytalanságként értelmezhetőek, amelyek matematikai modellezésére az additív sémát javasolta [IX.30].

### IX.3.1. A BIZONYTALANSÁG ELEMZÉSI MÓDJAI

A parametrikus bizonytalanság tudományos szintű elemzése alapvetően két eltérő módon oldható meg [IX.5].

Az első mód a gerjesztések bizonytalansága következtében fellépő lehetséges rendszerválaszok meghatározása intervallum értékekkel. Ezen eljárási mód annak figyelembevétele, hogy néhány vagy az összes paraméter nem egy adott értékkel rendelkezik, hanem bizonyos intervallumon belül található. Általános megfogalmazásuk esetén az intervallumokhoz nem kapcsolunk valószínűségi eloszlásokat, csak a lényegi eredmények lehetséges jövőbeli értékeit határozzuk meg.

Ha csak egy paraméter értéke bizonytalan, annak a megfelelő intervallumát kell figyelembe vennünk, mint a rendszerválaszok egy véges halmazát. De, ha több paramétert kell figyelembe vennünk, független kimenetek keletkeznek, mivel több változó korrelált lehet. Ezért a független feltételezések sok esetben az extrém értékek irreális kombinációihoz vezethetnek.

Számos esetben előfordul, hogy az adott problémát egy lineáris matematikai modellel tudjuk elemezni, de az együtthatók és a paraméterek valamilyen szintű bizonytalansággal, így egy intervallummal bírnak. Az

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{IX.3.1})$$

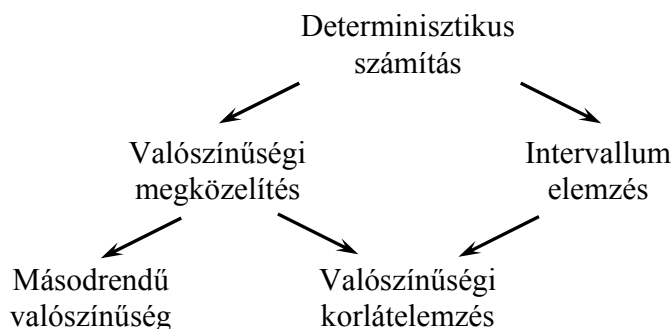
alakú lineáris rendszereket, ahol az  $\mathbf{A}$  együtthatómátrix, illetve  $\mathbf{b}$  vektor elemei intervallumok, lineáris intervallumrendszereknek nevezzük [IX.14].

A másik alapvető módszer a környezet gerjesztéseinek minden lehetséges eleméhez való valamilyen valószínűségi eloszlás rendelése. A lehetséges rendszerválaszokhoz történő valószínűségek rendelése egy általánosan alkalmazott gyakorlat, noha ilyenkor az sem ritka, hogy az úgynevezett szubjektív valószínűségekkel találkozunk, ami a szakértők (vagy bizonyos esetekben a laikusok) által becsült valószínűségi értéket jelent. Néhány esetben eme szubjektív valószínűségeket, mint intervallumokat adják meg, ilyenkor úgynevezett másodrendű bizonytalansági modellekről beszélünk.

Gyakoribb esetben, ha az adatok valószínűségi eloszlásai ismertek, elméletileg mindegyik alternatíva következményeinek eloszlását is megtudhatjuk. Ez egy egyszerű kritérium esetén a vizsgált rendszer vagy folyamat kvalitatív tulajdonságának valószínűségi eloszlását jelenti.

Például egy determinisztikus vizsgálati modell esetén, amikor a modell belső jellemzői valamilyen bizonytalansággal bírnak a kalkuláció során használt valós értékű mennyiségekkel kapcsolatban, a bizonytalanságelemzés intervallumelemzéshez vezethet. A valószínűségi módszerek, mint például a Monte Carlo szimuláció, alkalmazása szintén felhasználhatók egy determinisztikus modell parametrikus bizonytalansági elemzéséhez, mert az egy adott pont körüli lehetséges értékek valószínűségi eloszlását adja meg. Monte-Carlo módszereknek nevezzük a matematikai modellek megoldásának véletlen mennyiségek modellezését felhasználó numerikus módszereit, és azok jellemzőinek statisztikus értékelését. A módszert széles körben alkalmazzák különböző események lehetséges kimeneteleinek és azok valószínűségeinek szimulációjára, amikor a rendszer gerjesztő paraméterei bizonytalanok. Lényege, hogy az egyes bizonytalan gerjesztésekhez rendelt valószínűség-eloszlás alapján véletlenszerűen választunk ki értékeket, amelyeket a szimulációs vizsgálat egy-egy kísérletében használunk fel. Ezt a módszert alkalmazzuk a VI.6. fejezetben ismertetett korrelációs-család vizsgálat során a statisztikai elemzéshez szükséges minták nyerése érdekében is.

Természetesen, az olyan vizsgálatoknál, ahol a bizonytalanság elemzése kívánatos, az alkalmazott modellek nem mindegyike determinisztikus. Ezek döntő része „majdnem valószínűségi”, és a modern kockázatelemzések és biztonsági becslések döntő részénél is előfordul. Ekkor a valószínűségi számítások valószínűségi bizonytalanságelemzéséhez, az eredő elemzés pedig egy úgynevezett másodrendű valószínűségi becsléshez vezethet. Az ilyen tanulmányok elvégzése bonyolult lehet, a megkövetelt nagy számítási műveletszám miatt. Szintén jelentős problémát okozhat az eredmények könnyen értelmezhető szemléltetése is.



IX.1. ábra Az eltérő bizonytalanságelemzési módok [IX.5]

Alternatívaként használhatunk korlátozási megközelítést a valószínűségi számításokhoz is. Ekkor a valószínűségi eloszlások intervallum típusát kapjuk. Ezt a technikát valószínűségi korlátelelemzésnek (PBA — Probability Bounds

Analysis) nevezzük. Ez a megközelítés valószínűségi eloszlásokkal kapcsolatos bizonytalanságát jellemzi egy, a határeloszlás függvény-párban fekvő úgynevezett kumulatív eloszlásfüggvények halmazával.

Ha az adatok száma nem elegendő a statisztikai elemzésekhez, így a valószínűség számítás alkalmazásához, analógiák alapján fel lehet tételezni az eloszlás jellegét, de ennek már szubjektív jellege van. Kellő tapasztalattal az eloszlás lehetséges alsó és felső határait ki lehet jelölni. Ez utóbbi vezet a valószínűségi korlátelemezéshez.

A IX.1. ábra a fent említett lehetséges elemzési módokat, benne a nyilak a módok fejlődését szemlélteti.

Egy viszonylag új út a kiegészítő információk bizonytalansági modellekbe történő beépítésére a fuzzy halmazelmélet alkalmazása, amikor nem statisztikai adatokkal rendelkezünk az adatokkal kapcsolatos szakértői vélemények kvalitatív leírásai vagy az alternatívák következményeinek értékelésére. A modellelemzések bemenő adatai bizonytalanságának ezen elemzésére, kezelésére a VIII. fejezetben, a fuzzy modellezéssel kapcsolatban olvashatunk példákat.

Az intervallumok alkalmazása a bizonytalanság leírásában egy speciális esete a fuzzy értékeknek, amikor nem rendelkezünk járulékos információval a lehetséges értékek halmazával kapcsolatban [IX.5].

Ha — a (IX.3.1) egyenlettel leírt — rendszerek esetén egyszerű intervallumokat alkalmazunk a modell bizonytalanságának elemzése során, könnyen túlbecsült intervallumokat kaphatunk megoldásnak. Ezért célszerű feltételeznünk, hogy az együtthatók és a paraméterek adott intervallumhoz való tartozása is csak bizonyos igazságértékkel bírnak. Így a lineáris intervallum rendszereket, ahol  $\mathbf{A}$  mátrix és a  $\mathbf{b}$  vektor elemei fuzzy értékekkel bírnak, fuzzy-lineáris modelleknek nevezzük. A fuzzy-lineáris modellek elméletével és alkalmazási lehetőségeivel a [IX.14] publikáció foglalkozik részletesen.

### IX.3.2. A KOCKÁZATKEZELÉS BIZONYTALANSÁGA

A kockázat olyan összetett fogalom —mint már azt korábban, a VIII.4. fejezetben elemeztük —, mely két alapfogalomra épül. Ezek, az egy negatív értékelésű következmény mértéke és ennek bekövetkezési valószínűsége. E kettő alapfogalmat úgynevezett *kemény* (mennyiségi, statisztikai módszereket alkalmazó), illetve *lágú* (szubjektív, egyéni intuíciókra épülő) módszerekkel tudjuk meghatározni.

Az objektív valószínűség az a szám, amely meghatározása statisztikai, valószínűség-számítási vagy kombinatorikai módszerekkel lehetséges. Ha valószínűségi becslésünket csak néhány megfigyelésre alapozzuk, vagy csupán sejtésünkre, megérzéseinkre, egyéni preferenciákra hagyatkozunk, akkor szubjektív valószínűségről beszélünk. E két véglet között helyezkedik el az

ügynevezett szintetikus valószínűség. Egy esemény ügynevezett szintetikus valószínűségét nem közvetlenül mérjük, hanem modellezés vagy hasonló objektív valószínűségi rendszerek alapján becsüljük.

A gyakorlatban számos olyan katasztrófaszerűen bekövetkező esemény történhet meg, amely során a bizonytalanságok, objektív valószínűségek lényeges szerepet játszanak a lehetséges kimenetek leírásában. Ilyenek lehetnek egyes légikatasztrófák, egyes orvosi műtétek eredményességével összefüggő jelenségek, például beépített protézis hirtelen károsodása, stb. [IX.7], [IX.29]

Például az objektív valószínűségek (statisztikai) vizsgálata alapján kijelenthetjük azt a tényt, hogy a légi közlekedés biztonságosabb a közútinál. Viszont több személy esetében a repüléstől való félelem fő okának a — saját megérzései alapján vélt — szubjektív valószínűség tűnik. Ennek fő oka vélelmezhetően a sajtó, mely minden légi katasztrófáról részletesen beszámol, még a közúti balesetekben meghaltakról csak egy kis hírben tájékoztat. Ezért, az ezzel a kérdéskörrel foglalkozó légiközlekedési szakemberek, szakértők a repülés veszélyességének társadalmi megítélését egy szintetikus valószínűségként elemzik.

Ha egy esemény következménye közvetlenül megfigyelhető és mérhető, továbbá értéke meghatározott és kifejezett, akkor objektív következményről beszélünk. Másik végletként, mint szubjektív következmény, a döntéshozó személy számára egy kockázatos helyzetben a következmény értéke teljes mértékben a szóban forgó személy értékrendszerétől és a helyzettől függ. A fenti két határ között definiálhatjuk az ügynevezett megfigyelhető következmény értéket.

Bizonyos (például politikai vagy magánéleti) döntéseknél a várható előnyt vagy hátrányt közvetlenül nem, vagy a valóságot egysíkúan tükröző módon tudjuk objektíven számszerűsítve értékelni. Ekkor csak szubjektív vagy megfigyelhető következményt vizsgálhatunk a kockázat kezelése, csökkentése során.

Az *objektivist*a szemlélet legjelentősebb követő eszméje volt a MISES és REICHENBACH által képviselt „relatív gyakoriság” nézete [IX.3]. Eszerint: egy adott esemény valószínűsége valamely kísérletben, az esemény hasonló kísérletek végtelen láncolatában történő bekövetkezésének relatív előfordulása. Ez azt jelenti, hogy ha egy esemény  $k$  alkalommal megtörténik  $n$  azonos és független kísérlet során, akkor — ha a kísérletek számát kellően nagynak választjuk —, a

$$P = \frac{k}{n} \quad (\text{IX.3.2})$$

arány elvileg egészen közel lehet ama esemény „objektív” valószínűségéhez.

Ha az elegendő adat alkalmassá válik, a valószínűségi hozzárendelések

közi egyensúly megvalósulhat, de nem feltétlenül, mivel szubjektív elemek mindig beépülnek a becslési folyamatba. Éles különbséget nem lehet tenni az objektív, reális kockázat és az érzéklet kockázat között.

Bayes-i környezetben megtalálhatóak a kockázatelemzés főbb elvei, melyeket a IX.2. ábra szemléltet. Az alapelvek:

1. Helyezzük a középpontba a vizsgált rendszer vagy folyamat mennyiségileg kifejezhető állapotait, például a fizikai valóság és a természet mennyiségei az elemzés időpontjában legyenek megfigyelhetők.
2. A megfigyelhető értékek legyenek előre jelezhetők.
3. Annak a bizonytalanságát, hogy mely érték megfigyelhető, a valószínűségek átlagával kell kifejezni. Ez a bizonytalanság a tudás hiányának eredménye.

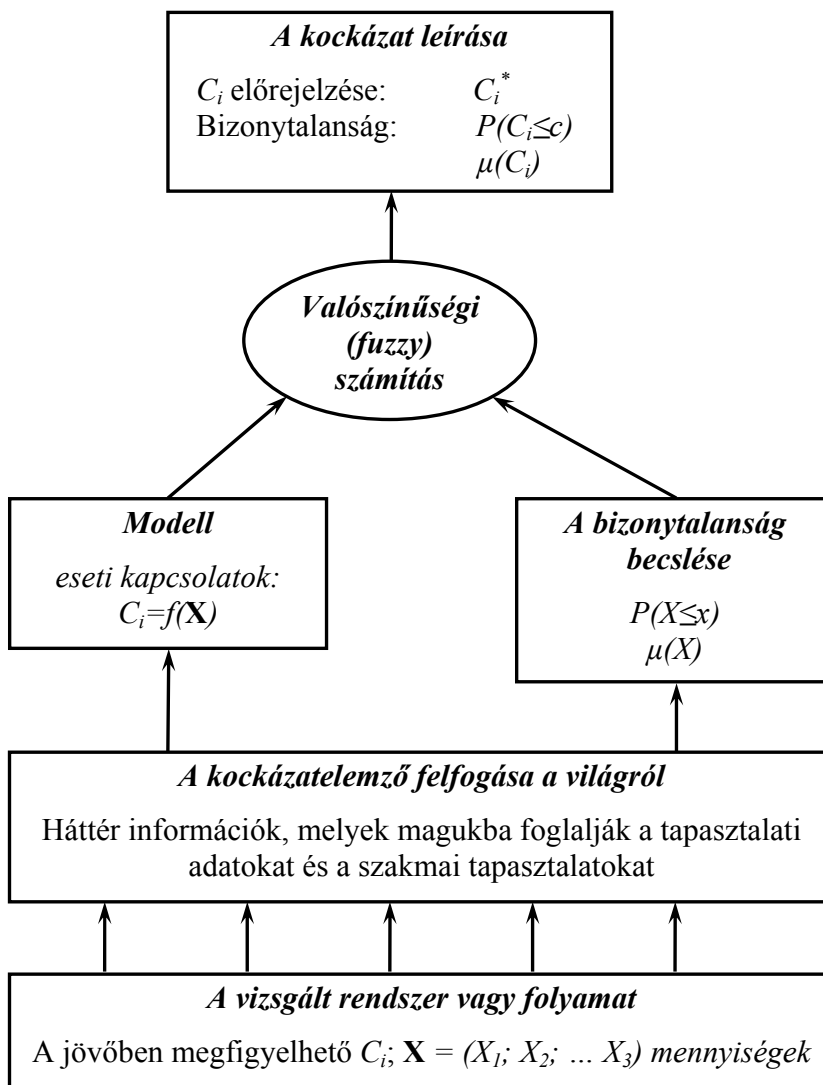
A IX.2. ábra az alábbi módon értelmezhető: Egy kockázatelemző (vagy egy elemző csoport) végzi a kockázatelemzést. A középpontban a világ van, és parciálisan néhány jövőben megfigyelhető  $C_i$ ;  $\mathbf{X} = (X_1; X_2; \dots X_3)$  érték írja le a világot, rendszert vagy folyamatot. Az elemző a kérdésköréről szerzett tudása alapján egy vagy több modellt állít fel, mely leírja a kapcsolatot a  $C$  átfogó rendszerteljesítmény mérték és  $\mathbf{X}$  mennyiség között, mely a részletesebb szintű értékek vektora. Az elemző becsli az  $\mathbf{X}$  vektor bizonytalanságát, melyet egyszerűsíteni kell a becslés során. Ilyen egyszerűsítés például az  $X_i$  jellemzők közötti függetlenség feltételezése. Valószínűségi számításokat vagy a fuzzy halmazok elméletét alkalmazva, az  $\mathbf{X}$  bizonytalanságának becslése az  $f$  modellel együtt, adja az elemzés eredményét, például a  $C$  valószínűségi eloszlását és előrejelzését.

AVEN véleménye szerint, az  $\mathbf{X}$  vektor értékei bizonytalanságának meghatározásához valószínűségi modelleket vezethetünk be, és Bayes-i eljárásokat alkalmazhatunk, mely valószínűségi eloszlásokat konzisztens módon bevonják a megfigyelt adatok számításába. Ezen nézettel vitatkozva, jelen sorok írója azt vallja, hogy a kockázat becslése során a szakértők (vagy a laikusok), mint a nem kívánt esemény bekövetkezési valószínűségével, mint a következményével kapcsolatos véleményének modellezéséhez, a fellépő bizonytalanságok becsléséhez, kezeléséhez a fuzzy halmazok elméletének alkalmazása is megfelelő módszer lehet. Ezt jelzi a IX.2. ábrán a fuzzy logikával kapcsolatos kiegészítések a [IX.1] irodalomból átvett logikai diagramban.

Kiegészítve AVEN megfogalmazását, a kockázatelemzés tudományos alapjai az alábbiakkal összegezhetők:

- A rendszer teljesítményéről, és a hozzá kapcsolódó megfigyelhető értékekről való ismeretek leírhatók, modellek, megfigyelt adatok és a

- szakértői (adott esetekben laikusi) vélemények alapján;  
 A folyamatos bizonytalanságbecslés a valószínűségi szabályok vagy a fuzzy halmazok elméletének alkalmazásával lehetséges.



IX.2. ábra Előrejelző megközelítésű kockázatelemzés főbb elemei

#### IX.4. DETERMINISZTIKUS MODELL PARAMETRIKUS BIZONYTALANSÁGÁNAK VIZSGÁLATA — GYÁRTÁSI PARAMÉTER-ELTÉRÉSEK HATÁSAINAK ELEMZÉSE

Integrált rendszerek tervezésekor nagy fontosságú kérdés a berendezések vagy az alkatrészek megengedhető paraméter-eltéréseinek, gyártási tűrésinek meghatározása.

A részegységek gyártási tűréseinek, illetve az üzemeltetés során megengedett paraméter-eltéréseinek helytelen meghatározása több problémát is okozhat, akár a teljes rendszer működésében. Lehetséges, hogy a teljes rendszer nem teljesíti az előírt működési paramétereket, miközben az összes berendezés, alkatrész kielégíti a velük szemben támasztott gyártási követelményeket. Más esetekben a rendszer üzemeltetését teszi bonyolulttá, költségessé. Ez utóbbira jó példa a Mi-8 *Hip* helikopterek első (1968. július előtti) szériájánál alkalmazott forgószárny lapátok, melyeket csak ötdarabos készletekben lehetett cserélni — egy lapát sérülése esetén is.

A fenti műszaki kérdés vizsgálható az adott rendszer lineáris matematikai diagnosztikai modelljének felhasználásával.

Az inverz feladat megoldásakor az egyes részegységek megengedhető paraméter eltéréseit keressük a teljes rendszer számára előírt vagy legkedvezőbb technikai követelmények (megengedhető kimenő paraméter-eltéréseinek) biztosítása érdekében. Ilyen eset lehet, amikor a rendszer feladata szigorú követelményeket támaszt a kimenő jellemzők eltéréseivel szemben, vagy ha a külső jellemzők fentiekben meghatározott tűrései nem megfelelőek.

Fontos azonban megjegyeznünk, hogy az inverz feladat megoldása nem egyértelmű és nem egyedüli eljárás a feltett kérdésre adandó válasz kimondására. Nem egyértelmű, mert a megoldás során optimum-kereső, becslő módszereket kell alkalmaznunk. Nem egyedüli, mert a végleges döntéshez, a tűrések meghatározáshoz mindenképpen szükséges megvizsgálni a gyártó technológiai lehetőségeit is. Ez a módszer „csak” hatásos segítséget nyújt a probléma megoldásához.

##### IX.4.1. A VALÓSZÍNŰSÉGI ELEMZÉS ELMÉLETI MEGOLDÁSA

A tapasztalatok szerint a gépgyártásban, nagy sorozatban gyártott termékek méretei, műszaki jellemzői igen jó közelítéssel normális eloszlásúnak tekinthetők. Ezért a mérnöki gyakorlatban első megközelítésként a valószínűségi változókat normális eloszlásúként szokás kezelni. A gyártási paraméter-eltérésekből származó parametrikus modell bizonytalanság jelen elemzéséhez feltételezzük, hogy a belső jellemzők gyártási eltéréseinek mindegyike normál eloszlással bír, páronként független valószínűségi változó. Ebben az esetben a rendszer belső jellemzőinek várható értéke csak a névleges érték körül



szimmetrikus tőrésmező esetén lesz egyenlő a névleges értékkel. Szórásaik pedig a tőrésmezők „hosszai” egy-hatodainak tekinthetők, az úgynevezett  $3\sigma$  szabály alkalmazásával. Ezen valószínűségszámítási szabály értelmében egy  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással bíró, normál eloszlású valószínűségi változó által felvett értékek „gyakorlatilag biztosan” — valójában 0,9973 valószínűséggel — az  $(m-3\sigma; m+3\sigma)$  intervallumba esnek.

Így a belső jellemzők várható értékeinek vektora:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_{\max} + \mathbf{x}_{\min}}{2} \quad , \quad (\text{IX.4.1})$$

valamint szórásvektora:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}_{\max} - \mathbf{x}_{\min}}{6} \quad , \quad (\text{IX.4.2})$$

ahol:

$\mathbf{x}_{\max}$  — a belső jellemzők maximális értékeinek vektora:

$$\mathbf{x}_{\max}^T = [x_{1\max} \quad x_{2\max} \quad \dots \quad x_{n\max}] \quad ;$$

$\mathbf{x}_{\min}$  — a belső jellemzők minimális értékeinek vektora:

$$\mathbf{x}_{\min}^T = [x_{1\min} \quad x_{2\min} \quad \dots \quad x_{n\min}] \quad .$$

A külső jellemzők úgynevezett mért (valós értékkel bíró) szórássainak meghatározásához első lépésként meg kell határoznunk a belső jellemzők úgynevezett relatív szórássait, ami (esetünkben) a belső jellemző mért szórássának és a mért névleges értékének hányadosa, azaz:

$$\delta\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad (\text{IX.4.3})$$

ahol:

$\mathbf{X}_{\text{nom}}$  — a belső jellemzők névleges érték mátrixa:

$$\mathbf{X}_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} x_{1\text{nom}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2\text{nom}} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{n\text{nom}} \end{bmatrix}$$

A belső jellemzők relatív szórás vektorának ismeretében, felhasználva a rendszer lineáris diagnosztikai modelljét, azaz a (VI.4.33) egyenletet, kapjuk meg a külső jellemzők

$$\delta\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{D}\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}\hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (\text{IX.4.4})$$

relatív szórás vektorát. A külső jellemzők névleges értékei

$$\mathbf{Y}_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} y_{1\text{nom}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{2\text{nom}} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y_{m\text{nom}} \end{bmatrix}$$

alkalmazásával, a külső jellemzők

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}_{\text{nom}}\delta\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}_{\text{nom}}\mathbf{D}\mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{IX.4.5})$$

mért (valós értékű) szórásait kapjuk meg. Bevezetjük az

$$\mathbf{S} = \mathbf{Y}_{\text{nom}}\mathbf{D}\mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1} \quad (\text{IX.4.6})$$

úgynevezett mért diagnosztikai mátrixot, amivel a (IX.4.5) egyenlet az

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{IX.4.7})$$

alakra egyszerűsíthető.

A külső jellemzők várható értékeinek meghatározásához fel kell vennünk a belső jellemzők úgynevezett relatív várható értékvektorát. Ez a jellemző a várható és a névleges értékek közti különbség

$$\delta\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) \quad (\text{IX.4.8})$$

relatív értékeit tartalmazza, ahol:

$\mathbf{x}_{\text{nom}}$  — a belső jellemzők névleges érték vektora.

$$\mathbf{x}_{\text{nom}}^T = [x_{1\text{nom}} \quad x_{2\text{nom}} \quad \dots \quad x_{m\text{nom}}]$$

A szórások vizsgálatánál bemutatott levezetést megismételve kapjuk meg a külső jellemzők névleges érték vektorát is:

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\text{nom}} + \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) \quad . \quad (\text{IX.4.9})$$

ahol:

$\mathbf{y}_{\text{nom}}$  — a belső jellemzők névleges érték vektora.

$$\mathbf{y}_{\text{nom}}^T = [y_{1\text{nom}} \quad y_{2\text{nom}} \quad \dots \quad y_{m\text{nom}}] \quad .$$

A külső jellemzők — a belső paraméterek gyártási eltéréseiből származó — gyártási szórásmezőinek értékei, a fentebb már említett  $3\sigma$  szabály alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{min}} &= \tilde{\mathbf{y}} - 3\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y}_{\text{max}} &= \tilde{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad . \quad (\text{IX.4.10})$$

#### IX.4.2. A VALÓSZÍNŰSÉGI ELEMZÉS INVERZ FELADATA

Az inverz feladat megoldásakor — a (IX.4.7) egyenlet alapján — keressük a belső jellemzők szórásának azon  $\tilde{\mathbf{x}}$  vektorát, amely megfelelő közelítéssel kielégíti az

$$(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}})^2 = 0 \quad (\text{IX.4.11})$$

egyenlőséget. Ez bármely minimum-kereső eljárással (például gradiens módszerrel — lásd a VI.3.2. alfejezetet) kellő pontossággal megoldható.

A belső jellemzők szükséges várható értékeinek meghatározásához a (IX.4.9) egyenlet átrendezése

$$\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_{\text{nom}} = \mathbf{S}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) \quad , \quad (\text{IX.4.12})$$

és az

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_{\text{nom}} \quad , \quad (\text{IX.4.13})$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{\text{nom}} \quad (\text{IX.4.14})$$

segédvektorok bevezetése szükséges. Ekkor a (IX.4.9) egyenlet az

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{v} \quad (\text{IX.4.15})$$

alakúra egyszerűsödik. Valamely optimum-kereső eljárással meg kell

becsülnünk azt a  $\mathbf{v}$  vektort, amely kielégíti az

$$(\mathbf{u} - \mathbf{S}\mathbf{v})^2 = 0 \quad (\text{IX.4.16})$$

egyenletet. Ekkor a belső jellemzők szükséges várható értéke

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{\text{nom}} + \mathbf{v} \quad , \quad (\text{IX.4.17})$$

illetve a belső jellemzők szükséges túréseit az

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{min}} &= \tilde{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x}_{\text{max}} &= \tilde{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{IX.4.18})$$

vektorok ismeretében tudjuk meghatározni.

### IX.4.3. AZ INTERVALLUM ELEMZÉSE ELMÉLETI MEGOLDÁSA

A belső jellemzők ismeretlen eloszlása esetén a parametrikus bizonytalanságot vizsgálatához intervallumelemzést kell alkalmaznunk. Ekkor első lépésként meg kell határozni azok relatív maximális-, és minimális értékeinek vektorait, melyek a névleges értékeiktől való, ahhoz viszonyított eltéréseit fejezik ki

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_{\text{max}} &= \mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}(\mathbf{x}_{\text{max}} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) \\ \delta\mathbf{x}_{\text{min}} &= \mathbf{X}_{\text{nom}}^{-1}(\mathbf{x}_{\text{min}} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) \end{aligned} \quad , \quad (\text{IX.4.19})$$

A további vizsgálatokhoz a korábban (a VI.4.4 alfejezetben) felállított diagnosztikai mátrixot felhasználva kell meghatározni az úgynevezett pozitív és negatív diagnosztikai mátrixok elemeit az alábbi egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_+ &= \left[ d_{ij+} = \begin{cases} d_{ij} & \text{ha } d_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{ha } d_{ij} < 0 \end{cases} \right] \\ \mathbf{D}_- &= \left[ d_{ij-} = \begin{cases} d_{ij} & \text{ha } d_{ij} \leq 0 \\ 0 & \text{ha } d_{ij} > 0 \end{cases} \right] \end{aligned} \quad . \quad (\text{IX.4.20})$$

A fentiek alapján a külső jellemzők relatív maximum, illetve minimum értékeinek vektorai a

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{y}_{\text{max}} &= \mathbf{D}_+ \delta\mathbf{x}_{\text{max}} + \mathbf{D}_- \delta\mathbf{x}_{\text{min}} \\ \delta\mathbf{y}_{\text{min}} &= \mathbf{D}_+ \delta\mathbf{x}_{\text{min}} + \mathbf{D}_- \delta\mathbf{x}_{\text{max}} \end{aligned} \quad (\text{IX.4.21})$$

egyenletekkel határozhatók meg, melyek — az inverz feladat későbbi megoldása érdekében — az alábbi hipermátrix egyenletbe rendezhetők:

$$\begin{bmatrix} \delta y_{\max} \\ \delta y_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_+ & \mathbf{D}_- \\ \mathbf{D}_- & \mathbf{D}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{\max} \\ \delta \mathbf{x}_{\min} \end{bmatrix} \quad (\text{IX.4.22})$$

Ismerve a külső jellemzők relatív maximum és minimum értékeit, a külső jellemzők szórási tartományainak határai az

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_{\text{nom}} + (\mathbf{Y}_{\text{nom}} \delta y_{\max}) \\ y_{\min} &= y_{\text{nom}} + (\mathbf{Y}_{\text{nom}} \delta y_{\min}) \end{aligned} \quad (\text{IX.4.23})$$

egyenletek alkalmazásával kapjuk meg.

#### IX.4.4. AZ INTERVALLUM ELEMZÉSE INVERZ FELADATA

Az inverz feladat megoldásához meg kell határozni a külső jellemzők megengedett relatív maximum és minimum értékeinek vektorát, az alábbi egyenletek felhasználásával:

$$\begin{aligned} \delta y_{\max} &= \mathbf{Y}_{\text{nom}}^{-1} (y_{\max} - y_{\text{nom}}) \\ \delta y_{\min} &= \mathbf{Y}_{\text{nom}}^{-1} (y_{\min} - y_{\text{nom}}) \end{aligned} \quad (\text{IX.4.24})$$

A külső jellemzők megengedett eltéréseinek ismeretében a belső jellemzők szükséges szórásait úgy tudjuk meghatározni, hogy — a (IX.4.22) egyenlet alapján — keressük a belső paraméterek azon relatív maximum és minimum érték vektorait, melyek megfelelő pontossággal kielégítik a

$$\left( \begin{bmatrix} \delta y_{\max} \\ \delta y_{\min} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_+ & \mathbf{D}_- \\ \mathbf{D}_- & \mathbf{D}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_{\max} \\ \delta \mathbf{x}_{\min} \end{bmatrix} \right)^2 = 0 \quad (\text{IX.4.25})$$

mátrix egyenletet. A belső jellemzők relatív megengedhető mért maximum és minimum érték vektorai ismeretében azok abszolút megengedhető értékei az alábbi egyenletekkel határozhatók meg:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\max} &= \mathbf{x}_{\text{nom}} + (\mathbf{X}_{\text{nom}} \delta \mathbf{x}_{\max}) \\ \mathbf{x}_{\min} &= \mathbf{x}_{\text{nom}} + (\mathbf{X}_{\text{nom}} \delta \mathbf{x}_{\min}) \end{aligned} \quad (\text{IX.4.26})$$

## IX.4.5. MINTAPÉLDA INTERVALLUM ELEMZÉSE

A VI. fejezetben bemutatott mintapéldát felhasználva jelen fejezetben a gyártási paraméter-eltérések hatásainak intervallum elemzését szemléltetjük. A vizsgálathoz először fel kell vennünk a modellezett rendszer belső paramétereinek névleges értékeit, illetve a gyártási tűrések alsó és felső értékeit. Ezeket az adatokat foglalja össze a IX.1. Táblázat a modellezett rendszer **I.** ( $h = 1500^{\pm 10}$ ) üzemmódjára.

Paraméter:	Értékek:		
	Minimális	Névleges	Maximális
$h$	1490	1500	1510
$\alpha$	0,74	0,75	0,76
$i$	445	450	460
$\beta$	1,34	1,35	1,35
$\pi$	2,08	2,10	2,13
$k$	624	630	635
$l$	15,00	15,20	15,25
$\omega$	3,48	3,50	3,52

IX.1. Táblázat Gyártási paraméter intervallumok

A IX.1. Táblázat a lapján a rendszer belső jellemzőinek — lásd (VI.3.9) egyenletet:

→ minimális értékeinek vektora:

$$\mathbf{x}_{\min}^T = [1490,0 \quad 0,74 \quad 445,0 \quad 1,34 \quad 2,08 \quad 624,0 \quad 15,0 \quad 4,48] \quad , \quad (\text{IX.4.27})$$

→ maximális értékeinek vektora:

$$\mathbf{x}_{\max}^T = [1510,0 \quad 0,76 \quad 460,0 \quad 1,35 \quad 2,13 \quad 635,0 \quad 15,25 \quad 3,52] \quad , \quad (\text{IX.4.28})$$

→ névleges értékeinek vektora:

$$\mathbf{x}_{\text{nom}}^T = [1500,0 \quad 0,75 \quad 450,0 \quad 1,35 \quad 2,1 \quad 630,0 \quad 15,2 \quad 3,5] \quad , \quad (\text{IX.4.29})$$

illetve mátrixa:

$$\mathbf{X}_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} 1500,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,75 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 450,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,35 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 2,1 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 630,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 15,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 3,5 \end{bmatrix} \quad (\text{IX.4.30})$$

A (IX.4.19) egyenlet alapján a maximális, illetve minimális relatív értékek vektorai:

$$\delta \mathbf{x}_{\text{max}} = \begin{bmatrix} 0,006667 \\ 0,013333 \\ 0,022222 \\ 0,0 \\ 0,014286 \\ 0,007937 \\ 0,003289 \\ 0,005714 \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{x}_{\text{min}} = \begin{bmatrix} -0,006667 \\ -0,013333 \\ -0,011111 \\ -0,007407 \\ -0,009524 \\ -0,009524 \\ -0,013158 \\ 0,005714 \end{bmatrix} \quad (\text{IX.4.31})$$

Az úgynevezett pozitív, illetve negatív diagnosztikai mátrixok — a (VI.4.37), valamint a (IX.4.20) egyenletek alapján:

$$\mathbf{D}_+ = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 1,00300 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,00301 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,00301 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 1,00031 & 1,00031 & 0,0 & 0,00301 & 1,40044 & 1,0 & 1,0 & 0,285 \end{bmatrix} \quad (\text{IX.4.32})$$

$$\mathbf{D}_- = \begin{bmatrix} -0,00031 & -0,00031 & 0,0 & -0,00301 & -0,00044 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,00031 & -1,00031 & 0,0 & -0,00301 & -1,40044 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ -1,00031 & -1,00031 & 0,0 & -0,00301 & -0,00044 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & -1,00301 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$$

A fentiekben meghatározott mátrixokat és vektorokat behelyettesítve a (IX.4.22) egyenletbe, megkapjuk a külső jellemzők relatív maximális és minimális értékeinek vektorát:

$$\begin{bmatrix} \delta y_{\max} \\ \delta y_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,022321 \\ 0,031846 \\ 0,022321 \\ 0,041777 \\ -0,011157 \\ -0,025443 \\ -0,011157 \\ -0,035442 \end{bmatrix} \quad (IX.4.33)$$

Felhasználva a IV.3. fejezetben megkapott eredményeket — lásd VI. Táblázatot, valamint a (VI.3.8) egyenletet —, tudjuk meghatározni a rendszer külső jellemzőinek névleges értékeinek vektorát:

$$\mathbf{y}_{\text{nom}}^T = [450,0 \quad 0,14 \quad 0,4 \quad 194000,0] \quad (IX.4.34)$$

valamint mátrixát:

$$\mathbf{Y}_{\text{nom}} = \begin{bmatrix} 450,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,14 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,4 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 19400,0 \end{bmatrix} \quad (IX.4.35)$$

Végül a (IX.4.23) egyenlet felhasználásával kapjuk meg a rendszer kimenő jellemzőinek minimális, illetve maximális értékeit, melyek a IX.2. Táblázatban láthatók.

Paraméter:	Értékek:		
	Minimális	Névleges	Maximális
<i>a</i>	444,979	450	460,0446
<i>b</i>	0,1364	0,14	0,1444
<i>c</i>	0,3955	0,4	0,4089
<i>m</i>	187124,2	19400	202104,7

## IX.2. Táblázat Az intervallum elemzés eredményei

A fenti leírt parametrikus modell bizonytalanság vizsgálat eredményét ezek után a vizsgált rendszer fontos szakmai szempontjai szerint kell a szakértőknek elvégezni, melytől jelen könyvben eltekintünk.



## IX.5. SZTOCHASZTIKUS MODELL PARAMETRIKUS BIZONYTALANSÁGÁNAK VIZSGÁLATA — JAVÍTÁSI MUNKAIGÉNY KÉTDIMENZIÓS VALÓSZÍNŰSÉGI BECSLÉSE

Az üzemeltetés menedzsment gyakorlatában a legtöbbször előforduló kérdés, hogy a tervezési időszakban, a megadott  $T$  (például termelési) teljesítményigény kielégítéséhez mekkora javítási, karbantartási munkaigénnyel kell rendelkezünk? Mekkora javító, karbantartó kapacitást kell biztosítanunk? A feladat a  $T$  teljesítménymutató alapján a szükséges javítási munkakapacitás igény meghatározása. A feladat megoldásához ismernünk kell az üzemeltetett rendszer meghibásodási rátáját, valamint az egy meghibásodás javítási (esetleg költség vagy anyag) igényét.

A  $\lambda$  meghibásodási ráta a meghibásodások adott időpontra vonatkozóan meghatározott feltételes valószínűség sűrűsége, feltéve, hogy addig az időpontig a vizsgált rendszer vagy elem meghibásodása nem következett be. A  $\lambda(\tau)$  függvény minden  $\tau$  időpontban annak a valószínűségét adja meg, hogy az adott  $\tau$  időpontig hibamentesen működő elem a következő  $\Delta\tau$  időegység alatt meghibásodik. Mértékegysége: *teljesítménymutató*<sup>-1</sup>, vagy annak valamilyen többszöröse, például: *repült óra*<sup>-1</sup>.

A meghibásodási ráta statisztikailag a

$$\lambda = \frac{n}{N\Delta\tau} \quad (\text{IX.5.1})$$

módon határozható meg, ahol:

- $n$  – a  $\Delta\tau$  vizsgálati idő alatt meghibásodott elemek száma;
- $N$  – a vizsgálati időszak kezdetén működő elemek száma;
- $\Delta\tau$  – a vizsgálati időtartam (teljesítménytartam).

Egy technikai rendszer üzemeltetése során a meghibásodási ráta értéke változik, illetve a (IX.5.1) egyenlet alapján történő statisztikai meghatározása is bizonyos mértékű bizonytalansággal bír. Így a  $\lambda$  meghibásodási ráta valószínűségi változónak tekinthető, mely  $\tilde{\lambda}$  várhatóértékkel,  $\hat{\lambda}$  szórással és  $f_{\lambda}(x)$  sűrűség-, illetve  $F_{\lambda}(x)$  eloszlás függvénnyel írható le.

A meghibásodási ráta és a tervezett teljesítmény ismeretében a meghibásodások  $n$  számának várható értéke az

$$\tilde{n} = T\tilde{\lambda} \quad (\text{IX.5.2})$$

egyenlettel határozható meg.

Az egy meghibásodás kijavításához szükséges  $m$  munkaigény — az üzemeltetési, javítási folyamatok sztochasztikus volta következtében — is valószínűségi változóként kezelendő, mely  $\tilde{m}$  várható értékkel,  $\hat{m}$  szórással, illetve  $f_m(y)$  sűrűség-, valamint  $F_m(y)$  eloszlásfüggvénnyel írható le.

A vizsgálati (becslési) időintervallumban szükséges javítási kapacitás igény várható értéke az

$$\tilde{M} = \tilde{m}\tilde{n} \quad (\text{IX.5.3})$$

egyenlettel határozható meg.

Ha a várható javítási munkaigény becslésekor nem annak várható értékét, hanem adott megbízhatósági értékkel egy intervallumon belüli elhelyezkedését akarjuk megbecsülni, figyelembe kell vennünk a megbízhatósági ráta, illetve az egy meghibásodás javítási munkaigényének valószínűségi eloszlását. A fenti meghatározási metódus szerint a meghibásodások számának becslési pontatlansága a

$$P_\lambda = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f_\lambda(x) dx = F_\lambda(\lambda_{\max}) - F_\lambda(\lambda_{\min}) \quad (\text{IX.5.4})$$

integrállal határozható meg, ahol:

$\lambda_{\min}$  — a meghibásodási ráta becslési intervallumának alsó (minimális) értéke;

$\lambda_{\max}$  — a meghibásodási ráta becslési intervallumának felső (maximális) értéke.

A javítási munkaigény becslés második lépésének — lásd (IX.5.3) egyenlet — becslési pontossága hasonló módon, az alábbi összefüggéssel határozható meg:

$$P_m = \int_{m_{\min}}^{m_{\max}} f_m(y) dy = F_m(m_{\max}) - F_m(m_{\min}) \quad , \quad (\text{IX.5.5})$$

ahol:

$m_{\min}$  — az egy javítás munkaigényének becslési intervallumának alsó (minimális) értéke;

$m_{\max}$  — az egy javítás munkaigényének becslési intervallumának felső (maximális) értéke.

A teljes becslési folyamat pontossága pedig a

$$P_B = P_\lambda P_m \quad (\text{IX.5.6})$$

szorzattal számítható.

Fontos itt megjegyezni, hogy a gyakorlati alkalmazás során pont ezen fenti  $\lambda_{\min}$ ;  $\lambda_{\max}$  és  $m_{\min}$ ;  $m_{\max}$  értékeket kell megkeresnünk a becslés kívánt pontosságának elérése érdekében.

### IX.5.1. ELMÉLETI MEGOLDÁS

Jelen fejezet célja e probléma megoldása, azaz egy olyan javítási munkaigény becslő eljárás kidolgozása, mely a meghibásodási rátát és az egy meghibásodás javításához szükséges munkaórát, mint valószínűségi változót kezelve biztosítja a teljes becslés kívánt pontosságát, megbízhatóságát. A feladat megoldásához a bevezetőben leírt szakmai indokok alapján bevezetett egyszerűsítő feltételként a  $\lambda$  meghibásodási rátát és az egy meghibásodás  $m$  javítási munkaigényét normális eloszlású, független valószínűségi változókként kezeljük. Egyszerűsítő feltételezésünk igazolásának tekinthető a IX.5.2. alfejezetben olvasható esettanulmány során elvégzett elemzés, mely szerint a két valószínűségi változó közti korrelációs együttható értéke „csak”: 0,173.

A fent körvonalazott feladatot alapvetően két módon tudjuk megoldani. Első megközelítés esetén meghatározzuk mindkét becslési lépés megengedhető bizonytalanságát, úgy, hogy azok eredő pontossága a teljes becslés — lásd (IX.5.6) egyenlet — pontosságával legyen egyenlő. Ekkor a (IX.5.4), illetve (IX.5.5) kifejezések alapján tudjuk meghatározni a  $\lambda_{\min}$ ;  $\lambda_{\max}$ , illetve  $m_{\min}$ ;  $m_{\max}$  értékeket. Majd a munkaigény minimum és maximum értéke a:

$$\begin{aligned} M_{\min} &= T\lambda_{\min}m_{\min} \\ M_{\max} &= T\lambda_{\max}m_{\max} \end{aligned} \quad (\text{IX.5.7})$$

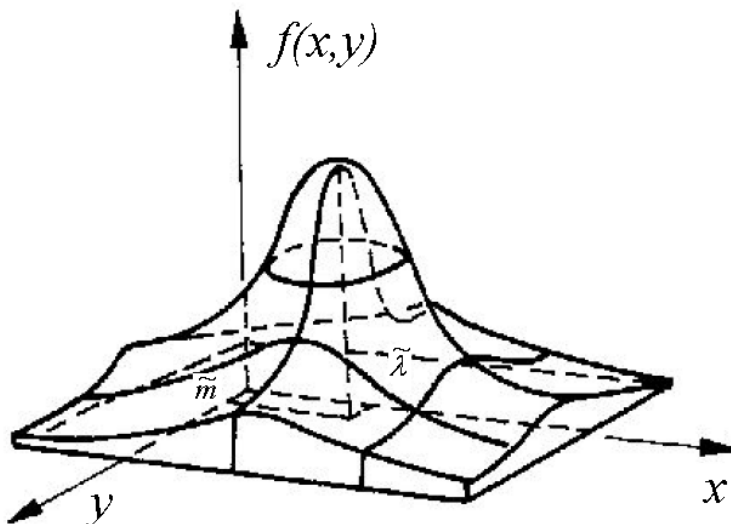
kifejezésekkel határozható meg.

Ezt a fenti vizsgálati módot lényegében a IX.3. fejezetben ismertetett intervallumelemzésnek tekinthetjük.

Ekkor felvetődik, hogy a figyelembe vett valószínűségi változók statisztikai becsléseit, illetve megengedett munkaigény-becslési pontosságának értékeit megfelelő korrektséggel számítottuk-e ki? A fenti bizonytalansági forrás kiküszöbölhető, ha a teljes becslést egy kétdimenziós valószínűségi — az egyszerűsítő feltételek következtében — normális valószínűségi eloszlásfüggvény felhasználásával oldjuk meg. Ekkor az alkalmazandó sűrűségfüggvény a:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\hat{\lambda}\hat{m}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\tilde{\lambda}}{\hat{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{y-\tilde{m}}{\hat{m}}\right)^2\right]} \quad (\text{IX.5.8})$$

alakot veszi fel [IX.9], melyet — általános esetre a IX.3. ábra szemléltet.



IX.3. ábra Javítási munkaigény-becslés kétdimenziós normális eloszlásának sűrűségfüggvénye ([IX.11] alapján)

A [IX.10] irodalom szerint a (IX.5.8) egyenlettel leírt eloszlás a

$$\left(\frac{x-\tilde{\lambda}}{\hat{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{y-\tilde{m}}{\hat{m}}\right)^2 = \Omega^2 \quad (\text{IX.5.9})$$

egyenletű nivóellipszissel szemléltethető. Annak a valószínűsége, hogy egy  $(x;y)$  koordinátájú pont az adott nivóellipszisen belül helyezkedik el, a két-szabadságfokú  $\chi^2$  eloszlás felhasználásával a

$$P_B = F_{r^2(2)}(\Omega^2) \quad (\text{IX.5.10})$$

egyenlettel határozható meg.

A (szakmai) becslés kívánt pontosságának,  $P_B$  valószínűségének ismeretében, a két-szabadságfokú  $\chi^2$  eloszlás alapján  $\Omega^2$  meghatározható.

Ekkor az  $\Omega^2$  ismeretében, pedig — az ellipszis (IX.5.9) egyenletének felhasználásával keresendő az a  $(x;y)$  pont, mely esetén a  $\lambda$  és az  $m$  szorzata extrémummal rendelkezik. Ezen pontok ismeretében a javítási munkaigény

minimum, illetve maximum értéke az:

$$\begin{aligned} M_{\min} &= T\{xy\}_{\min} \\ M_{\max} &= T\{xy\}_{\max} \end{aligned} \quad (\text{IX.5.11})$$

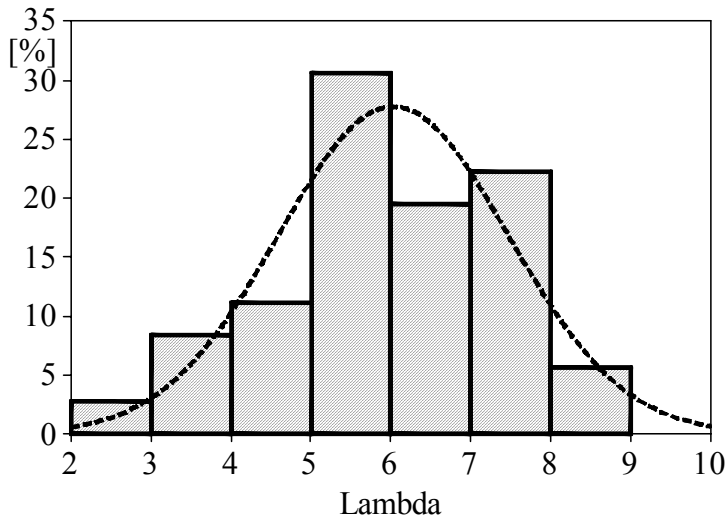
egyenletekkel határozható meg.

A IX.3. fejezetben leírtak alapján kijelenthető, hogy ezen második esetben a (IX.5.2) és (IX.5.3) egyenletek alkotta egyszerű modell parametrikus bizonytalanságának másodrendű valószínűségi elemzését végeztük el.

### IX.5.2. ESETTANULMÁNY

A fentiekben elméletileg bemutatott javítási munkaigény-becslő eljárás alkalmazási lehetőség szemléltetésére az alábbi esettanulmányt mutatjuk be.

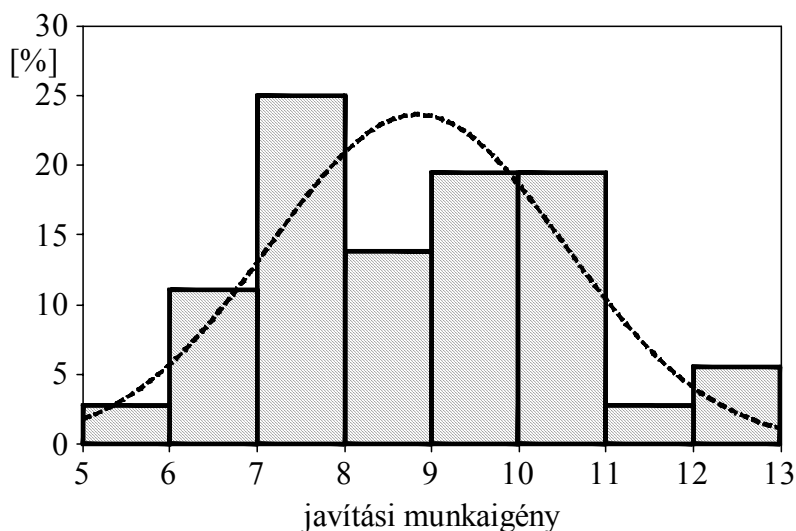
Egy kelet-magyarországi termelő vállalat egy gépcsoportjának két év során gyűjtött havi meghibásodási és javítási adatait elemeztük. Az ezer működési órára számított meghibásodási ráták relatív eloszlását a IX.4. ábra, a javítási átlagidők relatív eloszlását a IX.5. ábra szemlélteti, a statisztikai elemzések főbb adatai az IX.3. Táblázatban összegeztük.



IX.4. ábra Meghibásodási ráták relatív eloszlása  $\left[ \frac{1}{1000 \text{ óra}} \right]$

Az alkalmazás általános szemléltetése érdekében — esetünkben — az egy termelési órára juttatott javítási munkaigény becslésének eredményeit

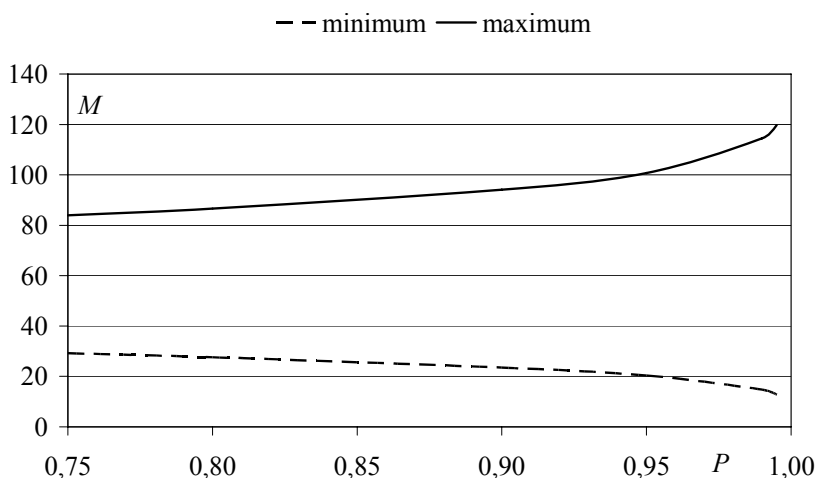
mutatjuk be a IX.4 Táblázatban, illetve a IX.6. ábrán, különböző becslési valószínűségek esetén.



IX.5. ábra Egy meghibásodás javítási munkaigények relatív eloszlása [munkaóra]

	Meghibásodási ráta $\left[ \frac{1}{1000 \text{ óra}} \right]$	Egy meghibásodás javítási munkaigénye [munkaóra]
Átlag	6,063	8,762
Szórás:	1,439	1,738
Mintaszám:	24	24
Elf. valószínűség:	0,738	0,691
Korrelációs együttható:	0,173	

IX.3. Táblázat Statisztikai elemzések főbb eredményei



IX.6. ábra Becslési eredmények

A grafikon jól szemlélteti azt a már előre várható eredményt, hogy az elvárt becslési valószínűség növelésével együtt növekszik a becslési intervallum is.

$P$	$(xy)_{min}$	$(xy)_{max}$
0,75	29,236	83,886
0,80	27,652	86,595
0,90	23,600	94,106
0,95	20,388	100,763
0,990	14,769	114,414
0,995	12,880	119,772

IX.4. Táblázat Becslési eredmények  $\left[ \frac{\text{jav.óra}}{1000 \text{ óra}} \right]$ 

Természetesen a fenti parametrikus modell bizonytalanság eredményét tisztán szakmai, menedzsment szempontból kell elvégezni, és az alapján meghatározni az optimális javítási, karbantartási munkacapacitást a modellezett termelési időtartamra.

Az eddigi eredmények alapján a Szerző témakörrel kapcsolatos jövőbeni tevékenységét az alábbiakban fogalmazza meg: Az üzemeltetési költséget, munkaerő-, anyag- vagy energiaszükségletet, illetve a javítás következtében fellépő (naptári) időkiesést, két (esetleg több) dimenziós valószínűségi modellre épülő, becslőeljárások kidolgozását ha, a felhasznált valószínűségi változók

(jelen tanulmányban:  $\lambda$ ;  $m$ ):

- nem függetlenek egymástól;
- nem normális eloszlással bírnak;

vagy nem két változótól függ a becsült üzemeltetési jellemző (a fejezetben:  $M$ ).

## IX.6. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [IX.1] **AVEN T. – KÖRTE J.**, On the use of risk and decision analysis to support decision-making, Reliability Engineering and System Safety 79 (2003) p. 289–299.
- [IX.2] **AVEN, T.**, Risk analysis and science, International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, Vol. 11, No. 1 (2004) p. 1–15.
- [IX.3] **BÉLYÁ CZ I.**, A kockázat változó szerepe az értékszámításban, akadémiai székfoglaló előadás anyaga, <http://www.mta.hu/fileadmin/szekfoglalok/000873.pdf>
- [IX.4] **BENKE, K.K. – LOWELL, K.E. – HAMILTON, A.J.**, Parameter uncertainty, sensitivity analysis and prediction error in a water-balance hydrological model, doi:10.1016/j.mcm.2007.05.017
- [IX.5] **FERSON S., TUCKER W. T.**, Sensitivity analysis using probability bounding, Reliability Engineering and System Safety 91 (2006) 1435–1442
- [IX.6] **FERSON, S. – TUCKER W.T.**, Sensitivity in risk analyses with uncertain numbers, SAND2006-2801, Unlimited Release Printed June 2006., pp. 79., <http://www.ramas.com/sensanal.pdf>
- [IX.7] **FOOLADI, S. – SZABÓ, S. – SZÚCS, G. – DARÓCZI, L. – DEÁK, GY. – CSERNÁTONY, Z.**, Effect of Blood and operation conditions on structural and mechanical properties of bone cement, First Hungarian Conference on Biomechanics, Budapest June 11-12 2004, ISBN 963 420 799 5 pp.128-134, (2004).
- [IX.8] **HJORTELANDA, A. – AVEN, A. – ŘSTEBŘB, R.**, Uncertainty treatment in production assurance analyses throughout the various phases of a project, Reliability Engineering and System Safety 92 (2007) 1315–1320.
- [IX.9] **KARLIN, S. – TAYLOR H.M.**, Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, Budapest, 1985., pp. 537.
- [IX.10] **KORN, G.A. – KORN, T.M.**, Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975., pp. 995.
- [IX.11] **LUKÁCS O.**, Matematikai statisztika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987. pp. 570.



- [IX.12] **MATOS, M.A.**, Decision under risk as a multicriteria problem, European Journal of Operational Research 181 (2007) 1516–1529.
- [IX.13] **MÖLLER, B. – BEER, M.**, Engineering computation under uncertainty – Capabilities of non-traditional models, Comput Struct. (2007), doi:10.1016/j.compstruc.2007.05.041
- [IX.14] **MUZZIOLI, S. – REYNAERTS, H.**, Fuzzy linear systems of the form  $A_1x + b_1 = A_2x + b_2$ , Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 939 – 951
- [IX.15] **NILSEN, T. – AVEN, T.**, Models and model uncertainty in the context of risk analysis, Reliability Engineering and System Safety 79 (2003) 309–317.
- [IX.16] **OVERKAMPF, V.A. – HELTON, J.C. – JOSLYN, C.A. – WOJTKIEWICZ, S.F. – FERSON, S.**, Challenge problems: uncertainty in system response given uncertain parameters Reliability Engineering and System Safety 85 (2004) 11–19.
- [IX.17] **OVERKAMPF, W.L. – DELAND, S.M. – RUTHERFORD, B.M. – DIEGERT, K.V. – ALVIN, K.F.**, Error and uncertainty in modeling and simulation, Reliability Engineering & System Safety 75 (2002), p. 333–357.
- [IX.18] **POKORÁDI L.**, Application of Mathematical Diagnostics for Investigation of Manufacturing Anomaly Effects, Informator, 5th International Conference Aircraft and Helicopters' Diagnostics, Airdiag' 97, Warsaw 11-12 December 1997., p. 75–83.
- [IX.19] **POKORÁDI L.**, Methods to Investigate Effects of Manufacturing Anomalies of Unknown Distribution, Informator, 6th International Conference Aircraft and Helicopters' Diagnostics, AIRDIAG '99, Warsaw, 1999., p. 73–77.
- [IX.20] **POKORÁDI L.**, Investigation of Manufacturing Anomalies' Effects Using Diagnostic Model, Proceedings of Second Conference on Mechanical Engineering, „Gépészet 2000”, Budapest, 2000., volume 2., p. 683–687.
- [IX.21] **POKORÁDI, L. – SZABOLCSI, R. – BERA J.**, Mathematical Model-Based Methods to Investigate Manufacturing Anomalies, Proceedings of 22nd International Congress of Aeronautical Sciences, ICAS 2000, Harrogate, 2000., p. 594.1– 594.7. (CD-version).
- [IX.22] **POKORÁDI L.**, Diagnostic Model-Based Investigation of Aircraft Systems' Manufacturing Anomalies, Technika (YU ISSN 0040–2176) Godina LVII 2002, 2/2002, Mašinstvo, p. 1–8.
- [IX.23] **POKORÁDI L.**, Fuzzy Logic-Based Risk Assessment, AARMS, Academic and Applied Research in Military Science, Volume 1, Issue 1 (2002) p. 63–73. <http://www.zmne.hu/aarms/index.htm>

- [IX.24] **POKORÁDI L.**, Linearized model-based investigation of manufacturing anomalies, Проблемы машиностроения и автоматизации, № 3, (2002), Москва, p. 44–49.
- [IX.25] **POKORÁDI L.**, Javítási munkaigény kétdimenziós valószínűségi becslése, Debreceni Műszaki Közlemények, 5. évfolyam 4 szám, 2006/4, p. 119–129.
- [IX.26] **POKORÁDI L.**, Bizonytalanság a kockázatkezelésben, Repüléstudományi Közlemények, Különszám, 2007. április 20., pp. 8. , CD változat [http://www.szrfk.hu/konf2007/elemek/01\\_index.htm](http://www.szrfk.hu/konf2007/elemek/01_index.htm)
- [IX.27] **POKORÁDI L.**, Two-Dimensional Production Line Maintenance Estimation Method, Proceedings of the 8th International Conference Modern Technologies in Manufacturing, ISBN 973-9087-83-3, 4th – 5th October, 2007, Cluj-Napoca, p. 335–378.
- [IX.28] **ROHÁCS, J. – POKORÁDI L. – ÓVÁRI, GY. – KAVAS, L.**, Anomalies in Integrated Aircraft Systems, Proceedings of the 20<sup>th</sup> Symposium Aircraft Integrated Systems, Garmisch-Partenkirchen, 2000., p. 275–287.
- [IX.29] **SZABÓ, J. – SZABÓ, S. – CSERNÁTONY, Z.**, The accidental reasons of the early loosening of total endoprostheses. Rheological research., First Hungarian Conference on Biomechanics, Budapest June 11-12 2004, ISBN 963 420 799 5 pp.423-431, (2004), proceeding
- [IX.30] **SZABOLCSI, R.**, Design of the Pitch Attitude Control System for the Aeroelastic Fighter Aircraft, Bulletines for Applied Mathematics, BAM-1240/96 (LXXX), pp(29-40), ISSN 0133-3526, Technical University of Budapest, 1996.
- [IX.31] **ZHI-JIE LIU – WEI CHEN – HONG-ZHONG HUANG – BO YANG**, A diagnostics design decision model for products under warranty, International. Journal Production Economics 109 (2007) 230–240.