



**KISISKOLÁSOK
TÉRBELI TÁJÉKOZÓDÓ KÉPESSÉGÉNEK
FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEI**

PhD értekezés

Herendiné Kónya Eszter

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK *Matematika és Számítástudományok* Doktori Iskola *Didaktika* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2007. január 31.

.....
Herendiné Kónya Eszter
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy *Herendiné Kónya Eszter* doktorjelölt 1999-2007 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Didaktika* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.
Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2007. január 31.

.....
Dr. Nagy Péter
témavezető

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Nagy Péter egyetemi tanárnak munkámhoz nyújtott segítségével, tanácsaiért.

Szeretnék továbbá köszönetet mondani Dr Szendrey Julianna főiskolai tanárnak és Dr. Ambrus András egyetemi docensnek, akik megismertettek a matematika didaktikai kutatások módszereivel, munkám elkészítését hasznos megjegyzésekkel, építő kritikákkal segítették.

Hálás vagyok kollégáimnak, különösen Tarcsi Margit főiskolai docensnek, a gondolatébresztő beszélgetésekért.

Köszönet illeti a Fazekas Mihály Általános Iskola, a Vénkerti Általános Iskola valamint a Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának vezetését és tanítóit, hogy lehetővé tették a felmérések elkészítését.

Külön köszönöm Erdődiné Sándor Katalin tanítónak a tanítási kísérlet foglalkozásainak tervezésében, és gyakorlati megvalósításában végzett munkáját. Ugyancsak hálás vagyok a 2. b. osztály tanulóinak, akiktől igen sokat tanultam.

Köszönettel tartozom családomnak: gyerekeimnek türelmükért és szeretetükért, férjemnek, Herendi Tamásnak megértéséért és szakmai segítségéért, valamint szüleimnek, akiknek tanári elhivatottságát példaértékűnek tartom.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. Elméleti háttér.....	5
1.1. A térszemlélet, ezen belül a térbeli tájékozódás fogalmának értelmezése	5
1.1.1. A térszemlélet fogalma és összetevői.....	6
1.1.2. A térbeli tájékozódás és az irány fogalmának kapcsolata	8
1.1.3. A vizuális észlelés	8
1.2. tanulásméletek.....	9
1.2.1. A tanulásméletek fejlődése.....	10
1.2.2. A konstruktív tanulásméletek alapelvei	11
1.2.3. A konstruktív pedagógia didaktikai követelményei	12
1.3. Matematika didaktikai koncepciók	13
1.3.1. A genetikus matematika didaktika, Freudenthal didaktikai fenomenológiája..	14
1.3.2. A komplex matematikatanítási kísérlet alapelvei.....	15
1.3.3. A realisztikus matematikaoktatási koncepció alapelvei	16
1.3.4. Az aktív, felfedezett tanulás	18
1.4. A kutatáson alapuló tantervfejlesztés.....	19
1.4.1. A kutatáson alapuló tantervfejlesztés általános elvei	20
1.4.2. A kutatáson alapuló tantervfejlesztés lehetséges fázisai	21
2. A térbeli tájékozódás témaköre a jelenlegi tantervekben és tankönyvekben	24
2.1. A Nemzeti Alaptanterv vizsgálata	24
2.2. A kerettantervek vizsgálata	25
2.3. A tankönyvcsaládok vizsgálata	32
3. Az irányítás fogalmának matematikai és matematikatörténeti elemzése	35
3.1. Az egyenes irányítása.....	37
3.2. A sík irányítása	37
3.3. A tér irányítása	40
4. Az irányítás fogalmának matematika didaktikai elemzése	43
4.1. Az irányítás fenomenológiai elemzése.....	43
4.2. A jobbra-balra reláció	48
4.3. Mentális térkép.....	49
4.4. Az ismeretszerzés reprezentációs síkjai	50
4.5. A téri gondolkodás kialakulása	51
4.6. Összegzés.....	54
5. A kutatás módszertana.....	56
5.1. Kutatási kérdések	56
5.2. Hipotézisek	56
5.3. A kutatás felépítése	56
5.3.1. Tájékozódó felmérés	57
5.3.2. Tanítási kísérlet.....	59
5.3.3. Utótesztek, késleltetett teszt	61
6. A kutatás tapasztalatainak ismertetése és elemzése	63
6.1. Térbeli viszonysszavak használata	64
6.2. Útvonalak leírása	79
6.3. Ciklikus rendezés	87

6.4. Tájékozódás a Koordináta-rendszerben	98
6.5. Geometriai transzformációk.....	107
6.6. Objektumok képe különböző nézőpontokból.....	117
Összegzés, további kutatási lehetőségek.....	128
Irodalomjegyzék	134
Mellékletek	137
A tájékozódó felmérés 1. írásbeli feladatlapja	1
1. osztály	1
2. osztály	3
3. osztály	5
4. osztály	7
A tájékozódó felmérés 2. írásbeli feladatlapja	9
1. osztály	9
2. osztály	11
3. osztály	13
4. osztály	15
A tanítási kísérlet menete	17
Utóteszt	22
Késleltetett teszt	24
A felmérésben résztvevő osztályok listája	26

BEVEZETÉS

„Ha az ember befordul a Park Lane valamelyik szerény mellékutójába, aztán egyszer vagy kétszer jobbra meg balra fordul, egy csendes utcácskában találja magát, melynek jobb oldalán áll a Bertram Szálló. A Bertram Szálló már nagyon régóta megvan. A háború óta romba dőltek a tőle jobbra eső házak, és balra, kicsit odább az utcában is néhány, de maga a Bertram sértetlen maradt.”

(Agatha Christie: A Bertram Szálló)

Agatha Christie regényének első sorait olvasva megjelenik előttünk a mellékutca képe a Bertram Szálló épületével együtt. Elképzeljük, hogy az utcán sétálva néhány üres telek után megpillantjuk a sértetlen épületet. Hogyan is fejezi ki ezt az író? Először meghatározza, hogy a szálló az utca *jobb* oldalán van. Ezzel megadja a haladási irányt. A szállótól *jobbra* romba dőltek a házak, *balra* nem, de távolabb ismét romokat találunk. Mi árulja el, hogy hogyan értsük a *szállótól jobbra* kifejezést? Szemben állva vele, vagy éppen háttal? *„Balra, kicsit odább”* - adja meg a választ az író, utalva a már említett haladási irányra.

A fenti idézet jól szemlélteti, hogy az egyértelmű tájékozódásban és helymeghatározásban járható út, ha valamely síkbeli görbén megadunk egy haladási irányt, majd ehhez viszonyítva megkülönböztetjük a görbe két oldalát (*jobb* és *bal*).

A haladási irány megadása egy mentális utazást elevenít fel, így a problémamegoldás során a térbeli és az időbeli tájékozódás kérdései összekapcsolódnak. A térbeli tájékozódás egymás mellett létező háromdimenziós helyek közötti eligazodásként fogható fel, míg az időbeli tájékozódás ennél egyszerűbbnek tűnik, nem mellé-, hanem alárendeltségi viszonyokkal (*előtte-utána, korábban-később*) leírható egydimenziós „térben” modellezhető.

A dolgozatban a térbeli tájékozódásról, a tájékozódó képesség fejlesztéséről lesz szó. A fejlesztésre nagyon sok lehetőség kínálkozik az élet számtalan területén, mi a matematikatanítás keretein belül vizsgáljuk ezeket. Megfigyeléseink, elemzéseink az általános iskola alsó tagozatos tanulóit érintik. A tágabb kapcsolatrendszer leírásához, az előzmények megismeréséhez, illetve a célok és eredmények bemutatásához azonban szükséges az óvodás és a felső tagozatos diákok tanulmányozása is.

Már az idézetből kitűnik, hogy a tájékozódás során kulcsszerep jut az irány, irányítás fogalmának.

Ezt a fogalmat az tünteti ki sok más klasszikus matematikai fogalommal szemben, hogy intuitív szinten könnyen leképezhető az emberi agyban, a fogalmi precizitás igénye viszont csak az absztrakciós folyamat meglehetősen magas szintjén jelentkezik.

Az irányítás kisgyermekkorától jelen van a hétköznapi életben, akár mentális objektumnak, akár folyamatnak, akár relációnak tekintjük. Felmerül a kérdés, szükség van-e arra, hogy explicit módon foglalkozzunk vele az iskolában, vagy a fogalom fejlődése spontán módon, iskolától függetlenül is végbemegy?

Az iskolai tananyagba való felvétel mellett több érv szól:

- A matematika szokásos tanterveit áttekintve tapasztalhatjuk, hogy az irány fogalma sok témakörhöz kapcsolódik, s a megértésnek nélkülözhetetlen feltétele. Nézzünk ezekre a témakörökre néhány példát:

A vektor a lineáris irány fogalmának matematizálása.

A helymeghatározással összefüggésben vezetjük be a koordinátarendszereket. Mind a Descartes-féle, mind a polár-koordináták megértése a távolság és az irány fogalmán múlik. Az utóbbi esetben az irányított szög fogalmán keresztül a körüljárási irány fogalma is megjelenik.

Az irányított szög a trigonometria témakörében is alapvető ismeret.

A geometriai transzformációk tanításakor már az egyes transzformációk definiálásához szükségünk van mind a vektor, mind az irányított szög fogalmára (eltolás, pont körüli forgatás, tengely körüli forgatás). A transzformációk csoportosításának kiemelt szempontja az irányítástartó ill. az irányításváltó tulajdonság. A tengelyesen szimmetrikus és a forgásszimmetrikus alakzatok felismerése szintén összefüggésben van az irány fogalmával.

A geometriai szerkesztések tanításakor ugyancsak találkozunk az egy egyenesen egy pont ill. egy síkon egy egyenes által kijelölt két oldal megkülönböztetésének vagy a körüljárási irány kijelölésének kérdésével.

Az euklideszi sík és tér irányíthatósága implicit módon jelen van a középiskolás tananyagban, az irányítható és nem irányítható felületek topológiája ugyanakkor már túlmutat azon.

- A hétköznapi életben és a matematikaórákon elsajátított irányfogalommal más tantárgyak keretében is foglalkozunk. Elsősorban a fizika épít a vektorfogalomra, pl. az erő, sebesség, gyorsulás, stb. tanítása során. A mechanikában, különösen a kinematikában a koordinátarendszert mint a helymeghatározás eszközt használjuk. Az optikai törvényeknek szintén lényeges eleme az irány. A térbeli irányok (*jobb-és balcsavar*) gyakorlati alkalmazásával a tanulók közvetlenül találkoznak pl. az elektromágneses indukció jelenségének tanulmányozásakor.

A természettudományok mindegyike foglalkozik, már iskolai szinten is, az irány és a szimmetria kérdéseivel, itt csupán utalunk a kémiára, az anyagszerkezetre, a biológiára, és a földrajz keretében tanított térképészeti ismeretekre.

A technika tantárgy az objektumok különböző irányú nézeti képeinek tanítása révén illeszthető be ebbe a sorba.

A felsoroltakon túl a művészeti tantárgyak (vizuális kultúra, ének-zene, irodalom) is említést érdemelnek. Itt elsősorban a szimmetria kérdéseivel kapcsolatban merül fel az irány fogalma.

Testnevelés órákon az irány és a mozgás kapcsolata kerül előtérbe. A témában szerzett több tantárgyi és hétköznapi ismeret összehangolt felhasználását igényli pl. a tájékozódási futás.

- Az új Nemzeti Alaptanterv az Európai Unió gyakorlattal összhangban nem tananyagleírást, hanem az egyes tantárgyak által fejleszthető kulcskompetenciák meghatározását tartalmazza. Az irány, irányítás fogalmának fontosságát támasztja alá az a tény is, hogy a Matematika Műveltségterület kulcskompetenciái közül az egyik a tér-és időbeli tájékozódás. Az alaptanterv szerint a tájékozódás fejlesztése összetett feladat, melyben központi helyen a megfelelő irányérzet, irányfelismerés kialakítása áll.

- Az általunk kiválasztott irányfogalom alapvető szerepét jelzi, hogy több különböző tanulási zavar (diszlexia, diszgráfia, diszkalkulia) meglétével korreláló tünet éppen az iránytévesztés. E zavarok csökkentésére irányuló terápiák jelentős része a tájékozódóképesség javításával foglalkozik.

Tisztában vagyunk azzal, hogy - sokirányú alkalmazása ellenére - az irányfogalom alapjait jórészt nem az iskolában, hanem spontán hétköznapi szituációkban sajátítjuk el.

Mivel erre a spontán fogalomra az egyes tantárgyak különböző tudományos fogalmakat építenek, úgy érezzük, mindenképpen az iskola feladata, hogy meggyőződjön a tanulók meglévő mentális objektumainak fejlettségéről, hiányosságok esetén pedig olyan szintre hozza őket, melyre a továbbiakban építhet.

Úgy gondoljuk tehát, hogy az iskolai oktatómunka során szükség van a gyerekek meglévő irányszófogalmának feltérképezésére, továbbfejlesztésére és tudatossá tételére.

A fejlesztendő fogalom absztrakt jellegéből adódóan ebből a munkából a matematika tantárgynak nagy szerepet kell vállalnia.

A dolgozat az alábbi fő kutatási kérdésre és a hozzá kapcsolódó öt alkérdésre keresi a választ:

Hogyan fejleszthető a térbeli tájékozódó képesség a matematikatanítás keretein belül?

1. Milyen fogalmi, tevékenységi tartalmak tartoznak a térbeli tájékozódás témakörébe?
2. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?
3. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétene?
4. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?
5. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az első négy fejezet a szakirodalom tanulmányozásán keresztül kutatásunk elméleti háttérét, a téma tantervi megjelenítését, matematikai, matematika történeti vonatkozásait mutatja be, valamint áttekinti a matematika didaktikai kutatások releváns eredményeit.

Az **1. fejezetben** három kérdéskört járunk körül. Munkánk kiindulópontja a térszemlélet és a térbeli tájékozódás fogalmának értelmezése. Ezt követően ismertetjük azokat a tanulásmódotokat, didaktikai koncepciókat, amelyek kijelölik témakörünk tananyaggá formálásának fő irányvonalait. Elsősorban a konstruktív pedagógia tanulásmódotára valamint a holland realiztikus matematikaoktatási koncepcióra támaszkodunk. Végül, tekintettel arra, hogy céljaink között szerepel egy konkrét témakör beillesztése a meglévő tananyagstruktúrába, a tantervfejlesztés elméleti kérdéseivel foglalkozunk. Az ún. kutatáson alapuló tantervfejlesztés fázisait fogadjuk el saját munkánkban is irányadónak.

A **2. fejezet** a térbeli tájékozódás tanításának jelenlegi magyarországi helyzetét igyekszik bemutatni a tantervek és a tankönyvek alapján. Megvizsgáljuk a Nemzeti Alaptanterv valamint több különböző kerettanterv utalásait az általunk választott témakör tanítására vonatkozóan, s elemezzük az egyes kerettantervekhez köthető tankönyvszaladékokat is.

A **3. fejezet** az irányítás fogalomkörének matematikai és matematikatörténeti áttekintését adja. Az irányszófogalom matematikai struktúrájának, történeti fejlődésének tanulmányozása a célul kitűzött tananyag kialakítását szolgálja.

A **4. fejezetben** a témakörhöz kapcsolódó matematika didaktikai kutatások eredményeit foglaljuk össze.

A dolgozat első része (1-4. fejezet) a térbeli tájékozódás fejlesztésére szolgáló tananyag részegységeinek meghatározásával zárul.

A második rész (5-7. fejezet) saját kutatásunk leírását tartalmazza.

Az **5. fejezet** a kutatás módszertanát ismerteti.

Kutatásunkban három fő rész különíthető el. Elsőként előzetes méréseket végeztünk, mely az alsó tagozatos tanulók meglévő tudásának feltérképezését szolgálta. Ezt követően 2. osztályosok számára megterveztünk és megvalósítottunk egy 10 hetes tanítási kísérletet, melynek célja az előzetes felmérés tapasztalatai alapján összeállított tananyag kipróbálása, finomítása volt. Végül a kísérlet során szerzett tapasztalatainkat utó- és késleltetett tesztek felvételével egészítettük ki.

A **6. fejezet** a kutatás eredményeinek részletes bemutatását és elemzését tartalmazza. Ezt a munkát a 4. fejezet végén meghatározott 6 résztémakör köré csoportosítva végezzük el. Az egyes alfejezetek felépítése követi a kutatás három fő fázisát, s az adott résztémakörre vonatkozó összeggel zárul.

A **7. fejezetben** összefoglaljuk tapasztalatainkat, eredményeinket, és ezeket összevetjük a kiindulási hipotézisekkel. Végezetül felvázolunk néhány további kutatási lehetőséget.

1. ELMÉLETI HÁTTÉR

Célunk a kisiskolások térbeli tájékozódó képességének vizsgálata. Ehhez mindenképpen szükség van annak a tisztázására, hogy milyen értelemben használjuk a kifejezést. A Magyar Értelmező Kéziszótár meghatározása szerint a tájékozódás az irányok, az égtájak, ill. az eligazodás útjának megállapítását jelenti (Pusztai (szerk.), 2003, 1296. old.), míg a térszemlélet az a képesség, amivel az ember a tárgyakat térbeli viszonyuknak megfelelően érzékeli (1336. old.). A matematikai problémamegoldás gyakorlatában ennél többet értünk térszemléleten, idesoroljuk a képzeletbeli nézőpontváltások, az objektumok mentális mozgatásának képességét is.

Az alaposabb elemzést az egyes intelligenciaelméletek tanulmányozása alapján végezzük el.

A témánk feldolgozása során az általános pedagógiai elméletek közül a cselekvés pedagógiájára valamint a konstruktív pedagógia tanulásméleteire támaszkodunk (Nahalka, 1998). Ezzel összhangban szem előtt tartjuk a realisztikus matematikaoktatási koncepció elveit és főbb eredményeit (Selter, 1997, Furinghetti, 2002, Jones at al, 2002, Perry-Dockett, 2002).

Mínthogy a dolgozatban egy konkrét témakör tanításának lehetőségeivel foglalkozunk, a munka tervezésében és kivitelezésében a kutatáson alapuló tantervfejlesztés nemzetközileg elfogadott fázisait követjük (Clements, 2002).

1.1. A TÉRSZEMLÉLET, EZEN BELÜL A TÉRBELI TÁJÉKOZÓDÁS FOGALMÁNAK ÉRTELMEZÉSE

A térszemlélet matematika tantárgyon belül történő fejlesztése az általános iskolai geometriaoktatás egyik fő célkitűzése, s ezzel együtt előfeltétele további geometriai és matematikai problémák megoldásának.

A térszemlélet fogalma megjelenik az intelligenciaelméletekben is. Az egyes intelligenciaelméletek mindegyike önálló faktorként jelöli meg ezt a képességet.

Louis Thurstone (1938) hét intelligenciafaktort, azaz elsődleges mentális képességet nevezett meg, ezek:

- Nyelvérték
- Beszédképesség
- Számolási készség
- Megfigyelőképesség
- Térszemlélet
- Emlékezőképesség
- Logikus (deduktív) gondolkodás

Howard Gardner (1991) intelligencián a problémák megoldásának, új problémák és produktumok létrehozásának képességét érti, s az alábbi intelligenciatípusokat különbözteti meg:

- Nyelvi intelligencia
- Zenei intelligencia

- Matematikai-logikai intelligencia
- Téri intelligencia
- Testi-mozgásos intelligencia
- Inter- és intraperszonális intelligencia

Gardner többszörös intelligenciaelmélete szerint nem létezik egységes intelligencia, mindenki többféle elkülönült intelligenciával rendelkezik, melyek az egyes embereknél különböző mértékben vannak jelen. Mindenkit jellemez egy bizonyos intelligencia-térkép.

Thurstone óta a legtöbb intelligenciakutató egyetért abban, hogy a térszemlélet az emberi intelligencia egyik, a nyelvi és a logikai területektől eltérő, összetevője (Franke, 2000).

További intelligenciamodelleket (Guilford 1964, Vernon 1971, Treumann 1974) tanulmányozva azt állapíthatjuk meg, hogy a téri faktor mindegyikben önállóan szerepel s mindegyiknek fontos komponense. (Maier, 1999)

1.1.1.A térszemlélet fogalma és összetevői

Vizsgáljuk meg részletesebben a térszemlélet fogalmát és összetevőit az egyes intelligenciaelméletekhez kapcsolódóan.

A téri intelligencia Gardner szerint olyan képesség, mely lehetővé teszi

- a fizikai valóság vizuális észlelését,
- az eredetileg észlelték transzformálását, módosítását,
- a vizuális tapasztalatok felidézését akkor is, ha a megfelelő fizikai környezet hiányzik.

A téri intelligencia révén olyan képességek összekapcsolása történik, mint az alakzatok felismerése, egy alakzat transzformálása, vagy egy transzformáció felismerése, mentális kép létrehozása és fejben történő megváltoztatása, térbeli információk grafikus megjelenítése stb. A felsorolt képességeket a téri intelligencia mint egész részeinek tekinti, s hangsúlyozza azt, hogy egy-egy területen való gyakorlás más rokon területek fejlődését is elősegíti.

Thurstone (1951) a térszemléletet olyan képességnek tartja, melynek révén 2- és 3-dimenziós objektumokkal mentális műveleteket végezhetünk. A térszemlélet egyike a legkomplexebb intelligenciafaktoroknak, így több részfaktorral jellemezhető. Ezek:

- S(1) Térbeli relációk létesítése, érzékelése: Különböző szögekből látott tárgyak azonosítása ill. a tárgyak felismerése, ha közben elmozdítottuk. (Spatial relations)
- S(2) Vizualizáció: Egy objektum mentális képének megalkotása. (Visualization)
- S(3) Térbeli tájékozódás: Olyan térbeli elrendezés vizuális felfogása, melynél a megfigyelő a szituáció részese. Olyan képesség, melynek segítségével a valódi vagy a képzeletbeli térben eligazodhatunk. (Spatial orientation)

A térszemlélet összetevőinek meghatározására további elméletek születtek, melyek alapját a Thurstone-féle komponensek képezik (Maier, 1999).

Az alábbi táblázatban összefoglaljuk, hogy ezek az elméletek milyen faktorok kiemelését tartották lényegesnek.

Thurstone (1951)	Guilford (1964)	Michael, Fruchter és Zimmerman (1957)	Guilford, és Linn és Petersen (1985, 1986)
Térbeli relációk (S1)	Térbeli tájékozódás	Vizualizáció (S2)	Térbeli relációk (S1)
Vizualizáció (S2)	Vizualizáció	Térbeli relációk és térbeli tájékozódás (S1, S3)	Vizualizáció (S2)
Térbeli tájékozódás (S3)		Képzeletbeli mozgatas	Térbeli tájékozódás (S3)
			Térbeli észlelés
			Mentális forgatás

Említést érdemel a Guilford-féle felosztás két faktorra, térbeli tájékozódásra és vizualizációra, valamint Michael és társai osztályozása, mely a Thurstone-féle vizualizációs faktor mellett másodikként a térbeli relációkat és tájékozódást együttesen tekinti, harmadik komponensként pedig bevezeti az ún. képzeletbeli mozgatót (*Kinesthetic imagery*), mely az emberi test saját helyzetéhez viszonyított *jobb-bal* megkülönböztetés képességét jelenti.

Linn és Petersen öt kategóriát különböztet meg. Közülük 3 megegyezik a Thurstone-féle faktorokkal, ezekhez adódik még a térbeli észlelés (*Spatial perception*) valamint a mentális forgatás (*Mental rotation*). A térbeli észlelés elsősorban a függőleges és a vízszintes azonosítását jelenti, ahol az egyes testek elhelyezkedése (*az alatt-felett, előtt-mögött* kapcsolatok) fontos szerepet játszik. A mentális forgatás képessége azt mutatja meg, hogy milyen gyorsan tudunk egy 2 vagy 3 dimenziós tárgyat képzeletben elforgatni.

	Dinamikus gondolkodási folyamat: az objektumok térbeli viszonyai megváltoznak	Statikus gondolkodási folyamat: Az objektumok térbeli viszonyai nem változnak meg; a megfigyelő viszonya az objektumhoz azonban igen
A megfigyelő a szituáción kívül van	Vizualizáció S(2)	Térbeli relációk S(1)
	Mentális forgatás	Térbeli észlelés
A megfigyelő a szituáción belül van	Térbeli tájékozódás (S3)	Képzeletbeli mozgatas

A felsorolt faktorok közötti kapcsolatot két szempont - a megfigyelő helyzete ill. az objektumok térbeli viszonyainak megváltozása - alapján mutatjuk be. Az összefüggéseket táblázattal szemléltetjük (Maier, 1999). A hat említett faktor közül három, a vizualizáció, a térbeli relációk és a képzeletbeli mozgítás egyértelműen besorolható a fenti kategóriákba, azonban a többi esetben átfedések figyelhetők meg. A térbeli tájékozódás képességére például mind dinamikus, mind statikus gondolkodási folyamatban szükségünk lehet.

Munkánkban a Guilford-féle felosztásra támaszkodunk, azaz a térszemléletet két fő komponensre bontva értelmezzük, ezek a vizualizáció és a térbeli tájékozódás. Térbeli tájékozódáshoz soroljuk eszerint mindazokat a képességeket, melyek túlmutatnak a vizualizáción, azaz egy objektum mentális képének megalkotásán. Ilyen a Thurstone-féle S(3) faktoron túl a döntően statikus szituációkban fellépő térbeli relációk felismerésének, a térbeli észlelésnek a képessége, a saját mozgásunknak az elképzelése, valamint a mentális forgatás elvégzésének képessége.

1.1.2. A térbeli tájékozódás és az irány fogalmának kapcsolata

A felsorolt kompetenciák közös magja az *irány* fogalom. A térbeli relációk felismerése azt jelenti, hogy képesek vagyunk egy objektumot különböző szögből, azaz különböző *irányból* nézve is azonosítani. A térbeli észlelés az objektumok helyzetét méri fel a függőleges és a vízszintes *főirányok*hoz képest. Ezeket a helyzeteket elsősorban az alatt-felett, előtt-mögött viszonzyszavakkal írjuk le. A képzeletbeli mozgítás faktora a saját testünk helyzetéhez viszonyított jobb-bal megkülönböztetést jelenti, a megkülönböztetés lehetősége a sík *irányíthatóságával* áll szoros kapcsolatban. A mentális forgatás képessége a megfelelő forgási *irány* kiválasztását jelenti.

1.1.3. A vizuális észlelés

A vizuális észlelés előfeltétele a térszemlélet kialakulásának. Frostig (1978) és Hoffer (1977) az alábbi területeket különbözteti meg (idézi Franke, 2000, 38-43- old.):

- Vizuomotoros koordináció: A látás koordinálása a saját testtel vagy testrésszel.
- Ábrák elkülönítése: Egy komplex háttérből, vagy összetett ábrából részábrák felismerése.
- Észlelési állandóság: Különböző méretű, sorrendű, helyzetű, színű ábrák azonosítása.
- Térbeli kapcsolatok észlelése: Térbeli objektumok közötti kapcsolatok felismerése és leírása.
- Térbeli helyzet észlelése: A tárgyat észlelő személyhez képest a tárgy helyzetének felismerése.
- Vizuális megkülönböztetés: Objektumok közötti hasonlóságok és különbségek felismerése.
- Vizuális emlékezet: Korábban látott objektumok felidézése ismertetőjegyeik alapján.

Tárgyalásunk szempontjából a felsorolt területek közül kettőnek, a térbeli kapcsolatok és a térbeli helyzet észlelésének van kiemelt szerepe.

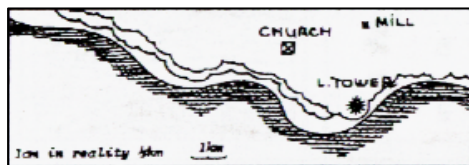
A térbeli kapcsolatok észlelése olyan feladatokat jelent, melyekben azt határozzuk meg, hogy pl. egy tárgy hogyan helyezkedik el egy másikhoz képest.

A térbeli helyzet észlelésének kérdése szoros kapcsolatban van a térbeli kapcsolatok észlelésével.

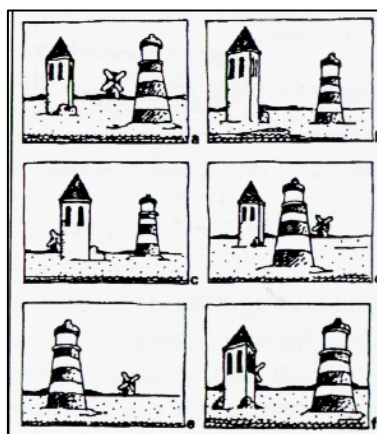
Az eltérés az, hogy míg előbb két vagy több tárgy térbeli viszonyáról van szó, addig most a tárgynak egy megfigyelőhöz viszonyított helyzetéről. A problémát jól illusztrálják azok a feladatok, melyekben különböző nézőpontból készült fényképfelvételek alapján kell egy térbeli helyzetet (pl. tájat) rekonstruálni. Jelentős kutatások foglalkoztak a térbeli helyzet észlelésében tapasztalható fejlődés kérdésével. Két nevezetes kutatási feladatot említünk:

- A Piaget-féle „Három hegy”-probléma: A gyerekeknek három hegyet ábrázoló makettet mutatnak, melyet minden oldalról megnézhetnek. A hegyek különböző magasságúak, az egyik kopár, a másik tetején egy kereszt, a harmadikon pedig egy házikó áll. Miután alaposan megnézik a makettet, leülnek az egyik hegygel szemben úgy, hogy közben a kísérletvezető egy másikkal szemben ül. A gyerekeknek ki kell választani a fényképek közül azt, amelyik a kísérletvezető nézőpontjából készült. (idézi Séra, Kárpáti, Gulyás, 2002, 43. old.)

- De Lange-féle „Világítótorony”-probléma: A gyerekek megkapják egy tengerpart térképét, melyen egy templom, egy világítótorony és egy kereszt látható (1.1. ábra). Meg kell határozniuk, hogy nyugati irányból indulva, a part mentén elhaladva milyen sorrendben készülhetett az eléjük tett hat fénykép (1.2. ábra). A feladat megoldásához több képesség együttes mozgósítására van szükség: Az utazást a térkép alapján el kell képzelni. Megjelenik a nézőpontváltás problémája, hiszen a megoldás során a gyerekek - magukat a térbeli elrendezés részének tekintve - a fényképezés irányához viszonyítva határozzák meg a három objektum helyzetét. A választás megerősítésében szerepet játszik a perspektivikus ábrázolásmód megértése is. (De Lange, 1984).



1.1. ábra



1.2. ábra

1.2. TANULÁSELMÉLETEK

A dolgozat célja a térbeli tájékozódás, szűkebb értelemben véve az irányítás kérdéskörének körüljárása a matematikatanításban. Ehhez tanulmányozzuk azokat a tanuláselméleteket, melyek kijelölik a témakör tananyagá formálását jelentő munka a fő irányvonalát. A legismertebb tanuláselméletek rövid áttekintése után a konstruktív pedagógia jellemzőit ismertetjük, hangsúlyozva a tárgyalásunk szempontjából előremutató vonásokat.

1.2.1. A tanulásemelvények fejlődése

A tanulás fogalmának tudományos fejlődését a filozófia, azon belül az ismeretelmélet (episztemológia), a logika, a pszichológia és a pedagógia területén vizsgálhatjuk.

A tanulósemelvények fejlődése négy fő szakaszra tagolható, a didaktika nagy átalakulásait figyelembe véve (Nahalka, 1998).

A Comenius előtti pedagógia

A tanulás a mások által feldolgozott ismeretek elsajátítása.

Ehhez a felfogáshoz elsősorban olyan didaktika kapcsolódik, amely az ismeretek sokszor szó szerinti megtanulására épül. Deduktív folyamatok jellemzik, a tanuló kiindulópontjai a dogmatikai rendszerek, mint pl. a görög filozófusok művei vagy a Biblia.

A szenzualista pedagógia

Ismeretelméleti alapja az empirizmus (XVII-XVIII. sz.). Az empirizmus lényege, hogy az ismeretszerzést az embert körülvevő valóságból származó információk - elsősorban érzékszervekkel történő - befogadásának tekinti. Az empirizmus logikája induktív, mert a megismerést az egyszerűbbtől a bonyolultabb, a speciálistól az általános, a konkrétól az absztrakt felé haladónak tekinti. Ezeknek megfelelően Comenius (1592-1670) szenzualista pedagógiájának középpontjában a szemléltetés állt, mely arra szolgált, hogy a tanuló érzékszervein keresztül közvetlenül szerezzen ismereteket a valóságos világról, s ne csak a mások által már feldolgozott ismeretekkel találkozzon.

A cselekvés pedagógiája

Ennek a tanulósemelvényfelfogásnak a lényege, hogy a gyermek nem az ismereteket passzívan befogadó, a külvilág hatásait elszennvedő, hanem cselekvő, a külvilág folyamataiba beavatkozó s e beavatkozás eredményeként fejlődő ember. Episztemológiai alapja ugyancsak az empirizmus, logikája induktív, a középpontban a cselekvő, az ismereteket önállóan felfedező gyermek áll. John Dewey (1859-1952), aki a cselekvés pedagógiájának egyik vezéralakja volt, azt vallotta, hogy a cselekvés a tanulás legfőbb eszköze, s így a tanár feladata nem az, hogy tananyagot közvetítsen a gyerekek felé, hanem, hogy közvetítsen a tananyag és a gyerek között. A gyerekeket saját tapasztalataik juttathatják el a strukturált ismeretekig.

Az ismeretek és a képességek kialakulási folyamatában a cselekvést középpontba állító elgondolások pszichológiai alapjait Jean Piaget (1896-1980) dolgozta ki, munkássága meghatározó a XX. századi gyermeklélektanban. Piaget elsősorban a gyermek intellektuális képességeinek fejlődését vizsgálta, megállapítva, hogy ez a fejlődés egymástól jól elkülöníthető, minőségileg különböző szakaszokban zajlik, melyek szigorú sorrendben követik egymást.

Piaget genetikai ismeretelmélete szerint a külvilággal való kapcsolat főbb formáit és az intellektuális fejlődést a szervezet egyensúlyra való törekvése szabja meg. A folyamat célja, hogy az egyén mind tökéletesebben képes legyen alkalmazkodni a környezetéhez (evolúciós szemlélet). Az egyén - a környezetével kapcsolatba kerülve - kialakít egy képzetet a valóságról. Új helyzetben a belső egyensúly a képzet és a valóság között

megbomlik, s az agyban elindulnak azok folyamatok, melyek lehetővé teszik a megbomlott egyensúly magasabb szinten történő helyreállítását.

Ennek két lehetséges módja van:

- Asszimiláció, amely a környezeti hatások beépülését, azok meglévő sémák alapján történő magyarázatát jelenti.
- Akkomodáció, amely során a meglévő kognitív séma már nem használható, ezért módosításra vagy új séma létrehozására van szükség.

A folyamat a gyermek cselekvésén alapul, az értelmi műveletek a valóságos cselekvési műveletek interiorizációi.

A konstruktív pedagógia

A korai kognitív pszichológia az emberi értelem működését információfeldolgozásként értelmezi (kibernetikai párhuzam). Mind ez, mind a cselekvés pedagógiája hatott arra a felfogásra, hogy az általános képességek fejlesztése kiemelt fontosságú. A tanításnak nem elsősorban az ismeretekre, hanem az általánosabb, az ismeretek elsajátítását és kezelését is lehetővé tevő képességekre (kompetenciákra) kell irányulnia.

Ez a felfogás megkülönbözteti

- a deklaratív, a tényszerű ismereteket takaró tudást („Mit?”),
- a procedurális, az ismeretek manipulálását lehetővé tevő tudást („Hogyan?”),
- a szituatív, az emberi tevékenység szituatív jellegzetességeire vonatkozó tudást („Hol?”, „Mikor?”).

Ezek a tudástípusok a tantervekben ismerettként, készségekként, jártasságokként, képességekként és magatartásokként fordulnak elő.

A korábbi ismeretelméletek közös vonása, hogy a tudást igazolhatónak tartják. Az empirizmus az empirikus tapasztalatokkal, a racionalizmus pedig a tiszta ész veleszületett belső törvényeivel.

Az empirikus-deduktív tudományelméleteket az jellemzi, hogy egyszerű tényekre hipotézist épít, majd ezt empirikus úton igazolja vagy elveti.

A konstruktív pedagógia ismeretelméleti alapja a konstruktivizmus, amely a megismerés folyamatát evolúciós metaforákkal értelmezi: A tudás az ember biológiai értelemben vett adaptivitását fokozza, képessé teszi arra, hogy jobban alkalmazkodjon a környezetéhez. Így a tudás nem a valóság valamely fizikai lenyomata, tükörképe, hanem személyes *konstrukció*, mely a megismerő szubjektum terméke.

A hipotézist empirikus módszerrel ellenőrizhető állításnak tekinti, amit dedukcióval nyervehetünk az elméletből. „Nincs elméletmentes empiria, s az empirikus eredmények nem igazolhatják az elméleteket.” (Karl Popper, Lakatos Imre).

1.2.2. A konstruktív tanulásfelfogás alapelvei

- Az emberi elme a valóság modelljeit építi fel magában, és az ezek működtetése során kialakított előrejelzések szerint cselekszik.
- Az emberi elme elsősorban tudásterület-specifikusan szerveződő információfeldolgozó apparátussal működik, tehát nincsenek minden tudásterületen ugyanúgy működő képességeink.

- Az újszülött már bizonyos, a körülötte lévő világ adekvát felfogását lehetővé tevő naiv elméletekkel jön világra, de vannak veleszületett képességei is.
- A tanulás során meglévő kognitív rendszerekbe rendezett ismereteink segítségével értelmezzük az új információt. Alapvető szerepe van tehát az előzetes tudásnak. Belső modelljeink változása a külvilággal való kapcsolat eredményeként személyes konstrukciók felépítésével és alkalmazásával zajlik (kognitív pszichológiai elv).
- A konstruktív tanulásszemléletben helyet kapnak mind az asszociációs pszichológia (szövegtanulás), mind a cselekvés pedagógiájának elemei. (Nahalka, 1998)

A konstruktív pedagógiai szemlélet szerint a tanítás célja nem az egyszerű tudásátadás, hanem optimális feltételek biztosítása ahhoz, hogy a gyerek tudása a személyes konstrukciókon keresztül létrejöhön.

1.2.3. A konstruktív pedagógia didaktikai követelményei

A gyerek személyiségének, ismeretstruktúráinak megismerése

A tanárnak tudatos értékelő tevékenységgel (diagnosztikus vagy formatív) vizsgálnia kell egy-egy témakör tanítása előtt ill. közben, hogy a gyerekek milyen képességek, attitűdök, a téma szempontjából milyen releváns értelmező keretek birtokában vannak. Ehhez tisztában kell lennie azzal, hogy

- milyen képek, felfogások, félreértelmezések létezhetnek a tanítandó témával kapcsolatban,
 - ezek hogyan függenek össze a hétköznapi tapasztalatokkal vagy a felnőttek (a média) által közvetített ismeretekkel,
 - a tudománytörténetben milyen felfogások alakultak ki.
- Tudnia kell azt is, hogy az adott tananyag elsajátításához milyen képességek, gondolkodásmódok, attitűdök szükségesek.

Differenciálás

Mínt hogy a tanulás személyes konstrukciók kiépítésének tekinthető, figyelembe kell venni, hogy a gyerekek szükségképpen más-más szinten állnak, ezért más-más segítséget igényelnek.

A konceptuális váltás feltételének megteremtése

Az induktív logikát követő tanulásemélet (cselekvés pedagógiája) szerint a tanulás a cselekvéses tapasztalatszerzéssel indul, majd általánosítások és absztrakciók segítségével egyre összetettebb tudásrendszerek alakulnak ki.

A konstruktív tanulásfelfogás logikája inkább deduktív, mert a gyerekekben meglévő tudásból, kognitív struktúrákból indul ki.

Ha az új információk a gyerek meglévő struktúráihoz jól köthetők, akkor ezeket deduktív eljárással értelmezzük. Ha az új ismeret szemben áll a gyerek aktuális felfogásával, akkor (részben deduktív módon) a meglévő ismeretekből kiindulva meg kell teremteni az ún. konceptuális váltás feltételeit. Ez azt jelenti, hogy fokozatosan bizalmatlanságot ébresztve a meglévő elképzelésekkel szemben, a gyereket szembesítjük a látásmódja és a valóság közötti ellentmondással (Lakatos, 1998). Olyan helyzetet alakítunk ki, amelyben a gyerek indokoltnak látja az alternatív magyarázatot.

Az ekkor közölt tanári magyarázat (lehet akár frontális is) elősegíti a konceptuális váltás bekövetkezését, azaz egy magasabb szintű kognitív rendszer kiépülését.

A tapasztalatszerzés, a felfedeztetés szerepet kap itt is, azonban annak elméletirányítottan kell lennie, csakúgy, mint a tudományok fejlődésében.

Több módszer együttes alkalmazása

A tanításban a frontális foglalkoztatás mellett célszerű többféle módszert (véleménynyilvánítás, vita, kommunikáció, csoportos tevékenység stb.) használni.

A tanulás életszerűségének biztosítása

A gyerekeknek a tanulás során mozgósítani kell a hétköznapi tapasztalatait, az értelmezésben nem hagyhatja figyelmen kívül meglévő kognitív struktúráit. Így elkerülhető a hétköznapi és iskolai tudás szétválása. Életszerű problémákat kell vizsgálni életszerű szituációkban, mert így a tanult ismeretek alkalmazása nem csak egyszerű gyakorlás, hanem a tanulás meghatározó mozzanata is.

A konstruktív pedagógia szerint a tudományos kutatás és a gyermeki elsajátítás azonos logikát követ. A tanár feladata elsősorban a gyermek belső képeinek megismerése, a konceptuális váltások helyének felismerése és kidolgozása.

Ennek megfelelően a konstruktív tanulásszemlélet empirikus kutatásának fontos kérdései a következők:

- Hogyan jellemezhető a gyerekek, felnőttek kognitív tudásrendszere egy adott tudásterületen, vagyis milyen alternatív elméletekkel, laikus, naiv elképzelésekkel rendelkeznek?

Az eddigi kutatások többnyire igazolják, hogy a gyerekek rendkívül stabil, nehezen átalakítható tudásstruktúrákkal bírnak.

- Milyen szerepe van a tanulásban az előzetes tudásnak?

A kutatások szerint az iskolai eredményesség elsősorban az előzetes tudással áll szoros kapcsolatban, az intelligencia (IQ) csak ezen keresztül kapcsolódik hozzá. Tehát előnyben van az, aki nagy mennyiségű, könnyen előhívható, szervezett tudással rendelkezik, azzal szemben, aki „csupán” jó gondolkodási, problémamegoldó képességekkel bír.

1.3. MATEMATIKA DIDAKTIKAI KONCEPCIÓK

Az 1950-es években világméretű matematikatanítási reformmozgalom indult meg. A tudományos-technikai fejlődés a szakemberektől egyre több matematikai jellegű tudást követelt, ugyanakkor, mint Rényi Alfréd megfogalmazta: „*Míg más tárgyakban az iskolai anyag elvezeti a tanulót a modern tudomány eredményeihez, a hagyományos matematikatanítás megáll körülbelül a XVII. század matematikájánál.*” (Rényi, 1973, 15. old.).

A reformok egyrészt a matematikatanítás tartalmának, másrészt a tanítás módszereinek megújítására irányultak. A korszerűsítési koncepciók matematikai, pszichológiai és pedagógiai elméletekre támaszkodtak.

Ebben a fejezetben a XX. század második felében megjelenő számos matematika didaktikai elképzelés közül a genetikus matematika didaktikát emeljük ki, majd ismertetünk két gyakorlati pedagógiai törekvést: a magyar komplex matematikatanítási kísérletet és a holland realiztikus matematikaoktatást.

1.3.1. A genetikus matematika didaktika, Freudenthal didaktikai fenomenológiája

A genetikus matematika didaktika a fogalmakat keletkezésükben vizsgálja.

A genetikus jelzõt a matematika didaktikában a fentitõl eltérõ értelemben is használják. Az alapvetõ irodalmakban a genetikus módszert az axiomatikus módszer ellentétének tekintik. A genetikus szó szerepel a már említett Piaget-féle genetikus ismeretelméletben, de a matematikatörténettel összefüggésben is használható.

A matematikatörténet egyrészt elméleti eszköz a matematikai gondolkodás fejlődési aspektusainak megértéséhez, másrészt segít a gyerekek matematikatanulásának jellemzésében, gondolkodásukat kapcsolatba hozva a fogalmak történeti fejlődésével.

A matematikatörténet és a matematikai gondolkodás fejlődési aspektusai közötti kapcsolat a konstruktivista felfogásból is következik, mely a tanulást a tudás újrakonstruálásának tekinti. Sfard (1995) szerint (aki Piaget episztemológiáját követi) a tudásformálás különbözõ állomásain az egyén olyan nehézségeket tapasztal, melyek közel állnak az egykori matematikus-generációkkal szembeni kihívásokhoz (idézi Furinghetti, Radford, 2002, 646. old.).

Burn (1999) a matematikatörténetet az intuíciónál a logikai dedukciónál tartó tanítási lépések megkonstruálásában kulcsfontosságúnak tartja. A matematikatörténet szerepe a tanításban tehát az, hogy az intuíciónál fejleszthetõ anyagot szolgáltat (idézi Furinghetti, Radford, 2002, 640. old.).

Freudenthal (1973) a genetikus módszert a következõképpen értelmezi: A matematikai ötletek genetikus módon való tanítása nem azt jelenti, hogy azokat olyan sorrendben kell bemutatni, ahogyan keletkeztek, hanem a zsákutcák és a terelõ utak kizárásával. „nem a felfedezõ lábnyomában kell járnunk, egy javított és irányított történeti kurzust kell követnünk.” Freudenthal a matematikatörténet felhasználásának ezt a módját irányított újralfedezésnek nevezte.

Tanulmányozva a matematikai tudományos kutatások természetét, megfigyelhetõ, hogy egy eredmény felfedezése és publikálása között a szerzõ nézõpontja megváltozik. Freudenthal ezt a jelenséget az inverzió és a konverzió fogalmával írja le. „Egyetlen matematikai ötletet sem abban a formában publikálnak, ahogy felfedezték.” (Freudenthal, 1983, ix old.) Egy probléma megoldása után a megoldási folyamatot megfordítják (inverzió), ill. a feladatokból definíciókat alkotnak, vagy a definíciókat feladatokká alakítják át. (konverzió). Így ami bemutatásra kerül, az nem a felfedezõ találékonyságát és a felfedezés folyamatát, hanem a kapott eredmény strukturált, logikai tisztaságát tükrözi. Ha ez a folyamat hatással van a tananyagra, didaktikai inverzióról beszélünk. A tanulóktól nem várható el, hogy az emberiség tanulási folyamatába csak azon a ponton kapcsolódjanak be, ahol az elõdei abbahagyták a munkát, de az sem, hogy lépésrõl lépésre végighaladjanak ezen a fejlődési folyamaton, annak minden buktatóján. Szükségük van tehát bizonyos összegzésre, jó értelemben vett didaktikai inverzióra.

Freudenthal (1983) didaktikai munkáit a fenomenológiai szemléletmód jellemzi. Ez kapcsolódik Kant elképzeléseivel, aki a jelenségeknek a tapasztalat számára elérhetetlen, gondolatilag megismerhetetlen, az érzéki létezésünk tõl és az értelmi gondolkodás formáitól

függetlenül létező lényegét numenonnak (gondolati objektumnak) nevezte, míg magát a jelenséget fenomenonnak.

Egy matematikai fogalom, struktúra, ötlet fenomenológiáján Freudenthal azt érti, hogy leírjuk a numenont azon fenomenonokhoz való viszonyával együtt, melyek eszközei a fogalom szervezésének. A matematikai fogalmak, struktúrák, ötletek a fizikai, szociális, mentális világ jelenségeinek leírására szolgálnak. A fenomenológia esetükben azt jelenti, hogy meghatározzuk ezek viszonyát azokhoz a jelenségekhez, amelyek létrehozták majd tovább formálták őket.

Didaktikai fenomenológiáról akkor beszélünk, ha a jelenségek leírása a tanulók tanulási folyamatára vonatkozik, azaz módot ad a tanárnak arra, hogy megtalálja azt a pontot, amelyen a tanulónak be kell lépnie az emberiség tanulási folyamatába.

Ha a jelenségek leírását tanulási folyamat helyett a kognitív fejlődés folyamatára vagy a matematikatörténetre vonatkoztatjuk, akkor a genetikus ill. a történeti fenomenológiához jutunk.

Freudenthal didaktikai fenomenológiájának lényege, hogy meghatározza a mentális objektumok és tevékenységek didaktikai területét és a tudatos fogalomalkotás kezdetét (amennyiben ez didaktikailag lehetséges).

A strukturális tanulás elméleti alapot és erős formalizációt nyújt. Absztrakciót tanít a konkretizálás segítségével. Ez a konkretizálás azonban rendszerint túl vázlatosan tükrözi a fogalom lényegét. A didaktikai fenomenológiai megközelítés ezzel ellentétes. Azokból a jelenségekből indulunk ki, melyek szervezői, életre hívói a fogalomnak. A tanuló, miután különböző tevékenységeket végez a szerveződés ezen eszközeivel, megalkotja a megfelelő mentális objektumot, majd ennek matematizálásán keresztül jut el a fogalomhoz. Ha egy adott életkorban nem állnak rendelkezésünkre megfelelő jelenségek, akkor a hozzá kapcsolódó fogalom kialakításáról le kell mondani.

A mentális objektum kialakulása eszerint megelőzi a fogalmi tudást, és akkor is hatékony, ha nem követi fogalmi tudás. A cél tehát a mentális objektumok megalkotása s ehhez tananyag keresése.

1.3.2. A komplex matematikatanítási kísérlet alapelvei

A Varga Tamás nevével fémjelzett kísérletben a komplexitás egyrészt a matematika mint egységes egész szerepeltetését, másrészt a módszertan és tananyag együttes megújítását, harmadrészt pedig a matematika didaktika, pszichológia, pedagógia, agy kutatás eredményeinek alkalmazását jelentette (Szendrei, 2005, 424. old.).

A Varga Tamás-féle komplex módszer nem egyetlen elméletre épül. Alapelvei több korabeli tanuláselméleti, didaktikai elképzelés (Piaget, Pólya György, Dienes Zoltán, Sztoljár, stb.) ötvözése, a magyar viszonyokhoz igazítása révén formálódtak.

A tanuláselméletek közül elsődlegesen a cselekvés pedagógiájára, támaszkodott. „A komplex matematikatanítási kísérlet egyik fontos tanuláselméleti vívmánya az volt, hogy megvalósította a személyes tapasztalatszerzésből induló ismeretszerzést.” (C. Neményi, 2002, 1. old.)

A matematika különböző területeinek egysége

A matematika univerzális fogalmai (halmaz, reláció, függvény, stb.) segítségével biztosítható az egységes matematikai szemlélet.

A fogalmak fokozatos érlelése

Az alsóbb évfolyamokon elő kell készíteni olyan ismereteket is, amelyek érett formában csak évek múlva alakulnak ki. A tanítás tematikáját és módszereit éppen ezért az óvodától az érettségig egységesen kell megtervezni.

Tapasztalatszerzésből kiinduló ismeretszerzés

A matematika megértéséhez a tanulók csak saját tapasztalataik alapján juthatnak el. Ezeknek a tapasztalatoknak a megszerzéséhez különböző matematikai munkaeszközökre van szükség (színesrudak, logikai készlet, stb.).

Az absztrakciós képesség kialakítása

„Absztrahálni csak konkrétumból lehet, s ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie. ... Kísérletünk alapelve: dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekhez.” (Varga Tamás, 1966, 86-87. old.)

Az életkori sajátosságok figyelembevétele

A tanulók életkori sajátosságainak figyelembevétele a kisiskolások esetén a játék és a manipulációk matematikaoktatásba történő beépülését jelenti.

A tanulók egyéni különbségeinek figyelembevétele, differenciálás

A tanulókat önálló munkavégzésre kell nevelni, ez azonban csak úgy lehetséges, ha figyelembe vesszük az egyéni különbségeket. A differenciálás megnyilvánulhat a tananyagban, a feladatanyagban, a munkaeszközök használatában, valamint az osztálytermi munka megszervezésében.

A tanár koordináló, irányító szerepe

A tanár feladata, hogy tanulóit önálló véleményalkotásra, vitára bátorítsa. A tanítási órákon betöltött szerepe megváltozik: a munka irányítása, a viták megszervezése veszi át az egyszerű ismeretközlés helyét.

1.3.3. A realiztikus matematikaoktatási koncepció alapelvei

A cselekvés pedagógiájának és a konstruktivista pedagógiának az elveire épült az ún. realiztikus matematikaoktatási koncepció (RME: Realistic Mathematics Education), melyet Hans Freudenthal irányításával Hollandiában (Utrechti Egyetem) dolgoztak ki az 1960-80-as években.

A realiztikus matematikaoktatás olyan oktatási koncepció, melyre az ún. történeti-genetikus és a pszichológiai-genetikus elmélet integrálása jellemző. Az előbbi lényege, hogy a tudományterület tartalmát egy történetileg fejlődő struktúrának tekinti, melyen a tanulót is végig kell vezetni, az utóbbi szerint pedig a hangsúlyt a tanuló megismerőtevékenységére kell helyezni.

Az RME azt vallja, szemben a tudományorientált irányzat híveivel (Pl. a Bourbaki-féle *Új Matematika* mozgalom), hogy az iskolai matematikatanítás feladata nem a

szisztematizált tudomány oktatása, hanem a matematikának a társadalomban és az egyén életében játszott szerepének megértése. Ehhez az alapvető matematikai ismereteket a tanulók számára is jelentéssel bíró jelenségekből kiindulva kell közvetítenie. Ezért központi szerepet szán az irányított újrafelfedezésnek.

Matematika kontextusok keresztül

A tanulók matematikai aktivitása konkrét kontextusokban megy végbe. Egy-egy kontextuson belül olyan intuitív fogalmakat gyűjtünk össze, melyek tükrözik a kívánt matematikai struktúrák lényeges tulajdonságait. A valódi kontextusok nemcsak kiindulópontjai lesznek a megtanulandó matematikai elméletnek, hanem alkalmazási területei is. Így a tanulás nem elszigetelten, hanem értelmes összefüggéseken keresztül történik.

Matematizálás

A matematizálás olyan folyamat, melynek során egy elképzelhető, hétköznapi jelenségből kiindulva a tanuló a tudását egyre elegánsabb, matematikailag pontosabb formára fejleszti. Két típusa van: a horizontális és a vertikális matematizáció. A horizontális komponens a valóságos világ és a matematikai szimbólumok közötti összefüggések kiépítését jelenti, a vertikális pedig az informális, kontextusfüggő megoldási módtól az egyre magasabb szintű matematikai formalizmusig való eljutást.

Az előbbi során a tanulók olyan matematikai eszközöket keresnek, melyekkel képesek leírni és megoldani a hétköznapi életből származó problémaszituációkat. Érezniük kell, hogy megszerzett tudásuk az oktatásba bevonható, felhasználható, továbbfejleszthető.

„A matematikaoktatás célja az irányított újrafelfedezés támogatása, ennek a folyamatnak a magját a tanulók számára valóságos problémaszituációk matematizálása adja.” (Gravemeijer, Cobb, Bowers, Whitenack, 2000., idézi Perry és Dockett, 2002, 89. old.).

A modellek szerepe

A matematikai ismeretszerzés folyamata a hétköznapi életből eredő, konkrét problémából indul ki, és a formális matematikai tudás létrejöttével zárul. A problémamegoldás során a tanulók különböző szintű modelleket alkotnak. A konkrét szituációhoz köthető modelltől („*model of*”, szituatív modell) eljutnak a matematikai modellig („*model for*”, formális modell). A modelleknek egyszerre kell konkrétnek és absztraktnak lenniük. Konkrétnek abban az értelemben, hogy a gyerek számára könnyen elképzelhető kontextusokban kell gyökerezniük, és absztraktnak, flexibilisnek, hogy könnyen átvihetők legyenek a konkrét szintről az elvontra. Egyfelől ösztönözniük kell az előrehaladásra a tanulásban, ugyanakkor lehetővé kell tenniük, hogy visszatérhessünk a megértés gyökereihez. A modell lehet egy példaként szolgáló szituáció, egy illusztráció, egy írásmód stb.

Saját konstrukciók szerepe

A tanulóknak lehetőséget kell adni, hogy a valóságból vett problémák megoldását maguk fejlesszék ki, s alkalmazhassák megoldási stratégiájukat.

Szociális kontextus

A matematizáció mindig együtt jár a reflexióval. A tanulók reflektálnak saját matematizálási folyamatukra, társaikkal megvitatják, értékelik és értelmezik a folyamat eredményét. Saját konstrukcióikat összehasonlítják társaikéval, szembesülnek megoldásuk előnyeivel, hibáival, közben fejlődnek a társas érintkezéshez szükséges képességek is (vita, érvelés stb.), ezáltal lerövidülhet a tanulási folyamat.

Globális kapcsolatok felismerése, hosszantartó tanulási folyamat

Az új mentális objektumokat, ismereteket be kell illeszteni a meglévő ismeretrendszerbe. A különböző területek közötti kapcsolatok felismerése és továbbfejlesztése alapvető feladat.

1.3.4. Az aktív, felfedezettő tanulás

Az Eric Wittmann nevével fémjelzett aktív-felfedezettő tanulás (Aktiv Entdeckendes Lernen) koncepciója (Németország) hasonlóan a realiztikus koncepcióhoz, szintén a történeti-genetikus és a pszichológiai–genetikus elméletek integrálására épül. Különös hangsúlyt helyez a hosszantartó tanulási folyamatra. Ehhez köthető az évfolyamokon átívelő spirális elve valamint a produktív gyakorlás (*produktives Üben*) gondolata.

Az elképzelés kidolgozói meghatározzák egy-egy részterület alap gondolatait (*fundamentale Ideen*), és a különböző évfolyamok egymásra épülő feladatsorainak összeállításánál figyelembe veszik ezeket. A gyakorlás a konstruktív tanulási folyamat központi és integráló része. A produktív gyakorlás koncepciója támogatja egyrészt a szemléltető anyaggal való cselekvést, másrészt a strukturált, egymásra épülő gyakorlási formákat. A gyakorlatok tehát sohasem öncélúak, mindig tartalmazzanak valami újat, a rutinfeladatok pedig mindig valamilyen kontextusba ágyazva jelennek meg.

Ebben a fejezetben olyan matematika didaktikai elképzeléseket ismertettünk, amelyek a konstruktivista pedagógia elméletére, valamint a cselekvés pedagógiájának néhány fontos elemére épülnek. Elsőként a fogalmakat keletkezésükben vizsgáló genetikus matematika didaktika elméletét és Freudenthal didaktikai fenomenológiájának lényegét mutattuk be.

Saját témakörünk, a térbeli tájékozódás tanítási kérdéseinek vizsgálatában egyaránt támaszkodunk a magyar komplex matematikatanítási kísérlet, a holland realiztikus matematikatanítás, valamint a német aktív-felfedezettő tanulási koncepció alapelveire.

Ezek a didaktikai elképzelések több ponton kapcsolódnak egymáshoz és hasonló kritériumokra utalnak. A matematika különböző területeinek egységes szemléltető tanítása, a tanulók önállósága, a tapasztalatszerzés fontossága, a szociális kontextus szerepe mindhárom elméletben jelen van.

Munkánkban a három koncepció alapelvei közül az alábbiakra helyezzük a hangsúlyt:

- a tapasztalatszerzésből kiinduló ismeretszerzés és az életkori sajátosságok figyelembevétele (Varga Tamás-féle kísérlet)
- a tanulók matematikai aktivitásának kontextusfüggősége (realisztikus matematikatanítás)
- az évfolyamokon átívelő spirális és a produktív gyakorlás (Witmann-féle koncepció)

1.4. A KUTATÁSON ALAPULÓ TANTERVFEJLESZTÉS

Kutatásunk egyik célja az, hogy a matematikatanítás egy konkrét területén, a térbeli tájékozódásra vonatkozóan kidolgozzunk egy lehetséges tanítási anyagot és tanítási módot. Ebben a munkában a kutatáson alapuló tantervfejlesztés (*research-based curriculum development*) elméletére támaszkodunk.

Tanterven ill. tantervfejlesztésen bővebb fogalmat értünk a magyar oktatásban használnál. Nem csak a tananyag pontos meghatározásáról van szó, hanem egy tanítási folyamat megtervezéséről, beleértve a tananyag mellett a tanulói tevékenységek, a felhasználható eszközök meghatározását is. Erre angolszász nyelvterületen a *curriculum*, míg Magyarországon inkább a programcsomag elnevezést használják.

A matematika didaktikai kutatások és az iskolai tantervfejlesztés között szoros és kétirányú kapcsolat hozható létre. Nemcsak a kutatás eredményeit tudjuk figyelembe venni a tantervfejlesztésnél, hanem az empirikus megfigyelések is visszahatnak magára a kutatásra.

Az összehasonlító kutatási és tantervfejlesztési kísérletek erre a kétirányú kapcsolatra épülnek. Ilyen volt a magyar komplex matematikatanítási kísérlet, s ilyen, a holland realiztikus matematikaoktatási elmélethez (RME) köthető jelenleg is működő innovatív projekt.

A fejlesztő kutatás (*developmental research*) a tantervfejlesztés és a didaktikai kutatás kombinálását jelenti oly módon, hogy az oktatási tevékenységek fejlesztését eszközként használja oktatási elmélet kidolgozására és tesztelésére. Ez az alapkutatás olyan formája, mely megalapozza a professzionális tantervfejlesztők munkáját. A tantervfejlesztés tehát egy olyan folyamat, melyet az elmélet irányít, s mely maga is elméletet eredményez (Gravemeijer, 1994, idézi Clements, 2002, 605. old.).

A fejlesztő kutatás úgynevezett hipotetikus tanulási trajektória megfogalmazásával kezdődik. A hipotetikus tanulási trajektória (feltételezett tanulási útvonal, folyamat) egyrészt az adott matematikai tartalom lehetséges tanulási módjait jelenti, másrészt speciális eszköz a leírt módon történő tanulás megszervezésében és támogatásában.

A hipotetikus tanulási trajektória meghatározásánál a következő tényezőkre kell tekintettel lenni:

- eszközök, források, beleértve az oktatási tevékenységeket, jelölési sémákat, fizikai és számítógépes eszközöket,
- az osztályra általánosságban, ill. a matematika órákon jellemző szociális összetétel
- a tanár szerepe a matematikai érvelés fejlesztésében.

A fejlesztés kiindulási terve a tanulási trajektóriák mellett a lehetséges oktatási tevékenységeket és a tanulók feltételezhető mentális tevékenységeit is tartalmazza. A kiindulási tervet gyakran nem dolgozzák ki részletesen, mert a tevékenységeket a terület tesztelése során úgyis alaposan felülvizsgálják.

Második lépésben ezt a kiindulási tervet részletezik, finomítják, és pontosítják azokat az oktatási tevékenységeket, melyeket majd a kísérletezés ciklikus folyamataiban próbálnak ki.

A fejlesztő kutatás harmadik és egyben utolsó lépésében az így nyert tudást egy optimális oktatási tevékenység megalkotására használják.

A cél az, hogy kifejlesszenek és leírjanak egy helyi oktatási tervet (ez a tanulási trajektóriák sokkal általánosabb leírása, mint ami a konkrét osztályokban megjelenik),

amely indokolja ezt az újonnan belépő oktatási módot. Az ideális egy olyan helyi oktatási terv elkészítése, amely keretet biztosít a tanárok számára ahhoz, hogy a hipotetikus tanulási trajektóriákat saját osztálytermi szituációiknak megfeleltessék. (Clements, 2002, 605. old.)

Cobb és kollégái az Egyesült Államokban hasonló filozófiai és tantervfejlesztési elképzelésekből indultak ki (Clements, 2002, 606. old.). Tanulási trajektóriákat készítettek, és rendszeresen továbbfejlesztették ezeket az osztálytermi tesztek eredményeinek figyelembevételével. A cél nem az eredeti trajektória helyességének bizonyítása vagy az eredeti oktatási terv hatékonyságának alátámasztása volt, hanem mindkettőnek a jobb tétele. A tanulók gondolkodását és az osztálytermi környezetet rendszeresen elemezve lehetővé válik, hogy az eredeti elképzeléseket a felmerülő igényeknek megfelelően módosítsák.

Cobb szerint a tervezés, oktatás, elemzés napi ciklikus modellje összhangban van a tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztésében jártas tanárok gyakorlati tapasztalataival. A kísérlet ideje alatt a cél a résztvevő tanulók fejlesztése, a visszatekintő elemzés ugyanakkor hozzájárul az oktatási elmélet fejlődéséhez.

A tantervfejlesztés során korábban - egy standard pszichológiai megközelítést követve - a tanulók egyéni gondolkodási folyamataira fókuszáltak (klinikai interjúk). Napjainkra előtérbe került az osztálytermi munka megfigyelése. A tanuló a tanulási folyamatban az osztályközösség tagjaként vesz részt, ugyanakkor az osztályközösség kollektív tanulási folyamata hatással van egyéni fejlődésére.

A bemutatott tantervfejlesztési elgondolások az említett két országon (Hollandia, USA) kívül nem ismeretlenek Magyarországon sem. A Varga Tamás vezetésével folytatott komplex matematikatanítási kísérlet folyamata hasonló elveket követett.

1.4.1. A kutatáson alapuló tantervfejlesztés általános elvei

Az átfogó, kutatáson alapuló tantervfejlesztés általános elveit Clements (2002), saját kutatócsoportjának fejlesztőmunkájára támaszkodva határozta meg.

A kutatás és a tantervfejlesztés közötti kapcsolat létrehozása és fenntartása

A kutatás és a tantervfejlesztés közötti kapcsolat létrehozása és fenntartása integrált és interaktív folyamat. A tantervfejlesztés, az osztálytanítás és a matematika didaktikai kutatások szintézise egyaránt hozzájárul a matematikai gondolkodás, tanulás, tanítás jobb megértéséhez, és a matematika tanterv haladó megváltoztatásához. A tervezett tevékenységek és a gyerekek matematikai gondolkodása között szoros kapcsolatnak kell lennie. A tantervfejlesztő projektek ugyanakkor forrásai és tesztelési lehetőségei a kutatási ötleteknek.

Tanulási trajektóriák alkalmazása

A trajektóriák egy speciális matematikai területen leírják a tanulók gondolkodásának és tanulásának oktatási tevékenységeken keresztül vezető feltételezett útját. A tanárok feladata nem csak az, hogy a tanulókat megismertessék a tananyaggal, hanem az is, hogy segítsék őket abban, hogy végighaladjanak a megfelelően kidolgozott tanulási trajektóriákon.

Az RME koncepciója szerint a tanulási trajektóriák gyakran alapulnak bizonyos szituatív és matematikai modelleken (1.3.3. fejezet, 18. old.).

A tantervfejlesztési folyamat fázisainak ciklikus ismétlődése

A tantervfejlesztési folyamatnak jól meghatározott ciklikusan ismétlődő fázisai vannak. Készül egy előzetes terv, ezt kidolgozzák, majd kipróbálják. Az eredményeket felülvizsgálják, a korábbi elképzeléseket finomítják, szükség esetén módosítják. Ezután újabb kipróbálás következik, stb. A ciklikus folyamat végeredménye egyszerre lesz hatékony tananyag és elméleti, kísérleti kutatási beszámoló.

A pozitív tanári hozzáállás fontossága

A tanterv nem állhat távol a tanároktól. A tanárok elméleti felkészültsége, didaktikai elképzelése, gyakorlati tapasztalata befolyásolja oktatási tevékenységüket s így a tanterv értelmezését is. A tantervfejlesztőknek segíteni kell abban, hogy a tanárok az új tanterv szemléletét megértsék és saját pedagógiai hitvallásukkal összhangba hozzák.

A tantervfejlesztési folyamat fázisainak dokumentálása

A fejlesztési folyamat egyes fázisainak végén számtalan döntési lehetőség közül kell választani a folytatáshoz. A döntések utólagos értékeléséhez, a tevékenység és a tanulás eredménye közötti kapcsolat folyamatos fenntartásához, a fejlesztés eredményeinek általánosításához a kutatási folyamat részletes leírása és dokumentálása elengedhetetlen.

1.4.2. A kutatáson alapuló tantervfejlesztés lehetséges fázisai

1. fázis: A kezdeti célok kitűzése

Kiválasztjuk a matematikai tartalmat, amely hozzájárul egyrészt a tanuló matematikai fejlődéséhez, másrészt, a tanuló ezen területen kifejtett matematikai tevékenységének tanulmányozása révén, az elmélet és a kutatás fejlődéséhez.

Ennek a fázisnak az eredménye a matematika tanítás egy problematikus aspektusának a részletes leírása.

2. fázis: A tanulói tudás egy explicit modelljének felépítése, beleértve a hipotetikus tanulási trajektóriákat

Ha a tanulás kognitív modelljének leírása megkívánja az adott területen szükséges tudás megfigyelését, klinikai interjúkat készítünk. A megfigyelés kiterjed az alkalmazott koncepciókra, az intuitív ötletekre, a problémamegoldás informális és formális stratégiáira is. Statikus modelleket fejlesztünk, tesztelünk, bővítünk, majd beépítjük ezeket a feltételezett tanulási trajektóriákba. Megfigyeléseink alapján egymást követő fejlődési lépéseket határozzunk meg, melyek ugyancsak az elsődleges trajektória részei lesznek.

A 2. fázis eredménye tehát a kijelölt matematikai terület tanulásának egy explicit kognitív modellje. Ideális esetben a modellek meghatározzák a tudásstruktúrákat, ezek fejlődési mechanizmusait és a tanulási trajektóriákat.

3. fázis: Kiindulási terv készítése a szükséges tevékenységekhez

A fenti modell alapján megtervezzük azokat a tevékenységsorozatokat, amelyek a választott matematikai tartalom elsajátítását segítik, azaz végigvezetik a tanulókat a feltételezett tanulási trajektórián. Tevékenységen itt feladatot, gyakorlatot értünk. Egy-egy feladat két komponensből áll: valamilyen matematikai vagy a hétköznapi életből vett objektumból, és az objektumon végezhető – konkrét vagy absztrakt – műveletből. A műveleteknek tükrözniük kell a tanulóknak a modell alapján feltételezett matematikai tevékenységét.

A tevékenységek (feladatsorok) megtervezésében egyaránt támaszkodunk a szakirodalomra, a meglévő tankönyvekre, feladatgyűjteményekre és a saját tanítási tapasztalatokra.

A kiindulási tervhez hozzátartozik a megtervezett tevékenységek értékelési módjának, valamint tanításuk különböző stratégiáinak a leírása.

4. fázis: A komponensek vizsgálata

Ez a fázis összefonódik az előzővel. Kiszámú tanulót megfigyelve klinikai interjúkban teszteljük a tevékenységsorozat komponenseit. Azt vizsgáljuk, hogy hogyan értelmezik és használják a gyerekek az egyes feladatokban megjelenő objektumokat és a rájuk vonatkozó műveleteket.

5. fázis: A prototípusok és a tanterv meghatározása

A fő cél annak tesztelése, hogy a tanulóknak az objektumokon végzett tevékenysége egyezik-e matematikai tevékenységük mentális modelljével. A tevékenységek (feladatmegoldások) során tipikus megoldási módokat, prototípusokat különítünk el.

A feltételezett tanulási trajektóriákat ugyancsak kipróbáljuk, és szükség esetén bővítjük.

Ennek a tesztelési periódusnak az a célja, hogy megtaláljuk a lyukakat a kognitív modell, a trajektóriák és a tevékenységek rendszerében, s végül elkészüljön egy finomított modell.

6. fázis: Osztálytermi kipróbálás

A tanterv anyagának kidolgozásakor figyelembe kell venni a tanárok szempontjait is. Segíteni kell abban, hogy értelmezni tudják a tervezett matematikai tartalmakra és tevékenységekre vonatkozó tanulói gondolkodást, és útmutatást kell adni a tanterv által használt külső reprezentációkra.

A tanítási kísérleteket továbbra is néhány tanulóra vonatkoztatjuk, de most már osztálytermi szituációkban. A cél az, hogy finomítsuk azokat a tanítási tevékenységeket, melyeket egyénenként kísérleteztünk ki. Ahhoz, hogy a tanulók teljesítményét gondolkodásmódjuk jellegzetességei alapján ismételten vizsgálhassuk, videofelvételekre és széleskörű feljegyzésekre van szükség. A fejlesztőknek elemezniük kell azt, hogy a felhasznált eszközök és a tapasztalt tevékenységek csak az informális matematikai tevékenység modelljei vagy már a formálisabb matematikai érvelés modelljeivé fejlődtek. (a modellek szerepe, 18. old.).

A tanterv használhatósága és hatékonysága szempontjából fontos az egész osztály megfigyelése. Az osztálytermi szituációk etnográfiai vonatkozásai is lényegesek, hiszen a tanárok és a tanulók új osztálytermi kultúrát és interakciós viselkedésformát konstruálnak.

Ebben a fázisban az osztályt vagy a kutatóteam egyik tagja vagy pedig egy olyan tanár tanítja, aki egyetért és érdekelt a fejlesztésben.

7. Kipróbálás párhuzamos osztályokban

Ebben a fázisban fokozatosan kiterjesztjük kutatásaink méretét és hatósugarát. Az egyes tanulók elemzéséből kiindulva (1-10 tanuló), különböző típusú tanítások és azok tanulásra gyakorolt hatásának tanulmányozásán keresztül (10-100 tanuló), a fejlesztésben részt nem vevő tanárokkal végzett vizsgálatokig (100-1000 tanuló) jutunk el. A tanterv használhatóságát és hatékonyságát különböző iskolákban is megfigyeljük. Ekkor a tanulók munkája mellett az osztályok egészét és a tanárok tevékenységét is elemezzük.

Az új tanterv fejlesztésének fontos szempontja, hogy a tanárok támogassák és egyetértsenek vele.

Meg kell vizsgálni, hogy a tervezett segédanyagok elég flexibilisek-e, egyaránt használhatók-e eltérő iskolai szituációkban (falusi, kisvárosi, külvárosi stb.) különböző oktatási munkaformák mellett (demonstráció az osztály előtt, osztálybeszélgetés, kiscsoportos munka stb.).

A résztvevő tanárokat a tanterv értékelésére, a régi és az új tanterv összehasonlítására kérjük. Ez több, mint a hagyományos összegzés. Arról is felvilágosítást ad, hogy az adott matematikai területen szereztek-e ismereteket a tanulók gondolkodásáról, és elsajátítottak-e új, az elmélet szempontjából lényeges tanítási módszereket.

Az első 7 fázis átfogó képet nyújt a fejlesztő kutatás folyamatairól. Nem szükséges mindegyik fázist mindegyik tantervfejlesztő projektnek alkalmaznia, de érdemes indokolni és dokumentálni bármelyik kihagyását és a megmaradó fázisok koherenciáját.

8. fázis: Visszatekintés

Az ismételt visszatekintésre szükség van mind a fázisokon belül, mind azok között. A tanterv és a kutatás szempontjából egyaránt lényegesek a tervezésből, az elemzésből és az értékelésből álló ciklusok. Ezek vonatkozhatnak konkrét tevékenységekre, egy teljes tanulási trajektóriára valamint az egész projektre.

9. fázis: Publikálás

A tantervfejlesztő munka a folyamatát és eredményeit egyaránt publikáljuk.

A továbbiakban megkíséreljük a fent vázolt tantervfejlesztési fázisok követését. Tekintettel a kutatás körülményeire és lehetőségeire, a fő hangsúlyt egy hipotetikus tanulási trajektória megalkotására valamint az egyéni tesztekre s az osztálytermi kipróbálásra helyezzük. Az elsődleges visszatekintést és felülvizsgálatot követő további ciklusok és a tanterv szélesebb körű kipróbálása újabb kutatások témája lehet.

2. A TÉRBELI TÁJÉKOZÓDÁS TÉMAKÖRE A JELENLEGI TANTERVEKBEN ÉS TANKÖNYVEKBEN

Magyarországon a tantervi szabályozás háromszintű. Az oktatás tartalmára vonatkozó első dokumentum a Nemzeti Alaptanterv (NAT), melynek jelenlegi változata 2003-ban lépett hatályba.

2.1. A NEMZETI ALAPTANTERV VIZSGÁLATA

A NAT szerkezete eltér a korábbi alaptantervektől. Nem az egyes évfolyamokon tanítandó ismereteket határozza meg, hanem az egyes műveltségterületekhez köthető fejlesztési feladatokat sorolja fel. Így a NAT közvetlenül, a fejlesztési feladatokon keresztül, ad meg ismeret-, képesség- és készség jellegű követelményeket.

A *Matematika* műveltségterület fejlesztési feladatai a következők:

1. Térben és időben való tájékozódás
 - 1.1. Tájékozódás térben
 - 1.2. Tájékozódás időben
 - 1.3. Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban
2. Megismerés
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés- és megoldás
5. Alkotás és kreativitás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek, és együttéléssel kapcsolatos értékek fejlesztése
7. A matematika épülésének elveiben való tájékozottság

Az, hogy a *Térben és időben való tájékozódás* a hét fejlesztési feladat egyike, az általunk választott problémakör aktualitását támasztja alá.

Az alábbiakban a NAT előírásait tekintjük át részletesen:

- Tájékozódás nagytesti mozgással, mozgássor megisméltése, mozgási memória fejlesztése. **(1-6. osztály)**
- Mozgási memória fejlesztése; mozgássor megisméltése visszafelé (5-6. osztály)
- Tájékozódás a külső világ tárgyai szerint; tudatosított tájékozódási pontok szerint; a tájékozódást segítő viszonzyszavak megismerése (*pl. mellett, alatt, fölött, között, előtt, mögött*). **(1-6. osztály)**
- Tájékozódás a síkban (*pl. tájékozódás a füzetben, könyvben; tájékozódás a síkban ábrázolt térben; tájékozódás a szavakban megfogalmazott információk szerint*). **(1-6. osztály)**
- Tájékozódás a tanuló saját mozgó, forgó testének aktuális helyzetéhez képest (*pl. a bal, jobb szavak megjegyzése a gyerek testi dominanciája szerint, illetve dominancia hiányában saját testi jelhez kötöten*). **(1-6. osztály)**
- Tájékozódás másik ember nézőpontja szerint. (5-8. osztály)

- Tájékozódás különféle koordináták szerint; hosszúság, távolság, irány, szög. Számegyenes, derékszögű koordináta-rendszer. A dimenzió megértése. Térbeliség ábrázolása 2 dimenzióban (*pl. Kötés alaprajz*) (5-6. osztály)
- Koordinátamódszer; vektorok síkban és térben. Térbeliség ábrázolása 2 dimenzióban (*takarás, célszerű síkmetszetek*) (7-12. osztály)
- Tájékozódás a valós viszonyokról térkép és egyéb vázlatok alapján (*pl. térképolvasás, térképek készítése; térbeli mérési adatok felhasználása számításokban*). (5-8. osztály)
- Térképkészítési elvek megértése; tájékozódást segítő eszközök (*pl. iránytű*) használata; arányérzék fejlesztése; a valóságos viszonyok becslése térkép alapján. (5-12. osztály)

Az egyes részfeladatok a kialakítandó tananyag felépítésének sorrendjét, valamint a hatékonynak tartott fejlesztési időszakot is megadják. A feladatok közül kiemeltük az alsó tagozatot érintőket, közöttük azonban egyetlen olyat sem találtunk, melynek fejlesztése az általános iskola 4. osztályában befejeződik. Érdemes már most megjegyezni azt is, hogy a dolgozatban később nagy hangsúlyt kapó problémakör, a *tájékozódás másik ember nézőpontja szerint*, csupán 5. osztályban jelenik meg.

2.2. A KERETTANTERVEK VIZSGÁLATA

A tantervi szabályozás második szintjén a NAT-ra épülő kerettantervek, a harmadik szinten pedig az iskolák helyi tantervei találhatóak.

Ahhoz, hogy képet kapjunk a térbeli tájékozódás tanításának gyakorlatáról, elsősorban a kerettantervek, valamint a leggyakoribb tankönyvcsaládok elemzését tartjuk szükségesnek. Gyakorló tanítókkal beszélgetve megerősödött az a hipotézisünk, hogy a tanítás megtervezésénél többnyire a tankönyvre támaszkodnak, a tanmenetük pedig az adott tankönyvcsaláddal együtt megvásárolható tanmenet-minta alapján készül.

A NAT-ra épülő akkreditált kerettantervek közül ötöt választottunk ki és vizsgáltunk meg.

Ezek:

- Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettanterv, Magyar Közlöny, 2004/68/II. szám
- Mozaik Kerettantervrendszer, Mozaik Kiadó, Szeged, 2004.
- Nyíregyházi Tantervcsalád, Nyíregyháza, 2004.
- Apáczai Kerettantervcsalád, Győr, 2004.
- A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének Kerettanterve, Budapest, 2004.

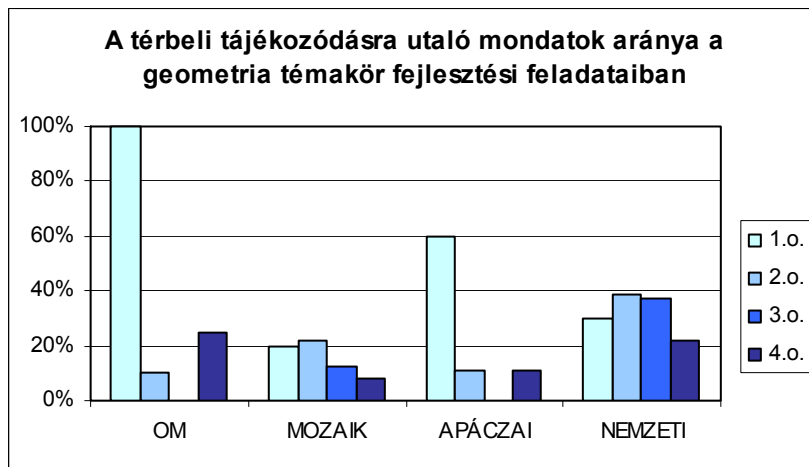
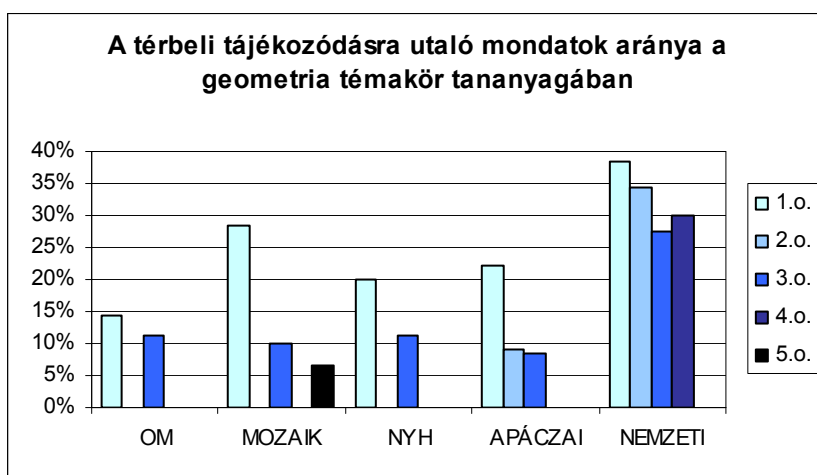
Az elemzésre kerülő kerettantervek szerkezete nagyon hasonló, követik az 1978-as tanterv útmutatójának szerkezetét. A tanítandó matematikai tananyagot mindegyikük 4 (esetleg öt) nagy témakörbe sorolják. Ezek:

- Számtan, algebra
- Sorozatok, függvények (Gondolkodási módszerek alapozása)
- Geometria, mérés
- Valószínűség, statisztika

Az egyes témakörök tárgyalása három részből áll. Ezek:

- Fejlesztési feladatok
- Tananyag, tartalom
- Követelmények, a továbbhaladás feltételei

Elemzésünket először a Geometria témakörre korlátozzuk. Azt vizsgáljuk, hogy ezen a témakörön belül mekkora az aránya a térbeli tájékozódó képesség fejlesztését szolgáló tanítási anyagoknak. Ehhez számba vettük a geometriához tartozó ismereteket (mondatokat), és ezen belül elkülönítettük a tájékozódással összefüggőket. A kettő arányát százalékosan, osztályokra lebontva az alábbi ábrák szemléltetik. (Tekintettel arra, hogy a NAT általunk kiemelt fejlesztési feladatainak mindegyike a 6. osztályig tart, vizsgálatunk az 1-6. évfolyamra vonatkozik.)



A geometria tananyagára vonatkozó vizsgálatunk az első négy tanterv esetében hasonló eredményeket mutatnak. Az 1. és a 3. évfolyamon mindenhol szerepelnek a térbeli

tájékozódásra utaló mondatok. Ezek aránya az 1. évfolyamon viszonylag magas (15-30%), a 3. évfolyamon azonban már csak 10% körüli.

Érdekes, hogy ezek a tantervek 4. és - egy kivételtől eltekintve - 2. osztályban egyáltalán nem említik a tájékozódás kérdéseit. Hasonló a helyzet az 5-6. évfolyamon, csupán egy esetben találtunk idevonatkozó utalást.

A Nemzeti Tankönyvkiadó tanterve eltér az előzőektől. Az általunk vizsgált témakör itt nagyobb terjedelemben szerepel (27-38%), s lényeges változás az is, hogy az 1-4 évfolyam mindegyikén jelen van.

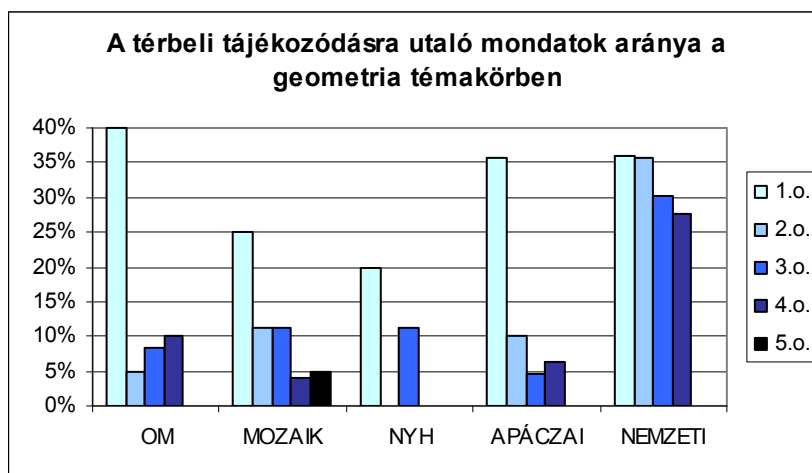
A tananyag meghatározáshoz hasonlóan a fejlesztési feladatoknál sem figyelhető meg a témakör következetes tárgyalása. (A Nyíregyházi Tantervcsalád nem részletezi a fejlesztési feladatokat, ezért összehasonlításunkban sem szerepel.)

1. évfolyamon mindegyik tanterv említi a térbeli tájékozódást, kettő közülük igen hangsúlyosan. A 2. és a 4. évfolyamon ugyancsak találkoztunk a témakörbe tartozó mondatokkal, nem világos azonban, hogy két tanterv miért hagyta ki a 3. évfolyamot a fejlesztésből.

A Nemzeti Tankönyvkiadó mellett a Mozaik Kiadó is egyenletesen, mindegyik évfolyamot érintve dolgozta ki a tájékozódás fejlesztési feladatait. Eltérés az arányokban van, ugyanis az előbbiben nagyobb számban található tájékozódási feladatok.

A két ábrát összehasonlítva következtetlenséget figyelhetünk meg: míg a tájékozódás a 2. és a 4. osztályban jórészt fejlesztési feladatként, addig a 3. osztályban tananyagként jelenik meg.

Azt tapasztaltuk tehát, hogy a tárgyalt tanítási tartalom említett felosztása nem egyértelmű. Célszerű ezért a két szempontot egyesíteni, és megnézni, hogy összesen, akár tananyagként, akár fejlesztési feladatként megjelölve, milyen a geometria témakörön belül a térbeli tájékozódásra vonatkozó feljegyzések aránya.



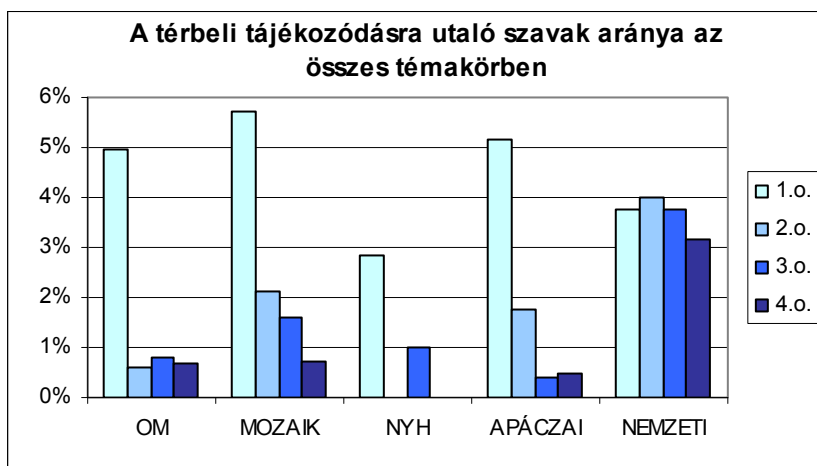
Változatlanul igaz az a megállapításunk, hogy az első négy tantervben 1. osztályban lényegesen nagyobb a tájékozódásra utaló tanítási anyag, mint a továbbiakban. Valamilyen formában (tananyag ill. fejlesztési feladat), egy-két mondatban találkozunk ugyan még vele, de az 5-6. osztályban gyakorlatilag már nem szerepel az általunk vizsgált témakör. A Nemzeti Tankönyvkiadó tantervének eltérő koncepciója most is jól látható, a tájékozódással

összefüggő mondatok aránya az 1-4. évfolyammindegyikén magas. Az 5-6. osztályban azonban már ez a tanterv sem említi.

Ugyanakkor a NAT-ban leírt fejlesztési feladatok egyike sem fejeződik be az alsó tagozaton. Mindez azt mutatja, hogy az általunk vizsgált témakörben a kerettantervek nem tükrözik egyértelműen a NAT elképzeléseit. A vizsgált alsó tagozatos kerettantervek közül négy - a korábbi tanítási hagyományokat követve - döntően csak az 1. évfolyamon foglalkozik a tájékozódással. A felső tagozaton pedig már egyik sem tekinti feladatának a témakör további felszínén tartását.

Mivel az alsó tagozatos matematikatanításon belül már a geometria témakör is meglehetősen kis százalékban (5-10%) van jelen (Herendiné Kónya, 2004, 244-245. o.), a térbeli tájékozódás reprezentálása nagyon alacsonynak tekinthető.

Ezért megvizsgáltuk a térbeli tájékozódással kapcsolatos szavak számát az összes témakörhöz (tananyagok és fejlesztési feladatok egyaránt) viszonyítva:



Az ábra az előbbieken ismertetetthez hasonló elosztást mutat az egyes tantervekben. A térbeli tájékozódás témaköre az 1. évfolyamon a tanítandó anyag 3-6%-a, a további évfolyamokon ennél kevesebb.

Természetesen más témakörök tanítása során előfordulnak olyan ismeretek, tevékenységek, melyek a tájékozódó képesség fejlesztését is szolgálják, azonban kérdéses, hogy ennek a tudatos alkalmazása megtörténik-e.

Meg kell még említenünk, hogy a NAT-ban térbeli tájékozódás konkrétan előfordul az *Ember a természetben* műveltségterület *Tájékozódás az élő és élettelen természetről* fejlesztési feladatában is. A *környezetismeret* fejlesztendő kompetenciának tartja a „Térérzet tudatosítását, tájékozódást a térben, irányok, távolságok, hosszak, nagyságrendek meghatározását (becslés, mérés).”

A többi alsó tagozatos tantárgy is nyújt lehetőségeket a téri tájékozódó képesség fejlesztésére, így a *technika és életvitel*, *vizuális kultúra*, *testnevelés és sport* vagy akár az *ének-zene*. Azonban a NAT műveltségterületeinek fejlesztési feladatai csupán néhány helyen utalnak erre. Ezek:

- A *Művészetek* műveltségterületen belül a *Vizuális kultúra* tantárgy *Közvetlen tapasztalás útján szerzett élmények feldolgozási képessége - motoros készségek* fejlesztési feladatában:
„Tájékozódás a lakóhelyen és annak környékén.”
- Az *Életvitel és gyakorlati ismeretek* műveltségterület *Munkavégzési és tanulási szokások; Technológiai rend, térszemlélet* fejlesztési feladatában:
„Az anyagalakító, a szerelő- és az építőmunka fázisainak megismerése. A műveleti és téri rend betartása a munka során.”

A NAT-ban tehát a térbeli tájékozódás témaköre az 1-4. évfolyamon a *Matematika* műveltségterületen jelenik meg a legátfogóbban, a legnagyobb terjedelemben. Ez megerősíti azt az elgondolásunkat, hogy a térbeli tájékozódás képességét matematika tantárgyon belül kell hangsúlyosan fejlesztenünk, még akkor is, ha erre más tantárgyban is látunk lehetőséget.

A kvantitatív elemzés után a matematikatanításra visszatérve nézzük meg, hogy a csekély mértékben reprezentált tájékozódási témakörhöz milyen konkrét utalásokat találunk az egyes kerettantervekben.

Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettantervben:

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladat	Követelmény
1. osztály	Tájékozódás, helymeghatározás; irányok, irányváltoztatások	A tér- és síkbeli tájékozódó képesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével; különböző érzékszervek együttműködése; kifejezése megmutatással, szóban; ilyen tartalmú közlések megértése, követése.	Helymeghatározás a tanult kifejezések alkalmazásával (pl. alatt, fölött, mellett).
2. osztály		Sík- és térbeli tájékozódás	
3. osztály	Tájékozódás vonalon, síkban, térben		
4. osztály		A helymeghatározás képességének fejlesztése	

A Mozaik Kerettantervrendszerben:

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladat	Követelmény
1. osztály	Térbeli irányok pontos megfigyelése, megnevezése. Síkbeli irányok tudatos megfigyelése, ellentétes irányok megkülönböztetése.	Tér- és síkbeli tájékozódó képesség alapozása és képi gondolkodás fejlesztése játékos feladatsorokon	Legyen képes helymeghatározásra a tanult kifejezések alkalmazásával;
2. osztály		Képzeletben történő mozgatás, más nézőpont elképzelése. Sík- és térbeli tájékozódás.	
3. osztály	Tájékozódás vonalon, síkban, térben.	Tér- és síkbeli tájékozódó képesség fejlesztése	
4. osztály		Képzeletben történő mozgatás, más nézőpont elképzelése	

A Nyíregyházi Tantervcsaládban:

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladat	Követelmény
1. osztály	Tájékozódás térben. (Helymeghatározás: alatta, felette, mellette, előtte, mögötte stb.)		Értelemszerűen – helyesen – használják a helymeghatározások kifejezésére alkalmas szavakat (alatta, fölötté, mellette stb.)
2. osztály			
3. osztály	Tájékozódás vonalon, síkban, térben.		
4. osztály			

Az Apáczai Kerettantervcsaládban:

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladat	Követelmény
1. osztály	Tájékozódás, helymeghatározás, irányok, irányváltoztatások. Viszonyítások: előtte, mögötte, fölötté, alatta jobbra, balra stb. kifejezések értelmezése.	A tér- és síkbeli tájékozódó képesség alapozása érzékszervi megfigyelések segítségével. Kifejezése megmutatással, szóban. Ilyen tartalmú közlések megértése, követése.	Helymeghatározás a tanult kifejezések alkalmazásával (pl alatt, fölött, mellett)
2. osztály	Egy pontból kiindulva adott lépésekkel (irány, méret, egység) alakzat rajzolása.	Sík- és térbeli tájékozódás.	
3. osztály	Tájékozódás vonalon, síkban, térben.		.
4. osztály		A helymeghatározás képességének fejlesztése	

A bemutatott kerettantervekben olvasható megfogalmazások nagyon hasonlóak, több esetben keveset árulnak el a tanítandó ismeretekről. Az első osztályban konkrétan csupán a térbeli viszonyiszavak használatát említik. A 2. és a 3. osztályban, egy kivétellel, általánosságban a sík- és térbeli tájékozódás szerepel, mellőzve minden konkrétumot. A 4. osztályban két helyen a helymeghatározás képességének fejlesztése szerepel, valamint egy helyen a „*képzeletben történő mozgatás, más nézőpont elképzelése*”. Érdekes, hogy ezzel a követelménnyel 2. osztályban is találkozunk, míg 3.-ban nem.

A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének kerettanterve nem csak az arányokban, hanem a tanítandó ismeretek tartalmában is eltér az előbbiektől:

Évfolyam	Tananyag	Tanulói tevékenységek	Kialakítandó ismeretek és a fejlesztés várható eredménye (készségek, képességek, kompetenciák)
1. osztály	Tájékozódás mozgással; irányok, távolság és szomszédosság szerint. A térbeli viszonyokat kifejező szavak. Tárgyak (pontok) helyének megadása vonalon, egy kitüntetett helyhez viszonyítva.	Útvonalak bejárása, utánzása, tudatosítása megmutatással és szóban leírt útvonal követésével. <i>Mozgatás terepasztalon.</i> Tájékozódást segítő játékok nagymozgásokkal. A térbeli viszonyokat kifejező névutók (alatt, fölött, mellett, között... alá, fölé...) megértése, használata. Irány és állás megfigyelése, követése finomabb, síkbeli mozgásokkal is (kézzel, szemmel; kapcsolat az olvasás, írás tanulásával). Számok elhelyezése számegeyenesen.	Jól tájékozódnak az iskola környékén, az iskolában, osztályban, táblán, füzetben és a számegeyenesen. Tudatosan használják a térbeli viszonyokat kifejező szavakat, névutókat a tevékenységek során (előtt, elé, mögött, mögé, között, közé, mellett, mellé, fölött, fölé, alatt, alá, fölfelé, lefelé, jobbra, balra).
2. osztály	Útvonalak követése, bejárt útvonalak megadása szóban. Alakzatok (pontok) helyének megadása vonalon 1, síkban 2 adattal.	Útvonalak valódi és terepasztalon való bejárása, utánzása, tudatosítása megmutatással és szóban leírt útvonal követésével, bejárt útvonal elmondásával. Egyszerű képek kirakása elbeszélés alapján. Tájékozódást segítő játékok, tevékenységek: irány és távolság megadásával való tájékozódás udvaron, erdőben; utca és házszaám alapján a lakóhelyen; sor és oszlop megadásával osztályban, sakktaáblán. <i>Egyszerű alakzatok létrehozása lyukastáblán diktálás alapján.</i> Irány és állás megfigyelése, követése finomabb, síkbeli mozgásokkal is; kapcsolat az eltolás és a tükrözés során keletkező formák megfigyelésével. Figurák, ábrák rajzolása diktálás alapján hálón.	Jól tájékozódnak az iskola környékén és a szűkebb lakóhelyen. Emlékképeik alapján képesek felidézni, elmesélni, képek segítségével papíron rekonstruálni egy-egy séta során megélt élményeiket. Helyesen használják a jobbra, balra, előre, mögötte, között, szemben szavakat. <i>Táblázatos elrendezésben alakzatok (pontok) helyzetét viszonyítani tudják rögzített sorhoz, oszlophoz (egyenesekhez).</i> Ismerik a térbeli viszonyokat kifejező szavakat, névutókat, tudják követni az irányváltoztatásokra utaló utasításokat.
3. osztály	Útvonalak követése, jelölése (kézmozdulattal, nyíllal, képpel...), a megfigyelések rögzítése. A tér egy pontjának megadása 3 adattal, síkbeli pontok jellemzése 2 adattal.	Útvonalak bejárása, utánzása, tudatosítása megmutatással és szóban leírt útvonal követésével, bejárt útvonal elmondásával, lerajzolásával, a megfigyelt objektumok megjelölésével. Tájékozódást segítő játékok, tevékenységek: irány és távolság megadásával való tájékozódás udvaron, erdőben; utca, házszaám és emelet alapján a lakóhelyen; sor és oszlop megadásával osztályban, sakktaáblán, torpedójátékban; térbeli malomjáték. Irányra, állásra és távolságra vonatkozó utasítások követése, ill. megfogalmazása síkban; adott ponttól indulva, adott pont elérése. Figurák, ábrák rajzolása diktálás alapján, kész ábrák másolása irányváltoztatással vagy a rács méretének megváltoztatásával.	Jól tájékozódnak az iskola környékén és a lakóhelyen. Készek a környezetükben megjelölt útvonalak és azokról készített egyszerű térképek összekapcsolására; bejárt útvonalon készített fotók kiválasztására. Eligazodnak a síkban irány és távolság megadása szerint, illetve más két adat alapján; térben 3 (független) adat szerint. Mozgással, rajzzal, egyszerűbb esetekben képzeletben utasítások alapján megtalálják kitűzött helyeket, elérnek célpontokat.

4. osztály	Útvonalak, térképek készítése, követése, bejárása visszafelé. A tér egy pontjának megadása 3 adattal, síkbeli pontok jellemzése 2 adattal.	Útvonalak bejárása, utánzása, tudatosítása megmutatással és szóban leírt útvonal követésével, bejárt útvonal elmondásával. Ilyen útvonalak bejárása a valóságban jól ismert terep „térképén”; <i>térkép rajzolása jól ismert terepről</i> . Tájékozódást segítő játékok, tevékenységek: irány és távolság megadásával, vagy térkép szerint való tájékozódás udvaron, erdőben; utca, házszám és emelet alapján a lakóhelyen; sor és oszlop megadásával osztályban, sakktablán, alakzatok rajzolása diktálás alapján; térbeli malomjáték. Figurák, ábrák rajzolása diktálás alapján, kész ábrák másolása irányváltoztatással vagy a rács méretének megváltoztatásával, torzítása adott irányú nyújtással, vagy ferde rácsra másolással.	Jó mozgásos tájékozódás alakul ki az iskola környékén és a lakóhelyen; képesek egyszerű térképen való tájékozódásra. Tudják, hogy a síkban 2, térben 3 (független) adat egyértelműen kijelöl egy-egy pontot.
------------	--	---	--

A tanterv az előzőekhez képest jóval több konkrét utasítást tartalmaz, s találkozunk újszerű feladatokkal is. Ilyenek pl. az útvonalak bejárásával összefüggő egymásra épülő tanulói tevékenységek vagy a figurák, ábrák rajzolása diktálás alapján.

Az alaptanterv és a kerettantervek tanulmányozásának tapasztalatait, összegezve megállapítható, hogy míg a NAT fontos szerepet szán témakörünk tanításának, s ezt nem elszigetelten az alsó tagozatra, hanem az első hat évfolyamra teszi, addig a legtöbb kerettantervben ez nem tükröződik. Jóval kisebb terjedelemben, helyenként következtetlenül, ellentmondásosan jelenik meg a térbeli tájékozódás. Az 5-6. osztályban gyakorlatilag nem találunk ilyen jellegű utalásokat. Ebben a témakörben a kerettantervek nem sugallják sem a szisztematikus, sem a spirális tárgyalásmódra való törekvést.

2.3. A TANKÖNYVCSALÁDOK VIZSGÁLATA

A jelenleg legelterjedtebben használt tankönyvcsaládok elemzése, valamint gyakorló tanítókkal folytatott beszélgetéseink szintén ezt az észrevételünket támasztják alá.

Tájékozódó jellegű beszélgetést folytattunk három különböző debreceni általános iskolában tanító pedagógusokkal.

A megkérdezett 14 tanító véleményét az alábbiakban foglaljuk össze:

6-an a Hajdu-féle, 5-en az Apáczai Kiadó, 2-en a Dinasztia Kiadó tankönyveit használják, 1 tanító pedig 2 különböző (Nemzeti és Mozaik) tankönyvcsaládból tanít.

Az éves munkatervüket mindegyikük a kiadó tanmenete alapján készíti el, egyikük megjegyezte azt is, hogy amennyiben ilyet nem mellékelnének, nem választaná a tankönyvcsaládot.

Arra a kérdésre, hogy mely évfolyamokon foglalkoznak a tájékozódó képesség fejlesztésével, 7-en válaszoltak, mindannyian azt, hogy az első évfolyam elején meglehetősen sokat, később azonban nem. Közülük ketten megjegyezték, hogy maradnak hiányosságok, de ezek száma csökkenne, ha az óvodai foglalkozásokon több tájékozódással kapcsolatos játékot játszanának.

Kíváncsiak voltunk a tanítók véleményére abban a kérdésben is, hogy milyen tantárgy keretében foglalkoznak még a gyerekek a tájékozódással. 9-en választották a környezetismeretet, utalva az 1. és a 3-4. osztályos tananyagra. Konkrét tantervi utalás nélkül 4 tanító említette a testnevelést, valamint 2-en az anyanyelvet a szövegértés felmérésére szolgáló rajzos feladatokra vonatkoztatva (Pl. „Rajzolj a fától jobbra egy gombát!”).

A bemutatott kerettantervekhez kapcsolódóan négy tankönyvcsaládot vizsgáltunk meg.

Az ún. Hajdu-féle tankönyveket, melyek használatát a Nyíregyházi Tantervcsalád ajánlja:

- Scherlein Márta-Dr. Hajdu Sándor-Novák Lászlóné: Matematika 1, I-II. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.
- Scherlein Márta-Dr. Hajdu Sándor-Novák Lászlóné: Matematika 2, I-II. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002.
- Scherlein Márta-Dr. Hajdu Sándor-Novák Lászlóné: Matematika 3, I-II. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.
- Scherlein Márta-Dr. Hajdu Sándor-Novák Lászlóné: Matematika 4, I-II. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2001.

Az Apáczai Kiadó tankönyveit, melyeket az Apáczai Kerettantervcsalád javasol:

- Kurucz Istvánné: Az én matematikám, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2001.
- Esztergályos Jenő: Második matematikám, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2001.
- Balassa Lászlóné-Csekné Szabó Katalin-Szilas Ádámné: Harmadik matematikakönyvem, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2001.
- Balassa Lászlóné-Csekné Szabó Katalin-Szilas Ádámné: Negyedik matematikakönyvem, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2001.

A Mozaik Kerettantervrendszerre épülő Mozaik Kiadó munkatankönyveit:

- Árvainé Libor Ildikó-Lángné Juhász Szilvia-Szabados Anikó: Matematika munkatankönyv 1, I-II. félév, Mozaik Kiadó, Szeged, 2003.
- Árvainé Libor Ildikó-Lángné Juhász Szilvia-Szabados Anikó: Matematika munkatankönyv 2, I-II. félév, Mozaik Kiadó, Szeged, 2004.

A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének Kerettantervét használó Nemzeti Tankönyvkiadó tankönyveit és munkafüzeteket:

- C. Neményi Eszter-Sz. Oravecz Márta: Matematika 1, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.
- C. Neményi Eszter-Sz. Oravecz Márta: Matematika 2, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.
- C. Neményi Eszter-Wéber Anikó: Matematika 3, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.
- C. Neményi Eszter-Káldi Éva: Matematika 4, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.

A jelenlegi magyar gyakorlat szerint a tanítók óratervezésének meghatározó tényezője a tankönyv. Az utóbbi évtizedek matematikatanítási gyakorlatára visszatekintve

megállapítható, hogy a párhuzamos tankönyvcsaládok megjelenésével a tankönyv egyre inkább az óratervezés központi elemévé vált. Egyetértünk Szendrei Juliannának a tankönyvhasználatra vonatkozó azon megállapításával, miszerint a tanító „... úgy érzi, hogy nem térhet el a {tankönyv által} javasolt sorrendtől, mert hátha a tanulóknak lesz kára belőle. Vagy ha túl soknak is találja a gyakorló feladatokat, nem mer kihagyni belőlük, hátha éppen a kimaradóra lesz szükség valamikor.” (Szendrei, 2005, 298. o.)

Ennek tükrében vizsgálva a felsorolt tankönyvek felépítését, bennük a téri tájékozódás fejlesztésére utaló feladatok számát, típusát, hozzávetőlegesen hiteles képet kaphatunk a témakör tanításának gyakorlatáról.

Az első három tankönyvcsalád megegyezik abban, hogy az első év elején foglalkozik a téri tájékozódással, további direkt utalást azonban nem találtunk. A témához kapcsolódó feladatok a következő fejezetcímek alatt találhatók:

- Összehasonlítások: Íráselemek gyakorlása; tájékozódás térben (Hajdu 1, 4-9. old.)
- Tájékozódás (Mozaik 1, 8-11. old.)
- Hol?-Irányok; Merre?-Jobbra, balra? (Apáczai 1, 4-5. old.)

Az első és második osztályos könyvekben megfigyelhető még néhány feladat vagy a gyakorlásra szánt oldalakon, vagy a második év eleji ismétlésben. (Hajdu 2, 4-5. o.l.d, Mozaik 2, 17. old.)

A Nemzeti Tankönyvkiadó könyvei és munkafüzetek egyik évfolyamon sem szentelnek önálló fejezetet a tájékozódásnak. Csupán néhány ilyen témájú feladatot találtunk (C. Neményi 1, mf. 102. old., C. Neményi 2, tk. I, 112, 122. old., tk. II. 55. old. C. Neményi 3, mf. 141. old, C. Neményi 4, mf. 13, 93. old.). Szerintünk ez ellentmond a kiadó kerettantervének, ugyanis ez a többihez viszonyítva hangsúlyosabban szerepelteti az általunk vizsgált témakört.

Mind a négy tankönyvsorozat tartalmaz továbbá olyanokat, melyek implicit módon kapcsolódnak témakörünkhöz, ezek a műveletvégzésen, az óramutató járásán, a sorberendezésen, a tengelyes tükrözésen keresztül kapcsolhatók a tájékozódáshoz. Az ilyen feladatok száma sem túl sok, s ismerve a tanítók tankönyvekhez való viszonyát, feltételezhető, hogy ezek megoldásánál a térbeli tájékozódás fejlesztése nem elég hangsúlyos.

A tantervek és a tankönyvcsaládok elemzése megerősíti azt a hipotézisünket, hogy az 1. évfolyam kivételével a témakör explicit módon gyakorlatilag nem szerepel a tanítási anyagban. Ennek látszólag ellentmondanak a Nemzeti Tankönyvkiadó tantervének tapasztaltak, meg kell azonban jegyeznünk, hogy ezt és a hozzá kapcsolódó tankönyvcsaládot igen kis százalékban használják, talán azért, mert sok önálló tanítói munkára épít.

Mindezek tükrében úgy gondoljuk, a térbeli tájékozódó képesség fejlesztésének jelenlegi iskolai gyakorlata nem kellően átgondolt, esetleges. A matematikatanítás ebben a vonatkozásban keveset tesz, a fejlesztés feladatát átengedi a hétköznapi élet spontán szituációinak, bizonyos részfeladatokat pedig a többi tantárgynak.

Megfigyeléseink alátámasztják azt a korábbi megállapításunkat, hogy szükséges a térbeli tájékozódás témakörének szisztematikus és spirális tárgyalásmódját kidolgoznunk.

3. AZ IRÁNYÍTÁS FOGALMÁNAK MATEMATIKAI ÉS MATEMATIKATÖRTÉNETI ELEMZÉSE

Mielőtt egy fogalomkör tanítási menetéről gondolkoznánk, célszerű feltárni a szerkezetét, megtalálni azokat a vonásait, melyek a megértési folyamat nehézségeit, kritikus pontjait jelentik. Ehhez érdemes megvizsgálni a fogalmat mind matematikatörténeti, mind matematikai szempontból, több kutató munkáján keresztül.

A matematikatörténet és a tanulók matematikai gondolkodásának fejlődési aspektusai közötti kapcsolatról már volt szó a dolgozatban (13-16. o.). A konstruktivista tanuláselmélet a tanulást a tudás újrakonstruálásának tekinti. A didaktikai követelmények egyike éppen ezért az, hogy a tanárnak tisztában kell lennie a tanítandó témával kapcsolatban kialakult tudománytörténeti felfogásokkal is (13. o.). Egyetértünk a genetikus matematika didaktika azon felfogásával, mely a matematikatörténetet eszköznék tekinti a matematikai gondolkodás fejlődési aspektusainak megértéséhez, és épít a történeti és az egyéni fejlődésben megmutatózó párhuzamokra.

Egy matematikai elmélet felépítése általában többféle módon lehetséges. Több matematikus munkáját összehasonlítva megtalálhatjuk azokat a felépítésben rejlő hasonlóságokat és különbségeket, amelyek rávilágítanak a fogalom lényegére.

Úgy gondoljuk, hogy egy adott matematikai témakör axiomatikus bemutatása világosabb teszi annak szerkezetét, és így az alapvető fogalmak közötti kapcsolatot. Ez nem azt jelenti, hogy az általános iskolában az egyes matematikai fogalmakat axiomatikus módszerrel szeretnénk tanítani, hanem azt, hogy nem hagyhatjuk figyelmen kívül az axiomatizáció jelentőségét és szerepét a tanítandó anyag kidolgozásában.

Az axiomatikus felépítésben a fogalmak és állítások deduktív módon kapcsolódnak egymáshoz, így ezek a logikai kapcsolatok explicit módon mutatják az alapfogalmak, axiómák, definíciók, tételek közötti összefüggéseket. Ugyanakkor egy-egy fogalomnak számos, logikailag ekvivalens definíciója létezhet, melyekből fogalmak és állítások gazdag kapcsolatrendszerét ismerhetjük meg. Ezek tanulmányozása közelebb visz bennünket az adott fogalom lényegének megértéséhez.

Az axiomatizáció és a szisztematizáció tehát a tanítandó téma megtervezéséhez elengedhetetlen, mert széleskörű, átfogó megértést, egyfajta globális perspektívát jelent.

Az irány, irányíthatóság bevezetésének módját és lehetőségét az euklideszi geometria XX. századi axiomatikus felépítéseiből kiindulva keressük. Három elméletet tekintünk át, hangsúlyt helyezve ezek kiindulási koncepciójára, a köztük lévő hasonlóságokra és eltérésekre, valamint a belőlük levonható konzekvenciákra.

Elsőként az euklideszi geometria Hilbert-féle tárgyalásmódjában vizsgáljuk meg az irányítás fogalmának definiálásához vezető lépéseket. Ezzel összefüggésben utalunk az eredeti, az Euklidesz-féle megalapozásra, kiemelve az eltérést az ókori görögök és a XX. század első felének geometria-felfogása között.

Az ókorban a geometriai gondolkodás természetét az az intuitív felismerés jellemezte, hogy a térnek mindenütt és minden irányban ugyanazok a tulajdonságai, azaz a térben nincsenek sem kitüntetett helyek, sem kitüntetett irányok. A görög geometria jelentősége abban áll, hogy olyan absztrakt fogalmakat alkotott (pont, egyenes, stb.), melyek a természetben nem léteznek. Ezen absztrakt fogalmak azonban kapcsolatban vannak a fizikai valósággal, bizonyos fizikai dolgok archetípusaiként jelennek meg. A görög gondolkodók információikat erről az idealizált világról deduktív módon nyerték.

Gondolkodásukban tehát az intuitív elemek és az axiomatikus vonások egyaránt jelen voltak. Euklidesznél a definíciók szerepe eltért a maitól. Csupán a fogalom lényegét igyekezett egy-egy mondatban összesűríteni, hogy a szó kimondásakor ugyanarra a dologra gondoljunk. (Pl. „Pont az, aminek nincs kiterjedése.”) A fogalom igazi megértéséhez úgy juthatunk el, hogy tapasztalatokat gyűjtünk róla, miközben vizsgáljuk és dolgozunk vele. Axiómáknak vagy „közismert fogalmak”-nak azokat a relációkat nevezte, melyeket a gondolkodás tapasztalati tényeken alapuló sémái diktálnak. (Pl. „Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, akkor az összegek egyenlők.”) Posztulátumokon olyan tényeket értett, melyek geometriai látásmódunkból (térszemléletünkéből) következnek. (Pl. Bármely pontból bármely pontba lehet egyenes vonalat húzni.)

Mivel a görögök a bennünket körülvevő valódi tér szerkezetét akarták megismerni, geometriájuk statikus szemléletű volt. Így a dinamikus vonásokat hordozó irány fogalom értelmezésére nem volt szükségük. Euklidesz az *Elemék*ben foglalkozott ugyan a szakasz egyik vagy másik végpontján át történő meghosszabbításával, s ez lehetőséget nyújthatott volna az egyenes irányításának bevezetésére, azonban erre nem találunk utalást, csakúgy, mint ahogy a sík irányítására sem.

A XIX. században a szimbolikus formalista irányzat - a matematika filozófiáját megváltoztatva - a kutatásokban az intuitív elemek kizárását javasolta. A definíciókban a szemlélet helyett bizonyos szavak más szavakkal való kifejezésére helyeződött a hangsúly. A matematikusok így jutottak el egy-egy elmélet alapfogalmaihoz, azokhoz, amelyeket szükségszerűen nem definiálnak. Az axiómák és a posztulátumok közötti különbség elmosódott, szerepük az lett, hogy az alapfogalmakban, és az ezekre épülő további fogalmakban szereplő szavak között létesítsenek bizonyos logikai kapcsolatokat. Ezután a formális logika szabályait alkalmazva jutunk el további kapcsolatokhoz, tételekhez.

Ezt az elvet vallotta, és ezt a módszert követte David Hilbert *A geometria alapjairól* (1899) c. művében, melyet az euklideszi geometria első modern axiomatikus megalapozásának tekintünk. Hilbert három alapfogalmat (*pont, egyenes, sík*) és három alaprelációt (*illeszkedik, között, egybevágó*) vezetett be. Az irány fogalmának kialakításához az illeszkedés és a rendezés axiómáira volt szükség (Hilbert, 1956, 2-5. old.). A rendezési relációk a „között” fogalmára épülnek, így lehetővé teszik az egyenes, a sík és a tér pontjainak rendezését.

Kerékjártó Béla munkája, *„A geometria alapjairól I.”* 1937-ben jelent meg. Tárgyalásmódjában Hilbert felépítését követte, az axiómákon csupán néhány ponton változtatott. Kerékjártó a geometria megalapozását két fő elv szerint végezte. Egyrészt arra törekedett, hogy a fogalmak definiálásánál, a tételek bizonyításánál csak a minimálisan szükséges axiómákat használja fel, megmutatva ezzel az adott fogalom, vagy tétel helyét a geometria rendszerében. Másrészt ragaszkodott a dimenziószám által meghatározott tárgyalási sorrendhez. Egy adott axiómacsoporthoz kötődve elsőként mindig az egyenes, utána a sík, majd a tér geometriáját építette fel, rámutatva ezzel a párhuzamokra és az általánosítás lehetőségeire. Ez a módszer, valamint az algebra és a topológia korabeli eredményeinek felhasználása megteremtette annak lehetőségét, hogy az euklideszi geometrián túl a nem-euklideszi geometriákat is tárgyalja (Kerékjártó, 1944).

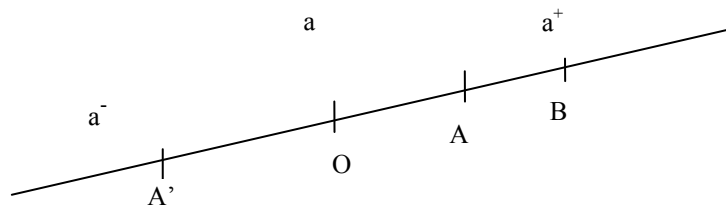
Az ún. Weyl-féle axiomatika az euklideszi geometria egy újabb, az előző kettőtől lényegesen eltérő felépítését adja. Ebben a tárgyalásmódban a pont és a vektor alapfogalmak, míg a vektorműveletek alaprelációk. (vektorok összeadása, vektor szorzása skalárral, vektorok skaláris szorzata, vektor adott pontból történő felmérése). A vektortér és az euklideszi tér jellemzésére alkotott axiómák a vektor és a vektorműveletek fogalmára épülnek. A vektorműveletek tulajdonságai jelentik a vektortér axiómáit (Jegorov, 1986, Roe, 1993).

A vektorfogalom szoros kapcsolatban áll az irány és az irányítás kérdéseivel, érdemes alaposabban megvizsgálnunk. A klasszikus vektorfogalom megkonstruálásának többféle módja létezik. Az egyik jól ismert definíció szerint a vektor egy irányított szakasz, egy másik, intuitívabb megközelítés szerint egy speciális mozgási utasítás. Ez utóbbi matematikailag olyan leképezéssel írható le, mely egy pontot adott irányba, adott távolságra mozgat el. A matematikatörténetben a vektorfogalom viszonylag sokára, a XIX. század közepére jelent meg. Ennek valószínűleg egyik oka az algebrai apparátus hiánya volt, hiszen ez teszi a vektormódszer használatát eredményessé, a másik pedig az ókori görögöktől örökölt statikus geometriai kép, amelybe nem illett bele egy alakzat elmozdításának gondolata.

3.1. AZ EGYENES IRÁNYÍTÁSA

Hilbert és Kerékjártó a *között* fogalmára alapozva a következőképpen definiálta az egyenes irányítását:

Legyenek az A, A', O, B az a egyenes olyan különböző pontjai, melyekre igaz, hogy az O pont az A és A' között van, de nincs az A és B között. (3.1. ábra) Ekkor azt mondjuk, hogy az A és B pontok az O pontnak ugyanazon, míg az A és A' pontok az ellenkező oldalán vannak, vagy másképpen, hogy az O pont elválasztja az a egyenes két, A -ra és B -re illeszkedő a^+ és az A' -re illeszkedő a^- félegyenesét.



3.1. ábra

A *között* fogalmát felhasználva bevezethetjük továbbá a z „ A megelőzi B -t” ($A < B$) bináris relációt, ha az A pont az O és a B között van. Hasonlóan, beszélhetünk arról, hogy az O megelőzi az a^+ pontjait, az a^- pontjai megelőzik O -t, valamint az a^- pontjai megelőzik az a^+ pontjait. Ezzel a relációval értelmeztük az a egyenes pontjainak lineáris rendezését, így az a egyenest irányított egyenessé tettük.

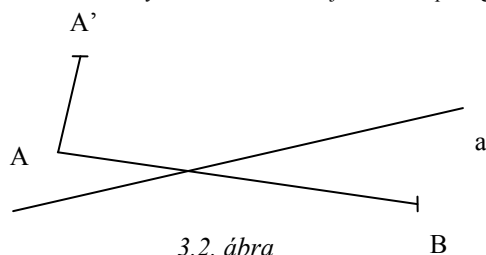
A vektor mint irányított szakasz, vagy mint mozgási utasítás már nyilvánvalóan meghatározza az egyenes irányítását.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a *között* fogalma alapját képezi az azonos vagy ellentétes oldal fogalmának.

3.2. A SÍK IRÁNYÍTÁSA

A sík esetében a három tárgyalásmód eltér egymástól.

A sík irányítása Hilbertnél

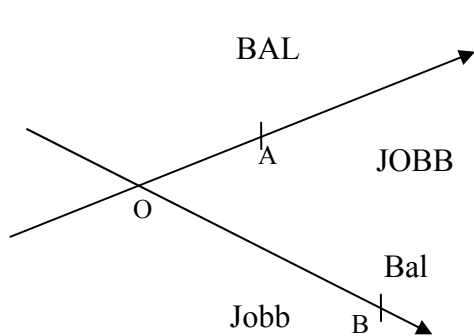


3.2. ábra

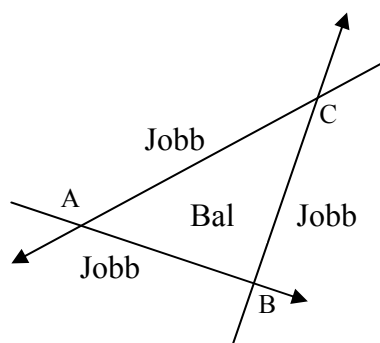
Hilbert az azonos és ellentétes oldal fogalmát általánosította. A síkot bármely a egyenese két részre osztja. Az A és A' pontok az a egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszenek, ha az AA' szakasznak nincs közös pontja az a -val. Ha az AB szakasznak van a -val közös pontja, akkor az A és B pontok az a egyenes két ellentétes oldalán találhatók (3.2. ábra).

Ha a a sík irányított egyenese, akkor a két oldalát mint jobb és bal oldal különböztethetjük meg. Ha definiáljuk egy irányított egyenes jobb (bal) oldalát a síkon, akkor a sík bármely más irányított egyenesének jobb (bal) oldala egyértelműen meghatározható (Hilbert, 1899, 75. o.). Például, ha az OB félegyenes az OA irányított egyenes jobb oldalán fekszik, akkor az OB irányított egyenes jobb oldala a síknak az a része, amely az OA -t nem tartalmazza (3.3 ábra).

Egy poligon belsejének és külsejének definiálása után (Hilbert, 1899, 10. o.) megadhatjuk egy háromszög irányítását (körüljárási irányát). Az ABC háromszöget pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányításúnak mondunk, ha a háromszög belső pontjai az AB , BC , CA irányított egyenesek mindegyikének a bal oldalán vannak, vagy a BA , AC , CB irányított egyenesek mindegyikének a jobb oldalán (3.4. ábra). A háromszög irányítása negatív (az óramutató járásával megegyező), ha a háromszög belső pontjai az AB , BC , CA irányított egyenesek mindegyikének a jobb oldalán, vagy a BA , AC , CB irányított egyenesek mindegyikének a bal oldalán vannak.



3.3. ábra



3.4. ábra

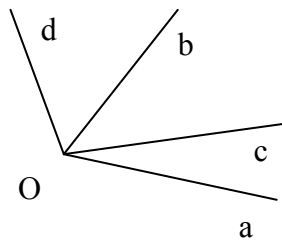
Összefoglalva: a síkon a pozitív irány kijelölése egy síkbeli irányított egyenes pozitív oldalának kijelölésével történt.

A sík irányítása Kerékjártónál

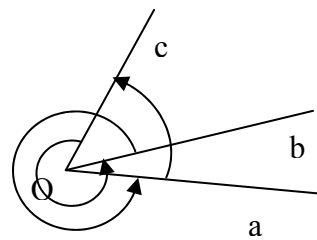
Hilberttől eltérően, Kerékjártónál a kiindulópontot a ciklikus rendezés fogalma jelenti.

Legyenek a, b, c, d a sík egy adott O pontjából kiinduló félegyenesek. Az a, b félegyenesek a síkot két részre osztják. Ha ezek közül a c félegyenes az egyikhez, a d a másikhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy az a, b félegyenesek a c, d félegyeneseket egymástól elválasztják, s hogy az a, b, c, d félegyenesekre az $(acbd)$ ciklikus elrendezés áll fenn (3.5. ábra). Figyelembe véve, hogy az elválasztás szimmetrikus reláció, belátható, hogy ugyanazt a ciklikus elrendezést fejezik ki a négy elem ciklikus felcserélésével kapott $(acbd)$, $(cbda)$, $(bdac)$, $(dacb)$, és az elemek sorrendjének megfordításával kapott $(adbc)$, $(dbca)$, $(bcad)$, $(cadb)$ elrendezések. Ugyanakkor az $(acbd)$, $(abcd)$ és a $(abdc)$ ciklikus elrendezések kölcsönösen kizárják egymást (Kerékjártó, 1937, 41. old.).

Ha a, b, c a sík egy adott O pontjából induló félegyenesei, akkor az a, b, c félegyenesek ciklikus irányításán azt a függvényt értjük, mely a három félegyeneshez hozzárendeli a három elem lehetséges permutációinak egyikét. Jelölje (abc) az ezen permutáció által meghatározott ciklikus irányítást. Belátható, hogy az (abc) , (bca) , (cab) megegyező, míg a (cba) , (bac) , (acb) ellenkező ciklikus irányítások (3.6. ábra). A két ciklikus rendezés egyike megfeleltethető az O pont körüli két forgási irány egyikének. A két O körüli forgási irányt pozitívnak, ill. negatívnak nevezzük (az óramutató járásával



3.5. ábra



3.6. ábra

ellentétesnek ill. megegyezőnek).

Belátható, hogy a sík minden pontjához rendelhető egy forgási irány oly módon, hogy bármely két ponthoz ugyanaz a forgási irány tartozzon. (Kerékjártó, 1937, 121. old.) Ez azt jelenti, hogy az euklideszi sík irányítható, irányítását pedig megadhatjuk egy háromszög csúcsainak ciklikus rendezésével.

Összegezve: a sík pozitív irányítása rögzíthető, ha a sík egy pontja körül rögzítjük a pozitív forgási irányt.

A sík irányításának megadása a vektorgeometria eszközeivel

Az euklideszi geometriát a lineáris algebra eszközeivel építjük fel, ebben kiemelt szerepe van a skaláris szorzat fogalmának.

Az euklideszi sík irányításán egy olyan operációt értünk, amely minden u vektorhoz hozzárendel egy u' vektort úgy, hogy

- ez a hozzárendelés lineáris,
- az u és az u' merőlegesek egymásra (skaláris szorzatuk 0),
- ha az u egységvektor, akkor u' is legyen az.

Az u' vektor ekkor az u $+90^\circ$ -kal történő elforgatottja lesz.

Ha $\{i, j\}$ egy ortonormált bázis, akkor két lehetőség létezik: i' -nek egyenlőnek kell lennie vagy j -vel, vagy $-j$ -vel. Ha $i'=j$, akkor $j'=-i$. Ha $i'=-j$, akkor $j'=i$. Az első esetben a bázist jobb sodrásúnak, a második esetben bal sodrásúnak nevezzük. Ha a két lehetőség

közül kiválasztjuk az egyiket, akkor a síkot irányított síknak nevezzük. A sík irányításának megadásával a sík forgásiránya is megadható (Roe, 1993, 106. o.).

A sík irányítását a sík egyenletének segítségével is definiálhatjuk. A sík vektoregyenlete $r \cdot n = c$, ahol r egy helyvektor, n a sík egy normálvektora, c egy konstans. Megválaszthatjuk c -t úgy, hogy n egységvektor legyen, és megadhatunk egy operációt, amely a sík egy v vektorához hozzárendeli $v \times n$ -et, a v és n vektorok vektoriális szorzatát. Ez a vektor szintén a síkban lesz, és merőleges mind a v -re, mind az n -re. Így ez az operáció a síkban, két dimenziós értelemben, az n -től függően két irányítást határoz meg. Tehát a sík irányítása normálvektorának irányításával egyértelműen megadható (Roe, 1993, 104, 168. o.).

Tetszőleges felülete irányíthatóságához eljuthatunk a felület adott pontbeli érintősíkjának normálvektorán keresztül (Kónya, 2005).

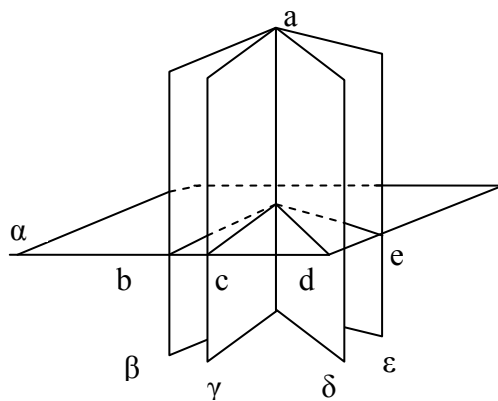
A bemutatott három különböző tárgyalási mód tehát három járható utat ad a jobbfordulat–balfordulat fogalmának származtatására. Az első a jobb- és baloldal, a második a ciklikus permutáció, a harmadik a vektorok skaláris szorzatának fogalmából vezeti le a két forgási irányt.

3.3. A TÉR IRÁNYÍTÁSA

A tér irányításának fogalmához a síkbeli eset általánosítása révén juthatunk.

Hilbert a tér pozitív irányítását egy irányított sík pozitív oldalának kijelölésével határozta meg.

Kerékjártó a félegyenesek ciklikus rendezésének fogalmát általánosította egy egyenesre illeszkedő félsíkok ciklikus rendezésére. Az egyenes körüli forgásirányt az egyenes által határolt félsíkok ciklikus irányításával adta meg (3.7. ábra). A tér irányítását tehát egy irányított egyenes és az e körüli forgásirány határozza meg. Ha az egyenes iránya és a forgásirány előjele azonos, akkor a tér két azonos, ha különböző, akkor a tér két különböző irányításához jutunk.



3.7. ábra

A síkbeli helyzethez hasonlóan belátható, hogy a tér minden pontjához rendelhető egy forgási irány oly módon, hogy bármely két ponthoz ugyanaz a forgási irány tartozzon. (Kerékjártó, 1937, 181. o.) Ez azt jelenti, hogy az euklideszi tér irányítható. Irányítását az említetten kívül egy tetraéder csúcsainak permutációjával is megadhatjuk.

A vektorgeometriában a háromdimenziós euklideszi tér irányításán egy olyan operációt értünk, mely két u és v vektorhoz hozzárendel egy harmadikat, $u \times v$ -t, a két vektor vektoriális szorzatát, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. a leképezés bilineáris,
2. az $u \times v$ vektor merőleges mind az u -ra, mind a v -re
3. bármely u -ra $u \times u = 0$
4. Ha u és v merőleges egységvektorok, akkor $u \times v$ is egységvektor.

Ha választunk egy irányítást, és egy ortonormált i, j, k bázist, akkor két lehetőség létezik: $i \times j$ -nek egyenlőnek kell lennie k -val, vagy $-k$ -val. Első esetben a bázist jobbsodrásúnak, második esetben balsodrásúnak nevezzük.

3.4. ÖSSZEGZÉS

Az irányítás bevezetésére bemutatott három mód eltérő jelenségekből indul ki, az irányfogalomnak más-más tulajdonságát tekinti alapvetőnek. Érdekes ezeket a vonásokat röviden áttekinteni.

Hilbert

- A kiindulópont az egyenes lineáris rendezése, valamint az irányított egyenes jobb és bal oldalának meghatározása.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk: között, megelőzés, lineáris rendezés, irányított egyenes, irányított egyenes két oldala, irányított sík, irányított sík két oldala, a tér irányítása.
- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: geometriai transzformációk iránytartó tulajdonsága.

Hilbert a háromszög körüljárási irányát az irányított egyenes bal oldalának fogalmán keresztül definiálta. A körüljárási irány fogalmára épül a sík irányításának fogalma, valamint a geometriai transzformációk fontos tulajdonsága, az iránytartás.

Kerékjártó

- A kiindulópontot nem a lineáris, hanem a ciklikus rendezés jelenti.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk: permutáció, ciklikus rendezés, közös pontból induló félegyenesek ciklikus irányítása, a sík pontjaihoz rendelt forgási irány, a tér irányított egyeneseihez rendelt forgási irány.
- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: geometriai transzformációk (eltolás, forgatás, tükrözés), irányított szög.

Kerékjártó munkája rávilágít a ciklikus permutáció és az irányítás közötti kapcsolatra. Ezzel összefüggésben érdemes elgondolkodni azon, hogy a ciklikus rendezés az egyén tanulási folyamatában valószínűleg korábban megjelenő tevékenység, mint a lineáris. Olyan tevékenységekre ill. jelenségekre gondolunk, mint elhelyezkedés az asztal körül, körjátékok, körtáncok, kiszámolós játékok, az évszakok váltakozása.

Weyl

- A kiindulópont a vektorfogalom, melyet intuitíve célszerű egy mozgási utasításnak tekinteni. Az irányítás fogalma ekkor vektorhoz vektort rendelő operációként definiálható.
- Az irányfogalmat megelőző fogalmak és relációk:
skaláris szorzat, vektoriális szorzat.
- Fogalmak, melyek vagy az irányfogalmon alapulnak, vagy kapcsolatban vannak azzal: jobb- és balsodrású bázis, irányított szög, a távolságtartó transzformációk osztályozása.

A vektorgeometriai megközelítés az irányfogalom dinamikus vonásait hangsúlyozza. Amennyiben a vektort nem mint helyvektort, hanem mint mozgási utasítást tekintjük, párhuzamba állíthatjuk a sík tetszőleges helyzetű egyenesein, valamint görbéin kijelölt haladási irány mentális fogalmával.

Következtetések

- Az irányítás komplex fogalom, mely a matematika története során csak egészen későn vált szükséges eszközzé. Hilbert fogalmazta meg az irányított egyenes és sík első egzakt definícióját a XIX. század végén. Ez a tény arra figyelmeztet, hogy az irányfogalom bevezetésénél és gyakorlásánál nekünk is körültekintően kell eljárni. Nem felejthetjük el, hogy komplex geometriai és topológiai fogalomról van szó, mely a hétköznapi élet szituációiból származtatható, ugyanakkor a precíz definíciók megfogalmazása és a kérdéskör alapos megértése egészen nehéz.
- A fogalmak megjelenésének sorrendje a matematika történetben, ill. az axiomatikus tárgyalásmódban segítségünkre van abban, hogy a hozzájuk kapcsolódó feladatok nehézségi szintjét meghatározzuk.
- A lényeges vonások és a kapcsolódó fogalmak azonosítása hozzájárul ahhoz, hogy kialakítsuk a fejlesztés résztémaköreit. Hasznosnak tűnik, ha foglalkozunk pl. a *között*, a *lineáris és ciklikus rendezés*, a *permutáció*, a *vektor* fogalmakkal.
- A feladatok, tevékenységek tervezésénél érdemes figyelembe venni a három különböző elméleti megközelítést, valamint az axiomatikus felépítésből megismert logikai kapcsolatokat.

Az irányítás fogalmához vezető lehetséges utakat megvizsgálva úgy látjuk, hogy célszerű a tanítás során tekintettel lenni ezek mindegyikére, mert bármelyikük hozzásegíthet a fogalomkör alaposabb megértéséhez. Nem felejtkezhetünk el arról a tanulásról sem, hogy miként a matematikusok is saját felfogásuknak megfelelően más-más jellemző vonást emeltek ki, a gyerekek sem egyformák, ezért van, akit az egyik megközelítés, van, akit a másik segít hozzá a könnyebb megértéshez.

4. AZ IRÁNYÍTÁS FOGALMÁNAK MATEMATIKA DIDAKTIKAI ELEMZÉSE

Az irányítás fogalmkörét didaktikai szempontból vizsgáljuk, s utalunk az előző fejezetben ismertetett matematikai megközelítésekre.

Célunk, hogy a matematikai, matematikatörténeti és matematika didaktikai elemzés alapján meghatározzunk egy olyan lehetséges tananyagot, mely a térbeli tájékozódó képesség fejlesztését, ezen belül az irányfogalom alakítását szolgálja.

A vonatkozó matematika didaktikai irodalom elemzésével a következő kérdésekre keressük a választ:

1. Hogyan foglalkozunk az irányítással az iskolai matematikában?
2. Melyek azok, a fogalom szerkezetéből adódó, kritikus momentumok, melyeket a hangsúlyoznunk kell?
3. Milyen életkorban, milyen lépésekben lehet a nevezett témát tanítani?

4.1. AZ IRÁNYÍTÁS FENOMENOLÓGIAI ELEMZÉSE

Az irányfogalom didaktikai elemzését Freudenthal (1983) didaktikai fenomenológiai elméletére támaszkodva végezzük. Célunk, hogy a didaktikai fenomenológiai megközelítést az irányítás matematikai fogalmára alkalmazzuk.

Freudenthal szerint egy fogalom tanításában az első lépés a fogalomhoz kapcsolódó jelenségek (fenomenonok) megkeresése, majd a mentális objektumok megkonstruálása. Mentális objektumon valamely matematikai tartalomról az agyban megjelenő képzetet értünk. A második lépés, amennyiben lehetséges, a mentális objektumok matematizálása, azaz a matematikai fogalmak kialakítása.

Az előző fejezet matematikai elemzéséből kitűnt, hogy az irányfogalom geometriai és topológiai vonásokat egyaránt hordoz. Didaktikai szempontból azonban inkább a topológiai fogalmakkal (összefüggőség, folytonosság, külső-belső stb.) mutat rokonságot.

A topológia mentális objektumai, folyamatai, viszonyai fontosak, megszokottak. A naív topológiai fogalmak könnyen leképezhetők az emberi agyban, ugyanakkor kevésbé van szükség fogalmi precizításra, ezért nem könnyű tananyagként látni őket. Hiba lenne, ha az iskolában a topológiai fogalmakat többnek tekintenénk mentális objektumoknál, folyamatoknál, relációknál, és rosszul értelmezett matematizálásnak vetnénk alá. A topológiában a fogalomalkotás igénye és elérhetősége messze alatta marad annak, amit pl. az alakzatok geometriájának didaktikájából ismerünk. A matematikatörténet alátámasztja ezt az elgondolást, hiszen a topológia kialakulása csak a XX. sz. elejére tehető.

Az általunk vizsgált irányfogalom is ebbe a kategóriába tartozik. Ismerjük az *előtt-mögött*, *alatt-felett*, *jobb-bal*, *jobbfordulat- balfordulat*, *jobboldal-baloldal*, *jobbcsavar-balcsavar* kifejezéseket, ezeket többnyire nem az iskolában, hanem a hétköznapi élet gazdag kontextusain keresztül sajátítjuk el. A tanár feladata nem az, hogy a fentiek pontos matematikai leírását megtanítsa, hanem az, hogy olyan mindennapi szituációkat és problémákat keressen, melyek segítik a tanulók tudásának elmélyítését, bővítését.

Az irányítás mentális objektumának megalkotása Freudenthal szerint a topográfiai kontextuson keresztül történhet.

A topográfia szó szerint helymeghatározást jelent. A topográfiai kontextus több ennél, a háromdimenziós térben helyek mentális egymás mellett létezőként fogható fel. Ezek lehetnek objektumok, objektumok és megfigyelők vagy megfigyelők helyei. A topográfia szoros tartalmi kapcsolatban van ugyan a geometriával, de a topográfiai kontextusból nem juthatunk el a geometriai értelemben vett fogalomalkotáshoz.

A topográfiai kontextus leképezése az agyban, valamint ennek verbális vagy egyéb módon történő kifejezése függ az egyén általános fejlettségi szintjétől. Egy útvonal elmagyarázásának nehézsége tehát vagy abból fakad, hogy hiányzik az útvonal mentális képe, vagy abból, hogy hiányoznak a megfelelő kifejezőeszközök. Ugyanakkor egy megfelelő fejlettségi szinten az azonos kultúrkörbe tartozók között sem a mentális képben, sem a kifejezőmódban nem mutatkozik nagy eltérés. Ennek köszönhető, hogy képesek vagyunk egy útvonal elmagyarázására és megértésére.

Freudenthal a topográfiai kontextust elsősorban a mentális kép kialakulása szempontjából vizsgálja, de utal a kialakult kép eltérő kifejezési módjaira is.

Az elemzést az objektumok térbeli elhelyezkedésére utaló ellentétpárokkal, az ún. polaritásokkal kezdi. Ezeket az ellentétpárokat a magyar pedagógiai szakirodalom térbeli viszonyszavaknak nevezi (*alatt-felett, előtt-mögött, kívül-belül, jobbra-balra* stb.).

Egy iránypár lehet lineáris (*alatt-felett, előtt-mögött, kívül-belül, jobbra-balra*) vagy ciklikus (*jobbfordulat-balfordulat*) természetű. Előbbi az egyenessel, utóbbi a körrel modellezhető.

Lineáris polaritások

Megkülönböztethetünk irány- és oldalpolaritásokat:

Az *alatt-felett* polaritás kitüntet egy irányt és egy sorrendet, mely a magasabban-alacsonyabban, fentebb-lentebb helyzetekben, számszerűen pl. a liftben az emeletek kijelzésénél, vagy a lejtőn való haladás függőleges komponensénél jelenik meg. Hasonló polaritás az *eleje-vége*. Ezek az ún. iránypolaritások, melyek mentális objektumnak tekinthetők, és elvezethetnek a matematikai vektorfogalomhoz.

Más típusú az *oldal-ellenkező oldal* polaritás. Ha ezt pl. az emberi testre vonatkoztatjuk, akkor a *jobb-bal*, ha peremes vagy zárt felületekre, akkor pedig a *kívül-belül* polaritásokhoz jutunk. A *jobb-bal*, *kívül-belül* statikus polaritások, de meghatározhatnak egy mozgást: egyik oldalról a másikra, azaz *jobbról balra, kívülről befelé*. Ezek is iránypolaritásnak tűnnek, de bizonytalanabb irányról van szó. Egy utca egyik oldaláról több irányban juthatunk át a másikra, s egy erdőből több irányban mehetünk ki.

Az *előtt-mögött* polaritás kettős természetű. Saját *előtt-mögött* polaritással rendelkező objektumoknál (pl. ember, szekrény) irány jellegű, más esetben (pl. ház) inkább oldalpolaritásként viselkedik.

A polaritásokat vonatkoztathatjuk magukra az objektumokra (élőlényekre, tárgyakra), vagy a térben elfoglalt helyükre. Ha az objektumok rendelkeznek valamilyen polaritással, azt a térben elfoglalt normál helyzetük alapján éppúgy meghatározhatjuk, mint a tértől függetlenül.

Az *alatt-felett* polaritást például az ember, a ház, a fa stb. térbeli helyzetétől függetlenül megtartja még akkor is, ha ezek között a helyzetek között van egy kitüntetett, amely egybeesik a tér polaritásával. A tér *fent-lent* polaritása, mely átvihető az egyik helyről a másikra, az emberi szervezet egyensúlyának és a szabadesésnek a következménye.

A polarítások értelmezéséhez elsődleges, hogy tisztában legyünk az emberi test polaritásaival.

Az emberi test két saját iránypolaritással (*alul-felül* és *elől-hátul*) rendelkezik. Ezek megkülönböztetését könnyen megtanuljuk, míg a szimmetriánk miatt a *jobb-bal* (oldal)polaritást, melyet pedig az előző kettő egyértelműen kijelöl, nehezen jegyezzük meg. A *jobb-bal* irány matematikailag ugyan egyértelmű, viszont azt, hogy a két lehetőség közül melyiket nevezzük *jobbnak*, empirikusan tanuljuk meg. A tanulásban két fázis figyelhető meg: Előbb megkülönböztetjük a két oldalt (műveleti szint), majd megnevezzük (verbális szint). A folyamat hasonló pl. a színek tanulásához: előbb tudjuk, hogy két különböző színről van szó, s majd csak utána tanuljuk meg a nevüket.

Újabb nehézségek keletkeznek, ha a saját testünkkel való kapcsolat lazul, ilyenkor a *jobb-bal* megkülönböztetést motoros tevékenységgel vagy a saját testünkön szerzett tapasztalatokkal segítjük (Pl. egy cipőről akkor tudjuk eldönteni, hogy *jobb-* vagy *ballábás*, ha saját lábunk mellé téve összehasonlítjuk).

További lépés, amikor valamely folytonos transzformáció (pl. elmozdítás) révén a *jobb-bal* polaritást átvisszük saját testünkről más objektumokra. Más ember esetében konzekvensek vagyunk, hiszen az ő *elől-hátul*, és *alul-felül* polaritása egyértelműen adott, tehát a *bal-jobb* is. Csupán a hozzánk viszonyított helyzet határozza meg, hogy ezek a mi polaritásainkkal egyezők, vagy ellentétesek. Élettelen tárgyak esetén már nem vagyunk következetesek. Hiába tüntetjük ki például egy szekrény *elejét*, és *tetejét*, ha az velünk szemben áll, azt nevezzük *jobb* oldalának, amelyik megegyezik a mi *jobb* oldalunkkal. Egy fényképnél pedig nem tudunk dönteni, mindig meg kell mondanunk, hogy a kép *jobb* oldalára, vagy a rajta lévő ember *jobb* oldalára gondolunk.

Az *elől-hátul* használatában is vannak bizonytalanságok. Ha valaki egy szobában ül, és az utcáról nézzük őt, kérdés, hogy az ablak *előtt* vagy *mögött* ül-e. Hasonlóan nehéz eldönteni, hogy ha valaki a ház *hátuljánál* áll, mit jelent számára a ház *előtt* kifejezés. Ezekben az esetekben az *előtt-mögött* inkább oldalpolaritásként viselkedik, s a háttérben az *itt-ott* (*ez-az*) ellentétpár áll. Az *itt-ott* más polarítások viszonyításának eszköze, s így bizonyos félreértelmezések mögött ennek implicit jelenléte áll.

Milyen sorrendben tapasztalják meg, szerzik meg mentálisan, építik fel fogalmilag a felsorolt polarításokat a gyerekek? Piaget szerint a *kívül-belül* az első (Piaget, 1970, 132. old.), Freudenthal szerint azonban az *itt-ott* mint a viszonyítás alapja megelőzi a többi.

Ugyancsak az *itt-ott* egy változata, a *közel-messze* polaritás, melynek kérdése a megfigyelő és az észlelt objektum egymáshoz viszonyított helyének változtatása során merülhet fel. A megfigyelő helye a valódi helyszín, ahonnan nézzük a világot, egy konkrét „*itt*”. A különböző objektumokat egy ilyen helyről észlelve alkotjuk meg. A jobb észlelés érdekében természetesen megváltoztatjuk megfigyelőhelyünket, vagy - amennyiben lehetséges - az objektum helyét.

Eddig a lineáris polarítások statikus vonásait emeltük ki. Létezik azonban egy dinamikus megközelítési mód is. A lineáris polarítások a térben elhelyezett egyeneseken saját testünkkel összefüggésben mentális utazásokat tesznek lehetővé. Perspektívaváltással minden térbeli egyenesen megadhatók úgy, hogy jelezzük, gondolatban hogyan utaznánk végig rajta. Az absztrakciónak ezen a szintjén a térbeli lineáris polarításokat helyettesíthetjük az időbeli *múlt-jövő* polaritással. A jelenség matematikai alapja a lineáris rendezés (3.1. fejezet, 37. old.).

Ciklikus polaritások

A bemutatottaktól eltérően más természetű a *jobbfordulat-balfordulat* polaritás. A *jobb-bal* sem műveletileg, sem fogalmilag nem vonja maga után ennek megkülönböztetését, mert azt egy egészen más kontextus eredményezi: az „elől” irány a legrövidebb úton elfordul a *jobbra* lévő helyzetbe.

Az egymástól elkülönített lineáris polaritásokból még nem vezethető le a sík irányítása. Szükség van egy forgási irány előírására, vagy egy egyszerű, zárt görbén a körüljárási irány megadására. Az ember „magában hordja a forgási irány érzetét”, és ezt viszi át mozgással egyik helyről a másikra. Matematikailag ez a körüljárási irányt meghatározó forgás eltolásával fejezhető ki.

Az, hogy a két ellentétes forgási irány közül melyiket nevezzük *jobbnak* ill. *balnak*, összefügg az emberi testtel. Ha a síkon állunk, a *jobbfordulat* azt jelenti, hogy a tekintet a *jobb* kéz irányába elfordul (Az „elől”-ből „jobb” lesz.) Ha a sík előtt állunk, a *jobbfordulat* azt jelenti, hogy a „fent” „jobb”-ra fordul. Ha a síkban vagyunk, a *jobbfordulatot* nem tudjuk eldönteni. (Gondoljunk pl. arra, hogy egy kerékpáron ülve nem tudjuk megállapítani, hogy a kerék *jobbra*, vagy *balra* fordul el.)

Azt látjuk tehát, hogy a *jobb-balfordulat* megkülönböztetése a sík a két lineáris polaritásával is összefügg. Matematikailag ezt egy síkbeli irányított egyenes két oldalának definiálásával írhatjuk le. (38. old.)

A síkon a pozitív irány kijelölésének tehát három módja van: A pozitív forgásirány, egy egyszerű, zárt görbén a pozitív haladási irány, valamint egy irányított egyenes pozitív oldalának megadása.

A tér irányításának vizsgálatában a jelenségek szintjén beszélnünk kell a két csavartípus létezéséről. Ezt csavarhúzókon, dugóhúzókon, csigalépcsőkön, záruk kulcsolásán, növények csavarodásán, csomók kötésén, stb. figyelhetjük meg. Mozgási szempontból a *jobbcsavart* egy *jobbfordulat* és egy *befelé* haladás szintézise jelenti. Ha egy *jobbmenetes* csavart valamely „síkra” becsavarunk, az az egyik oldalról *jobb*-, a másik oldalról *balfordulatnak* tűnik. Ez abból következik, hogy a csavarás iránya meghatároz egy tengelyt, s hogy az erre merőleges síknak két oldala van. A jelenség mögött három lényeges momentum figyelhető meg: csavarási irány a térben, forgási irány a síkban, a sík két oldalának megkülönböztetése. Bármely kettő meghatározza a harmadikat.

Tükrözés

Az irányítás egyik legfontosabb fenomenológiai forrása a tükrözés. Olyan alakzat, amelyek egy „oldal” tükrözésével származnak egymásból, belső tulajdonságaikban nem különböznek. Kant a *Tiszta ész* című művében arra mutatott rá, hogy vannak térszemléletünknek olyan vonásai, melyek minden további magyarázat nélkül nyilvánvalóak. Példaként két egymás mellé helyezett *jobb*- és *balkezes* kesztyűt említett, melyekre rápillantva látjuk, hogy bár minden részletük megegyezik, mégsem azonosak (Lánczos, 1976, 40. old.). Ez a szemlélet lehet az oka annak, hogy az optikai „értelmünknek” rendszerint szüksége van a mozgásos „értelmünk” támogatására ahhoz, hogy különbséget tegyünk a *jobb-bal* és a *jobb-balfordulat* között.

Helymeghatározás, koordinátarendszerek

Az objektumok térbeli elhelyezkedésének tanulmányozása szükségszerűen elvezet a helymeghatározás kérdéséhez.

Egy pont helyének meghatározásához szükség van egy (nem feltétlenül valóságos) kiindulópontra, a tőle való távolságra, és egy irányra. Az irány lehet látott, mutatott, hallott irány, egy utca, folyó követése, egy iránytű által kijelölt irány, vagy egy fix egyenessel (síkkal) bezárt szög stb. A helymeghatározás globális keretek között valamilyen koordináta-rendszer segítségével történik. A leggyakrabban a polár- és a Descartes-féle koordináta-rendszert használjuk. A síkbeli polárkoordináta-rendszerhez a kiindulóponton kívül egy távolságra és egy irányra van szükség, melyet matematikailag egy fix iránnyal bezárt szöggel jellemezünk. A Descartes-féle síkbeli koordináták két, nem párhuzamos egyenestől mért távolságot jelentenek.

Piaget, aki a térérzet fejlődésének leírásában az egyenesből mint a lineáris rendezés modelljéből indult ki, a síkot ill. a teret mentálisan két ill. három egyenes Descartes-féle szorzataként konstruálta, ezért szerinte az irányok és szögek megalapozása csak a Descartes-féle koordinatizálás után történhet meg. Freudenthal azonban úgy vélte, hogy a ciklikus rendezés korábbi mentális objektum és tevékenység, mint a lineáris rendezés, s így a polárkoordináták nem csak történelmileg (csillagászati, földrajzi koordináták), hanem az egyén fejlődésének szintjén is megelőzik a Descartes-félét (Freudenthal, 1983, 413. old.).

A kétfajta koordináta-rendszer a sík irányításának két különböző módjával hozható kapcsolatba: Az irányított egyenes pozitív oldalának definiálása a két lineáris polaritás kapcsolatán keresztül a Descartes-féle koordináta-rendszer bevezetésének alapját adja, míg a síkon kijelölt pozitív forgásirány a polár koordináta-rendszerét.

A ciklikus rendezés tehát a polárkoordináták révén szerepet játszik a síkbeli irányok rendszerének mint mentális objektumnak a kialakulásában.

A Descartes-féle koordinatizációval kapcsolatban nem csak a geometriától az algebra felé mutató irányt érdemes megfigyelnünk, hanem a fordítottját is. Ez a koordináta-rendszer felfogható párhuzamos egyenesek két, leggyakrabban egymásra merőleges, rendszerének, s ezért az objektumok és információk vizuális szerveződésének modelljévé is válik (táblázatos elrendezés).

Összegzésképpen megállapítható, hogy az irányfogalom a következő mentális objektumokra épül: *elöl-hátul*, *alul-felül*, *jobb-bal*, *jobbfordulat-balfordulat*, *jobbcsavar-balcsavar*. Freudenthal szerint ezeket a mentális objektumokat a mozgás segítségével alkotjuk meg magunkban. A témakörrel kapcsolatban kialakuló mentális objektumokat nem az iskolában tanuljuk meg, hanem önállóan, pontról pontra sajátítjuk el a hétköznapi élet gazdag kontextusaiban. Ezek spontán adódnak, módosulnak, fordítva is létrejönnek, s a mentális objektumok, relációk és műveletek formálását szolgálhatják, segíthetnek azokat felismerni, megérteni és használni. A topográfiai kontextus tudatossá tétele Freudenthal szerint nem csupán az irányfogalom fejlődését szolgálja. A hétköznapi élet ezen szegmensének vizsgálata mintát adhat arra is, hogy a matematika más területén hogyan dolgozzunk a mentális objektumok kialakításán.

A topográfiai kontextus keretén belül ismertetett polarítások matematizálása nem más, mint az előző fejezetben ismertetett irányfogalom matematikai megalapozása.

Freudenthal ennek a folyamatnak a következő vonásait emeli ki:

A topográfiai polarítások két ellentétes oldalának megkülönböztetésére matematikailag a *pozitív* és *negatív* jeleket használjuk. A topográfiai polarítások nem igényelnek további kvantifikációt. Az *elöl-hátul*, az *alul-felül*, a *jobb-bal* lineáris polarítások, míg a *jobb fordulat-bal fordulat* ciklikus. Tehát ezek az egyenessel (bármely egyszerű nyílt görbével) ill. a körrel (bármely egyszerű zárt görbével) modellezhetők.

Az irányfogalomhoz kapcsolódó további két fontos jelenség: a tükrözés és a koordinatizáció.

A tárgyalt topográfiai szemlélet fejlődése mellett tekintettel kell lennünk mind a verbális, mind a verbálisról eltérő kifejezésmódok fejlődésére is. A kisgyermek a topográfiai tartalmat testmozdulattal, mimikával, gesztikulációval, különböző verbális komponensekkel (így-úgy, erre-arra, stb.) fejezik ki.

Később igényesebb kifejezési módokat sajátítunk el. Ezek egy része vizuális: alaprajzok, térképek, atlaszok, földgömbök, más része verbális (útleírások, szöveges magyarázatok). Minkét kifejezési mód megerősíthető ugyanakkor szimbolikus eszközökkel (koordináták).

4.2. A *JOBBRA-BALRA* RELÁCIÓ

A szakirodalom tanulmányozása során Freudenthal munkáján túl más, az irány illetve a tájékozódó képesség didaktikájával foglalkozó átfogó elemzéssel ugyan nem találkoztunk, de egy-egy kapcsolódó témakörre vonatkozó figyelemreméltó észrevétellel igen.

Elsőként Heinrich Besuden tanulmányát említjük a *jobb-balra* relációról (Besuden, 1990):

Besuden - Thurstone-ra hivatkozva - a térbeli tájékozódást a térszemlélet egyik komponensének tekinti, olyan képességnek, mely lehetővé teszi, hogy a térbeli viszonyok között eligazodjunk. Ez sok foglalkozás szempontjából igen fontos, pl. a pilóták, buszvezetők, mérnökök, technikusok, erdészek, kertépítők, várostervezők esetében. Természetesen minden átlagembernek szüksége van erre a képességre, gondoljunk a közlekedésre vagy a túrázásra. A térbeli tájékozódás alapját, Besuden szerint, elsődlegesen a *jobb-bal* fogalmak, valamint a *jobb-balra* relációk biztos elsajátítása jelenti.

A nehézségek már a *jobb-bal* fogalmaknál jelentkeznek. Ismert, hogy még a felnőttek is, különösen stresszhelyzetben, elbizonytalanodnak. Ez a fajta elbizonytalanodás a másik két polaritás, az *elől-hátul* és az *alatt-felett* esetén nem figyelhető meg. Saját benyomásaink és a gyakorló tanítókkal folytatott beszélgetéseink megerősítették ezt a feltételezést.

A *jobb* és a *bal* definiálásához az emberi test valamilyen aszimmetrikus tulajdonságát kell alapul vennünk. Az értelmező szótárak ezt úgy fogalmazzák meg, hogy a *baloldali* az, ahol a szívdobogást érezzük. Másik lehetőség az égtájakhoz viszonyítás, hiszen ezek a Nap járásából, s nem az emberi testből származtathatók. Eszerint az emberi test *baloldala* az, amely északra mutat, ha arccal kelet felé állunk.

A *jobb-bal* fogalom ismeretére a tanítás-tanulás folyamatában szükség van, hiszen meg kell érteni a tanár utasításait, egymás beszédét, el kell igazodni a tankönyvben, füzetben, az osztályteremben, az iskola épületében.

Besuden rámutat arra (Besuden, 1990, 464-465. old.), hogy a *jobb- és baloldali* fogalmának elsajátítása után a következő nehézséget a valamitől *jobbra*, valamitől *balra* relációk jelentik. Egy objektum ugyanis lehet egyidejűleg egy másiktól *jobbra*, egy harmadiktól pedig *balra* (ti. ha *közöttük* van). Hasonló a helyzet, mikor az *eleje-háta* ill. az *alja-teteje* fogalmakról áttérünk az *előtte-mögötte*, *alatta-felette* relációkra. Ezeknél a szituációknál már szükség van arra, hogy a testünkhöz viszonyított tájékozódási ismereteinket átvigyük más testekre.

Az objektum és a megfigyelő viszonyára utal a *jobb-balra*, a *jobbról-balról* kifejezések használata. Értelemszerűen témánkhoz tehát kapcsolódik a tárgyak különböző nézőpontból történő ábrázolásának tanítása. Egy tárgy *elől-*, *felül-* ill. *oldalnézeti* képeinek

vizsgálata segít a térbeli polarítások megértésében, s szükségszerűen tudatosítja azt, hogy egy-egy ilyen nézeti képet két módon kaphatunk meg: vagy a tárgy, vagy a megfigyelő megfelelő elmozdításával.

4.3. MENTÁLIS TÉRKÉP

Clements *A kisgyermek geometriai és téri gondolkodása* c. tanulmányában a térbeli tájékozódás fejlesztéséhez a térképek és a navigáció fontosságát hangsúlyozza (Clements, 1998). Szerinte a térbeli tájékozódás (mint a térszemlélet egyik, a vizualizációtól megkülönböztethető komponense) azt a képességet jelenti, hogy tudjuk, hol vagyunk, s hogyan jutunk el valahová a minket körülvevő világban, azaz képesek vagyunk saját helyzetünkhöz viszonyítva megérteni és használni a tér különböző helyei közötti kapcsolatokat. A fő kérdések, Clements szerint:

- Mikor tudják megalkotni saját környezetük mentális térképét?
- Milyen életkortól tudnak a gyerekek térképet használni, ill. készíteni?

Mentális térképen nem azt értjük, hogy valamilyen konkrét, kartográfiai értelemben vett térkép jelenik meg a fejünkben, hanem a környezetről szerzett téri információk mentális tárolását és ezek felhasználását a környezetben való eligazodásra.

Több kutatás kimutatta, hogy már az óvodások képesek kezdetleges, egyszerű mentális térkép megalkotására (Clements, 1998, 15. old.). Az azonban még nem világos, hogy ezek milyen típusúak. Úgy vélik, hogy a térképekben a viszonyítási pontokat a gyerekek által jól ismert tárgyak, épületek jelentik, ám a köztük levő kapcsolatok leírása nem pontos, nem tükrözi a reális viszonyokat.

Nyilvánvaló, hogy a tájékozódás, ezen belül a térképek megértése, hosszú tanulási folyamat. Már a legkisebbek rendelkeznek olyan képességekkel, amelyekre építhetünk. A gyerekek a térkép alapján elsődleges, direkt térbeli viszonyokat alakítanak ki, majd ezeket közvetlen környezetüktől függetlenül fogják fel. Ez a másodlagos értelmezés teszi lehetővé, hogy az ember valamilyen absztrakt viszonyítási rendszerbe képzelje magát („*mintha itt lennél*”), ez azonban ellentétben áll az elsődleges értelmezéssel. Nem képzelhetjük ugyanis magunkat az információon belülre, csak attól bizonyos távolságra, azon kívülre. Sok gyereknek nem az okoz nehézséget, hogy felismerje a térbeli kapcsolatokat, hanem az, hogy a konkrét és az absztrakt viszonyítási rendszer közötti átmenet megértése. Miközben fejlődik az a képessége, mellyel kapcsolatokat teremt a térbeli objektumok között, „kiterjed számára a tér mérete”, és képessé válik arra, hogy elsajátítsa a térbeli információk elsődleges és másodlagos jelentését és használatát.

Ahogy a mentális térkép megalkotásának képessége fejlődik, az alábbi problémákkal is kapcsolatba kerülünk:

- További képességek fejlesztéséhez vezető kérdések vetődnek fel: az irány (Merre?), a távolság (Milyen messze?), a helyzet (Hol?), és az azonosítás (Melyik tárgy?) kérdései.
- A mentális térképpel történő ismerkedés során a gyerekek az absztrakció, az általánosítás, a szimbolizáció gondolkodási műveleteit használják.
- Az agyban megjelenő térbeli elrendezésről információt nyerhetünk, ha a gyerekek egy adott térbeli elrendezés modelljét elkészítik. Ekkor a perspektíva kérdésével is szembekerülnek. Fel kell ismerniük, hogy egy elrendezés különböző nézőpontokból tekintve különbözőnek látszik, képesnek kell lenniük a különböző helyről készült fényképek alapján ugyanannak az elrendezésnek az azonosítására.

- A közvetlen környezetükben való eligazodáshoz szükséges *alatt-felett, előtt-mögött, jobbra-balra* irányok ismerete fontos szerepet kap a térkép és a valós világ összehangolásában. Egy későbbi szinten már a globális irányok, az égtájak ismerete is szükséges.
- A helymeghatározáshoz a gyerekek különböző viszonyítási rendszereket ismernek meg. Felmerül a kérdés, hogy képesek-e a koordináta-rendszer használatára is? Kutatások azt mutatják, hogy ez egy hosszú fejlődési folyamat, amely viszonylag korán jelentkező képességekre épül (Clements, 1998, 17-18. old.). Noha a gyerekek még nem érzik a koordináta-rendszer használatának igényét, képesek valamilyen rácsszerű elrendezésben eligazodni. Megértik pl. a torpedó játékban az egyes négyzetek azonosításának módját (két adat szükséges: az oszlopokat betűk, a sorokat számok jelentik, pl. H5).

4.4. AZ ISMERETSZERZÉS REPREZENTÁCIÓS SÍKJAI

Bruner reprezentációs elméletében (idézi Ambrus, 1995, 37. old.) azt vizsgálta, hogy az ember milyen kódok segítségével tárolja a külvilágból érkező információkat. Három különböző reprezentációs síkot különböztet meg:

- Enaktív sík: Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekvések, manipulációk révén megy végbe.
- Ikonikus sík: Az ismeretszerzés szemléletes képek, elképzelt szituációk révén megy végbe.
- Szimbolikus sík: Az ismeretszerzés matematikai szimbólumok, a nyelv segítségével megy végbe.

A három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. Az alsóbb évfolyamokon értelemszerűen az enaktív és az ikonikus reprezentáció dominál, ugyanakkor a nyelven keresztül a szimbolikus sík is jelen van.

Nem szabad azt hinnünk, hogy ezek a síkok a tanulási folyamatokban egyértelműen kijelölnek egy hierarchiát. Mint arra Freudenthal rámutat (Freudenthal, 1983, 30. old.), előfordul, hogy valaki nem azért fejezi ki magát például rajzzal, mert nincs tisztában a megfelelő szimbólumokkal, hanem azért, mert az a mód tűnik egy adott szituációban egyszerűbbnek. Feltehetjük tehát, hogy ezek a reprezentációs síkok egymás mellett, egymás erősítésére is szolgálnak.

A térbeli tájékozódás szempontjából Bruner reprezentációs elmélete ráirányítja a figyelmet a térbeli elrendezések megértésének különböző szintjeire.

Legegyszerűbb az enaktív síkon megoldani a térbeli problémát.

A térbeli szituáció leképezése a 2 dimenziós síkra már nehézséget jelent. Megjelennek a perspektivikus ábrázolás értelmezéséből adódó problémák. Kisgyermekkorban megtanulunk öntudatlanul váltani a függőleges síkról a vízszintesre, ahol a *bal-jobb* nem változik, az *alul-felül* helyet cserél az *elől-hátul*-lal. Mindezt úgy ábrázoljuk, hogy a nézőhöz közelebbi rész lesz *alul*, ill. *elől*, a távolabbi *felül*, ill. *hátul*.

Előfordulhat, hogy valamely írásbeli teszt feladatát a gyerekek nem térszemléletük fejletlensége miatt képtelenek megoldani, hanem azért, mert nem tudják értelmezni a térbeli szituáció rajzait.

A szimbolikus sík megjelenésével újabb akadályokba ütközünk. Alsó tagozaton a szimbolikus síkon elsősorban a nyelvet értük, a nehézség pedig a verbalizálásban, különösen az írásbeli megfogalmazásban rejlik.

A térbeli problémák különböző szinteken történő megoldását egy útbaigazítási feladattal szemléltetjük: „*Hogyan jutok el a vasútállomásról az egyetemre?*” Az enaktív sík most azt jelenti, hogy elkísérjük az illetőt, ténylegesen elvezetjük a kívánt helyre. Az ikonikus sík lehet pl. egy papírlap, amelyen felvázoljuk az útvonalat és nyíllal jelöljük a haladási irányt. A szimbolikus síkon pedig úgy oldjuk meg a problémát, hogy szóban elmagyarázzuk az útvonalat, miközben beleképzeljük magunkat az utazó helyzetébe.

A tájékozódás olyan témakör, melyet a felnőttek is igen gyakran gesztusok, testmozdulatok, rajzok segítségével értenek meg. A tananyag kidolgozásakor tehát hangsúlyt kell helyezni az enaktív reprezentációra, s a másik két reprezentációs sík átgondolt használatára.

4.5. A TÉRI GONDOLKODÁS KIALAKULÁSA

Piaget téri fejlődés-modellje

Piaget tanuláseméletéből most a térszemlélet fejlődésére utaló gondolatokat idézzük (Piaget, 1970).

A „téri fejlődés-modell” jellemzői:

- A térfogalom a helyváltoztatáson és a tárgyakkal való összehangolt cselekvésen alapuló reprezentációra épülve, az élet első 18 hónapjában alakul ki, ezért a téri tudást a cselekvés vagy az interiorizált cselekvés határozza meg.
- A térismeret ugyanazon a négy, minőségileg eltérő szakaszon keresztül fejlődik, mint a gyermek egyéb képességei. Ezeket Piaget az érzékszervi-mozgásos, a művelet előtti, a műveleti, a formális-műveleti szerveződés szintjeinek nevezte. Feltételezése szerint a szakaszok sorrendje rögzített, minden gyerek azonos sorrendben halad végig ezeken a fejlődési szakaszokon. Az új szakaszba való átmenet a már rendelkezésre álló sémák átszervezését jelenti.
- A téri gondolkodás kialakulása fokozatosan, előbb a topológiai, majd a projektív, végül az euklideszi viszonyok felfogásán keresztül történik.
- A képzeleti (mentális) tér kialakulását megelőzi az észleleti (perceptuális) tér kialakulása. A fejlődés a szerveződés szintjében, a téri relációk típusában, a reprezentációs módban (Bruner-féle síkok), a referenciarendszerben (egocentrikus, rögzített, koordinált) és a topografikus reprezentációban (mentális térkép) párhuzamosan alakul. (Séra-Kárpáti-Gulyás, 2002, 41. old.).

Piaget szerint a téri gondolkodás kialakulása a topológiai viszonyok felfogásával kezdődik. Mivel matematikai vizsgálataink azt mutatták, hogy az irányítás fogalomköre topológiai és geometriai jellegű, ezért didaktikai elemzésünk szempontjából különösen fontos, hogy melyek azok a topológiai relációk, amelyekkel a kisgyermek a legkorábban megismerkednek.

Az észlelés által megragadható legegyszerűbb téri viszony feltehetően a *szomszédosság*. A másik a szomszédos elemek *elkülönítésének* képessége, melyet a *sorrend*, vagy más néven a téri egymásutánosság követ. A negyedik téri viszony a *határolás* vagy „benne foglaltatás”, az ötödik pedig a *folytonosság* észlelésének képessége.

Piaget kísérletei szerint (ilyen a 10. oldalon bemutatott *Három hegy* probléma) a 7 éves gyerekek már tisztában vannak a topológiai viszonyokkal, de nagy részük még képtelen másik személy nézőpontja alapján felfogni egy téri elrendezést. Ez a nézőpontváltás 9-10 éves korban következik be. Fokozatosan értik meg, hogy egy adott tárgy helyzetét a nézőpont határozza meg: ha egy másik oldalról tekintjük ugyanazt a

tárgyat, megváltozik pl. a *jobb* és a *bal* értelme. A projektív és az euklideszi tér fogalomköre párhuzamosan alakul ki a gyerekekben, ennek kezdete arra az időre tehető, mikor a tárgyakat más nézőponthoz viszonyítva érzélik. Ekkor alakul ki az a viszonyítási rendszer, amely a tárgyak téri mozgásával, helyével, irányával kapcsolatos képesség fejlődésében alapvető.

A téri viszonyok nyelvi leírása

Piaget úgy gondolta, hogy a nyelvi és a fogalmi struktúrák, azaz a téri kifejezések és a téri fogalmak fejlődése párhuzamos. Ez a megállapítás mindmáig vitatott, azonban a kutatók abban egyetértenek, hogy a téri gondolkodás megismeréséhez szükség van a két terület kapcsolatának elemzésére. Bryant (1997) szerint (idézi Séra-Kárpáti-Gulyás, 2002, 49. old.) a nyelv ugyan szegényesebb információt nyújt a téri elrendeződésről, mint az észlelés, de geometriai struktúrájuk szempontjából a kettő egyenértékű. Erre utal pl. az, hogy elbeszélés alapján is képesek vagyunk egy térbeli helyzetről megfelelő mentális képet kialakítani (pl. a bevezetőben szereplő Agatha Christie idézet).

A téri viszonyok nyelvi leírása három vonatkoztatási keretet alkalmaz: az észlelő saját testre vonatkozó, egocentrikus tengelyeit (*fej-láb, elől-hátul, jobb-bal*), a környezeti, allocentrikus tengelyeket (az egyik tengely a gravitációnak megfelelő, a másik kettő vízszintes), valamint a tárgy belső tulajdonságai által meghatározott tárgy-tengelyeket. A téri nyelv a tárgytól és a megfigyelőtől függő szempont szerint tagolódik.

Pléh Csaba (1999) összefoglalása szerint a magyar nyelv téri kifejezései hármas kódolásúak. Lehetnek statikusak (*-ban, -on, mögött, előtt* stb.), vagy dinamikusak. Az utóbbi esetben különbséget teszünk aszerint, hogy a vonatkozási tárgy kiindulópont (*-ból, -ról, mögül, elől* stb.), vagy célpont (*-ba, -ra, mögé, elé* stb.). A vizsgálatok azt mutatják, hogy fiatalabb életkorban a gyerekek a statikus kifejezéseket használják inkább, s csak később a cél típusúakat. A legtöbb nehézséget a forrás megjelölésére utaló kifejezések alkalmazása okozza, feltehetően azért, mert ezek kognitív értelmezése is nehezebb (Pléh-Király-Lukács-Racsmány, 2003, 18. old.).

Az óvodai nevelés szerepe

A térbeli tájékozódó képesség intézményes fejlesztése nem az iskolába lépéssel veszi kezdetét, ezért röviden összefoglaljuk az óvodáskor jellemzőit, az óvodai nevelés idevágó aspektusait.

Három szint különíthető el annak a készség-együttesnek a kialakulásában, mellyel egy kisgyerek egy településen eligazodik. (Mérei-Binét, 1993, 162-166. old.).

- Cselekvésszerű tájékozódás: A gyermek a többször megtett utat mint begyakorolt, globális, tagolatlan cselekvéssort ismétli meg. Ezt követően a mozgásos élménymaradványok felidézése segít az ismert útvonalakon való tájékozódásban.
- Vizuális támpontok (élmények) megjelenése (pl. nagy kapu, piros kerítés, toronyház stb.). Ezek a támpontok szemléletesek és személyes jellegűek.
- Nagycsoportos korra tehető az irányok szerinti eligazodás megjelenése. Ez ekkor még elsődlegesen nem verbális megfogalmazásban, hanem kéz- és testmozdulatokban fejeződik ki. Az irány fogalma mint elvont művelet, a végrehajtott cselekvés, azaz a megtett út interiorizálásaként jelenik meg.

Az óvoda feladata tehát, hogy minél több mozgásos és vizuális élménnyel segítse a kisgyerek tájékozódásának fejlődését. (Zsámbokiné, 1999).

Mínt hogy a saját testhez való viszonyítás alapvető a tájékozódásban, szükséges, hogy a gyerekek először saját testükön tudjanak megbízhatóan eligazodni.

Az óvodai nevelés olyan környezetben lehet eredményes, melyben a kisgyerekek mozgásigényének megfelelően spontán szituációkban fejleszti téri és ezekhez kapcsolódó nyelvi képességeit. Ilyen szituációkat teremtenek a különböző udvari és szobai játékok (bújócska, fogócska, körjátékok stb.) valamint a testi neveléshez tervezett mozgásgyakorlatok (gimnasztika, testrészek egymáshoz való viszonya, mozdulatok egymásutánja).

Ebben az életkorban már megjelenik - a gyermekrajzokon keresztül - a térbeli szituációk síkbeli megfeleltetésének problematikája is.

A tájékozódás lehetőségei kisiskoláskorban

A kisiskolások emlékezete szintén mozgássorra, mozdulatokra, összképekre támaszkodik. A tájékozódásban a tárgyak, dolgok szomszédossága, egymásutánisága, a távolság és az irány kap szerepet (C. Neményi, 1999, 64. old.).

Az óvodás gyerek számára az irányt általában a nagytesti mozgások hordozzák, ugyanakkor ritkán kerülnek olyan szituációkba, melyekben fontos az irányok, a tárgyak állásának megkülönböztetése. Talán egy esetet, a cipő „kacsalábra” húzását kivéve.

Ezzel szemben az iskoláskorban az olvasás és írás tevékenységeinek megjelenésével a gyerek rengeteg ilyen helyzettel szembesül. Különbséget kell tennie pl. a *d*, a *b*, a *p*, a *q* betűk, a 3 és az írott *E* betű jele, az *S* és a kérdőjel, a 2 és az 5 stb. között.

Írás-olvasás közben nemcsak az írásjelek állása, helyzete révén kerülünk kapcsolatba a tájékozódás kérdéseivel, hanem az egymásutániság és szomszédosság révén is. Külön hangsúlyoznunk kell a sorrend és irány kapcsolatának fejlesztését, azaz az irányok megfordítására vonatkozó gyakorlatokat.

Ugyancsak az írás-olvasás megjelenésével függ össze, hogy a kisiskolások szembekerülnek a téri viszonyok síkbeli ábrázolásának nehézségeivel. A térbeli viszonyiszavak értelme ekkor sok változáson megy keresztül. Az *alatta-felette* a vízszintes síkban a *hozzám közelebb-tőlem távolabb* kapcsolatnak felel meg, míg a *mellett* fogalma leegyszerűsödik a *jobb-bal* fogalmak valamelyikére. Az *előtt-mögött* irány rajzban egybeeshet az *alatt-felett*-tel, a különbség ábrázolásához szükség van a perspektíva szabályaira. A síkbeli tájékozódás kifejezései is hordoznak magukban ellentmondásokat. Pl. olvasásnál a sor eleje-vége kifejezés valójában a *bal-jobb* oldal megkülönböztetését jelenti.

Igen zavaró és lényeges mozzanat a gyerek számára, hogy míg ő az írás, olvasás, rajzolás során vízszintes síkot használ, addig a tanító a tábla síkján, azaz egy függőleges síkon dolgozik.

A tájékozódás fejlődésének további nagy területe a viszonyítási rendszer változása. A gyerekek kezdetben saját, rögzített vonatkoztatási rendszert használnak, majd erről térnek át saját mozgó vonatkoztatási rendszerükre, illetve megtanulják a mozgásirányt, a tárgyak állását a külvilág tárgyaihoz is viszonyítani.

Az alsó tagozatos életkor lehetőséget nyújt arra, hogy a gyerekek megkezdjék az ismerkedést a koordináta-rendszerek matematikai fogalmával. Erre - a fokozatosságot betartva - különböző mozgásos vagy írásbeli játékos tevékenységgel kerülhet sor. Ilyenek a torpedó, az amőba, a kincskereső, a labirintus játékok vagy a sakk.

Tanulási zavarok

Meg kell említenünk a téri tájékozódás problémái és a különböző tanulási zavarok közötti jól ismert összefüggést. A leggyakrabban előforduló tanulási zavarok, a diszlexia, diszgráfia, diszkalukia egyik meghatározó tünete az iránytévesztés. (Dékány, 1995, Krüll, 2000).

A diszkalkulációs gyerekek esetében a szimbólumok felismerésében, a sorozatok képzésében, a szabályalkotásban, a helyi értékes írásmódban, az aritmetikai műveletek végzési sorrendjében okozhat nehézséget a tájékozódó képesség gyengesége.

4.6. ÖSSZEGRZÉS

A didaktikai elemzéssel elsődlegesen arra kerestük a választ, hogy hogyan tanítható az irányítás a matematikaórákon. Igyekeztünk megtalálni azokat a tanulás szempontjából kritikus pontokat, melyek a fogalom szerkezetéből, a hétköznapi élettel való kapcsolatából adódnak. Végül áttekintettük az irányfogalom - tágabb értelemben a téri tájékozódás - fejlődésének jellemző vonásait.

Következtetések

- A térbeli tájékozódás előfeltétele, hogy képesek legyünk saját testünkön, ill. saját testünkhöz viszonyítva tájékozódni.
- A térbeli viszonzyszavak (lineáris polarítások) használatának egyértelműségét a vonatkoztatási rendszer megadása biztosíthatja. Egy objektum helyzetét viszonyíthatjuk saját magunkhoz (a megfigyelőhöz), vagy egy másik objektumhoz.
- Az irányt jelölő fogalompárok (*jobboldal-baloldal, eleje-háta, alja-teteje*) megismerésénél bonyolultabb feladat az ezeknek megfelelő relációpárok (*jobbra-balra, előtte-mögötte, alatta-felette*) használata.
- Környezetünk térbeli viszonyait egy mentális térkép segítségével értjük meg. A megfelelő mentális térkép kialakítása előfeltétele a navigációs képességek fejlődésének. Az útvonalak leírásával a térbeli viszonzyszavak használatát dinamikus szituációkban gyakorolhatjuk.
- A lineáris irányításból a ciklikus irányítás fogalma közvetlenül nem vezethető le, így a tanítás során célszerű külön foglalkozni vele.
- A tájékozódás a helymeghatározáson keresztül elvezethet a koordinátarendszerek használatához.
- Egy térbeli helyzet síkban történő ábrázolása a viszonzyszavak értelmének módosulásához vezet (pl. az *alatta* és az *előtte* helyzetek egybeeshetnek).
- A térbeli helyzetek, útvonalak verbális kifejezése további nehézséget jelenthet.
- Az első osztályos gyerekek az írás-olvasás tevékenységén keresztül a korábbiaknál sokkal többször kerülnek olyan szituációkba, melyekben fontos az irányok ismerete.

A matematikai, történeti és didaktikai elemzéssel választ kapunk 1. kutatási kérdésünkre:

Milyen fogalmi, tevékenységi tartalmak tartoznak a térbeli tájékozódás témakörébe?

A térbeli tájékozódás képességét fejlesztő tananyagot hat témakör köré csoportosítjuk:

1. Térbeli viszonyszavak használata
2. Útvonalak leírása
3. Ciklikus rendezés
4. Tájékozódás a koordinátarendszerben
5. Geometriai transzformációk
6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

A fenti témakörökhöz kapcsolódóan olyan feladatokat, tevékenységeket tervezünk, melyek figyelembe veszik az elemzésekből levont következtetéseket.

Ezek a témakörök szoros kapcsolatban állnak egymással, így a kidolgozásra kerülő feladatok szükségszerűen komplexek lesznek, s nem csupán a térbeli tájékozódást fejleszthetik, hanem más, matematikai és nem matematikai képességet is.

5. A KUTATÁS MÓDSZERTANA

5.1. KUTATÁSI KÉRDÉSEK

Kutatásunk azt vizsgálja, hogy hogyan fejleszthető a kisiskolások térbeli tájékozódó képessége a matematikatanítás keretein belül. Ebből kiindulva az alábbi négy kérdésre keressük a választ:

1. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?
2. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétenek?
3. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük a tanulók meglévő ismereteit, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?
4. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

5.2. HIPOTÉZISEK

1. A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendőek a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.
2. Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonyszavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtlenül.
3. A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.
4. A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

5.3. A KUTATÁS FELÉPÍTÉSE

A kidolgozásra kerülő tananyagot a korábban leírtaknak megfelelően hat részre osztottuk, vizsgálatainkat ezekre a témakörökre vonatkoztattuk:

1. Térbeli viszonyszavak használata
2. Útvonalak leírása
3. Ciklikus rendezés
4. Tájékozódás a koordinátarendszerben
5. Geometriai transzformációk
6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

A kutatás három fő összetevője:

1. tájékozódó felmérés
2. tanítási kísérlet
3. utóteszt, késleltetett teszt

5.3.1. Tájékoztató felmérés

Célunk az volt, hogy az alsó tagozatos tanulók gondolkozási jellegzetességeit, meglévő ismereteit (1. kutatási kérdés), esetleges gondolkodási hibáit (2. kutatási kérdés) feltérképezzük és elemezzük. Tudni szerettük volna azt is, hogy korosztályonként milyen mértékben változnak a problémamegoldási stratégiák (4. kutatási kérdés).

Ezt az átfogó munkát tájékoztató felmérések előzték meg. Néhány fontos feladattípus megoldását már korábban, 2003-ban kipróbáltuk 3 különböző életkorú (6, 8, 10 éves) gyerekekkel, illetve végeztünk bemérő tesztet két második osztályban 2004 őszén.

A fejlesztőkísérletet megelőző felméréssorozatra 2005 tavaszán került sor (2005. április 25 – június 9.). Az iskolák kiválasztásának fő szempontja az volt, hogy a kísérletben résztvevő gyerekek összessége lehetőség szerint reprezentálja egy nagyváros kisiskolás-rétegének tényleges összetételét. Három debreceni általános iskolát választottunk ki

- Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolája¹ (88 fő)
- Vénkerti Általános Iskola² (83 fő)
- Fazekas Mihály Általános Iskola³ (106 fő)

A felméréseket mindhárom iskolában mind a négy évfolyamon egy-egy osztályban végeztük el. A kiválasztott osztályok egyike sem volt speciális képzési rendszerű, mindegyik saját iskolájának normál tanterve szerint haladt.

A következő táblázat a résztvevők számát mutatja:

Évfolyam	1.	2.	3.	4.	Összesen
Résztvevők száma	63	78	73	62	276

Az előzetes felmérés három részből állt:

- Első írásbeli feladatlap
- Páros interjúk
- Második írásbeli feladatlap

(A kitöltött feladatlapok és az interjúkról készült hangfelvételek megtalálhatók a Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Természettudományi Tanszékének archívumában.)

¹ A gyakorlóiskola nem körzeti beiskolázású, ide a gyerekek valamilyen felvételi eljárást követően kerülnek, így az iskola tanulóiról az a kép alakult ki, hogy ők jó képességű, a tanulásban motivált gyerekek.

² Az iskola egy lakótelepen található. Az itt tanuló gyerekek jórészt a környező panelházakban élnek, bár vannak közöttük olyanok is, akiket a város más részéről járatnak ide szüleik. Az iskola városi megítélése jó, azt mondhatjuk, hogy ide ún. „átlagos” gyerekek járnak.

³ Az iskola a belvárosban található. Tanulói összetétele nagyon heterogén, a gyerekek átlagos, vagy átlag alatti tanulási képességekkel rendelkeznek, sokan közülük valamilyen tanulási zavarral vagy szociális problémával küzdenek.

A feladatok eredete

A felmérés egyes részeiben szereplő feladatok eredete eltérő.

Van köztük olyan, amelyik ugyanilyen vagy módosított formában előfordul valamelyik alsó tagozatos tankönyvben (melléklet, 1. old. 1-3, 5 feladat, 2. old. 6-7. feladat, 3. old. 5. feladat, 7. old. 4. feladat, 8. old. 9. feladat, 9. old. 2-3. feladat, 10. old. 8-9. old.), iskolaérettségi tesztben (melléklet, 5. old. 4. feladat, 9. old. 1. feladat) vagy nemzetközi felmérésben (melléklet, 10. old. 6. feladat, 14. old. 8. feladat).

Egyes feladatokat (melléklet, 1. old. 4. feladat, 4. old. 7. feladat, 5. old. 2-3. feladat, 6. old. 10. feladat, 7. old. 5. feladat, 9. old. 4. feladat, 10. old. 7. feladat, 12. old. 9. feladat) az irányítás fogalmának matematikai elemzése, ill. más tapasztalat alapján (melléklet, 4. old. 9. feladat, 8. old. 8. feladat, 9. old. 5. feladat, 12. old. 10. feladat, 13. old. 4. feladat, 14. old. 5, 7. feladat, 16. old. 5. feladat) magunk konstruáltunk.

A mérés lebonyolítása

Az 1-2. osztályosok esetében feltételezhető szövegértési nehézségeket úgy igyekeztünk elkerülni, hogy a feladatokat közösen olvastuk fel, közösen értelmeztük. A 3-4. osztályban a tanulók önállóan értelmezték az utasításokat, s amennyiben igényelték, segítettünk nekik a megértésben.

A felmérés kiterjesztése

A felmérést korlátozott formában kiterjesztettük más évfolyam tanulóira is:

A két teszt feladataiból összeállítottunk egy újabbat, amelyet 16, matematikában tehetséget mutató, nyári táborozáson résztvevő 5. osztályos tanuló oldott meg. Arra voltunk kíváncsiak, hogy az általunk vizsgált problémák közül vannak-e olyanok, és ha igen, melyek azok, amelyek még az idősebb, jó képességű gyerekeknek is nehézséget okoznak.

Részben ez a megfontolás vezetett arra, hogy hasonlóan összeállított feladatsort oldassunk meg 40 tanítónak hallgatóval is. Ismert, hogy bizonyos irányítással összefüggő problémákkal a felnőttek is szembesülnek (Besuden, 1990). A hallgatók megoldásai alapján megfigyelhetjük, hogy a mi feladataink közül melyek tartalmazznak ilyen problémákat. Ők a teszt kitöltésének idején már túl voltak főiskolai tanulmányaik 2. évén, azaz teljesítettek két félév általános matematikai, valamint két félév matematika tantárgy pedagógiai kurzust. A gyakorlati képzésben azonban még csak kis mértékben vettek részt (hospitálás, egy félév csoportos tanítási gyakorlat). A kitűzött feladatok megoldásán túl arra kértük őket, hogy fűzzenek hozzájuk a várható tipikus tanulói hibákra vonatkozó didaktikai megjegyzéseket.

Első írásbeli feladatlap (2005. április 25 – 28.)

Ez a feladatlap elsődlegesen annak felmérésére szolgált, hogy a különböző évfolyamokon milyen nehézséget jelentenek a kidolgozott tájékozódási feladatok. Az összeállításnál figyeltünk arra, hogy kapcsolódjanak a fentebb említett résztémakörökhöz. Több esetben előfordult, hogy egy feladatot azonos formában vagy kisebb módosítással több évfolyamon is kitűztünk annak érdekében, hogy megállapíthassuk, milyen életkorban jelent kihívást az adott probléma (pl. melléklet, 1. old. 1, 3. old. 1, 5. old. 1, 7. old. 1. feladatok, 1. old. 4, 4. old. 6, 6. old. 8. feladatok, 4. old. 9, 6. old. 9, 8. old. 6. feladatok).

Páros interjúk (2005. május 9 – 20.)

Míthogy a tájékozódás erősen igényli a mozgásos, cselekvéses támogatást, nyilvánvaló, hogy csupán írásbeli úton nem kaphatunk pontos képet erről a képességről. A tájékozódás kifejezése erősen összefügg a kommunikációval, a testmozgással, a gesztikulációval, ezért a vizsgált osztályokban interjúk készítésével tovább finomítottuk az első teszt értékelése után kialakult képet. Minden osztályból 2-2 tanulót választottunk ki. Azért döntöttünk a páros interjúk mellett, mert így lehetőség kínálkozott annak a megfigyelésére, hogy egymás között hogyan kommunikálnak a témakörrel kapcsolatban. Nyilvánvaló, a gyerekek és a felnőttek nyelvezete, gondolkodásmódja eltér egymástól, előfordulhat, hogy ők egymás között könnyebben tisztáznak bizonyos megértésbeli nehézségeket. A párok kiválasztási szempontja változó volt. Közismert tény, hogy a vizsgálati párok értelmi, érzelmi, viselkedésbeli eltérései vagy éppen azonosságai befolyásolják a teljesítményt. Vannak olyan párok, akik jól tudnak együtt dolgozni, mert hasonló pl. a habitusuk, de olyanok is, akik éppen emiatt gátolják egymást. Ugyancsak találunk példát arra, hogy egy gyengébb és egy jobb képességű tanuló eredményes párost alkot, mert a jobb segíti a gyengébbet, fejlesztve ezáltal saját kommunikációs képességeit is. Ezzel ellentétben az is megfigyelhető, hogy a jobb képességű gyerek domináns, s a másik gondolkodás nélkül elfogadja társa véleményét.

Kutatásunknak nem célja a páros interjúk pedagógiájának alaposabb vizsgálata, ezért a párok kiválasztásakor csak a változatosságot tartottuk szem előtt. Voltak olyanok, akik az első tesztben mindketten gyengén, vagy mindketten jól teljesítettek, de dolgoztunk eltérő teljesítményű párokkal is. Volt példa arra, hogy olyan gyerekeket választottunk ki, akiknek a megoldásában valamilyen egyedi hibával vagy egyedi ötlettel találkoztunk. Az interjú során feldolgozott feladatok közül néhány az első tesztben is szerepelt, mert kíváncsiak voltunk a gyerekek gondolatmenetére, véleményére, de akadt olyan is, amelyben a szóbeli megoldási mód előnyeit használtuk ki.

Az interjúk mindegyikét hangszalagra rögzítettük, s a felvételekről részletes leírást készítettünk.

Második írásbeli feladatlap (2005. május 30 – június 9.)

A tájékozódó felmérést egy újabb írásbeli feladatlappal zártuk. Erre azért volt szükség, hogy tovább pontosítsuk megfigyeléseink eredményét.

A feladatok összeállításakor figyelembe vettük az első tesztel és az interjúkkal szerzett tapasztalatainkat, ezért abban az esetben, ha a probléma egyszerűnek bizonyult, nehezítettünk rajta (pl. melléklet, 9. old. 1. feladat), ha viszont a tanulók jelentős része nem tudott vele megbirkózni, igyekeztünk egyszerűsíteni, ill. csak egy-egy részaspektusra rákérdezni (pl. melléklet, 9. old. 2. feladat, 10. old. 6. feladat). Arra is törekedtünk, hogy olyan résztémakörökkel is foglalkozzunk, amelyekkel az első tesztben még nem volt módunk (pl. melléklet, 9. old. 4-5. feladat, 12. old. 9. feladat, 14. old. 5-7. feladat).

5.3.2. Tanítási kísérlet (2005. október – 2006. január)

A tájékozódó felmérés eredményei alapján kidolgoztunk egy kísérleti tananyagot. Célunk az volt, hogy konkrét osztálytermi szituációban vizsgáljuk a térbeli tájékozódó képesség fejlesztésének lehetőségeit.

A tanítási kísérlet a főiskola gyakorló iskolájának 2. b. osztályában zajlott. Ez az osztály az előző tanévben részt vett a tájékozódó felmérésben.

A gyakorlóiskolára elsősorban azért esett a választásunk, mert itt a gyerekektől nem idegen az a szituáció, mikor a tanítón kívül más is részt vesz az osztálytermi munkában. Azt a tényt pedig, hogy ide az átlagostól eltérő, esetleg a témakörben több ismerettel rendelkező tanuló jár, úgy tudjuk kutatásunkban értékelni, hogy feltételezzük, mindazok a megértésbeli problémák, amelyek ebben az osztályközösségben is előkerülnek, valószínűleg fokozottabb mértékben jelentkeznek más iskolák osztályaiban. Természetesen figyelniünk kell arra, hogy megfordítva, ennek az osztálynak az esetleges sikeres teljesítménye nem feltétlenül vonatkozható más összetételű osztályokra.

A 2. évfolyam kiválasztását az indokolta, hogy ez az időszak az, amikor a gyerekek már teljesen otthonosan mozognak az iskolában. Az írás-olvasás alapjait elsajátították, ezért kevésbé okoz problémát az írásbeli utasítások megértése vagy az írásbeli válaszadás. Ugyanakkor az írás-olvasás révén közvetve már meglehetősen gyakorlatra tettek szert a síkbeli tájékozódásban, így feltehetjük, hogy azok az irányításbeli problémák, amelyek a második osztályban mutatkoznak, ezzel a tevékenységcsoporttal spontán módon már nem vagy csak kis mértékben fejlődnek. Minthogy a tantervek, tankönyvek jórészt csak az első osztályban említik az irányfogalom tanítását, annak vizsgálatára is lehetőségünk nyílt, hogy második osztályban van-e erre még szükség vagy nincs.

A tájékozódó felmérés 3-4. osztályos eredményei hozzájárultak ahhoz, hogy pontosabban meghatározhassuk egy-egy probléma nehézségi szintjét, megbecsülhessük, melyekkel képesek ill. nem képesek megbirkózni a második osztályos tanulók.

A kísérleti osztály jellemzése:

Az osztály létszáma 27 fő. A legnagyobb óraszámot jelentő matematika, anyanyelv, természetismeret tantárgyakat ugyanaz a tanító tanítja, a többi azonban már mások (4 fő). A napközis foglalkozásokat vezető tanító és az osztálytanító között nagyon jó, közvetlen munkakapcsolat alakult ki.

Matematikából a Dinasztia Kiadó *A matematika csodái c.* tankönyvsorozatát használják, a tanmenet is ez alapján készült. A gyerekek a tankönyvön és a munkafüzetén kívül más feladatgyűjteményből is dolgoznak, esetenként (különösen a hallgatók gyakorlási ideje alatt) egyénileg összeállított feladatlapokat kapnak.

A kísérlet idején a tananyag elsődlegesen a kétjegyű számok szóbeli összeadása és kivonása, valamint a szorzás és az osztás műveleteinek értelmezése volt.

A gyerekek általános matematikai tudását az év eleji ill. a félévi felmérés alapján jellemezzük. A felméréseket az osztálytanító állította össze.

Az osztály átlagteljesítménye igen magas volt: az év elején 93%, félévkor 86%.

A megoldandó feladatok mindkét alkalommal a számtan-algebrai témakörbe tartoztak.

Az év eleji felmérésben számsorozatalkotása, összeadás-kivonás 20-as számkörben, nyitott mondatok megoldása, egyenes ill. fordított szövegezésű szöveges feladat szerepelt.

A 27 tanuló közül 20-an 90% feletti teljesítményt értek el, s a leggyengébb tanuló eredménye is 74% volt. A sorozatképzés, a műveletvégzés, valamint az egyenes szövegezésű szöveges feladat gyakorlatilag senkinek nem okozott problémát, a legtöbb hiba (8 főnél) a fordított szövegezésű feladatnál fordult elő, ők nem vették figyelembe, hogy a szöveg az elvégzendő művelet inverzére utalt.

A félévi felmérés összetétele és eredményei hasonlóan alakultak.

A számsorozatok képzése, számszomszédok meghatározása mindenkinek jól ment. Az összeadás-kivonás 100-as számkörben (pl. $100-(45+19)$), a szorzás-osztás (pl. $4\cdot(45:5)$), a nyitott mondatok megoldása (pl. $47-43<\triangle-4<24+11$) és az egy változós, szorzást igénylő szabályjáték már valamivel több, feladatonként 8-12 esetben okozott különböző problémákat. A két egyenes szövegezésű szöveges feladatot (egyik egy szorzással, másik két kivonással oldható meg) 5 kivétellel mindenki hibátlanul megoldotta.

Az osztály tanulói közül ezúttal 12-en értek el 90%, 10-en pedig 80% feletti eredményt. Mindössze két gyerek teljesítménye minősíthető gyengének (35-38%).

A tanítási kísérlet megtervezése

A tervezésnél arra törekedtünk, hogy az általunk összeállított tanítási anyagot úgy illesszük be a matematika tantárgy tanítási folyamatába, hogy a szokásos tanmenetet ne kelljen módosítani.

10 hetes kurzust terveztünk, melyen összesen 20 különböző tájékozódási probléma szerepelt. Az osztálynak heti négy matematikaórája volt, ezek közül hetente kettőn vettünk részt egy-egy feladattal, rendszerint az óra elején, általában 8-12 perc erejéig.

A 20 feladat összeállításakor az előzetes felmérés és az elméleti kutatás eredményeit egyaránt figyelembe vettük. Azokat az általunk meghatározott hat speciális témakörből választottuk, témakörönként hármat vagy négyet. Egy-egy témakörön belül a feladatok a spirálitás elvének megfelelően egymásra épültek, azonban az időben egymás után következők eltérő témakörökhöz tartoztak. Ezzel a felépítéssel azt igyekeztünk elérni, hogy a tanulók permanens módon foglalkozzanak a különböző típusú problémákkal, vegyék észre az egyes témakörök közötti kapcsolatot.

Mínt hogy a foglalkozás a tantervi óra része volt, azokat az osztálytanító vezette. Az előzetes megbeszélésen ismertettük a megoldandó feladatot, annak elméleti háttérét, a tanító tapasztalatára támaszkodva közösen terveztük meg a gyakorlati megvalósítást. Az órákon megfigyelőként mi is részt vettünk, azokat dokumentáltuk. Minden foglalkozásról jegyzőkönyv készült⁴, melyet írásbeli feljegyzésekkel, hang- vagy videofelvételekkel, fényképekkel, valamint a gyerekek esetleges írásbeli órai munkájával egészítettünk ki⁵. Az órák után a tanítóval értékeltük a végzett munkát, közösen kerestük a választ a felmerülő problémákra.

5.3.3. Utótesztek (2006. február 20-24.), késleltetett teszt (2006. április 24.)

A tanítási kísérlet befejezése után összeállítottunk egy utótesztet (melléklet, 22-23. old.). Célunk egyrészt az volt, hogy felmérjük, hogyan sajátították el a tananyagot, másrészt, hogy összehasonlítsuk teljesítményüket saját első osztályos teljesítményükkel, valamint a tájékozódó felmérésben szereplő évfolyamok teljesítményével. Kíváncsiak voltunk arra is, hogy az 1. osztályos eredmények feltételezhető javulása mennyiben köszönhető a fejlesztési programnak, s mennyiben a spontán fejlődésnek.

A kísérleti osztály (2.b.) az utótesztet a tanítási kísérlet után néhány héttel írta meg. A tananyag elsajátításának mikéntjét a kurzuson gyakorolt feladatokhoz hasonlókkal vizsgáltuk (melléklet, 22. old. 3. feladat, 23. old. 6-9. feladat). Tekintettel arra, hogy a

⁴ A jegyzőkönyvek kivonata: melléklet, 17-21. old.

⁵ A jegyzőkönyvek, a felvételek és a gyerekek munkái megtalálhatók a *Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Természettudományi Tanszékének* archívumában.

tanulók a tájékozódó felmérésben első osztályosként résztvettek, a feladatok közé olyan is került, amely része volt az előzetes teszt első vagy második osztályos feladatsorának (melléklet, 22-23. old. 1-6. feladat).

Ugyanezt az utótesztet megoldattuk a gyakorlóiskola egy másik második osztályával is (2. d.). Ők, tanítójuk elmondása szerint, nem fektettek hangsúlyt a téri tájékozódásra, hiszen ez második osztályban „már nem tananyag”. Az osztály hasonló képességű tanulókból áll, mint a kísérleti osztály.

Végül az utótesztet felvettük egy, az előzetes felmérésben szereplő másik második osztállyal is, ők a Vénkerti Általános Iskola korábbi első osztályosai voltak (2. t.). Minthogy rendelkezésünkre álltak ezeknek a gyerekeknek az első osztályban elért eredményei, a spontán fejlődés mértékének megfigyelését tűztük ki célul, hiszen itt is ugyanaz volt a helyzet, mint a 2. d. osztályban: a gyerekek a tanév során célzottan nem foglalkoztak a térbeli tájékozódó képességet fejlesztő feladatokkal.

Utolsó lépésként 2006 áprilisában a kísérleti osztállyal egy késleltetett tesztet írtunk az elsajátított ismeretek tartósságának felmérésére (melléklet, 24-25. old.).

Ennek összeállítása az előző tesztek alapján történt. A benne szereplő feladatok a korábbiak valamelyikével megegyezők vagy ahhoz hasonlóak voltak. A tanulók az eltelt 3 hónapban az előírt általános tanmenetet követték, nem foglalkoztak többet a tájékozódás témakörével, így eredményeik a tanítási kísérlet során elsajátított ismereteiket tükrözték.

6. A KUTATÁS TAPASZTALATAINAK ISMERTETÉSE ÉS ELEMZÉSE

A tapasztalatok bemutatását az alábbi 6 résztémakör köré csoportosítva végezzük.

1. Térbeli viszonyszavak használata
2. Útvonalak leírása
3. Ciklikus rendezés
4. Tájékozódás a koordinátarendszerben
5. Geometriai transzformációk
6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

Az egyes témakörök feldolgozását néhány, az előzetes felmérésben szereplő konkrét probléma bemutatásával és a tanulói válaszok elemzésével kezdjük. Ezekhez az elemzésekhez évfolyamonként összesítettük a három általános iskola tanulóinak válaszait, ilyen módon törekedve az adott populáció heterogenitásának figyelembevételére. Jelenlegi kutatásunk nem foglalkozik a különböző iskolákban mutatott teljesítmények összehasonlításával.

A második lépés a tanítási kísérlet ide vonatkozó foglalkozásainak ismertetése, a következtetések levonása.

Végül szólunk az utótesztek és a késleltetett teszt feladatairól, eredményeiről.

6.1. TÉRBELI VISZONYSZAVAK HASZNÁLATA

A címben az iskolaérettséget vizsgáló tesztek terminológiáját használjuk. A Nagy József és munkatársai által kidolgozott Prefer (Preventív Fejlettségvizsgáló Rendszer) és Difer (Diagnosztikus Fejlődésvizsgáló Rendszer) tesztek hat olyan „szociális motívumot és készséget” különböztetnek meg, melyek az iskolai léthez és a fejlődéshez nélkülözhetetlenek. Ezek a készségek: az írásmozgás-koordináció, a relációszőkincs, a beszédhanghallás, az összefüggés-megértés, a következtetés, és az elemi számolás. Tárgyalásunk szempontjából a relációszőkincs mint az eredményes szóbeli kommunikáció egyik feltétele érdemel említést. Az egyes nyelvekben 250-300 körüli köznyelvi relációsző létezik, ezekkel a térbeli, az időbeli, a hasonlósági, mennyiségi viszonyokat fejezzük ki. Azok a gyerekek, akik ennek a szókincsnek csak kis részét birtokolják az iskolába lépéskor, nehéz helyzetbe kerülnek, mert nem értik meg a magyarázatokat, utasításokat (Nagy-Józsa-Vidákovich-Fazekasné, 2002).

A térbeli viszonzyszavak használatát először statikus szituációkban vizsgáljuk.

Az irányítás fogalmának matematika didaktikai elemzése (43-54. old.) alapján a statikus szituációkra vonatkozó problémáknak három szintjét különböztetjük meg:

1. szint: A tanulók saját testükhöz viszonyítva különböztetik meg a térbeli polarításokat (*jobb-bal, alul-felül, előtt-mögött*).
2. szint: A tanulók a *jobb-bal* megkülönböztetést más személyhez viszonyítva végzik.
3. szint: A polarítások megkülönböztetése más, nem élő tárgyhoz viszonyítva történik.

Ebben a fejezetben vizsgálatainkat a lineáris polarításokra korlátozzuk.

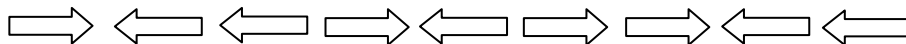
Megfigyeljük, hogy jelent-e problémát, és ha igen, milyen életkorban a különböző viszonyítási pontok használata, az ezek közötti váltás. Okoz-e félreértést a térbeli viszonzyszavak hétköznapi életben megszokott használati módja? Adódnak-e további nehézségek a *jobb-bal, előtt-mögött, alatt-felett* polarítások mellett a nekik megfelelő *jobbra-balra, előtte-felette, alatta-mögötte* relációpárok használatából? Milyen kérdéseket vet fel a térbeli szituáció síkba transzformálása?

A továbbiakban konkrét problémák bemutatásán és a tanulói válaszok elemzésén keresztül vizsgáljuk a gyerekek gondolkodásának jellegzetességeit.

6.1.1. A tájékozódo felmérés

1. probléma (1. szint)

Színezd késsel a jobbra mutató nyilakat!¹



Közismert feladatról van szó, mely rögzített szituációban a *jobb-bal* irány következetes megkülönböztetését kéri, saját testhez viszonyítva. Az irányítás fogalmának matematika didaktikai elemzése alapján úgy gondoljuk, hogy a jó megoldás előfeltétele a

¹ melléklet, 1, 3, 5, 7. old. 1. feladat

jobb-bal dominancia megléte, a két irány közötti különbség felismerése és megnevezése saját testen.

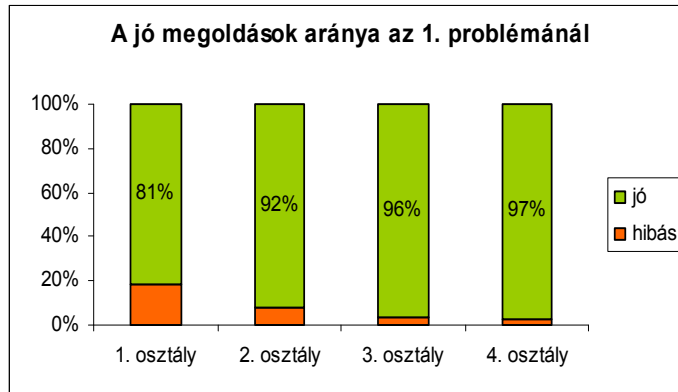
A problémát az első írásbeli feladatlapon, mind a négy évfolyamon kitűztük.

Tapasztalatok

A feladattal minden tanuló foglalkozott. A három iskola tanulójának évfolyamonként összesített eredményét a 6.1. ábra mutatja.

A jó megoldások számában az 1. és a 2. osztályosok között kimutatható a növekedés, feltehetően az intenzív írási-olvasási tevékenységnek köszönhetően.

2. osztálytól gyakorlatilag azonosan teljesítenek a tanulók, csaknem hibátlanul.



6.1. ábra

2. probléma (2. szint)

*Melyik kezét emeli a kisfiú? Írd a képek alá!*²



Hasonlóan az első feladathoz, itt is a *jobb-bal* megkülönböztetésről van szó, azonban most már más személyhez viszonyítva. A helyes válaszhoz a gyerekeknek a kisfiú helyébe kellett képzelniük magukat. A megoldás során ez gyakran mozgási támogatással történt, a képen mutatott pozícióba fordultak, közben mozdították saját *jobb* vagy *bal* kezüket. Így teremtettek kapcsolatot az enaktív és az ikonikus sík között.

A feladatot 1. (69 fő) és 2. (79 fő) osztályosoknak tűztük ki úgy, hogy az elsősök csak az első és a harmadik képet kapták.

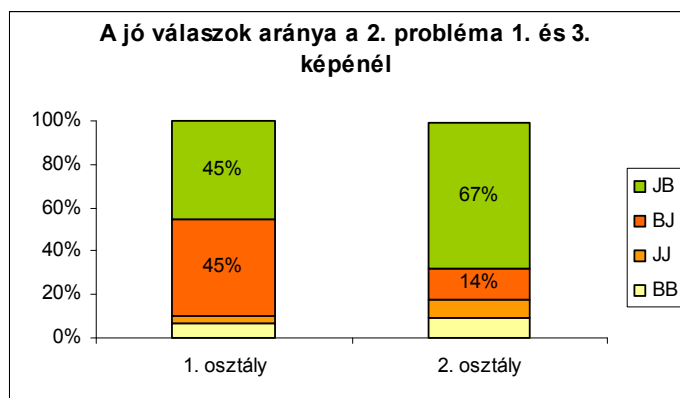
² melléklet, 1, 3. old. 2. feladat

Tapasztalatok

Először az elsősöknek és a másodikosoknak az első és a harmadik képre adott válaszait hasonlítjuk össze (6.2. ábra):

Ezekon a kisfiú előbb szemből, majd háttal látható, az első esetben a *jobb*, a másodikban a *bal* kezét emeli fel (JB). Ha figyelembe vesszük a helyzetváltozást, de eltévesztjük az irányt, akkor a válasz „*bal, jobb*” (BJ). Ha magunkhoz viszonyítunk, a válasz mindkét esetben „*bal*” (BB), ha emellett az irányt is tévesztjük, akkor mindkétyszer „*jobb*” (JJ).

Mindkét évfolyamon a legtöbb válaszban a két képen ellentétesnek tekintették a két



6.2. ábra

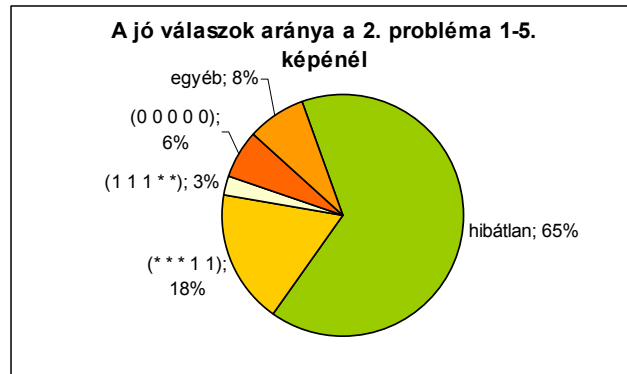
kezét, tehát feltételezhetjük, hogy a tanulók figyeltek a kisfiú helyzetének megváltozására. A hibás válaszok döntően az iránytévesztésből (BJ és JJ), és nem a viszonyítási pont tévesztéséből (BB és JJ) adódtak. Minthogy az 1. feladatban az elsősök iránytévesztése nem volt ilyen nagyarányú, feltehetjük, hogy az iránymeghatározás képessége ebben az életkorban még nem stabil, hiszen amint a feladat összetettebbé vált, már nem tudtak helyesen válaszolni.

Másodszor a második osztályosoknak az öt képre adott válaszait vizsgáljuk.

Az öt kép kiválasztásakor figyeltünk arra, hogy legyen köztük olyan, amelyiken a kisfiú a megfigyelőhöz képest oldalt áll. Mint Aman és Roberts kutatása kimutatta, azok a 6-8 éves gyerekek, akik a sajátjukkal azonos helyzetben helyesen állapítják meg az irányokat, más helyzetekben képzeletbeli forgatást (mentális rotációt) végeznek, s ekkor a hibák száma az elforgatás szögének növelésével nő (Aman, Roberts, 1993). Azt feltételeztük tehát, hogy az oldalhelyzetben levő kisfiúk esetében könnyebb a jó választ megadni, mert itt csak 90°-os mentális forgatást kell a gyerekeknek végezniük, nem pedig 180°-ost.

A jó válaszok arányát a 6.3. ábra mutatja. (Az egyes képekre adott helyes választ 1-gyel, a helytelen 0-val jelöltük.)

A tanulók 65%-a mind az öt képre hibátlanul válaszolt.



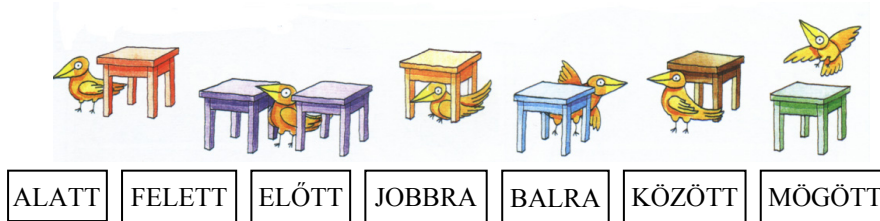
6.3. ábra

Fenti feltételezésünket látszik alátámasztani az a tény, hogy a hibázók között többen voltak olyanok, akik az utolsó két képre (oldalhelyzet) helyesen válaszoltak (***) (1 1), mint azok, akik az első háromra (1 1 1 **).

A másodikosok 6%-a mind az öt esetben rossz választ adott (0 0 0 0), ők a két irányt következetesen felcserélték.

3. probléma (3. szint)

*Hogyan helyezkedik el a madár a székhez képest? Kösd össze a képeket a megfelelő szavakkal!*³



A feladatot – módosítva - egy első osztályos tankönyvből (Mozaik Kiadó, Sokszínű matematika 1. első félév, 9. oldal) vettük át. Az eredeti utasítás a *Mesélj a képről! Használd az alatt, fölött, között, mellett, előtt, mögött kifejezéseket!* volt. Mi – a fenti formában - 1. és a 2. osztályosok számára tűztük ki.

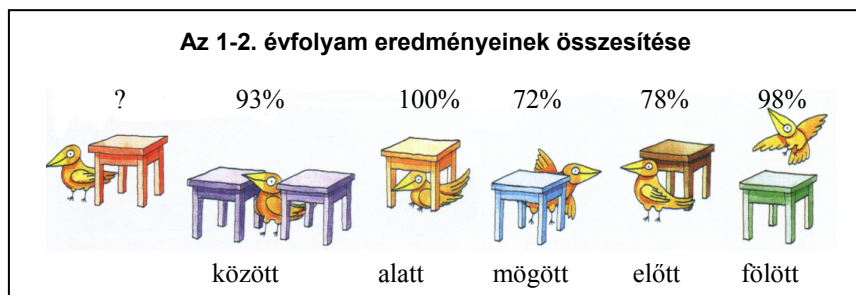
Megfogalmazásunk két szempontból nehezítette a tankönyvben szereplő problémát: A *Mesélj a képről!* utasítást úgy konkretizáltuk, hogy a madár helyzetét kellett egy élettelen tárgyhoz, a székhez viszonyítani. A szék azonban olyan viszonyítási tárgy, amely csak egy kitéüntetett helyzettel rendelkezik, ez az *alul-felül*. Ránézésre nem tudjuk megkülönböztetni sem az *elejét*, sem a *hátát*, sem a két oldalát. Ugyanakkor a madár helyzetét vizsgáljuk, tehát egy olyan objektumét, amelynél az *alul-felül* helyzeten kívül még egy, az *elől-hátul* is értelmezhető, hiszen a madárnak van arca.

A másik nehézség abból adódott, hogy a semleges *mellett* kifejezés helyett a *jobbra-balra* használatát kértük. Ebben az esetben más a válasz, ha a gyerek a képpel szemben állva magához viszonyít, mint amikor a képbe „befordulva”, a székhez.

³ melléklet, 1, 3. old. 3. feladat

Az a nehézség azonban, hogy egy síkbeli perspektivikus reprezentáció alapján kell egy térbeli helyzetet elképzelni, az eredeti problémánál éppúgy jelentkezhet, mint az általunk módosítottnál. Így pl. az 1. a 4. és az 5. képen az *előtt* és a *mellett* helyzet az ábra alapján egyaránt elképzelhető.

Tapasztalatok



6.4. ábra

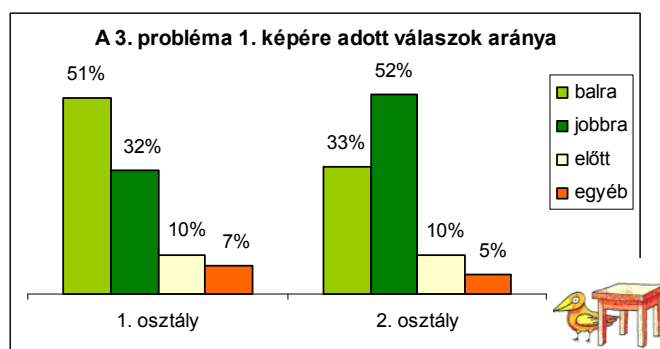
A képek alá írt tipikus válaszok arányát az 1-2. osztályosok eredményének összesítése után a 6.4. ábra mutatja.

Az első képről az összesítést nem végezhetjük el, mert ott a válaszokban nagy eltérés volt.

Megállapíthatjuk viszont, hogy három reláció esetén a megoldások gyakorlatilag megegyeztek. Nem okozott nehézséget a *között* reláció felismerése és az *alatt-felett* polaritás sem. Az utóbbi esetben feltételezhetjük, hogy a szék tetejének és aljának különbözősége segített, s az, hogy az *alatt-felett* polaritás iránya a térben egybeesik a gravitáció által kitüntetett iránnyal. Problémát jelentett viszont az *előtt-mögött* (4-5. kép), valamint a *jobb-bal* (1. kép) polaritások meghatározása.

Az alábbiakban részletesen elemezzük a tanulók válaszait.

Az 1. képnél nincs szignifikáns különbség a *jobbra* és *balra* válaszok között (6.5. ábra).



6.5. ábra

Alaposabban elemezve a feladatot, megállapítható, hogy itt a megoldás nem egyértelmű, mindkét válasz helyes.

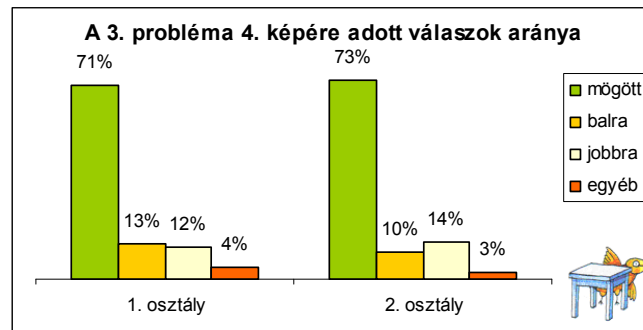
Hogyan határozzuk meg egy szék *jobb* vagy *bal* oldalát? Mikor mondjuk azt, hogy a madár a szék *bal* oldalán áll? A *bal-jobb* megkülönböztetést saját testünkről más tárgyra

kell átvinnünk. Élőlények esetén ez nem okoz nehézséget, hiszen náluk az *elől-hátul* irány egyértelműen adott, s ez, valamint az *alul-felül*, mind matematikai, mind hétköznapi értelemben egyértelművé teszi a *jobb-bal* oldalt is. Élettelen tárgyak esetén már nem járunk el ilyen következetesen, még akkor sem, ha annak van *eleje* és *háta*. Gondoljunk pl. egy velünk szemben álló szekrényre. Ennek *jobb* oldalát nem a tárgyhoz, hanem magunkhoz viszonyítjuk. A feladatban szereplő székek azonban nincs kitüntetve az *eleje*, így még a hétköznapi életben használt konvencióra sem támaszkodhatunk. Két lehetőségünk van: Ha az ábrázolt szituációt tükörképnek tekintjük, az *elől-hátul* irány ellentétes a miénkkel, az *alul-felül* megegyező, így a helyes válasz: *jobbra*. Ha azonban magunkhoz viszonyítjuk az elrendezést, a helyes válasz: *balra*. A probléma tehát az, hogy nem tudjuk, „honnan kell nézni a képet”, azaz nem tudjuk, hogy magunkhoz viszonyítsunk, vagy tükörképként tekintsük az elrendezést.

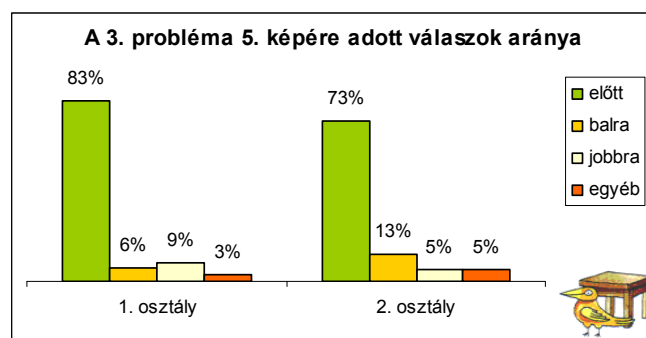
Ugyanezzel a problémával szembekerülhetünk akkor is, ha az *előtt-mögött* irányt kell megkülönböztetnünk. Igaz, a jelenlegi feladat megoldásaiban most azt látjuk, hogy a tanulók nagy része mindkét képet tükörképnek tekintette, és a *mögött*-et maguktól *távolabb*-ként, az *előtt*-et *közelebb*-ként értelmezték (6.6-7. ábra). Feltehetően azért, mert a térbeli szituációk síkba transzformálásánál megismert konvencióra gondoltak.

Együttesen tekintve a fenti három helyzetet, felfigyelhetünk még egy gondolkodási jellegzetességre. Az 1. képnél az 1-2. osztályosok kb. 10%-a az *előtt* relációt választotta, de figyelemre méltó a másik két esetben a *jobbra-balra* válaszok viszonylag magas száma is. Ezeknek, úgy gondoljuk, hogy azonos a gyökere: A madár önmagában meghatároz egy *előtt-mögött* irányítást, így elképzelhető, hogy a tanulók ebből indultak ki. Az első képen a madár ekkor valóban a szék *előtt* van (a szék van *mögötte*), a 4. képen a széktől *balra*, az 5. képen úgyszintén. Úgy látjuk azonban, hogy a tanulók a képeket egyenként elemezték, és nem egymással összefüggésben, mert nem volt a válaszok között dupla *bal* vagy esetleg dupla *jobb*.

Ez nyilvánul meg abban is, hogy sok olyan választ találtunk, amely a 4. képnél *mögött*, de az 5.-nél nem *előtt*. Úgy tűnik, hogy a két ellentétes irány megkülönböztetése ebben az életkorban még nem automatikus.



6.6. ábra



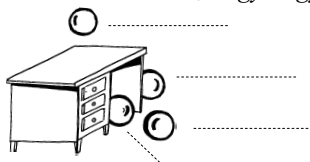
6.7. ábra

Fel kell tételeznünk azt is, hogy a „madár helyzete a székhez képest” utasítást könnyű összekeverni a „szék helyzete a madárhoz képest” utasítással.

Összességében megállapíthatjuk, hogy ez az „egyszerű” feladat több gondolkodásbeli kérdést is felvet, s a képekre nem adható egyértelmű válasz. A hétköznapi életből megismert hallgatólagos megállapodások további nehézségeket jelentenek, csakúgy, mint a képi ábrázolásból eredők. Igaz ez akkor is, ha visszatérünk az eredeti tankönyvi feladathoz. Az eredeti utasítás: *Mesélj a képről! Használd az alatt, fölött, között, mellett, előtt, mögött kifejezéseket!* ugyan elkerüli a *jobb-bal* megkülönböztetést, valamint megengedi, mind a szék viszonyítását a madárhoz, mind a madarat a székhez, de azt a kérdést változatlanul nyitva hagyja, hogy mi határozza meg az *előtt*-öt: a madár tekintete, a megfigyelő tekintete vagy ennek éppen a tükörképe. Egy konkrét tanítási helyzetben azonban a tanító és a tanulók kommunikációja rávilágíthat ezekre a viszonyítási szempontokra, és egyértelművé teheti őket.

4. probléma (3. szint)

Írd a labdák mellé, hogy hogyan helyezkednek el az asztalhoz képest!⁴



A feladat a Prefer-féle iskolaérettségi teszt egyikének módosítása. Az eredeti utasítás úgy szólt, hogy *Mutasd meg, melyik labda van az asztal a) alatt, b) fölött, c) mögött, d) előtt!*

Óvónókkal beszélgetve az ilyen típusú feladatokról, megtudtuk, hogy a helyes válasz erősen függ attól, hogy milyen sorrendben tesszük fel a kérdéseket. A fenti sorrend, valamint a gyerekeknek az az igyekezete, hogy mind a négy labdához más viszonyszót találjanak, segít elkerülni az *előtt-mögött* szavakban rejlő többértelműséget.

Ez utóbbinak a megfigyeléséhez fogalmaztuk át a feladatot, s a gyerekekre bíztuk, hogy a négy esetben milyen térbeli viszonyszavakat használnak. Míg az eredeti feladat nagycsoportos óvodásoknak készült, mi a módosított változatot 3. osztályosoknak tűztük ki.

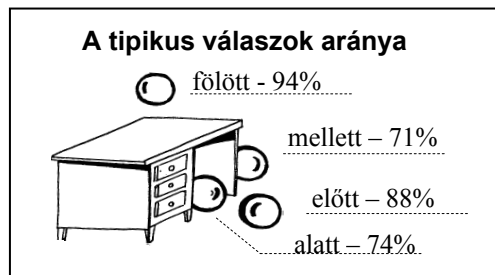
⁴ melléklet, 5. old. 4. feladat

A megoldások elemzése előtt érdemes megjegyezni, hogy ugyan a hétköznapi életben előfordul, matematikailag mégsem helyes, ha az *előtt* és *mögött* nem ellentétes irányt jelöl, mint ahogy az az eredeti feladatban történik. Itt ugyanis az *előtt* 90°-os elforgatásával kell a *mögött*-et megkapnunk.

A problémát az előzővel összevetve, számos hasonlóságot találunk. Mindkét esetben térbeli szituáció képi megjelenítéséről van szó, két élettelen tárgy viszonyát kell meghatározni. Az előbbivel ellentétben most az a tárgy, amelyikhez viszonyítanunk kell, rendelkezik kitüntetett *előtt-mögött* és *alatt-felett* iránnyal (az asztal), ugyanakkor ez az *előtt-mögött* irány a megfigyelőhöz képest 90°-kal el van fordítva. A labda, vagyis az a tárgy, amit viszonyítunk, nem rendelkezik semmilyen kitüntetett iránnyal, még az *alatt-felett*-tel sem.

Tapasztalatok

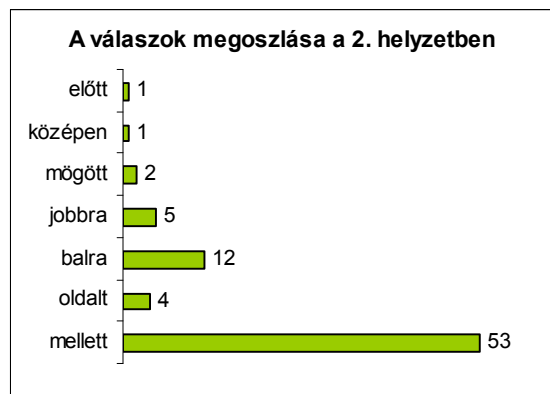
78 harmadik osztályos tanuló oldotta meg a feladatot, a 6.8. ábrán az egyes helyzetekhez írt leggyakoribb viszonzyszavakat tüntettük fel, s azt, hogy ezt a tanulók hány százaléka választotta.



6.8. ábra

Két esetben, a *mellett* és az *alatt* esetében, érdemes külön is megvizsgálnunk, milyen egyéb válaszok születtek.

A labda 2. helyzetében a viszonzyszavak megoszlását a 6.9. ábra mutatja. (Az *oldalt* megjelölést a *mellett*-tel egyenértékűnek tekinthetjük, csakúgy, mint a *jobbra-balra*-t.)

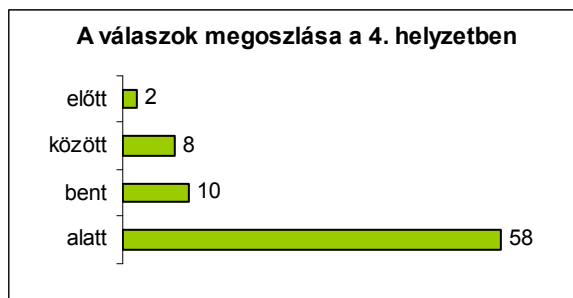


6.9. ábra

Látható, hogy gyerek nagy része (57 fő) szívesebben használta a semleges *mellett* (vagy *oldalt*) relációt, nem tartották szükségesnek, hogy a *jobb ill. bal* oldalt elkülönítsék. Akik mégis vállalkoztak erre, nagyobb számban döntöttek a *balra* mellett, ami azt valószínűsíti, hogy az asztal helyébe képzeltek magukat.

Érdeemes elgondolkodni azon, hogy az iskolaérettségi teszt által ajánlott *mögött* szót, mindössze 2-en használták, feltehetően azért, mert a harmadikosok már érzik, hogy a *mögött-előtt* polaritás ugyanahhoz a két ellentétes irányhoz tartozik, s mivel most az *előtt*-öt az asztal eleje kijelölte, a *mögött* nem lehet annak 90°-os elforgatottja.

A 4. helyzetben szintén elég nagy volt azok száma, akik nem az *alatt* választ adták (6.10. ábra).



6.10. ábra

Két tanuló kivételével a többiek a *bent* ill. a *között* szavakat használták. Ezeket mind Piaget, mind Freudenthal elemibb relációknak tekintette az iránypolaritásoknál, s használatuk ebben a helyzetben egyébként is indokoltnak tűnik. (A képen az asztal nem tömör tárgy, s ha egészen pontosak akarunk lenni, akkor azt mondhatjuk, hogy a labda az *asztallap* alatt található.)

A Térbeli viszonyiszavak használata c. témakörhöz kapcsolódóan még további 3 feladatot készítettünk a különböző évfolyamok számára, mindegyik valamilyen térbeli elrendezés síkbeli megfelelőjét ábrázolta (melléklet, 3. old. 4. feladat, 5. old. 2, 3. feladat). Ezekben szintén felfedeztük a viszonyítási pont eldöntésének problémáját. A gyerekek gyakran elbizonytalanodtak, hogy az adott szituációban magukhoz vagy az ábrázolt tárgyhoz kell-e viszonyítaniuk.

Az interjúk során több esetben tapasztaltuk, hogy bizonytalanságuk már jóval hamarabb, a saját *jobb* és *bal* kezük megkülönböztetésénél kezdődött. Az alábbi beszélgetés-részlet⁵ azt szemlélteti, hogy a második osztályos *Heni* az irányokat meg tudja különböztetni (műveleti fázis, 4.1. fejezet, 45. o.), de nem tudja azokat megnevezni (verbális fázis, uo.). Ezzel a hibájával maga is tisztában van, mert ezt a beszélgetés elején (2. sor) rögtön a tanár tudomására hozza.

- Tanár: Színezd ki a balkezes kesztyűket!
 Heni: **Csak én nem nagyon tudom, hogy most jobb vagy bal.**
 Tanár: Melyik a bal kezed?
 Heni: (*gondolkodik, nem tudja*)
 Tanár: Melyikkel írsz? Te milyen kezese vagy?

⁵ 2005. május 12.

- Heni: Bal. (*megemeli a jobb kezét*)

 Tanár: A végén, a zebra után merre kanyarodik?
 Heni: Hmmmm.
 Tanár: Mutasd meg a kezekkel!
 Heni: (*Bal kezével mutatja*) Jobb.

6.1.2. A tanítási kísérlet

A kísérlet tervezésekor arra törekedtünk, hogy a térbeli viszonzyszavakat térbeli szituációkban használjuk, a reprezentáció síkja maradjon az enaktív sík, a tanulóknak ne kelljen a síkba transzformálás nehézségeivel találkozni. A tájékozódó felmérés tapasztalatai alapján fontosnak tartottuk annak tudatosítását, hogy a viszonyítási pont megválasztása nem feltétlenül az ő feladatuk, abban a feladat kitűzésekor meg kell állapodni, mert csak így várható el az egyértelmű megoldás. Az osztálytermi szituáció lehetővé tette a szóbeli kifejezőképesség fejlesztését is.

A témakörhöz kapcsolódóan három problémával foglalkoztunk.

1. probléma

(2. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés)

Három geometriai alakzatot (kört, háromszöget, négyzetet) kellett a gyerekeknek az alábbi utasításoknak megfelelően maguk elé helyezni a padra:

1. *Tedd magad elé az elemeket úgy, hogy a háromszög balra legyen a másik két elemtől!* \triangle \square \circ

Fel is cserélheted: \triangle \circ \square

Szó volt ugyan arról, hogy a fenti két elrendezés egyaránt megfelel az utasításnak, de sajnos elmulasztottuk annak hangsúlyozását, hogy a „*tőle jobbra van*” megengedi azt is, hogy ne közvetlenül egymás mellett legyenek, lehet köztük másik elem is.

2. *A négyzet legyen jobbra a körtől és balra a háromszögtől!*

\circ \square \triangle

Besúden szerint az egyszerű *jobb-bal* megkülönböztetésnél a valamitől *jobbra*, a valamitől *balra* fogalmak elsajátítása jóval nehezebb, hiszen egy objektum lehet egyidejűleg egy másiktól *jobbra*, egy harmadiktól pedig *balra* (4.2. fejezet, 48. o.).

Ez is szerepet játszhatott abban, hogy az utasítást 13 fő, a tanulók fele nem értette meg. További nehézséget jelentett, hogy pl. a négyzet elhelyezéséhez két feltételt kell teljesíteni. Miután átfogalmaztuk az utasítást úgy, hogy a „*Négyzet jobb oldalán legyen a háromszög, bal oldalán a kör!*” már csak 6 hibás elrendezést találtunk. Könnyebb a megértés, ha először annak az elemnek a neve hangzik el, amihez viszonyítunk, hiszen a gyerek az elsőnek hallott elemre figyel (négyzet), ezt kiteszi, majd ehhez képest helyezi el a másik két elemet. A másik esetben előbb át kell gondolni, hogy ha a négyzetnek *jobbra* kell lennie a körtől, akkor a kör a négyzet *bal* oldalára kerül.

A feladat összetettségét tovább növelte, hogy geometriai alakzatokkal kellett dolgozni, holott a másodikosok formaismerete még nem elég fejlett, az utasítás megértését nehezítette, hogy előbb azonosítaniuk kellett a megfelelő formákat. Szerencsésebb lett volna, ha három olyan elemmel dolgozunk, melyek valamilyen más tulajdonságukban, pl. színükben, különböznek.

A gyerekek többsége magához képest állapította meg a *jobb-bal* irányt, ám a feladat túl bonyolult sikerült ahhoz, hogy ezt érdemes lenne a feladattal kapcsolatban bővebben elemezni.

2. probléma

(8. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és videófelvétel)

A „madár-szék” feladatot (6.1.1. fejezet, 3. probléma) eljátszottuk valódi térbeli szituációként.

A tábla előtt elhelyeztünk egy asztalt. A kihívott gyerekeknek adott utasítás alapján be kellett állítania egy térbeli elrendezést, a többiek pedig véleményt mondtak róla. Két példát ismertetünk:

1. példa: *A papagáj az asztaltól jobbra van. A maci a papagájtól jobbra van.*



6.11. ábra

Dani a papagájt gyorsan elhelyezte az asztaltól *jobbra*, úgy hogy közben az asztallal szemben állva a *jobboldalt* magához viszonyította. A macit először hasonlóan viszonyítva a papagáj *jobboldalán* helyezte el, majd át akarta vinni az asztal másik oldalára, közben folyamatosan a tanítót nézte (6.11. ábra). Mivel ő nem adott tanácsot, többszöri bizonytalankodás után a macit az asztal és a papagáj *közé* tette, s a helyére sietett. Az osztály érezte Dani tanácstalanságát, többen is javítani akartak. Úgy döntöttek, hogy a helyes sorrend: *asztal, papagáj, maci*. A megbeszélés során, amikor Dani álláspontját is védelmünkbe vettük, megerősítette, hogy ő az első utasítást az asztalhoz képest értelmezte, a másodikat viszont a papagájhoz. Indoklását alátámasztják mozdulatai, mert miután a papagájt letette, már nem állt szemben az asztallal, nézőpontja elfordult, így saját „előtt” iránya megegyezett a papagájéval.

Ekkor jó alkalom kínálkozott annak a megbeszélésére, hogy az ilyen típusú feladatok egyértelmű megoldásához minden esetben meg kell adnunk a viszonyítási pontot, azaz tudnunk kell, hogy tükörképként értelmezzük-e a látottakat vagy sem.

Ez matematikailag azt jelenti, ahhoz hogy a (függőleges) síkban meghatározzuk a *jobb-bal* irányt, a síkot irányítottá kell tennünk, tehát ki kell jelölnünk a pozitív oldalát.

2. példa: *Lilla az asztal mellett áll. Petra Lilla jobb kezét fogja.*

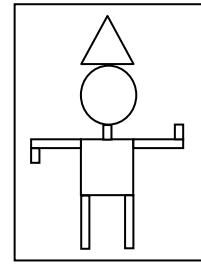
A két kislány kézfogása egyértelmű volt, de a *mellett* szó két megoldást is megengedett volna. A gyerekek azt tartották jónak, amikor Lilla *közvetlenül* az asztal mellé került. Tehát a *mellett* szónak van számukra egy másodlagos jelentése is: az irányon kívül a közvetlen szomszédosságot jelöli.

3. probléma

(20. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és videófelvétel)

Az osztályt három csoportra osztottuk. Minden csoportban egy tanuló az volt a feladata, hogy a többiek utasításai alapján rakjon ki az asztalon lévő geometriai formákból egy képet (6.12. ábra).

Az utasítást adó gyerekek kezében ott volt a kép, de gondot okozott a síkidomok megnevezése („hosszú csík”, „kis négyzet” stb), valamint az utasítások megfogalmazása. Többen próbáltak kézmozdulatokkal, mutató névmásokkal („ezt tedd ide”) magyarázni. Úgy látjuk, hogy egy adott térbeli elrendezés verbalizálása a második osztályban még sok nehézséget okoz. Hallottunk ugyanakkor szabatos megfogalmazásokat is („Tedd a kört a négyzet fölé!”), így azt gondoljuk, az ilyen verbális kommunikációt igénylő feladat nem korai, további gyakorlásra azonban mindenképpen szükség van.



6.12. ábra

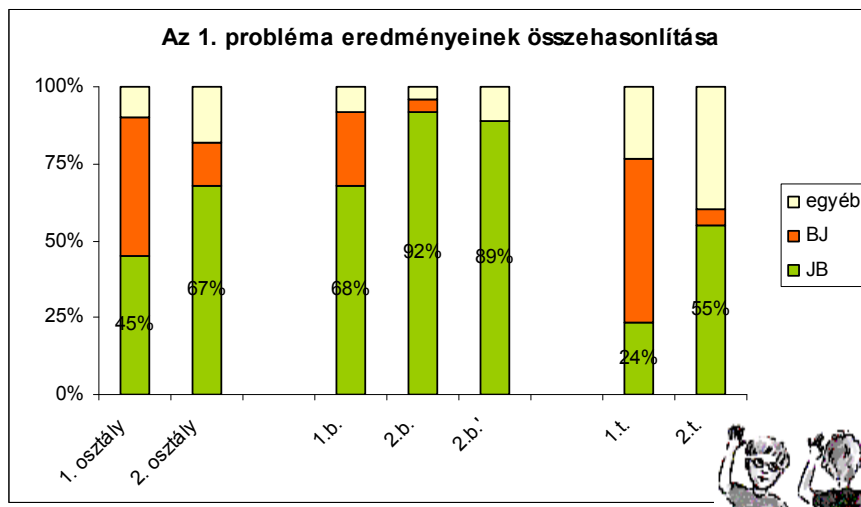
6.1.3. Az utóteszt és a késleltetett teszt

Ebben a fázisban a fejlesztés eredményessége mellett a spontán fejlődés mértékére is kíváncsiak voltunk.

1. probléma

A 6.1.1. fejezetben ismertetett 2. probléma (*Melyik kezét emeli fel a kisfiú?*) szerepelt mind az utótesztben, mind a késleltetett tesztben⁶.

Tapasztalatok



6.13. ábra

⁶ melléklet, 22, 24.old. 1. feladat

Már a tájékozódó előzetes felmérésből kitűnt, hogy a két helyzetben a kisfiú felemelt kezét helyesen megnevezők száma az életkorral nőtt (1. osztály, 2. osztály). Ugyanez a tendencia figyelhető meg a kísérleti osztály (2.b.) és a kontroll osztály (2.t.) esetében is (6.13. ábra). A kísérleti osztály tanulói mind az utótesztben (2.b.), mind a késleltetett tesztben (2.b.) csaknem hibátlanul dolgoztak.

A két osztály fejlődésére vonatkozó adatokat táblázatban foglaltuk össze:

Azoknak, akik első osztályos korukban tévesztettek (9, ill. 11 fő), most közel a fele (5 ill. 6 fő) javított mindkét osztályban. Messzemenő általánosításra ugyan az adatok alapján nem

A fejlődés összehasonlítása	2b (25 fő)	2t (15 fő)
mindkettő jó	16	4
javított	5	6
nem változott	3	5
rontott	1	0

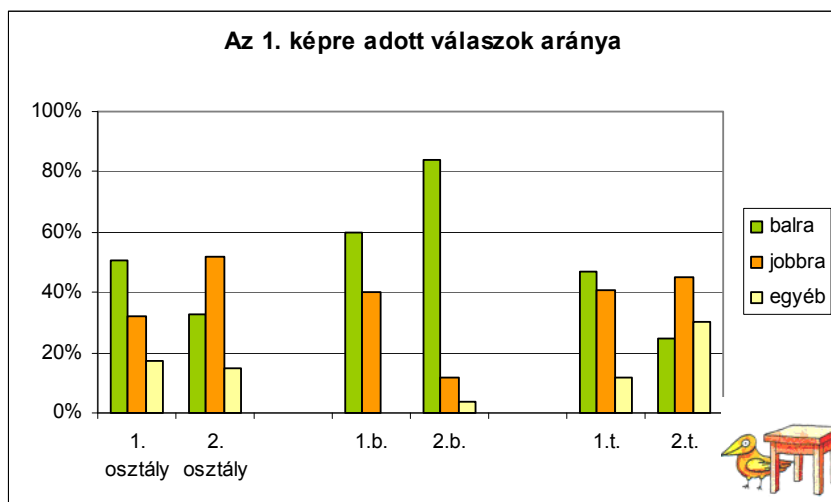
vállalkozhatunk, de úgy tűnik, hogy a *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más élőlényen, a hétköznapi élet kontextusaiban spontán módon is jól fejlődik, mert a kontroll osztály tanulóinál szintén tapasztaltunk fejlődést.

2. probléma

A 6.1.1. fejezetben ismertetett 3. probléma (a „madár-szék” feladat) kis módosítással szerepelt az utótesztben⁷. Mind a tájékozódó felmérések, mind a tanítási kísérlet rávilágított arra, hogy az ilyen típusú feladatokra csak akkor várható egyértelmű válasz, ha megadjuk a viszonyítási pontot is. Ez az oka annak, hogy az utótesztben a feladat utasítását kiegészítettük „A jobbra-balra irányokat magadhoz képest állapítsd meg!” mondattal.

Tapasztalatok

Tekintettel arra, hogy az *alatt-felett* irányokra mindkét osztályban hibátlan válaszokat kaptunk, az *előtt-mögött* esetén a kísérleti osztályban csak egy, a másik osztályban csak 2 tanuló hibázott, a teljes feladat eredményei közül csak az 1. képre adott válaszokat emeljük ki (6.14. ábra).



6.14. ábra

⁷ melléklet, 22. old. 3. feladat

A tájékozódó felmérés során azt tapasztaltuk, hogy a tanulók évfolyamtól függetlenül közel ugyanolyan számban jelölték a madarat a széktől *balra*, mint *jobbra*. Noha az utótesztben hangsúlyoztuk, hogy magunkhoz kell viszonyítani, a 2.t. osztály tanulóinak ez nem jelentett segítséget, válaszaik hasonló képet mutatnak, mint a tájékozódó felmérésen a 2. évfolyam válaszai. Ezzel szemben jól látható, hogy a kísérleti osztály tanulói helyesen értelmezték ezt a kiegészítést, így a válaszok több, mint 80%-a „*balra*” lett.

Arra következtethetünk tehát, hogy az utasítás pontosítása kevés az egyértelmű megoldáshoz, hiszen a gyerekek ezt vagy nem képesek értelmezni, vagy figyelmen kívül hagyják, ha nincs mögötte tudatosítás és gyakorlás.

3. probléma

Az alábbi két feladat ugyancsak a viszonyítás kérdésével foglalkozott. Az elsőben, amely az utótesztben szerepelt, viszonyítási pontot kellett váltani, míg a másodikban, a késleltetett teszt feladatában, nem. A feladatok 1-2. kérdése a tárgymeghatározásra, a 3-4. kérdés pedig az iránymeghatározásra vonatkozott.

Más objektumhoz kell viszonyítani⁸:

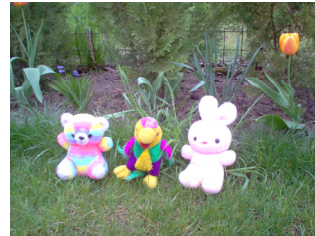
*A képen egy maci, egy papagáj és egy nyuszi látható.
Válaszolj a kérdésekre úgy, hogy a képen lévő állatok helyébe képzeled magad!*

Ki áll a maci bal oldalán?.....

Ki áll a papagáj jobb oldalán?.....

Merre áll a nyuszi a papagájhoz képest?.....

Merre áll a maci a papagájhoz képest?.....



Saját testhez kell viszonyítani⁹:

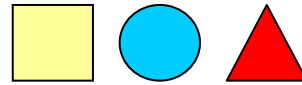
Válaszolj a kérdésekre úgy, hogy magadhoz viszonyítasz!

Mi van a négyzettől jobbra?.....

Mi van a körtől jobbra?.....

Merre van a háromszög a körhöz képest?.....

Merre van négyzet a háromszöghöz képest?.....



Tapasztalatok

A kísérleti osztály eredményei	utóteszt	késleltetett teszt
hibátlan megoldás	72%	48%
hibátlan tárgymeghatározás	88%	93%
hibátlan iránymeghatározás	80%	56%

A kísérleti osztály utó- és késleltetett tesztben elért eredményeit tudjuk összevetetni, hiszen az ő esetükben feltételezhetjük, hogy a viszonyítási pontra vonatkozó utasítás felhasználásával oldották meg a feladatokat. A táblázatból kitűnik, hogy mindkét viszonyítási helyzetben könnyebb megjelölni egy kívánt irányban lévő tárgyat (Pl: *Ki áll a maci bal oldalán?* vagy *Mi van a négyzettől jobbra?*), mint fordítva, egy tárgyról

⁸ melléklet, 22. old. 2. feladat

⁹ melléklet, 24. old. 3. feladat

megmondani, hogy az merre van (Pl: *Merre áll a nyuszi a papagájhoz képest? vagy Merre van a háromszög a körhöz képest?*).

Megfigyelhető az is, hogy a késleltetett teszt feladatában a tárgymeghatározás nem romlott (kis mértékben javult), az iránymeghatározás azonban lényegesen rosszabbul ment. Tekintve, hogy a 2. problémánál a tanulóknak saját magukhoz kellett viszonyítani, s a szakirodalom szerint ez az egyszerűbb, úgy gondoljuk, hogy a háttérben ugyancsak az iránymeghatározás nehézsége áll.

Itt ismét utalunk arra, amit a 6.1.2. fejezet 1. problémájánál már említettünk (70. old.): Gyakorlás ellenére is nehezebben érthetők az olyan típusú utasítások, melyekben elől áll az a tárgy, amit viszonyítani akarunk, s csak ezt követi a viszonyítási pont megnevezése. Az iránymeghatározásra vonatkozó kérdések szerkezete pedig ilyen volt.

6.2. ÚTVONALAK LEÍRÁSA

Ebben a témakörben dinamikus szituációkban vizsgáljuk a térbeli viszonyiszavak használatát. Feltételezésünk szerint egy rögzített térbeli elrendezés (statikus szituáció) elemzése egyszerűbb probléma, mint egy mozgás elképzelése, egy mentális utazás, ugyanakkor ez utóbbi vezet el a szűkebb értelemben vett tájékozódáshoz és a térképhasználathoz. Tisztában vagyunk azzal, hogy a térképhasználat tanítása nem második osztályos és nem matematika órai tananyag, ennek ellenére úgy véljük, a kiindulási, a matematikai tartalommal szorosan összefüggő kérdések tárgyalása nem korai, hiszen ezek a térképismeret előkészítésén túl a térszemlélet fejlesztését is szolgálják.

Hasonlóan a statikus szituációkhoz, itt is három szintet különítünk el:

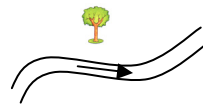
1. szint: Adott irányba történő haladás esetén az út két oldalának megkülönböztetése. Ez matematikailag egy irányított egyenes két oldalának megadását jelenti.
2. szint: A *jobbra fordulás-balra fordulás* kifejezések értelmezése. Ez a probléma szoros kapcsolatban van a sík irányításának a ciklikus irányításon keresztül történő értelmezésével.
3. szint: Tájékozódás egy városrészlet egyszerű térképvázlatán, képzeletbeli utazás verbalizálásával útvonalak megadása.

A bemutatásra kerülő problémákkal ezt a három szintet reprezentáljuk.

6.2.1. A tájékozódó felmérés

1. probléma (1. szint)

*Az utca melyik oldalán áll a fa, ha a nyíl a menetirányt jelöli?*¹



Az utca és a rajta kijelölt menetirány matematikailag egy irányított nyílt görbének felel meg. A gyerekeknek a válaszhoz el kell képzelniük a mozgást, az utca *jobb* oldalát saját testüket megfelelő helyzetbe hozva határozhatják meg. Míg a statikus szituációkban a *jobbal* iránypolaritást jelent, addig itt oldalpolaritásként kell értelmeznünk. Ez, Freudenthal szerint, további bizonytalanságok forrása, hiszen az egyik oldalról több irányban is átjuthatunk a másikra. Az iránypolaritás mögött az egyenes, az oldalpolaritás mögött a sík irányításának problémája húzódik (4.1. fejezet, 44. o.).

A feladatot 2. és 3. osztályosok oldották meg.

Tapasztalatok

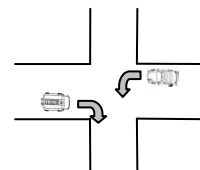
A 2. osztályosok 68%-a, a 3. osztályosok 81%-a írt helyes választ. Ezek a számok alacsonyabbak, mint amiket a statikus helyzet *jobbal* irányainak megkülönböztetésénél kaptunk (6.16. ábra). Eredményeink megerősítik tehát azt a feltevést, hogy az

¹ Melléklet, 4, 6. old. 7. feladat

iránymeghatározást nehezíti, ha azt mozgásos szituációba ágyazzuk. A tévesztések száma már akkor is nő, ha csak nagyon egyszerű, haladó mozgásról van szó.

2. probléma (2. szint)

*Melyik autó kanyarodik jobbra? Színezd ki pirosra!*²



A probléma a *jobbra-balra fordulás* értelmezését kívánja egy igen leegyszerűsített, ám a hétköznapi életből jól ismert szituációban.

1. és 2. osztályosok számára tűztük ki a feladatot, mely eredetileg egy iskolakezdéskor iratandó geometriai képességfelmérő teszt részét képezte (Franke, 2002, 102. o.).

A kanyarodás irányának helyes megállapítása előfeltétele annak, hogy a gyerekek egy térképábrát alapján útbaigazítást tudjanak adni, ezért voltunk kíváncsiak arra, melyik az az életkor, amikor a mentális elfordulás megadása már nem jelent problémát.

Tapasztalatok

Franke idézett könyvében a következő elemzés szerepel:

„A 6 [feladat] közül ez volt a legnehezebb, mégis a gyerekek több, mint 40 %-a megoldotta. Az indoklásnál érthetővé vált, hogy a gyerekek elsődlegesen az útszél közelsége alapján tájékozódtak. „Mert az itt szűkebb.” (Ujjával egyértelműen mutatja, hogy egy jobbkanyarnál egészen szorosan az út széle mentén vezetünk.) „Az autót a vezető itt jobbra kormányozza.” Ennél a válasznál már felmerül a jobb kéz és a jobb fordulat közötti kapcsolat. Tulajdonképpen itt a nem is a *jobb-bal*, hanem a *jobb-balfordulat* megkülönböztetéséről van szó. Amit később dinamikus szituációnak nevezek, az valójában az elfordulást jelenti Ennél a feladatnál látható, hogy a gyerekek nagyon igyekeznek a valódi szituációba belehelyezkedni. Így a lapokat gondolkodás közben gyakran különböző irányokba húzzák. Talán néhány helyes megoldás kétségtelenül véletlen volt. (Franke, 2002, 106. oldal)”

A mi eredményeink is hasonlóak voltak (6.16. ábra). Az elsősök 35%-a, a másodosok 63%-a válaszolt helyesen. A papírlap ill. a felsőtest elfordítását a feladat megoldása közben ugyancsak megfigyelhettük.

Azt, hogy a gyerekek beleképzelik magukat az autó helyzetébe, az alábbi, 1. osztályosokkal készített interjú-részlet³ szemlélteti:

Tanár:	Itt merre kanyarodott? Melyik keze felé?
Áron:	Jobbra.
Panni:	Balra, mert így megyünk (mutatja) és elkanyarodunk. És én merre kanyarodtam el?

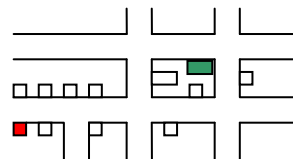
A képzeletbeli kanyarodás irányának megállapítása tehát még második osztályban is igen sok nehézséget jelent. Úgy gondoljuk, hogy ezek gyökere a térbeli szituáció síkbeli ábrázolásának problémáján túl, a *jobb-bal* fogalom a *jobbfordulat-balfordulat*-ra történő bővítésében rejlik. Ez utóbbi fogalompár pedig a sík irányításával, s ezen keresztül a ciklikus irányítás fogalmával hozható kapcsolatba.

² Melléklet, 10. old. 6. feladat, 12. old. 8. feladat

³ 2005. május 11.

3. probléma (3. szint)

A rajzon egy utcarészlet látható. Rajzold be Jutka egy lehetséges útját a piros háztól a zöld iskoláig! Hogyan igazítanád útba Jutkát? A leíráshoz használhatod a következő mondatokat: **Menj egyenesen! Fordulj jobbra! Fordulj balra!** Az utca jobb oldalán van. Az utca bal oldalán van.⁴



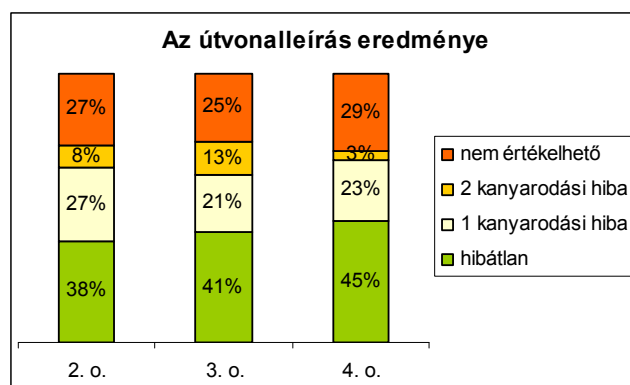
A feladat összetett és nehéz. Összetettsége abban áll, hogy be kell rajzolni az utat (1. lépés), el kell képzelni a haladást (2. lépés), majd ezt el kell magyarázni szavakkal (3. lépés), végül a magyarázatot le kell írni (4. lépés).

A nehézséget elsősorban a kanyarodási irányok megállapítása, valamint a verbalizálás jelenti.

A problémát az első írásbeli feladatlapon 2-3-4. osztályosoknak tűztük ki.

Tapasztalatok

Az eredményekben nincs nagy eltérés az egyes osztályok között. A hibátlan leírások száma az életkorral kismértékben nőtt, ugyanakkor a tanulók kb. negyede egyik évfolyamon sem tudott értékelhető leírást adni, ők vagy nem írtak semmit, vagy írásuk alapján nem tudtuk a berajzolt útvonalat követni. Igen magas azok száma is, akik a kanyarodás irányát tévesztették el egy vagy két esetben (6.15. ábra).



6.15. ábra

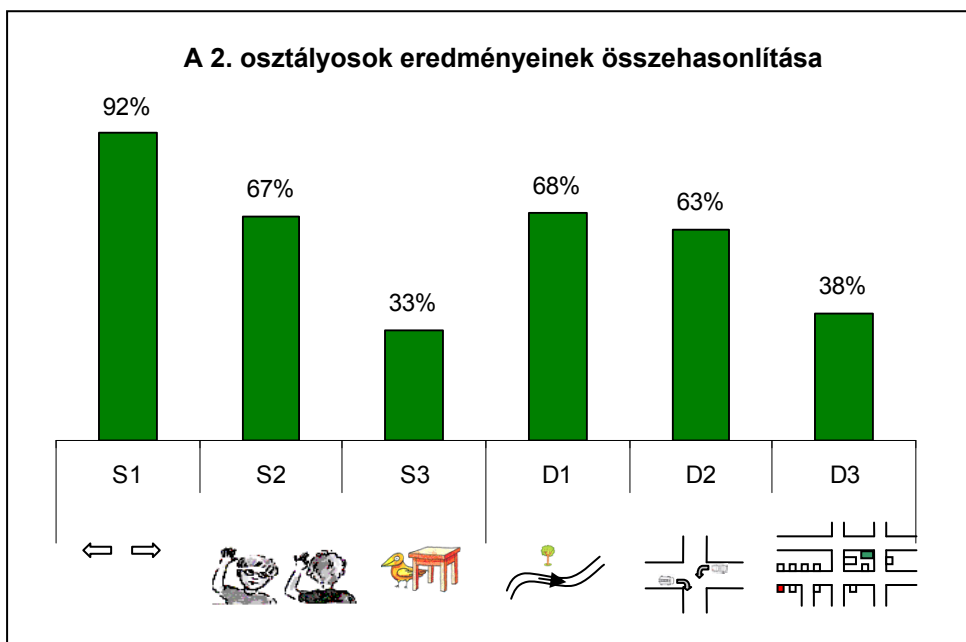
Abból a tényből, hogy a helyes leírások száma lényegesen nem változott a három évfolyamon, arra következtethetünk, hogy az útvonalleírás képessége spontán módon kevésbé fejlődik, ezért több részképesség tudatos fejlesztésére van szükség.

A statikus (S1, S2, S3) és a dinamikus (D1, D2, D3) szinteknek megfelelő feladatok eredményeit a másodikosok esetében tudjuk összevetni, mert ez az az évfolyam, amelyik mind a hat feladattal foglalkozott. A helyes megoldások arányát a 6.16. ábra szemlélteti.

Az eredmények alátámasztják az egyes szintek nehézségére vonatkozó hipotézisünket (6.1. fejezet, 64. old. és 6.2. fejezet, 79. old.). Mind a statikus, mind a dinamikus esetben az

⁴ Melléklet, 4, 6. old. 9. feladat, 8. old. 6. feladat

általunk megállapított szinteknek megfelelően csökkent a jó megoldások száma. Egy-egy szinten belül a statikus probléma könnyebb, mint a dinamikus. Ettől a 3. szint eredménye ugyan kis mértékben eltér, de itt az S3 szintet jelentő *madár-szék* feladatnál a már ismertetett kétértelműség lényegesen hozzájárult a hibás válaszok nagy számához.



6.16. ábra

6.2.2. A tanítási kísérlet

Három, fokozatosan nehezedő problémát választottunk. Mindhárom az útvonalak szóbeli megfogalmazását igényelte. Az első esetben az útbaigazítás eredményét a gyerekek közvetlenül tapasztalhatták, a másodikban jól ismert területen a képzeletükre kellett hagyatkozniuk, a harmadik pedig már a térképhasználatot készítette elő.

1. probléma

(1. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés)

Robotjátékot játszottunk:

Kiküldtünk a tanteremből egy gyereket (a robotot), s az osztályteremben elrejtettünk egy tárgyat. A robotnak a többiek utasításai szerint haladva meg kellett keresni az eldugott tárgyat.

A játékban igen fontos, hogy a robot, mindig csak pontosan azt az utasítást hajtsa végre, amit hall. Ha pl. *jobbra* fordulást kérnek tőle, de miután megtette, kiderül, hogy rossz volt az irány, akkor a *balra* utasítás értelmében álljon vissza a kiinduló helyzetbe. Ekkor egy útvonal szóbeli megadását gyakorolhatjuk oly módon, hogy a kigondolt utasítás hatását a gyerekek közvetlenül tapasztalhatják.

Két hibatípust figyeltünk meg: Az egyik a *jobb-bal fordulatok* keverése, a másik a lépések számának hibás becslése. Ez utóbbi észrevétel rávilágít arra, hogy ez a feladat a tájékozódás fejlesztésén túl a hosszúságmérés előkészítése szempontjából is hasznos.

2. probléma

(5. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és hangfelvétel)

A feladat egy iskolába érkező képzeletbeli vendég útbaigazítása volt. A választott helyszíneket a gyerekek jól ismerték, naponta közlekedtek a kívánt útvonalakon.

A foglalkozás egésze alatt alkalmunk volt megfigyelni, hogy testmozdulatokkal követték a képzeletbeli kanyarodásokat.

A feladatok fokozatosan nehezedtek. Először saját (földszinti) tantermükből kiindulva a földszinten kellett eligazodniuk, majd az emeleten, amihez el kellett képzelni, hogy milyen irányban érkeztek fel. Az utolsó két feladatban már nem a saját tantermükből indultak, hanem az iskola két másik terméből. Előbb egy adott emeleten kellett tájékozódni, majd lejutni az udvarra.

A beszélgetésekből levonható következtetéseinket az alábbi részlettel⁵ támasztjuk alá:

Tanár: Először mindig gondoljátok el, hogy vajon melyik a legegyszerűbb útvonal, amelyiken eljutnak a vendégek arra a helyre, abba a terembe, arra az emeletre, ahová éppen irányítani kell őket. Használjátok ilyen kifejezéseket: *Kilépek az ajtón, jobbra fordulok, balra fordulok, egyenesen megyek, fölmegyek az első emeletre* stb.

.....
Tanár: A technika terembe hogyan irányítanátok a vendégeket?

Ábris: Kilépünk az ajtón, jobbra fordulunk, megyünk egyenesen a lépcsőig, ott felmegyünk, onnan balra fordulunk, egész a folyosó végéig és bal oldalon van a technika terem.

Tanár: Most gondoljátok el, hogy a technika teremben vagyunk, onnan hogyan jutnánk el a Zsuzsa néni termébe, ahol hétfőnként az énekórát tartotta. Képzeljétek oda magatokat!

Zsófi: Kilépünk a technika teremből, elmegyünk a folyosó végéig, egészen az igazgató bácsi szobája előtt, ott jobbra fordulunk, és ott majdnem az utolsó terem a Zsuzsa néni terme.

Tanár: Jó volt, de pontosítsunk.

Adrienn: Kilépünk a technika teremből, elfordulunk jobbra, elmegyünk a mosdóig, onnan tovább megyünk, ott lesz a lépcső, a végén van a lépcső, ott jobbra fordulunk, és az utolsó ajtó.

Tanár: Még ez sem volt pontos.

Gabi: Kilépünk a technika terem ajtón, befordulunk jobbra, megyünk a folyosó végéig, ott lefordulunk...

Tanár: Merre?

Gabi: Jobbra, és az utolsó előtti terem az a Zsuzsa néni terme.

- A tanár ösztönözte a gyerekeket a képzeletbeli mozgásra („*Most gondoljátok el!*”, „*Képzeljétek oda magatokat!*”), a kívánt úti célok és az oda vezető útvonalak felidézését pedig úgy segítette, hogy hozzájuk jól ismert, rendszeresen ismétlődő eseményeket csatolt („*...ahol hétfőnként az ének órát tartotta*”). Emellett folyamatosan értékelt, és a pontos, egyértelmű fogalmazásra buzdított („*Jó volt, de pontosítsunk.*”, „*Még ez sem volt pontos.*”, „*Merre?*”).

- A gyerekek az előre megadott kifejezés-paneletet jól építették be a magyarázataikba.

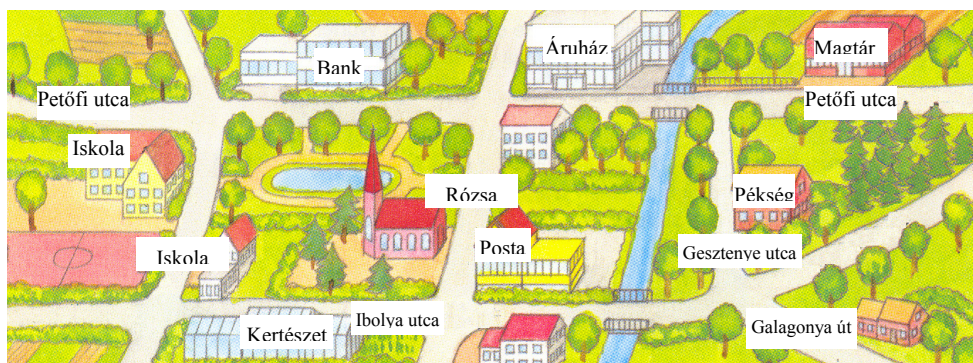
⁵ 2005. november 22.

- Az útvonal elmagyarázása szempontjából lényegtelen, de számukra fontos helyeket, tájékozódási pontokat is beleszőttek válaszaikba: „*az igazgató bácsi szobája előtt*”, „*elme gyünk a mosdóig, onnan tovább me gyünk*”. Ezekkel feltehetően saját mentális mozgásukat erősítették, ugyanakkor segítséget, pluszinformációt adtak a társak számára is.
- Ugyanazt az útvonalat többen bemutatták, közben a gyerekeknek figyelniük kellett, hogy a hallottak megegyeznek-e az ő gondolatmenetükkel. Így a viszonyítási pontok megtalálását, a kifejezőmód pontosítását gyakorolták.

3. probléma

(15. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és hangfelvétel)

Tájékozódás egy ismeretlen település felülnézeti térképén.



Minden gyerek megkapta a fenti térképet, s ezen kellett követniük a tanár által ismertettét útvonalakat. A tanár így mintát adott a pontos megfogalmazáshoz. A nehézséget az ismeretlen városrészlet, valamint a szóban elhangzó utasítások síkbeli transzformálása jelentette. A három feladat egyike a következő volt:

Silvi a KERTÉSZETBEN járt. Mikor kilépett, jobbra fordult és elindult. A 2. útkereszteződésnél balra kanyarodott és az utca jobb oldalán lévő házban vásárolt egy

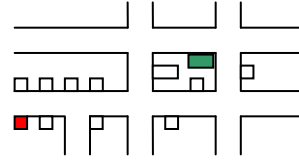
A tanár többször megismételte ugyanazt az útvonalleírást, így kb. az osztály fele jutott el a megfelelő helyre. A választott munkaformában (tanári utasításra egyszerre, egy ütemben dolgozik minden gyerek) a többiek nem boldogultak, lemaradtak, elvesztették a „fonalat”.

Két gondolkodási hibát sikerült azonosítani. Egyrészt a „*kilépett, jobbra fordult*” utasításnál nem vették figyelembe, hogy aki kilép egy épületből, az annak háttal van. Másrészt „*az utca jobb oldalán*” típusú kifejezést keverték „*az utca végén jobbra fordul*” kifejezéssel. Feltételezhető, hogy az utasításban csak az irányt jelölő szóra koncentráltak, s nem figyeltek a szövegösszefüggésre.

Próbálkoztunk azzal is, hogy egy adott útvonal megtétele után magyarázzák el a visszautat, de ez, ebben a feladat-kontextusban, meglehetősen eredménytelen volt.

6.2.3. Az utóteszt és a késleltetett teszt

Mindkét tesztben a 6.2.1. fejezetben ismertetett 3. problémát tűztük ki újra, kisebb módosításokkal⁶. Célunk a fejlesztőkísérlet eredményességének vizsgálata volt.

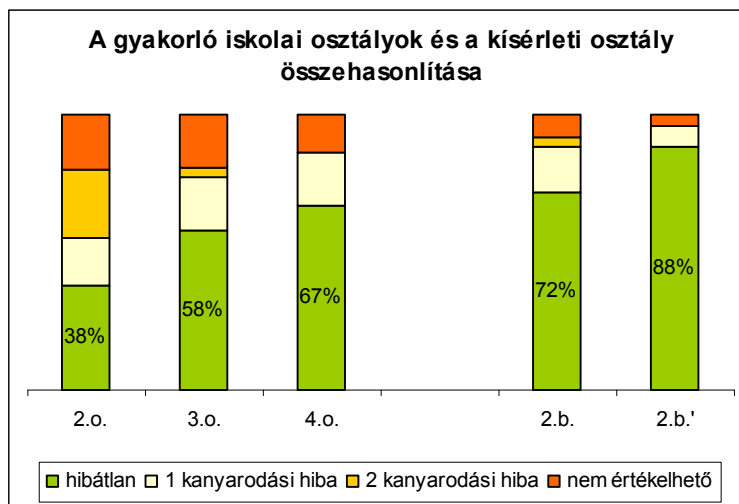


Tapasztalatok

Először azt néztük meg, hogy a gyerekek leírása alapján követhető-e a kért útvonal, majd pedig a kanyarodás irányánál elkövetett hibák számát. Nem tekintettük hibának, ha a *jobbra-balra* fordulás helyett a *le-fel* szavakat használták.

A kísérleti osztálynak az utótesztben (2.b.) és a késleltetett tesztben (2.b.') elért eredményeit ezúttal a tájékozódó felmérésben részt vevő gyakorló iskolai osztályok (2.o., 3.o., 4.o.) eredményével vetettük össze. A tájékozódó felmérés tapasztalata azt mutatta, hogy a gyakorlóiskola tanulói rendre jobb eredményeket értek el, mint a három iskola tanulójának átlaga (6.16. és 6.17. ábra). Feltételezésünk szerint ebben szerepet játszott az, hogy a feladat az utasítások írásbeli megfogalmazását kérte, s ez a gyakorlóiskola tanulójának könnyebben ment.

A kísérleti osztály mind az utótesztben, mind a késleltetett tesztben jobb eredményt ért el, mint a hasonló képességű 2-3-4. osztályosok. Úgy látjuk, hogy ennél a feladattípusnál a gyakorlásnak igen nagy szerepe van. Nem korai ezzel már 2. osztályban foglalkozni, a



gyerekek megértik és megszokják a pontos utasítások használatát. Az, hogy a 2.b. osztályban a késleltetett teszt eredményei nem rosszabbak (sőt, valamivel jobbak) az utóteszténél, azt jelzi, hogy a megszerzett ismeretek 3 hónap alatt nem tűntek el.

A kísérleti osztály válaszainak részletes elemzése:

A válaszokból kitűnt, hogy a tanulók a gyakorolt kifejezéseket igyekeztek használni.

⁶ Melléklet, 22. old. 4. feladat, 24. old. 6. feladat

Voltak, akik a kanyarodást nem a *jobbra-balra*, hanem a *le-fel* polaritásokkal jelezték. Itt a síkra transzformálás problémája merülhet fel (pl. „...a második utcánál *felment*, ment egyenesen, utca *alsó részén*...”), vagy pedig a hétköznapi életből átvett szóhasználat, amikor a *lefordul*, *befordul*, *elfordul* igéket szinonimákként használjuk (Pl. „Elindult *jobbra*, a második utcáig, ott a *szemben lévő utcán lefordult*...”).

Figyelemre méltó, bár a megértést ebben a feladatban nem zavarja, hogy az irányváltoztatás helyét nem mindenki úgy adta meg, hogy az utcának azon az oldalán számolja a mellékutcákat, amerre majd kanyarodni fog. 5 tanuló az első kanyarodás irányát helyesen állapította meg (*balra*), a helyét azonban a második útkereszteződésként jelölte meg.

24 fő írta meg mindkét tesztet. 12 olyan tanuló volt, aki mindkétszer jól követhetően írta le az útvonalat, a kanyarok irányát helyesen (*jobbra-balra* módon) adta meg.

Pl.: „*Egyenesen, útkereszteződésnél balra. Aztán egyenesen, útkereszteződésnél jobbra, utca végén jobbra található a ház.*” ill. „*Kimész a házból, jobbra fordulsz, egyenesen a kereszteződésig. Ott balra. Aztán megint a kereszteződésig, ott balra, és az utca végi ház jobbra.*” (Bence)

További 4 fő szintén jól dolgozott, csak ők az első kanyarodásnál nem a *balra*, hanem a *be* ill. *fel* kifejezést használták.

Pl.: „*Jobbra ment, aztán **felfele**. Aztán pedig jobbra ment.*” ill. „*Menjen előre, aztán forduljon le jobbra. Menjen **föl** és forduljon le balra és **föl**.*” (Zsuzsi)

2-en mindkét tesztben vétettek kanyarodási hibát. Tehát náluk ez nem figyelmetlenségből, hanem iránytévesztésből adódhat.

Tekintettel arra, hogy az osztály háromnegyede (18 fő) hasonló színvonalon oldotta meg a két tesztet, úgy gondoljuk, a kísérlet során elsajátított ismeretek jórészt megmaradtak, noha az eltelt 3 hónapban a gyerekek nem foglalkoztak ilyen jellegű feladatokkal.

További 4 gyerek kisebb hibákat vétett mindkét alkalommal, de náluk sem mutatható ki, hogy a késleltetett tesztben romlott volna az eredményük.

Mindössze 2 tanulónál figyelhettük meg, hogy a késleltetett tesztben a korábban használt *balra* helyett a *fel* szót írták, vagyis visszatértek a hétköznapi szóhasználatra. Egyedül az ő esetükben tapasztaltunk némi visszalépést.

Kísérleteink azt mutatják, hogy az útvonalleírások verbalizálásában a gyakorlás szerepe jóval nagyobb, mint a spontán fejlődésé, a megfelelő szófordulatok, kifejezésmódok elsajátítása pedig már második osztályban viszonylag tartósan bizonyul.

6.3. CIKLIKUS RENDEZÉS

A ciklikus rendezés és a ciklikus irányítás vizsgálatát több okból is fontosnak tartjuk. Mint a matematikai elemzésből kiderült, a sík irányítását bevezethetjük a lineáris rendezésre támaszkodva (Hilbert: irányított egyenes két oldalának definiálásával), ugyanakkor a ciklikus rendezés alapján is (Kerékjártó: egy pontból kiinduló félegyenesek ciklikus permutáción keresztül). Ez, valamint az a tapasztalat, hogy a ciklikus rendezéssel a kisgyerekek hamarabb megismerkednek, mint a lineárisal (Freudenthal, 1983, 414. old.) indokolja, hogy megfigyeljük gondolkodásukat ebben a témakörben.

A hétköznapi élet bőven szolgáltat példákat a ciklikus rendezésre csakúgy, mint annak kapcsolatára a lineáris rendezéssel. A ciklikus rendezések azonosságának-különbözőségének kérdésével kerülünk szembe, ha pl. körbe ülünk egy asztalt, körjátékot játszunk, körhintára, óriáskerékre ülünk, nyakláncot fűzünk. Ezeknek a szituációknak éppúgy megvan a lineáris megfelelője, mint a ciklikus rendezéseknek is: a padról átülünk egy asztalhoz, a sorban állók kört alakítanak, a fonalra fűzött gyöngyökből láncot készítünk. Ciklikus rendezés kérdésével találkozik a kisgyerek, mikor megismeri az évszakoknak, a hét napjainak, vagy a napszakoknak a váltakozását.

A ciklikus rendezést időbeli folyamatokkal is szemléltethetjük. Ha napi, heti, éves ciklusokat veszünk figyelembe, nincs értelme pl. annak a kérdésnek, hogy húsvét karácsony előtt van vagy utána. Három elem esetén azonban már megállapíthatunk helyes vagy helytelen sorrendet. (Freudenthal, 1973, 472. o.)

A ciklikus irányítás és a lineáris polarítások kapcsolatát legegyszerűbben testmozdulatokkal szemléltethetjük. Testünk *alul-felül* iránya, valamint oldalra kinyújtott két kezünk kijelöl egy irányított síkot. Ha rögzítjük a tekintetünk *előre* irányát, a teret irányítottá tesszük. Ekkor *pozitív* forgásirányon (*balfordulaton*, az *óramutató járásával ellentétes* forgásirányon) azt az irányt értjük, amelyet *jobb* kezünk ír le, miközben oldalról előre visszük.

A ciklikus rendezés és irányítás kérdése szoros kapcsolatban van a szögfogalommal.

Többféle szögfogalom létezik. Euklideszi értelemben szögön két egyenes hajlásszögét értjük, itt az egyenesek sorrendje közömbös, a szög nagysága 0° és 180° közé esik, s a 180° -nak már nincs értelme.

Kiindulhatunk két, azonos kezdőpontú rendezett félegyenes-párból is. Ekkor már szükség van a sík irányítására. Így jutunk el az irányított szög fogalmához, mely értelmezi a 180° -os és az annál nagyobb szögeket, fenomenológiailag pedig szorosan összefügg a forgatással. Az irányított szög fogalmát általánosítva kapjuk a forgásszögeket.

Ismert olyan értelmezés is, mely két egyenes hajlásszöge közül a kisebbiket tekinti szögnek, így annak nagysága csak 0° és 90° között lehet.

Freudenthal szerint a különböző szögfogalmakat viszonylag korán és párhuzamosan célszerű bevezetni. Hangsúlyozni kell egyrészt azt, hogy a szög egyenes- vagy félegyenes-párból származik, másrészt azt, hogy a sík irányításának bevezetése nélkül nem beszélhetünk 180° -nál nagyobb szögekről.

A szögfogalom bevezetése előtt tehát foglalkozni kell a sík irányításának kérdésével. Ez legegyszerűbben a forgási irány értelmezésén keresztül történhet, hiszen ezt a tanulók az óra és más eszközök révén már ismerik. Felhasználhatjuk ugyanakkor az egyenes vonalú mozgás, és a kanyarodás jelenségét is. (A geometriai transzformációkra, a szög viselkedésére mozgás vagy tükrözés esetén még visszatérünk.)

A szögfogalom kialakítása a helyi tantervek szerint 4-5. osztályos tananyag. Követve a Freudenthal által megjelölt utat, ezt megelőzően tehát foglalkoznunk kell a sík

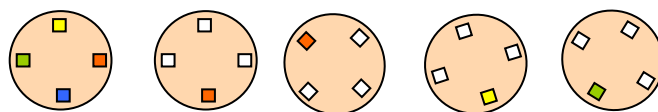
irányításának értelmezésével. Ez a forgásirány fogalmán keresztül történhet, amihez viszont a ciklikus irányítás ill. a ciklikus rendezés fogalmára van szükségünk.

A fent vázoltaknak megfelelően először olyan feladatot állítottunk össze, ami a ciklikus rendezés fogalmának megértését, a ciklikus rendezések azonosságának, különbözőségének megállapítását vizsgálja.

6.3.1. A tájékozódó felmérés

1. probléma

*A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!*¹

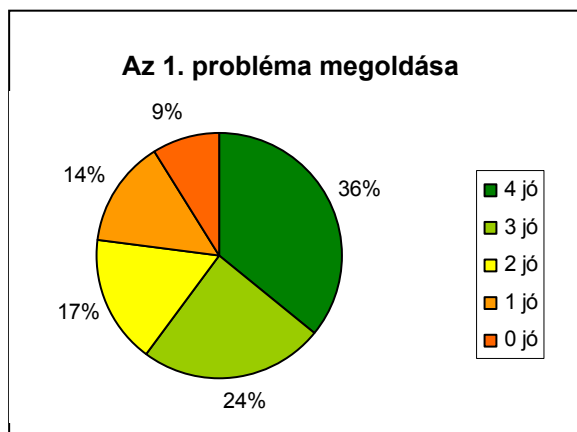


A feladat azonos ciklikus rendezések előállítása volt, képzeletbeli elfordítás segítségével. Kérdés, hogy a gyerekek milyen életkorban képesek erre. A forgásiránynak itt még nincs közvetlen szerepe, a képzeletbeli elfordítás persze történhet mindkét irányban, de a színek ciklikus sorrendje ettől nem változik meg. Feltételezhető, hogy a gyerekek mindig a rövidebb úton fordították el képzeletben a korongot, de az is, hogy mindig ugyanabba az irányba. Mi most csak arra voltunk kíváncsiak, megértik-e, hogy a színek ugyanolyan sorrendben követik egymást.

Tisztában voltunk azzal, hogy a jelenlegi iskolai gyakorlatban igen kevés szó esik a ciklikus rendezésről.

A feladatot ebben a formában harmadik osztályosoknak tűztük ki.

Tapasztalatok



6.18. ábra

¹ Melléklet, 6. old. 8. feladat

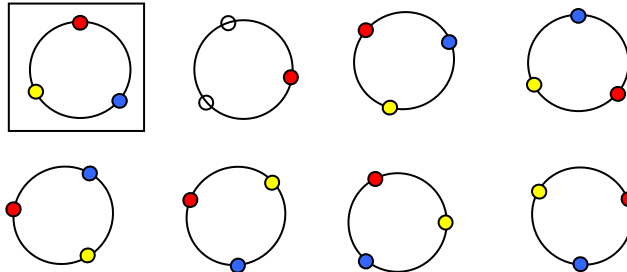
Azokról, akik hibátlanul vagy legfeljebb egy hibával dolgoztak, feltételezhetjük, hogy képesek a képzeletbeli forgatásra, s a különböző helyzetű korongokon jól állítják elő az azonos sorrendet. A többiek azonban vagy nem értették meg a feladatot, vagy a ciklikus sorrend létrehozásával volt problémájuk. Felmérésünk szerint 3. évfolyamon a gyerekek igen nagy százaléka (40%) tartozik ebbe a kategóriába (6.18. ábra).

Mindez megerősít bennünket abban, hogy a ciklikus rendezés és irányítás fejlesztésére hangsúlyt kell helyezni az alsó tagozatos matematikatanításban.

2. probléma

Egy óriáskerékbe 3 testvér úgy száll be, ahogy az első rajzon a 3 színes pont mutatja. A piros pont Kati, a kék pont Pisti, a sárga pont Andi helyét jelöli.

- Írd be az első rajzon a körök mellé a nevek kezdőbetűjét!*
- A kerék az óramutató járásával azonos irányban indul. Jelöld ezt az irányt az első ábrán nyíllal!*
- A második ábrán Kati helyét bejelöltük, írd be testvéreinek nevét is!*
- Mialatt a kerék forgott, apukájuk lentől néhányszor lefényképezte őket. Húzd át azt a rajzot, amelyik nem készülhetett ugyanabban a menetben, mint az első!²*



A feladat diszkrét elemekből álló elrendezéseken vizsgálja a két ellentétes forgási irány felismerését. A problémát, a szöveg összetettsége miatt, csak 4. osztályosoknak tűztük ki.

Annak érdekében, hogy jobban megértsük, hol hibáznak a gyerekek, több részkérdést is beiktattunk.

Az *a)* utasítás a szövegértelmezés felmérésére szolgált. A problémaszituációt grafikus szimbólumokkal ábrázoltuk: az óriáskereket körrel, a gyerekeket különböző színes pontokkal. Ennek a szimbólumrendszernek a megértése erősen függ a gyerek vizuális képzeletétől.

A *b)* részben az óramutató járásának irányát kellett bejelölni. A forgásirány jelölési módjának ill. az óramutató járásának ismeretére voltunk kíváncsiak. A feladat lineáris polarításra vonatkozó megfelelője nagyon egyszerű: pl. egy balra mutató nyíl megrajzolása.

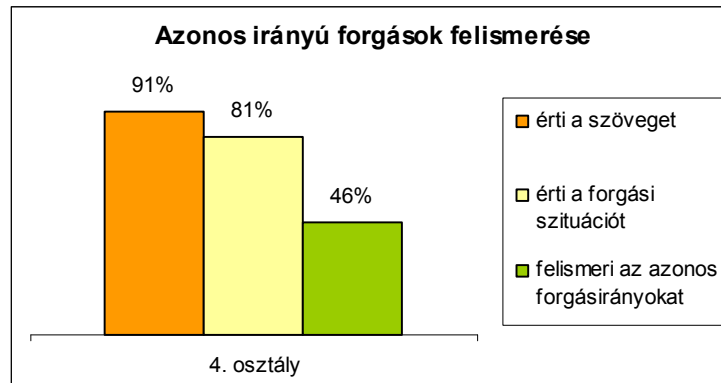
A *c)* válaszból kiderül, hogy a gyerekek látják-e képzeletben a mozgást. Ha helyesen írják be a neveket, akkor megértették az elfordulást, és képesek azt a képi jelekkel azonosítani.

Ha az előző kérdésekre jó választ kapunk, akkor a *d)* kérdésre adott válaszok már a két ellentétes forgási irány felismerésére utalnak. (Pontosabb lett volna az utasítás, ha azt is odaírjuk, hogy az apa végig az óriáskeréknek ugyanazon az oldalán állt, azonban úgy gondoltuk, ez csak kevés gyerekben merülne fel, a feladatot viszont még összetettebbé

² Melléklet, 7. old. 5. feladat

tenné.) Ebben a részben annak a tanulónak a megoldását tekintettük helyesnek, aki a hat rajz közül legalább ötöt jól érték.

Tapasztalatok



6.19. ábra

- A szöveget a 4. osztályosok 91%-a megértette (6.19. ábra).
- b) Az óramutató irányát azonban csak 67%-uk jelölte be helyesen. Elképzelhető azonban, hogy többen is tisztában vannak vele, csak elfelejtették a nyilat berajzolni. Megfigyeltük, hogy a forgásirány jelülésére szolgáló félköríves nyíl - ↷ - sokan nem

ismerik, több helyen találkoztunk ↷ -típusú jelölésekkel.

- c) A 4. osztályos tanulók 10%-a ugyan megértette a szöveget, de a forgatási szituációt már nem.
- d) Mindössze 46%-uk volt képes a forgásirányok helyes azonosítására.

Tekintve, hogy a probléma írásbeli megfogalmazása igen összetett, elképzelhető, hogy a helyes eredményt adó tanulókon kívül mások is vannak, akik valódi szituációban meg tudják különböztetni a kétféle ciklikus permutációt.

Ha nem diszkrét elemek sorrendjével fejezzük ki a forgásirányt, hanem tényleges tevékenységgel állapítjuk meg, feltehetően jobb eredményt kapunk. (Meissner, 2000). Ezt a hipotézist ellenőriztük a páros interjúk során néhány valódi szituációban.

Pl. A két gyereket forgószékre ültettük egymással szemben. Az egyiket megkértük, hogy forogjon, a másikat pedig, hogy forduljon a társával azonos irányba³.

Más alkalommal a hibajavító roll-on kívülről látható két érintkező fogaskerék forgásirányait tanulmányoztuk⁴. (Bartolini-Bussi, et al. 1999).

A gyerekek nagy része mindkét feladattípusnál helyesen válaszolt.

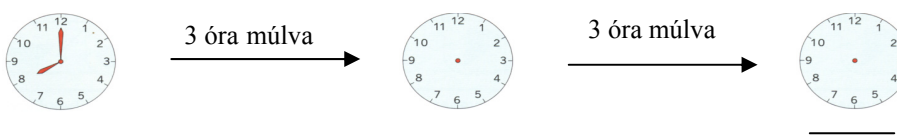
Összegezve a tájékozódó felmérés tapasztalatait, megállapíthatjuk, hogy a gyerekek számára idegen volt a ciklikus irányítással összefüggő probléma. Ugyanakkor az is igaz, hogy a papír-ceruza típusú tesztekkel igen nehéz ezeket az ismereteket vizsgálni. Fontos észrevételünk az is, hogy noha a hétköznapi életben többször támaszkodunk a ciklikus irányítás fogalmára, az iskolában a jelenségek tudatosítására, gyakorlására nem kerül sor.

³ 2005. május 11.

⁴ 2005. május 24.

3. probléma

Hány órát mutatnak az órák? Rajzold be a mutatókat és írd alá az időpontot!⁵



Az óra jó eszköz arra, hogy a különböző helyzetű síkokban a pontkörű forgás természetéről tapasztalatokat szerezzünk. Az óramutatók mint félegyenesek szöget zárnak be egymással, így a kis- és nagymutató helyzetének egyidejű vizsgálata az irányított szög, míg a nagymutató elfordulásának mértéke emellett a forgásszög fogalmának előkészítését segítheti. Közvetlen kapcsolat is van az óra és a forgásirány között, hiszen ez utóbbit az óramutatóval azonos vagy ellentétes irányként különböztetjük meg. Mindezek indokolják, hogy az analóg óra működését ne csak az időmérés tanítása miatt tanulmányozzák a gyerekek.

Tapasztalatok

Az időpont leolvasása egész órák esetén 1. osztályos feladat, így a fenti problémát 1. és 2. osztályosokkal oldattuk meg. A jó megoldások száma mindkét évfolyamon meglehetősen alacsony volt. A feladat nagyon sok problémát felvetett:

- Az időpont leolvasásával és helyes lejegyzésével a tanulók kb. harmada nem boldogult.
- Hibátlan megoldást az elsősök 23%-a, a másodikosok 29%-a adott.
- A délelőtt-délután ciklus ismétlődésére nem gondoltak azok, akik 2 óra helyett 14-et írtak, ezek aránya 1. osztályban 5%, második osztályban azonban 18%.

A tanítókkal beszélgetve kiderült, hogy az órahasználat tanítási módja hasonló a térbeli viszonzszavakéhoz. A tanév során egy-két órában, rendszerint az év vége felé foglalkoznak vele, s így ennek az ismeretnek is hiányzik a folyamatos gyakorlása. Az elsősök a felmérés időpontja előtt néhány héttel tanulták, a másodikosok jóval régebben. Mivel a gyerekek óraismerete igen bizonytalan, arra a következtetésre jutottunk, hogy, ezt az eszközt csak azután használhatjuk más fogalmak kialakításához szemléltető- ill. munkaeszközként, ha működési elvét kézség szinten elsajátítják.

4. probléma

Karikázd be a helyes sorrendeket!

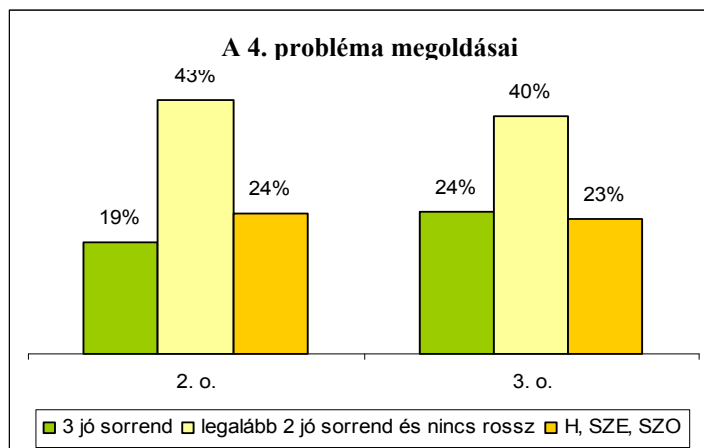
1. szerda, szombat, hétfő
2. szombat, szerda, hétfő
3. szombat, hétfő, szerda
4. hétfő, szerda, szombat
5. szerda, hétfő, szombat
6. hétfő, szombat, szerda⁶

⁵ Melléklet, 10. old. 8. feladat és 11. old. 4. feladat

⁶ Melléklet, 12. old. 9. feladat és 14. old. 6. feladat

Freudenthal nyomán megpróbáltuk a ciklikus irányítás gondolatát időbeli folyamatokon bemutatni, alkalmazni. Minthogy a hét napjai ciklikusan követik egymást, a 2. és a 3. osztályos gyerekeket arra kértük, hogy a *szerda, szombat, hétfő* napok lehetséges 6 permutációja közül válasszák ki a helyeseket. Az idő alkalmas a két ciklikus irány megkülönböztetésére, hiszen az előrehaladás kitünteti az egyiket.

Tapasztalatok



6.20. ábra

A gyerekek jelentős része egyik évfolyamon sem értette meg a feladatot. A sikertelenség oka egyrészt a problémaszituáció újszerűségében kereshető, másrészt abban, hogy a feladat szövegezése nem volt eléggé kifejező, nem fejtettük ki, hogy mit értünk helyes sorrenden. Láthatóan nem gondolkoztak még ilyen jellegű problémán, a hét napjait csak sorban egyesével, szokták felsorolni.

Közel negyedrészüik csak az egy héten belül érvényes *hétfő, szerda, szombat (H, SZE, SZO)* sorrendet tekintette jónak, nem gondolt a ciklikus ismétlődésre.

Kb. 40% azok aránya, akik legalább 2 helyes sorrendet megjelöltek, és nem adtak rosszat, ők azok, akik megértették a ciklikusság problémáját (6.20. ábra).

Mindez azt mutatja, hogy már az első osztálytól kezdve nagyobb hangsúlyt kell helyezni a térbeli és időbeli viszonyok összekapcsolására.

6.3.2. A tanítási kísérlet

A ciklikus rendezés és irányítás témakörében négy problémával foglalkoztunk. Tekintve azonban, hogy a geometriai transzformációk közül a pont ill. tengely körüli forgás témakörünkkel igen szoros kapcsolatban áll, a később ismertető feladatok között is található olyan, mely hatással van a jelenleg vizsgált képességekre.

1. probléma

(3. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Az első foglalkozás célja a saját testünk tengelye körüli negyed fordulatok gyakorlása, a fordulatok közötti kapcsolatok felismerése volt.

1. A gyerekek először padjuk mellett állva hajtottak végre „*Hátra arc!*”, „*Jobbra át!*” típusú utasításokat.

2. Mindenki szabadon elfordulva kipróbálhatta, hogy hány „*Balra át!*” felel meg egy teljes körülfordulásnak, hány „*Balra át!*” felel meg három „*Jobbra át!*”-nak.

3. A következő feladat a kreativitást és a viszonyítási pont transzformálását is igényelte: „*Egy gyerek kiáll a tábla elé, háttal az osztálynak. Milyen utasításokat adhatunk neki, ha azt akarjuk, hogy a végén felénk nézzen? Arccal az ajtó felé álljon? Adjatok minél több utasítássorozatot!*”

4. Írásban, önállóan válaszoltak a következő kérdésekre:

- *Hány Jobbra át! felel meg egy Hátra arc!-nak?*
- *Hány Jobbra át! felel meg egy teljes körülfordulásnak?*
- *Hány Balra át! felel meg egy Jobbra át!-nak?*
- *Hány Balra át! felel meg egy Hátra arc!-nak?*
- *Képzeld el, hogy a tábla felé nézel. Merre fogsz nézni, ha végrehajtod egymás után a Jobbra át! Balra át! Jobbra át! utasításokat?*

Az írásbeli munka során a gyerekek felidéztek a személyes mozgás élményét. Volt, aki felsőtestét kissé elfordítva gondolkozott, s több olyan is, aki ujjait lefelé fordítva szemléltette magának az elfordulás irányát. Ugyancsak a mozgásos emlékezet felidezésére utaltak a megoldás során elhangzott, megerősítést váró kérdések: „*Úgy, mint az előbb?*”, „*A tábla felé állok?*”. Az utóbbi kérdést akkor is feltették, amikor erre nem volt szükség, pl. a „*Hány jobbra át! felel meg 1 Hátra arc!-nak?*” kérdés esetében.

A tanulók fele (13 fő) dolgozott hibátlanul. A legtöbb hiba (9 fő) a *Jobbra át!*, *Balra át!* inverz utasítások összekapcsolásából adódott. (*Hány Balra át! felel meg egy Jobbra át!-nak?*). Az sem automatizálódott még több (4) gyerekben, hogy 1 teljes fordulat 4 negyed fordulatból áll.

Tisztában vagyunk azzal, hogy egyetlen ilyen feladat nem elegendő a megfelelő fejlesztőhatás eléréséhez, de - figyelembe véve a testnevelés tantárgyban rejlő koncentrációs lehetőségeket - úgy véljük, bőven található alkalom a gyakorlásra. Véleményünk szerint a ciklikus irányítás természetének megértéséhez igen hasznosak a saját testen végzett forgási tapasztalatok vagy ezek átvitele más testre.

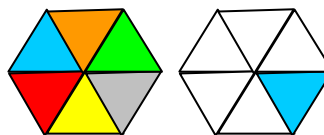
2. probléma

(7. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

A foglalkozást a tájékozódó felmérésben szereplő korongos feladat (6.3.1. fejezet, 1. probléma) azon tapasztalatából kiindulva terveztük meg, hogy a 3. osztályos tanulók csupán 60%-a volt képes az azonos ciklikus rendezések előállítására. Célunk az volt, hogy a forgatás természetéről tevékenységgel gyűjtsenek tapasztalatokat.

Most a gyerekek használhattak eszközt, nem kellett a képzeletbeli forgatásra hagyatkozniuk.

Mindenki kapott egy kartonpapírból készült színezett hatszöget és egy feladatlapot, amelyre 3 további hatszöget rajzoltunk, mindegyiken csak egy-egy cikket színezve ki. Ki kellett színezniük az üres cikket a kezükben lévő



hatszög megfelelő helyzetbe fordításával (*A képek ugyanazt a hatszöget ábrázolják, csak elfordítva. Színezd ki őket!*).

A feladat nem okozott nehézséget, 25 gyerek közül 23 hibátlanul dolgozott, ketten pedig az eredeti korong tükörképét adták meg. Ők nem használták az eszközt, valószínűleg a mentális forgatást sem, csupán a színek egymásutániságára koncentráltak.

3. probléma

(10. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Az előző foglalkozáshoz hasonlóan a gyerekek ismét kaptak egy-egy színezett hatszöget és egy feladatlapot. Hat, különböző módon kiszínezett hatszög közül ki kellett választaniuk a kezükben lévőnek az elforgatottjait, majd meghatározni, hogy azt az eredetihez képest melyik irányba, hány egységgel forgattuk el. A tájékozódó felmérés óriáskerekes feladatával (6.3.1. fejezet, 2. probléma) ellentétben, most nem kellett a képzeletbeli helyzetet transzformálniuk az ikonikus síkra, az eszközt ténylegesen elfordíthatták, s összehasonlíthatták a papíron szereplő helyzetekkel.

27 tanulóból 14 választotta ki jól az elforgatott korongok mindegyikét. Közülük 6 állapította meg helyesen az elforgatás nagyságát és irányát. Munkájukban két stratégiát figyelhettünk meg: 5-en a korongokat mindig arra forgatták, amerre kevesebb lépés kellett, 1 gyerek pedig minden esetben *jobbra* forgatott.

A többieknél jellegzetes hiba volt a két forgási irány (*balra-jobbra*) keverése. A forgatás mértékének megállapítása kevesebb problémát jelentett. Viszonylag sokan jól állapították meg a lépések számát, de rossz irányt írtak be (pl. *jobbra 1* helyett *balra 1-et*). 5-en következetesen mindig a másik irányt írták. Esetükben feltételezhetjük, hogy nem a forgatási irányt tévesztették, hanem a feladatot értelmezték másképp, és nem arra válaszoltak, hogyan forgattuk el az eredeti korongot, hanem arra, hogyan forgassuk el a másikat, hogy az eredetit kapjuk.

Megjegyezzük még, hogy a 180°-os elforgatást igénylő esetben 23 jó válasz született, itt természetesen a forgásiránynak nem volt szerepe.

A tanulók az ilyen jellegű tevékenységek során szükségszerűen szereznek információkat a ciklikus sorrend és a kétféle forgásirány természetéről. A két utóbbi foglalkozás tapasztalatait összevetve látjuk, jóval könnyebb egy elforgatott képet színezéssel megkonstruálni, mint kész képről eldönteni, hogy az elforgatottja-e az eredetinek vagy sem.

(Sajnos elmulasztottuk a forgatások közös megbeszélését s így a további fejlesztés lehetőségét.)

4. probléma

(17. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és videófelvétel)

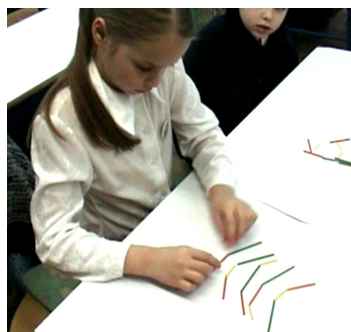
A bemutatásra kerülő tevékenység célja, hogy a tanulók a lineáris és a ciklikus permutációk közötti kapcsolattal ismerkedjenek. Elméleti megfontolásainkból következik, hogy a permutáció, ezen belül a ciklikus permutáció, hozzájárulhat a ciklikus rendezés megértéséhez.

Az osztály tanulóit azonos képességű párokba rendeztük, mindegyiknek adtunk egy borítékot, amelyben damilszálak mellett szívószáldarabokat találtak. A párok képességeit figyelembe véve három nehézségi szintet különböztettünk meg:

- a) 1 piros, 1 sárga, 1 zöld, különböző hosszúságú,
- b) 2 fehér és 2 kék, azonos hosszúságú,

c) 2 kék, 1 fehér, 1 sárga, azonos hosszúságú elem felhasználásával kellett minél több különböző sorrendet előállítani (a feladat annál nehezebb, minél több az összes esetek száma). Ezt követően pedig a damilokat összekötni, majd a megegyező alakzatokat egy csoportba rendezni.

A probléma jól példázta a matematika tantárgyon belüli koncentrációt. A tanulók egyaránt szereznek tapasztalatokat a kombinatorikai struktúrákról (ismétlés nélküli, ismétléses permutációk alkotása), a geometriában az alakzatok (háromszögek, egyenlő oldalú négyszögek) tulajdonságairól, valamint az egybevágósági transzformációkról (tükrözés, eltolás, forgatás). Mi most elsősorban a sorbarendezeésekre koncentráltunk (6.21. ábra).

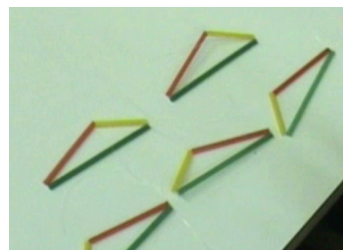


6.21. ábra

Tekintve, hogy az eszköz új volt a gyerekek számára, a foglalkozás hosszú ideig (30 percig) tartott. A tanulók egymásnak segítve az a) és b) esetben az összes lineáris sorrendet megtalálták, a c)-ben is majdnem mindet. (2. osztályban még nem várható el nagy esetszámnál az összes lehetőség felismerése).

A damil összekötése után a háromszögek csoportosítása sikerült a legjobban (6.22. ábra), a másik két esetben négyzetet vagy tetszőleges szögű rombuszokat kaptak, s ez megzavarta az azonosítást. Azt azonban mindenki tapasztalta, hogy az összekötés után csökkent a különböző esetek száma.

Két alakzat azonosságának megállapításához voltak, akik csak síkbeli forgatást végeztek, s így a (háromszögek esetén) a tükörképeket jól elkülönítették. Akadtak olyanok is, akik felemelve a háromszöget a padról, megfordították, s arra a megállapításra jutottak, hogy mindegyik háromszög ugyanolyan lett. A másik két csoportban – mivel a kapott négyszögek nem feltétlenül egybevágóak - nem sikerült a különböző ciklikus permutációkat csoportosítani.



6.22. ábra

6.3.3. Az utóteszt és a késleltetett teszt

Hipotézisünk szerint a ciklikus rendezés fogalma mint a ciklikus irányítás fogalmának előfeltétele eszközhasználatlaltal, tényleges tevékenységekkel alakítható. Az utó- és a késleltetett teszt felvételével az általunk végzett tevékenységek eredményességét vizsgáltuk.




1. probléma

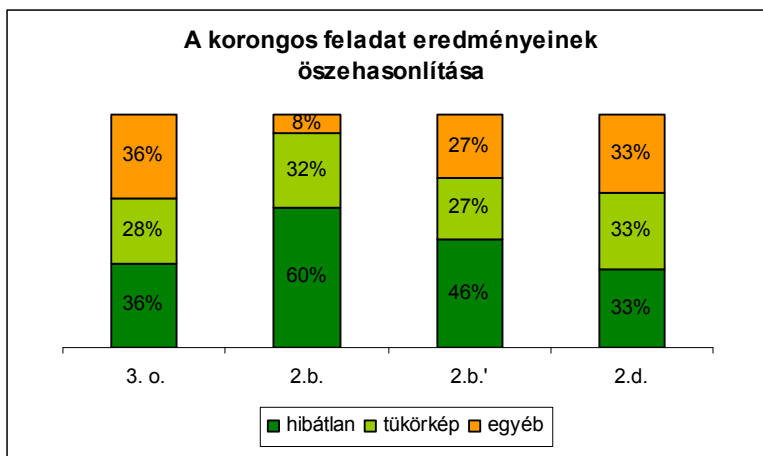
A tájékozdó felmérés korongos feladata⁷ szerepelt az utó- és a késleltetett tesztben is.

⁷ Melléklet, 6. old. 8. feladat, 23. old. 6. feladat, 25. old. 8. feladat

Tapasztalatok

Az értékelésnél ezúttal figyeltünk azokra a hibás színezésekre, amelyeknél a szemközti négyzetek színe helyes (ún. tükörképszínezés), mert ez azt jelenti, hogy az elemek sorrendjét jól állapították meg a gyerekek, csak a képzeletbeli forgatás irányait keverték össze.

Pl: a  korong esetén a helyes válasz: , míg az ún. tükörképszínezés eredménye: .



6.23. ábra

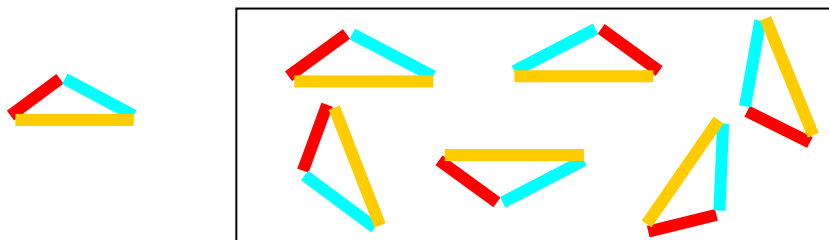
A 6.23. ábra segítségével a kísérleti osztály utó- és késleltetett tesztben elért eredményeit hasonlítjuk össze (2.b. és 2.b.') egyrészt az előzetes felmérésben résztvevő 3. évfolyam, másrészt a gyakorlóiskola másik második osztályának (2.d.) eredményeivel. A jelmagyarázatban szereplő tükörkép megnevezés azokra a megoldásokra utal, ahol vegyesen fordult elő az eredeti és a tükörkép-korong. Az egyéb kategóriába azok a megoldások kerültek, amelyekben találtunk legalább egy olyan korongot, amelynél a színek sorrendje egyik irányban sem jó.

A kísérleti osztályban végzett munka eredményességét támasztja alá, hogy mind a hibátlan, mind a tükörkép-megoldások aránya náluk nagyobb, mint a harmadikosoknál vagy a hasonló képességű másodikosoknál. A késleltetett teszt alacsonyabb értékei azonban azt mutatják, hogy néhány foglalkozás még nem elegendő ahhoz, hogy a gyerekek stabil ismeretekre tegyenek szert. A kísérleti osztály tanulói közül 8-an (32%) mindkét tesztben hibátlanul dolgoztak, ami arra utal, hogy ők képesek a mentális forgatásra. 14-en (56%) voltak azok, akik, ha hibáztak valamelyik tesztben, akkor az kizárólag tükörképszínezésből adódott.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a két forgásirány megkülönböztetése diszkrét elemek sorrendje alapján fejlődött ugyan, de szükség van további fejlesztésre.

2. probléma

A szívószálakkal végzett gyakorlat felelevenítésekképpen az utótesztben szerepelt a következő feladat:

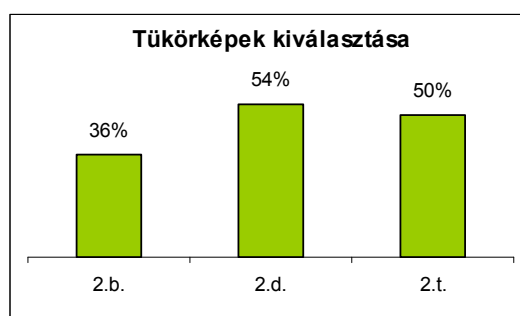


Szívószálakból az ábrán látható háromszöget készítettük. Tegyél X jelet azokba a háromszögekbe, amelyek az eredeti háromszögtől csak azért különböznek, mert a padon elforgattuk, vagy elcsúsztattuk!⁸

Tapasztalatok

Annak ellenére, hogy a foglalkozáson a gyerekek jól dolgoztak, el tudták különíteni a háromszögek tükörképét, itt, az írásbeli feladatban sikertelenek voltak. A 25 gyerek közül 1 munkája volt hibátlan, 1 éppen fordítva, a tükörképeket jelölte meg, további 7 fő csak egy hibát vétett. (Közülük 4-en csak azért, mert éppen az eredetivel azonos állású háromszöget nem jelölték be.) Összesen 9 olyan gyerek volt tehát, aki a rajzban meg tudta különböztetni az eredeti háromszöget a tükörképétől.

Meglepő eredmény, hogy a másik két második osztályban több jó megoldást találtunk, a gyerekek körülbelül fele tudta az azonos irányítású háromszögeket kiválasztani (6.24.



6.24. ábra

ábra). További vizsgálatokat igényelne annak kiderítése, hogy a gyakorlás ellenére mi okozhatta a kísérleti osztály gyengébb eredményeit. Talán szerepet játszott az, hogy a foglalkozáson nem sikerült a tapasztalatokat összefoglalni, vagy az, hogy a gyerekek az érdekes feladat végzése közben nem koncentráltak annak matematikai tartalmára, és így a tevékenység felidézése nem segítette, hanem gátolta a gondolkodást.

⁸ Melléklet, 23. old. 7. feladat

6.4. TÁJÉKOZÓDÁS A KOORDINÁTARENDSZERBEN

A szimbólumokkal történő helymeghatározás matematikai eszköze a koordinátarendszer. Többféle koordinátarendszert használhatunk, azonban ezek megegyeznek abban, hogy a síkban 2, a térben 3 adat szükséges egy pont helyének megadásához. Általános iskolában a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert tanítjuk. Ennek bevezetésére 5. osztályban kerül sor, ám előkészítésére már az alsó tagozaton lehetőség nyílik.

A síkbeli derékszögű koordinátarendszer szoros kapcsolatban van a táblázatos elrendezéssel, egyebek mellett ezért is célszerű megismertetni a gyerekeket a táblázat, ezen belül a sor és oszlop fogalmával. A táblázat az információk vizuális szervezésének, strukturált megjelenítésének eszköze. Matematika órán már 1. osztályban használjuk az ún. szabályjátékok (függvények) témakörben, később pedig statisztikai, kombinatorikai feladatokban. A természetismeret, anyanyelv (nyelvtan) tantárgyakban is jelen vannak, csakúgy, mint a hétköznapi életben.

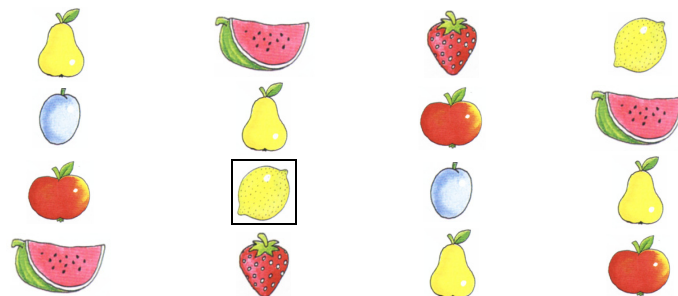
A koordinátarendszer előkészítésének általunk javasolt lépései:

- Sor-, oszlop fogalom megértése, tájékozódás a táblázatban
- Számegyenes fogalma, használata
- Két adat alapján a négyzetrács pontjainak vizuális azonosítása
- Négyzetrácson kijelölt pontok jellemzése két adattal
- Mozgás négyzetrácson, útvonal megadása a sík négy fő irányát szimbolizáló jelsorozattal ($\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow$)

A felsoroltak közül a számegyenes az egyetlen, amivel a tanulók 1. osztálytól, a számfogalom kialakításának kezdetétől folyamatosan találkozhatnak, ezért vizsgálataink a másik négy témakörre irányultak. Kíváncsiak voltunk a táblázatban ill. négyzetrácson való tájékozódás jellemzőire, és arra, hogy ez hogyan kapcsolódik össze az irányfogalom fejlődésével.

6.4.1. A tájékozódó felmérés

1. probléma



1. Milyen gyümölcsöt kereteztünk be?
2. Hányadik sorban van?
3. Hányadik oszlopban van?
4. Mi van alatta?

5. *Mi van felette?*
6. *Mi van tőle jobbra?*
7. *Mi van tőle balra?*
8. *Milyen gyümölcs van a 4. oszlop 2. sorában?*¹

A feladat vizsgálja a *sor-oszlop* elnevezések helyes használatát. Először egy adott tárgy helyét kell megállapítani (2-3. kérdés), majd fordítva, a hely ismeretében a tárgyat megnevezni (8. kérdés).

A 4-7. kérdések a négy síkbeli főirány szerinti tájékozódásra vonatkoznak.

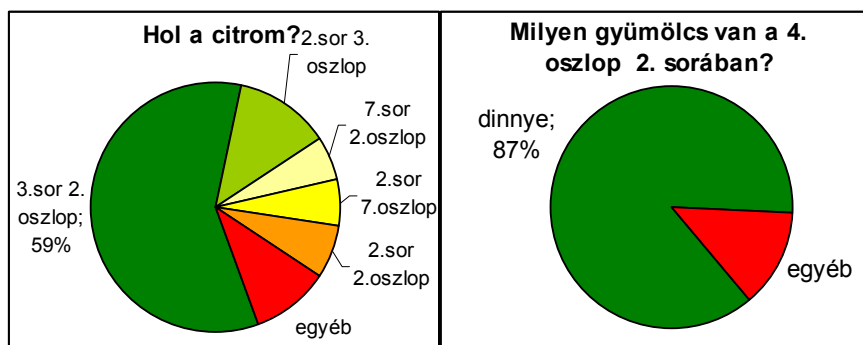
A problémát 1. osztályosoknak tűztük ki.

Tapasztalatok

Az első osztályosok 59%-a helyesen határozta meg egy adott tárgy (*citrom*) helyét. (3. sor, 2. oszlop).

Akik tévesztettek, a következő jellegzetes hibákat követték el (6.25. ábra):

Felcserélték a sor és oszlop elnevezéseket (2. sor, 3. oszlop); vízszintes irányban jól, függőlegesen viszont a bal felső sarokból indulva folytatólagosan számoltak (7. sor 2.oszlop, ill. 2 sor 7.oszlop). A 2. sor 2. oszlop megnevezés feltehetőleg elírásból származott.



6.25. ábra

A hely ismeretében a tárgy megállapítása (*Milyen gyümölcs van a 4. oszlop 2. sorában?*) könnyebbnek bizonyult. Azok nagy része is helyes választ adott, akik a fentebb említett tipikus hibákat elkövették (6.25. ábra) Nem arról van tehát szó, hogy a gyerekeknek teljesen ismeretlen a *sor-oszlop* elnevezés, hanem arról, hogy még bizonytalanok a számozás módjában..

A gyerekek 55%-ának sikerült mindkét irányban azonosítani (tárgyból a helyet, ill. helyből a tárgyat). Ők tehát azok, akik megbízhatóan tájékozódnak a táblázatos elrendezésben, értik és jól használják a *sor-oszlop* elnevezéseket. Minthogy erre az elrendezési módra a matematika tanításában már 1. osztálytól építünk, a témakörben több fejlesztés szükséges annak érdekében, hogy senkinek ne legyenek a táblázatos formából eredő megértési problémái.

A feladat másik része a 4 síkbeli főirány meghatározásával foglalkozott. Itt az *alatt-felett* meghatározása mindenkinek, a *jobb-bal* megkülönböztetés a tanulók 88%-ának

¹ Melléklet, 2. old. 6. feladat

sikerült. Az 1. iskolaév végén ez a jó eredmény, feltehetően annak köszönhető, hogy a kért szituáció megfelelt az írás-olvasás során megszokottnak.

2. probléma

*Azokat a számokat add össze, melyeknek a helyét a színes négyzetek mutatják!*²

2	3	0							
9	6	5							
1	7	8							

Ezzel a feladattal, ugyancsak 1. osztályban, azt vizsgáltuk, hogy a tanulók képesek-e a négyzetrács celláit vizuálisan azonosítani.

Tapasztalatok

A feladat igen sikeres volt, a gyerekek 83%-a hibátlanul dolgozott, azaz mind a 6 cellában lévő számot helyesen adta meg. További 9% csak egy cellánál hibázott, tehát megállapítjuk, hogy az 1. osztályos tanulók képesek a négyzetrács celláinak vizuális azonosítására.

3. probléma

A táblázat oszlopait betűkkel, sorait számokkal jelöltük.

1. Melyik szám áll az **A2** helyen?
2. Melyik szám áll a **D1** helyen?
3. Mennyi a két szám szorzata?
4. Melyik helyen áll ez a szám?³

	A	B	C	D
1	2	9	0	5
2	3	6	4	10
3	1	7	8	11
4	12	20	15	20

A táblázat sorait, oszlopait a sakk, torpedó stb. játékokból ismert módon jelöltük. A sorokat számokkal, az oszlopokat nagybetűkkel. Kíváncsiak voltunk arra, hogy a 2-3. osztályos tanulók képesek-e ennek a szimbólumrendszernek az alkalmazására.

A feladatsituáció jórészt ismeretlen volt a számukra, így az első kérdésre közösen válaszoltunk.

A gyerekeknek tehát minta alapján kellett megérteni egy kódolási módot (*Melyik szám áll az A2 helyen?*), majd dekódolást végeztek (*Melyik szám áll a D1 helyen?*), azaz a hely ismeretében meghatározták a cellát és annak tartalmát (hely→tárgy). A kapott két számot összeszorozták, majd alkalmazniuk kellett a kódolást (*Melyik helyen áll ez a szám?*), azaz a szám és így a cella ismeretében meghatározták a cella helyét (tárgy→hely).

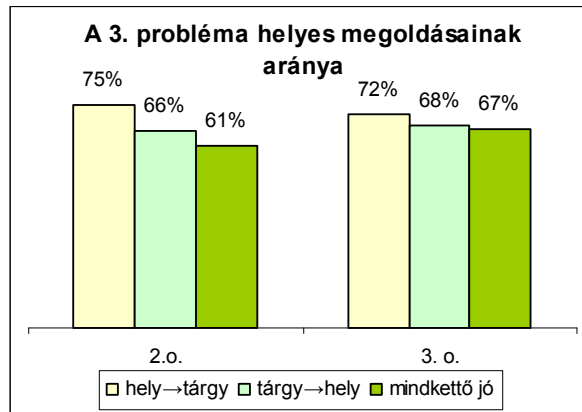
Tapasztalatok

Amikor a tanulók a *Melyik szám áll a D1 helyen?* kérdésre keresik a választ, akkor a kód megfejtése után megkapják a megfelelő cellában lévő számot. A 2. probléma megoldásához szintén a cellákban lévő szám megadása szükséges, ám ott a cella felismerése vizuálisan történik, nem előzi meg a dekódolást. A szimbólumhasználat nehézségét jelzi, hogy míg a 2. problémát az 1. osztályosok 83%-a oldotta meg hibátlanul

² Melléklet, 2. old. 7. feladat

³ Melléklet, 3. old. 5. feladat, 5. old. 6. feladat

(97. old.), addig a fenti kérdésre adott helyes válaszok aránya még a náluk idősebb tanulók (2. és 3. osztályosok) esetében is jóval kisebb (75%, 72%) (6.26. ábra).



6.26. ábra

A 6.26. ábráról az is leolvasható, hogy a cella helyének ismeretében a szám megállapítása (*Melyik szám áll a D1 helyen?*) mindkét évfolyamon több tanulónak sikerült, mint fordítva, a számhoz tartozó cella helyének megadása (*Melyik helyen áll ez a szám?*). Ugyanarra a következtetésre jutottunk tehát, mint az 1. probléma megoldásainak elemzése után.

Hasonló feladat szerepelt az ún. *Frankfurter Test*-ben, valamint az ún. *TIMSS* nemzetközi tesztben. A *TIMSS* teszt 1995-ben 41 ország 3. és 4. osztályosaival készült, a *Frankfurter Test*-et 1998-ban vették fel 100 3. osztályos, és 119 4. osztályos tanulóval Németországban, (Franke, 2000, 106-110. o.).

Saját tapasztalataink összhangban vannak a nemzetközi mérések tapasztalatával, mert azok is azt mutatták, hogy a *tárgy*→*hely* irányú meghatározás a nehezebb.

6.4.2. A tanítási kísérlet

A koordináta-rendszer témakörhöz kapcsolódóan összesen négy foglalkozást tartottunk.

A táblázatban, négyzet rácson való tájékozódás fejlesztése mellett törekedtünk arra, hogy kihasználjuk a számtan-algebra témakörrel való koncentrációs lehetőségeket.

1. probléma

(4. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

A tájékozódó felmérés 2. problémájához hasonlóan mindenki kapott egy 4x4-es számrácsot. Ezen azonosítaniuk kellett azt a két cellát, amit a tanító a táblán lévő üres rácson letakart, majd az így megtalált számokkal el kellett végezniük egy adott műveletet.

A feladatot egy kivétellel mindenki meg tudta oldani. Úgy látjuk, hogy egy négyzet rácscelláinak vizuális azonosítása 2. osztályban nem okoz nehézséget. A feladattípusnak az ismeretek felszínén tartásában ill. az aritmetikai műveletek gyakorlásában fontos szerepe van, ezért indokolt időnkénti kitézése.

2. probléma

(9. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Torpedó játék párokban: A játék közismert, minden gyerek hallott már róla, többen - elmondásuk szerint - játszottak is ilyet. A szabályok felelevenítése után minden tanuló kapott két 10x10-es táblát, az egyikben bejelölték a saját hajóikat (egy 2, egy 3 és egy 4 egységből álló hajót), a másikon pedig a párjuk hajóira leadott találatokat jegyezhettk.

A játék során mind a *tárgy*→*hely*, mind a *hely*→*tárgy* irányú meghatározásra szükség van. Az ellenfél tengeralattjárójának kilövéséhez a helyet, azaz egy betűt és egy számot (pl. A6) kell megadni, míg annak eldöntéséhez, hogy ellenfelünk eltalálta-e a mi hajónkat, a mondott betű-szám pár alapján meg kell keresni a cellát.

A gyerekek napköziben közösen játszottak már ilyet, úgy, ahogy a televíziós vetélkedőkön látható: a tanár felrajzolta a 10x10-es négyzetrácsot a táblára, és kigondolt egy elrendezést, a gyerekek pedig közösen találgatták a hajók helyét. Ez sokkal egyszerűbb volt, mint az órai páros játék.

Abban 27 tanuló, (a tanítóval együtt) 14 pár vett részt. Az írásbeli munkák elemzéséből kitűnik, hogy közülük 6 pár, azaz 11 tanuló (és a tanító) dolgozott teljesen hibátlanul. Ők megértették a jelölésmódot és a szabályokat, így sikerült végigjátszaniuk egy fordulót.

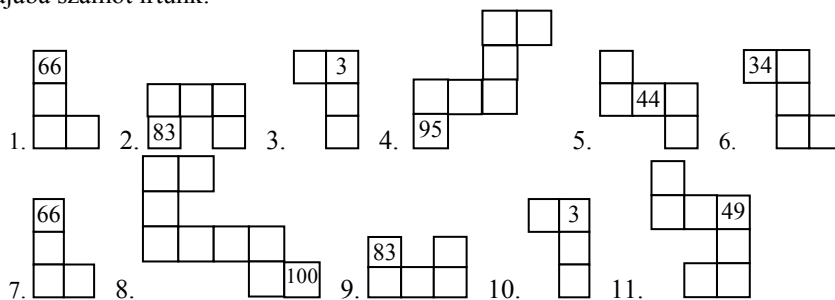
A többi 8 párnak akadtak megértésbeli problémái, ez a tanácstalanság tükröződött az órai beszélgetésekben is. Megfigyeléseink azt mutatják, hogy az elsődleges problémát nem a helymeghatározás jelentette, hanem a kapott és adott információk feldolgozása, jelölése. (Két négyzetrácson dolgoztak egyszerre, az egyikben a saját hajóik voltak, a másikon kellett bejelölni az ellenfél hajóira vonatkozó jó és rossz találatokat.)

Úgy ítéljük meg, hogy ebben az életkorban annak, akinek nincs kellő tapasztalata a játék menetéről, egyetlen magyarázat nem elég a megértéshez. Így ez a játék ebben a formában csak akkor válhat a tanítási óra részévé, ha a gyerekek annak menetét és lejegyzési módját már megismerték és megértették. Célszerű ezért először kötetlenebb formában, pl. napközis foglalkozáson játszani.

3. probléma

(12. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Egy 10x10-es táblázatban 1-től 100-ig sorrendben elhelyeztük a számokat. A gyerekek a feladatlapon a táblázat mellett, abból kivágott alakzatokat kaptak, melyeknek egy-egy cellájába számot írtunk:

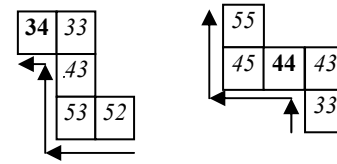


A feladat az alakzatok kitöltése volt. Az első 8 esetben a számrács segítségével, a további 3 esetben pedig anélkül. A különböző alakzatokban a megadott számot úgy

helyeztük el, hogy a *fentről lefelé*, *balról jobbra* írásmódot feltételezve, a kitöltési irányok mindegyike szerepeljen. Elképzelésünk szerint a feladat a táblázatban való vizuális eligazodás, valamint a 100-as számkörben való tájékozódás képességét is fejleszti. Az utolsó 3 alakzat helyes kitöltéséhez ugyanis fel kell ismerni, hogy a *le-fel* irányok ± 10 -et, a *jobbra-balra* irányok ± 1 -et jelentenek.

Az osztály fele (13 fő) hibátlanul dolgozott, további 6 fő jól oldotta meg az utolsó 3 feladatot. Ez azt jelzi, hogy 19-en ismerték fel és alkalmazták az adott irányba való lépegetés és az értéknövelés/csökkentés közötti kapcsolatot. (Mindössze egy olyan tanuló akadt, aki a 11 alakzat közül kettőnél többen hibázott.)

Egy tanulónál figyeltünk fel ugyanarra a típushibára: *Dávid* a 11 alakzathoz kettőben hibázott (6.27. ábra), s mindkét esetben a vízszintes és a függőleges növekedés irányát cserélte fel.



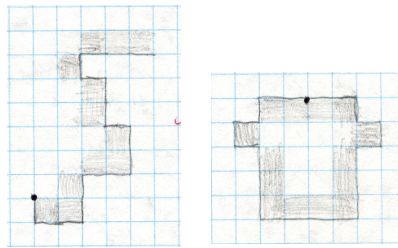
6.27. ábra

4. probléma

(19. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

A foglalkozáson négyzetrácsra történő mozgást végeztünk, az útvonalat szóbeli utasításokkal (pl. *le 1-et*, *jobbra 2-t*, stb.) adtuk meg. Négy részfeladatot állítottunk össze.

Az első útvonalat közösen, a táblánál rajzolva készítettük el, értelmeztük az egyes részfeladatok utasításait, és megbeszéltük a megoldást. Ezután két iránysorozatot diktáltunk, melyek eredményeként egy nyílt és egy zárt töröttvonalat kellett kapni (6.28. ábra).



6.28. ábra

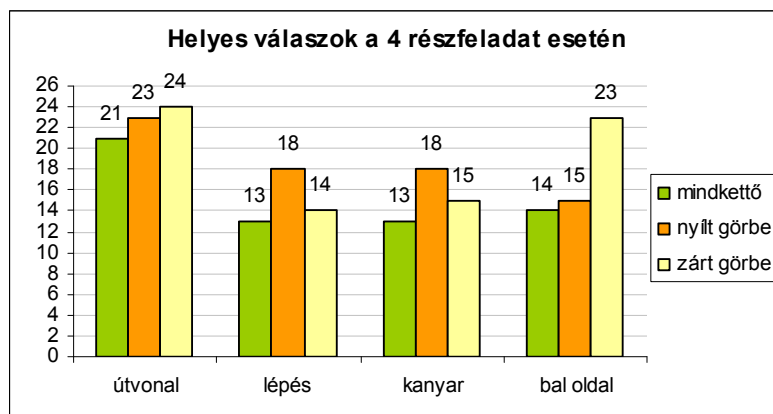
1. Szóbeli utasítások alapján egy előre megadott rácspontból kiindulva meg kellett rajzolni egy nyílt, majd egy zárt töröttvonalat. A feladat a síkbeli tájékozódás gyakorlására szolgált.

2. Meg kellett számolni, hogy a kapott töröttvonalak hány lépésből állnak (egy lépés egy négyzetoldalnak felel meg). Ekkor a töröttvonal fogalmát egy mozgással összekötve, a töröttvonal hosszáról (kerületéről) szerezhetők előzetes ismeretek.

3. Meg kellett állapítani a kanyarok számát (kanyaron irányváltoztatást értünk). Itt ismét a mozgás felidézéséről, valamint a mozgás során bekövetkező irányváltoztatás tudatosításáról van szó.

4. Meg kellett határozni a haladási irány szerinti *bal oldalt* azoknak a négyzeteknek a kiszínezésével, amelyek a töröttvonal *bal oldalán* vannak, és legalább egy oldalukkal hozzáérnek. (Az irányított töröttvonal *bal oldalának* fogalma zárt töröttvonal esetén elvezethet az alakzat *belsejének* vagy *külsőjének* fogalmához.)

Az írásbeli munka eredményét a 6.29. ábra foglalja össze:



6.29. ábra

A 26 tanuló által készített 52 rajz között mindössze 5 olyan volt, amelyben egy-egy hibás lépést találtunk. Ez *jobb-bal* tévesztésből vagy rossz lépésszámból adódott. Azt tapasztaltuk tehát, hogy a diktált utasítások alapján képesek a síkbeli tájékozódásra.

A lépések megszámlálása már kevésbé volt eredményes. A gyerekek fele mindkét esetben jól számolt. A nyílt töröttvonal hosszának megállapítása bizonyult könnyebbnek. A hibás számok minden esetben kisebbek voltak a tényleges lépésszámnál, így azt feltételezzük, hogy helyenként a határoló négyzeteknek és nem azok oldalainak számát adták meg.

A kanyarok számának megadása, azaz az irányváltoztatás megállapítása hasonlóan sikerült, szintén a nyílt töröttvonal esetén találtunk kevesebb hibát.

14 főnek sikerült mindkét görbe bal oldalát meghatározni. Ennél a feladatnál a zárt vonal esetén kaptunk több jó megoldást, feltehetően azért, mert a gyerekek megsejtették, hogy az alakzat belsejéről van szó.

Látható, hogy a feladatsituáción keresztül több témakörhöz is kapcsolódhatunk. Az útvonalarajz elkészítése néhány próbálkozás után megérthető, a kapott töröttvonal pedig azonosítható egy mentális utazás képével.

A lépésszám az alakzat oldalainak hosszáról ad felvilágosítást, a kanyarok száma pedig a csúcsok számáról. A tanulók mindkét geometriai tulajdonságot a nyílt töröttvonal esetén állapították meg sikeresebben. Az irányítással összefüggő (*bal oldal*) tulajdonság meghatározása pedig a zárt töröttvonal esetén bizonyult egyszerűbbnek.

6.4.3. Az utóteszt és a késleltetett teszt

A tanítási kísérlet során azt tapasztaltuk, hogy a négyzetrácson való tájékozódás módja könnyen elsajátítható, az utasítások kevés magyarázat után megérthetők. Kíváncsiak voltunk arra, hogy az egyszerűbb problémaszituációk megértése igényli-e a direkt fejlesztést, vagy spontán módon is fejlődik. Azt is szeretnénk volna megtudni, elegendő-e néhány gyakorlási alkalom ahhoz, hogy a tanulók később eredményesen oldjanak meg hasonló problémákat.

1. probléma

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Melyik szám áll az 57-től kettővel jobbra?

Melyik szám áll a 25 alatt eggyel?

Melyik szám áll a 74-től hárommal balra?

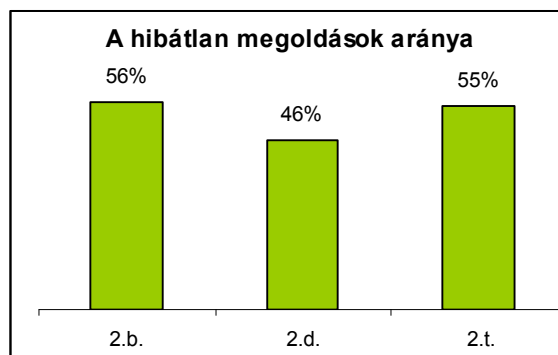
Melyik szám áll a 100 felett négyvel?⁴

A feladat az utótesztben szerepelt, s a tanítási kísérlet 3. problémájának szituációját idézte fel. Itt is egy 10x10-es számrácson kellett a 4 síkbeli főiránynak megfelelően tájékozódni.

Tapasztalatok

Az utóteszt felvételekor lehetőségünk adódott arra, hogy a kísérleti osztály (2.b.) eredményeit összehasonlítsuk a két kontrollosztályának, a gyakorlóiskola másik második osztályának (2.d.) valamint egy másik iskola második osztályának (2.t.) eredményeivel.

Azt tapasztaltuk, hogy a hibátlan megoldások aránya a három osztályban hasonló



6.30. ábra

(6.30. ábra), így valószínűsíthető, hogy a négyzetrácsos való tájékozódás a főirányok alapján olyan képesség, amely spontán módon is fejlődik.

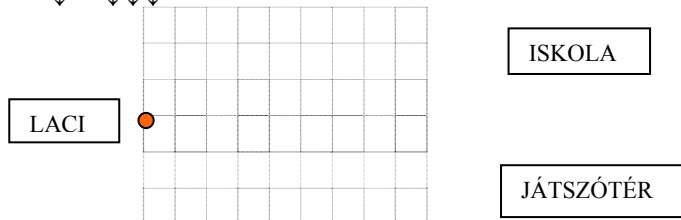
Az irányok közül mindegyik osztályban a *jobbra-balra* tévesztése volt a leggyakoribb, bár előfordulhatott, hogy a hiba nem iránytévesztésből, hanem számolásból adódott.

⁴ Melléklet, 23. old. 9. feladat

2. probléma

*Hová ment Laci otthonról? Megtudod, ha megrajzolod az útját a nyilak szerint! Egy nyíl egy lépést jelent. Hányszor kanyarodott útközben?*⁵

→ → → → ↑ ↑ → → ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ → → → →



A késleltetett teszt feladatával a tanítási kísérlet 4. problémáját idéztük fel. A két probléma között két lényeges eltérés volt. Itt a feladatot egy hétköznapi szituációba ágyaztuk, az útvonalat ugyanakkor nem szóbeli utasítással, hanem nyílsorozattal adtuk meg.

Tapasztalatok

A kísérleti osztály 26 tanulója közül mindössze 1 tévesztett az útvonal megrajzolásában. Ez a jó eredmény alátámasztja azt a feltevésünket, hogy az útvonalrajzolás módja néhány magyarázat után könnyen megérthető.

A kanyarok számát 15-en (58%) helyesen állapították meg. A tanítási kísérlet foglalkozásán a nyílt vonalnál 18 tanuló adott jó választ (6.29. ábra), közülük 6-an most hibáztak. Látható, hogy ez a tudás még nem elég stabil.

A koordinátarendszer előkészítésével összefüggő vizsgálataink azt mutatják, hogy a táblázatos elrendezés, a cellák helyének meghatározása, a négyzetrácson való mozgás az adott életkorban már viszonylag könnyen megérthető. Az ilyen típusú feladatok lehetőséget teremtenek más matematikai témakör ismereteinek fejlesztésére is.

⁵ Melléklet, 25. old. 7. feladat

6.5. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

A forgatással, eltolással, tükrözéssel való ismerkedés szerepel az alsó tagozatos tananyagban. Az iránytartás igen fontos transzformációs tulajdonság, ezért a transzformációk témaköre értelemszerűen összekapcsolódik az irányítás kérdéseivel.

Mindhárom transzformáció - már fenomenológiai szinten is - igen sok lehetőséget kínál a lineáris (*alatt-felett, előtt-mögött, jobb-bal*) és a ciklikus (*jobb-balfordulat, jobb-balcsavar*) polarítások természetének megértéséhez.

Az egyes transzformációk az eredeti alakzat (vagy elrendezés) kitüntetett polarításait eltérő módon változtatják meg.

Az eltolás és a forgatás irányítástartó transzformációk. Ez azt jelenti, hogy a ciklikus polarításokat (körüljárási irányt) változatlanul hagyják. A tükrözés irányításváltó, azaz megváltoztatja a körüljárási irányt.

A lineáris polarítások viselkedésének megállapítása nem ilyen egyszerű. Az eltolás hatására sem az alakzat kitüntetett lineáris polarításai, sem azoknak a tér polarításaihoz való viszonya nem változik meg. A forgatás csak az alakzat polarításainak a tér polarításaihoz való viszonyát változtatja meg. A tükrözés pedig, köszönhetően a körüljárási irány megváltoztatásának, mindkettőt.

Feltételezésünk szerint az egyes transzformációk eredményeképpen kapott alakzatok tanulmányozásával jobban megérthető a különböző térbeli polarítások viselkedése, ezért fejlődhet a térbeli tájékozódó képesség.

Figyelembe véve, hogy az eltolás sem a lineáris, sem a ciklikus irányokat nem változtatja meg, ebben a fejezetben elsősorban a forgatással és a tükrözéssel foglalkozunk. Azt vizsgáljuk, hogy a gyerekek képesek-e megalkotni egy alakzat elforgatott képét ill. tükörképét, valamint azt, hogy felismerik-e a különbséget a forgatással ill. tükrözéssel kapott képek között.

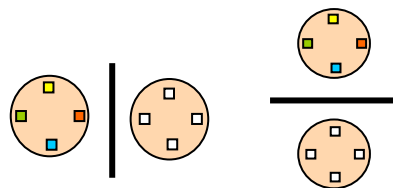
Tekintettel arra, hogy a forgatási irány fogalma szoros kapcsolatban áll a ciklikus rendezéssel (3.2. fejezet, 38-39. old.), ebben a fejezetben több olyan feladatra is visszatérünk, melyről a 6.3. fejezetben már volt szó.

6.5.1. A tájékozódó felmérés

Arra voltunk kíváncsiak, hogy a gyerekek képesek-e egy egyszerű alakzat tükörképének megalkotására, szereztek-e már elegendő tapasztalatot ahhoz, hogy a kapott tükörképet az eredeti képpel vizuálisan összehasonlítva (ránézésre), ellenőrizzék saját munkájuk eredményét.

1. probléma

*Színezd ki a korongok tükörképét!*¹



¹ Melléklet, 9. old. 4. feladat és 11. old. 5. feladat

A ciklikus rendezéssel összefüggésben a 6.3.1. fejezetben már használtuk a feladatban szereplő korongokat. Míg akkor képzeletbeli elfordítást, addig most két különböző tengelyre való tükrözést kértünk.

A tanulók 1. osztálytól kezdve ismerkednek ezzel a geometriai transzformációval, ezért a feladatot 1-2. osztályosok számára készítettük. A zsebtükör használatát megengedtük. Tisztában voltunk azzal, hogy így a megoldás már nem kizárólagosan mentális tevékenység eredménye, hiszen a tükörben látható a helyes kép, igaz, annak átmásolása is okozhat nehézséget. Kíváncsiak voltunk arra is, hogy képesek-e a tükör megfelelő használatára, jelent-e ez tényleges segítséget.

Tapasztalatok

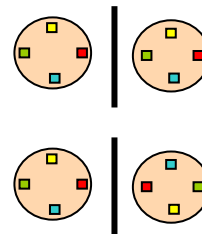
A tanulók tükörhasználatára igen változatos képet mutatott. Voltak olyanok, akiknél nem volt tükör (sajnos helytelenül feltételeztük, hogy az osztálytermekben ez minden gyereknek a rendelkezésére áll), így ők csak elképzelés alapján dolgoztak. Akadtak azonban olyanok is, akiknél volt ugyan tükör, de nem érezték szükségét annak, hogy használják.

Találkoztunk olyanokkal is, akik próbáltak vele dolgozni, de nem értették, hogy hogyan kell tartani ill. mit kell nézni benne. Megnézték benne a korong képét, de elvéve, már nem tudták ugyanazt a színezést elkészíteni. Ennek oka egyrészt az lehet, hogy elfelejtették a benne látott képet, másrészt pedig, hogy a tükör síkja merőleges a papír síkjára, így két különböző síkban fekvő kép azonosítása volt a feladat. Természetesen akadtak olyanok is, akiknek a tükör használata segítséget jelentett.

Összegezve elmondhatjuk, a zsebtükör mint munkaeszköz spontán módon nem jelent egyértelmű támogatást a mentális tükrözés elvégzésében. Ehhez először meg kell tanítani a használatát.

A kitűzött probléma két részből állt. A két tengely állása megfelelt a síkban megszokott függőleges és vízszintes helyzetnek. A következő megoldási típusokkal találkoztunk:

- Helyes tükrözés.
- Eltolás a tengelyre merőlegesen. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a korongon mind a vízszintes, mind a függőleges tengelye mentén azonos maradt a színek sorrendje. Ez a teljes elrendezés átmásolásával érhető el.
- 180° -os forgatás, vagy szemléletesebben, vízszintes és függőleges tengelyre vonatkozó tükrözések egymásutánja. Ekkor a korong mindkét tengelye mentén megváltozik a színek sorrendje. Ugyanez a színezés úgy is megvalósítható, ha a függőleges tengelyre tükrözünk, majd átmásoljuk a sorrendet.

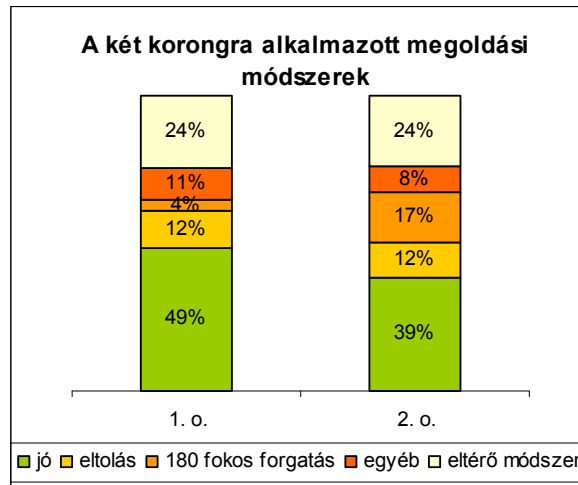


- Egyéb színezések, melyek között tipikust már nem találtunk.

Az alkalmazott megoldási módszerek megoszlását a 6.31. ábra mutatja.

A gyerekek több, mint 75%-ánál azt tapasztaltuk, hogy a két tükrözés eredménye ugyanabba a megoldási típusba tartozott, tehát mindkettőhöz ugyanazt a módszert alkalmazták.

A hibátlan megoldások száma 1. osztályban magasabb, ennek oka talán az lehet, hogy ők éppen a teszt megírásához közeli időpontban tanultak a tengelyes tükrözésről. Két-három órán foglalkoztak különböző alakzatok tükörképének megrajzolásával, kiszínezésével, illetve alakzatok tükörtengelyének megkeresésével.

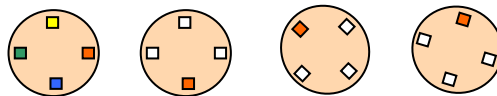


6.31. ábra

Tapasztalataink azt mutatják, hogy egy elrendezés mentális tükörképének megalkotására és lerajzolására a megfigyelt életkorban a tanulók még készségszinten nem képesek. A tükör csak akkor válhat segédeszközzé, ha használatát gyakorolják.

2. probléma

*A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!*²



A probléma a 6.3.1. fejezetben már ismertetett feladat³ egyszerűbb változata. Mindkét esetben azonos ciklikus rendezések előállítását kértük. Mivel ehhez a gyerekeknek egy képzeletbeli forgatást kell végezniük, a probléma alkalmas annak megvizsgálására is, hogy képesek-e egy alakzat (a korong) különböző szögekkel történő elforgatott képét megalkotni.

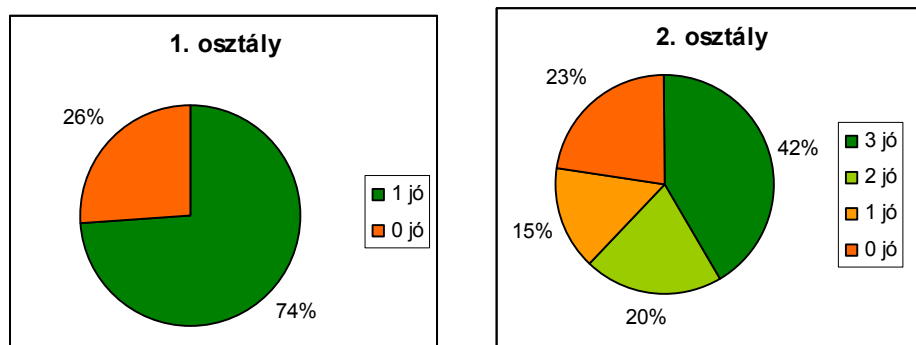
A feladatot ebben a formában 2. osztályosoknak tűztük ki, az 1. osztályosoknak a három korong közül csak az elsőt kellett kiszínezni.

Tapasztalatok

Az eredményeket a 6. 32. ábra mutatja.

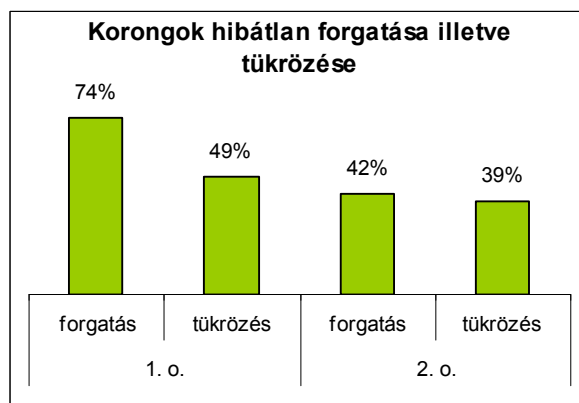
² Melléklet, 1. old. 4. feladat és 4. old. 6. feladat

³ Melléklet, 6. old. 8. feladat



6.32. ábra

Lehetőség nyílik arra, hogy ezeket az eredményeket az 1. problémában szereplő tükrözések eredményeivel összehasonlítsuk. Az összehasonlításból csak korlátozott érvényességű következtetést vonhatunk le, mivel a két probléma megoldási körülményei nem voltak teljesen azonosak. Az 1. osztályban egy, a 2. osztályban három korong elforgatottját, ugyanakkor mindkét évfolyamon két korong tükörképét kellett kiszínezni. A forgatáshoz nem állt eszköz a tanulók rendelkezésére, a tükrözéshez viszont használhattak zsebtükröt.



6.33. ábra

Ennek ellenére mindkét évfolyamon azt találtuk, hogy a tükörkép meghatározása még akkor is nehezebb a forgatott kép megalkotásánál, ha az előbbi esetben eszközös segítséget kapnak a tanulók (6.33. ábra). Igaz, az 1. osztályban növelte, a 2. osztályban csökkentette a hibátlan forgatások számát az a tény, hogy eggyel kevesebb ill. eggyel több korongot kellett elforgatni, mint ahányat tükrözni.

6.5.2. A tanítási kísérlet

A foglalkozások feladatai elsősorban a tengelyes tükörkép és az elforgatott kép különbözőségének megállapítására ill. ennek gyakorlására irányultak. Célunk az volt, hogy a tanulók a kétféle egybevágósági transzformáció természetéről gyűjtsenek tapasztalatokat.

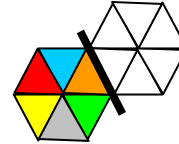
Feltételeztük, hogy az eszközzel végzett konkrét tevékenységek segítenek a megfelelő transzformált képek emlékezetében történő rögződésében.

1. probléma

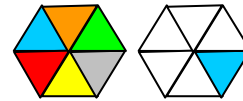
(7. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Mindenki kapott egy kartonpapírból készült színezett hatszöget és egy feladatlapot.

Ezen ki kellett színezni három hatszög különböző helyzetű tengelyekre vonatkozó tükörképeit. *(Színezd ki a hatszögek tükörképeit, ha a vastag vonal a tükör helyét jelöli!)* A megoldáshoz minden tanuló rendelkezésére állt a zsebtükör, s ha szükséges volt, a megmutatta, hogyan kell tartani, hol látható benne a tükörkép.



A feladatlapra rajzoltunk 3 további hatszöget, mindegyiken csak egy-egy cikket színezve ki. A gyerekeknek a kartonpapírból készült hatszöget megfelelő helyzetbe hozva ki kellett színezniük a fehér cikkeket. *(A képek ugyanazt a hatszöget ábrázolják, csak elfordítva. Színezd ki őket!)*



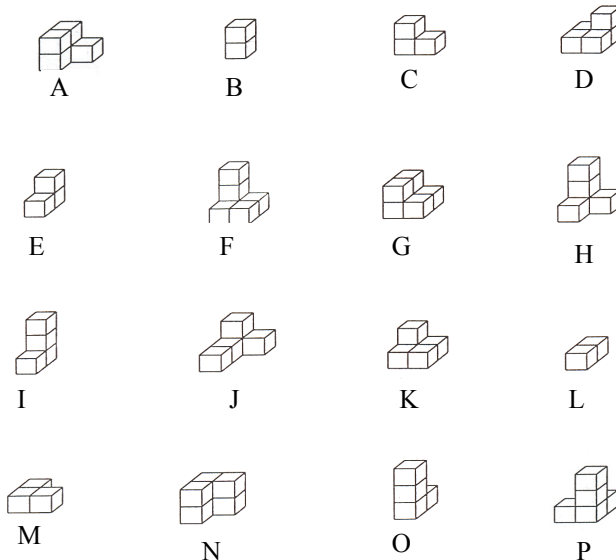
A feladat megoldása igen könnyűnek bizonyult. 25 főből 20 teljesen hibátlanul dolgozott. Hárman egy-egy tükrözést, ketten egy-egy forgatást rontottak el. A 150 színezési feladat közül tehát mindössze 5 volt hibás. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a második osztályos tanulók – amennyiben megfelelő módon használják a kapott eszközt – képesek egy elrendezés tükörképének ill. elforgatott képének megalkotására.

2. probléma

(14. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

A foglalkozáson a perspektivikus ábrák értelmezését, valamint a mentális forgatás képességét vizsgáltuk.

Minden tanulónak adtunk egy feladatlapot, melyen 16, kockákból alkotott építmény rajza szerepelt.



A feladat két részből állt.

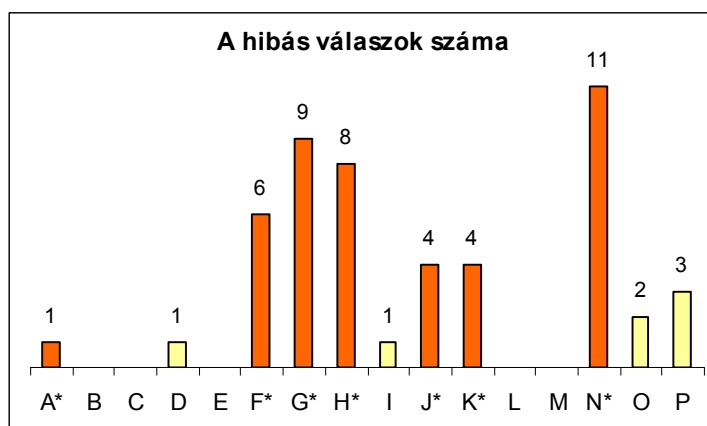
1. Miután a tanítóval közösen megbeszélték, hogy a lapon az általuk ismert és használt színesrúdkészlet kiskockáiból készült építmények láthatók, először azt kellett megállapítaniuk, hogy melyik hány kiskockából áll.

Az alkotóelemek számának megadása arról ad információt, hogy el tudják-e a perspektivikus ábra alapján a térbeli építményt képzeln.

Az *A* feladatot közösen oldották meg. Először az osztály kb. fele 4, fele 5 kockát számolt. Az egyik gyerek közbeszólása („*De Kati néni, ott van még, ami nem is látszik!*”) figyelmeztette a többieket egy jól ismert típushibára: azokat az elemeket, amelyek takarásban vannak, a gyerekek nem veszik figyelembe.

A foglalkozáson 27 tanuló vett részt. Az általuk adott összes (432) válasznak 11%-a (49) volt rossz. Az egyes építményekre adott hibás válaszok számát a 6.34. ábra mutatja.

A figyelmeztetés ellenére a hibás válaszok száma azoknál az építményeknél volt magas, ahol a rajzon egy vagy több kocka nem látszik (ezeket a 6.34. ábrán csillaggal jelöltük).



6.34. ábra

A tanulók az *A**, *F**, *H**, *J**, *K**, továbbá a *D*, *I* alakzatoknál minden hibás esetben 1-gyel kevesebb kiskockát számoltak. (A *G**, *N**, *O* alakzatoknál talákoztunk a ténylegesnél 1-gyel nagyobb számmal is.)

2. „*Színezzétek ugyanolyan színűre azokat az építményeket, amelyek ugyanazok, csak más helyzetből látjuk őket, pl. elforgatva!*”

Az egybevágó alakzatok azonosításával a térbeli helyzettől való elvonatkoztatás illetve a mentális forgatás képességét vizsgáltuk.

A 16 alakzat egybevágóságuk alapján 6 csoportba sorolható.

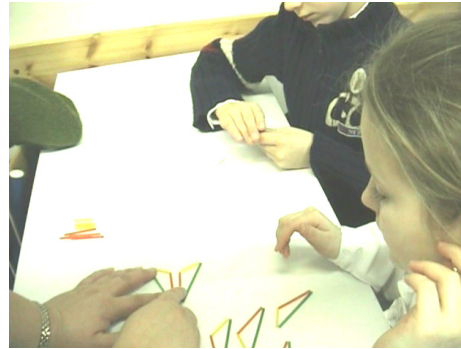
A hibák minden esetben abból származtak, hogy valamelyik fennálló kapcsolatot a tanuló nem ismerte fel. Az összes hiba 54%-ánál azt figyelhettük meg, hogy csak azokat az építményeket tekintették egybevágónak, amelyek helyzete az

Csoport	Hibák száma	Tipikus hiba
<i>A-D-K</i>	11	<i>A</i> kimaradt (9-szer)
<i>B-L</i>	0	
<i>C-E-M</i>	3	
<i>G-N</i>	5	nem azonosak
<i>H-J-P</i>	9	<i>J</i> kimaradt (6-szor)
<i>I-O</i>	0	

alapsíkra merőleges tengely körüli elforgatás miatt tért el. Ilyen hiba pl. az $A-D-K$ hármastól az A , vagy a $H-J-P$ alakzatok közül a J kihagyása.

Ez ismét alátámasztja azt a korábbi hipotézisünket, hogy a térben a függőleges (*le-fel*) irány kitüntetett szerepű (6.1.1. fejezet, 3. probléma, 67. old.), ahhoz tudunk a legkönnyebben viszonyítani.

További megfigyelésünk, hogy a 25-ből 9 fő olyan volt, aki egy vagy akár több esetben is – helyesen - egybevágóként jelölt meg két olyan alakzatot, amelynél a kiskockák számát különbözőnek vette. Véleményünk szerint ez vagy abból ered, hogy ebben az életkorban a gyerekek még nem képesek a két feladat közötti kapcsolat meglátására, vagy pedig nincsenek még birtokában annak a tapasztalatnak, hogy a térfogat állandósága az egybevágóság szükséges feltétele.



6.35. ábra

Teljesen hibátlanul mindössze 7-en dolgoztak, a kiskockák számolásában 11-en, az egybevágó alakzatok felismerésében 14-en.

Az osztály kb. kétharmada számára hasznos lett volna az alakzatok megépítése, és (amennyiben ezek összetapadnak) a kívánt helyzetbe mozgatása. Erre a tárgyaló foglalkozáson már nem került sor, egy későbbi alkalommal azonban célszerű lenne visszatérni rá.

3. probléma

(17. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és videófelvétel)

A problémát korábban (6.3.2. fejezet, 4. probléma, 94-95. old.) már ismertettük. A szívószálakkal végzett tevékenység elsődleges célja az volt, hogy a tanulók a lineáris és a ciklikus permutációk közötti kapcsolattal ismerkedjenek. A különböző oldalhosszúságú háromszögek előállítására és csoportosítására azonban lehetővé tette azt is, hogy a háromszög elforgatott és tükrözött képe közötti eltérésre irányítsuk a tanulók figyelmét.

Tapasztalatok

Korábbi tapasztalatainkat (95. old.) az alábbi észrevétellel egészítjük ki:

A tanítási kísérlet során az egyik háromszöget alkotó párnál megfigyeltük, hogy noha szépen két csoportra osztották az irányítás alapján a háromszögeket, a tanító rávezető kérdései ellenére sem ismerték fel, hogy a két különböző irányítású háromszög egymás tükörképe⁴.

Tanár: Mit vettetek észre? Ez a kettő egymásnak...

Gábor: Öööö...

Tanár: Egymásnak...

Együtt:(figyelnek és hallgatnak)

⁴ 2006. január 19.

- Tanár: Ha ide tennék valamit közé... mit kellene ide tennem? Mit kellene ide tennem, hogy egyforma legyen? (6.35. ábra)
- Együtt:(figyelnek és hallgatnak)
- Tanár: Na?
- Fanni: Pirosat?
- Tanár: Nem, jaj, dehogyis, nem színre gondoltam. Nézzétek, látjátok, hogy nem egyezik. Ez a kettő mije egymásnak?
- Gábor: Párja!
- Tanár: Mi történe, ha ide tennék egy tükröt, ide középre? Mit látnánk benne?
- Gábor: Ugyanazt!
- Tanár: Akkor egymásnak.... Milyen képei?
- Együtt:(figyelnek és hallgatnak, még mindig nem tudják, milyen szót vár a tanár)

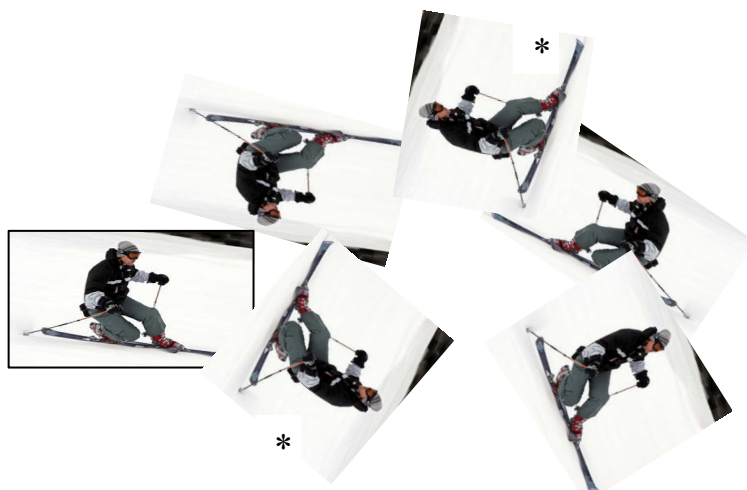
A beszélgetésből kiderül, hogy a manipuláció szintjén különbséget tudnak tenni, ugyanakkor nem tudják megfogalmazni, hogy ez az eltérés miből ered. A tanító szavaival, félmondataival igyekezett az emlékezetükből a *kép-tükör-tükörkép* elrendezést előhívni. A „Mit kellene ide tennem, hogy egyforma legyen?” kérdésre Fanni bizonytalanul visszakérdez, hogy „Pirosat?”. A válasz kétféle lehetséges gondolatmenetet tükröz: Ha a padon lévő elrendezést részleteiben vizsgálta, akkor - a tanár mozdulatának megfelelően - a két párhuzamosan elhelyezett piros szívószálra koncentrált, és további, velük egyforma elemet keresett. Ha az elrendezést globálisan tekintette, akkor a piros volt az egyetlen elem, amelyet a mutatott módon elhelyezve, a teljes kép tengelyes szimmetriája megmarad.

Gábor utolsó két válaszából az látszik, hogy a *kép-tükörkép* ugyan vizuálisan összetartozik számára, de ehhez vagy nem társul a *kép-tükör-tükörkép* elrendezés, vagy nem képes ennek verbális kifejezésére. Mindezek feltehetően több tükörrel végzett tevékenység eredményeképpen alakulnak ki.

4. probléma

(18. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

A feladat egy adott fénykép azonosítása, tükörképének, elforgatottjának felismerése volt (6.36. ábra).



6.36. ábra

A korongokkal, hatszögekkel végzett feladatokhoz hasonló problémáról van szó, ám itt a képet egészében kellett nézni, nem úgy, mint a korábbi esetekben, valamilyen diszkrét elemekből álló elrendezésésként.

A fényképen egy síelő látható, így az általa kitüntetett két irány, az *alatt-felett*, valamint a haladási irány (*előre-hátra*) egyértelműen felismerhető. A harmadik irányra (*jobb-bal*) nincs feltétlenül szükség ahhoz, hogy a képeket azonosítsuk, hiszen az előbbi kettő azt már meghatározza. A gyerekek kezébeadtuk az eredeti fényképet (a 6.35. ábrán ezt bekereteztük), így azt illesztgetve állapíthatták meg, hogy hat különböző helyzetű kép közül melyik származik az eredetiből forgatással és melyik tükrözéssel. A célunk az volt, hogy a pont körüli forgatás és a tengelyes tükrözés irányítástartó ill. váltó tulajdonságáról gyűjtsenek tapasztalatokat.

A feladat ebben a formában könnyűnek bizonyult. 27-ből 21 gyerek dolgozott hibátlanul. A legtöbbet a *-gal megjelölt képeknél hibáztak. Ez az a két helyzet, amikor az *alatt-felett* irány a legnagyobb szöggel, csaknem 90° -kal fordult el. Tapasztalatunk megegyezik Aman és Roberts már említett kutatási eredményével (6.1.1. fejezet, 2. probléma, 66. old.), mely szerint a hibák száma a képzeletbeli forgatás szögének növelésével nő.

A tanítási kísérlet alapján úgy látjuk, hogy nehezebb a különálló pontokból alkotott elrendezés (1. probléma) transzformált képeinek azonosítása, mint az egyetlen egészként, globálisan értelmezett kép (4. probléma) esetében. Ez azt jelzi, hogy a fejlesztési folyamat korábbi fázisába érdemes ilyen jellegű problémát beilleszteni, ezt követhetné aztán pl. a fényképek különböző transzformáltjainak eszköz nélküli azonosítása.

6.5.3. Az utóteszt és a késleltetett teszt

Az utó- és a késleltetett teszttel azt vizsgáltuk, hogy a fejlesztés hatására eredményesebb lett-e a diszkrét elemekből álló elrendezések elforgatott ill. tükrözött képének megalkotása, valamint ezek megkülönböztetése.

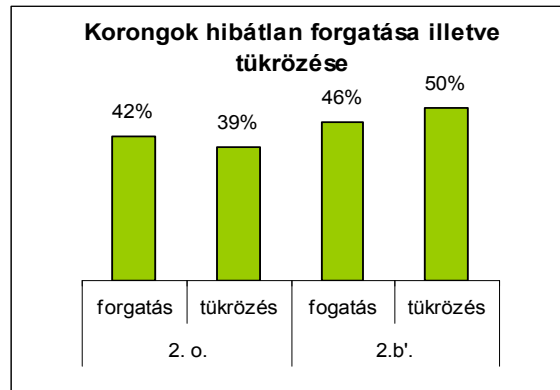
1. probléma

A tájékozódó felmérés korongok forgatására⁵ és tükrözésére⁶ vonatkozó feladatait a késleltetett tesztben is kitűztük. A fejlesztés során foglalkoztunk hasonló problémával (színezett hatszögek, 6.5.2. fejezet, 1. probléma, 111. old.), ott a tanulóknak megengedtük, hogy a forgatáshoz és a tükrözéshez eszközt használjanak. Most nem vehettek igénybe semmilyen eszközt. Arra voltunk kíváncsiak, hogy eredményeik javultak-e, azaz néhány hónap elteltével fel tudják-e idézni a fejlesztés során végzett konkrét tárgyi tevékenységeket, s meg tudják-e alkotni a helyes mentális képeket.

⁵ Melléklet, 25. old. 8. feladat

⁶ Melléklet 24. old. 5. feladat

Tapasztalatok



6.37. ábra

A hibátlan forgatások és tükrözések arányát a 6.37. ábra segítségével hasonlítjuk össze. Mindkét esetben kis mértékű javulást láthatunk a tájékozódó felmérés 2. osztályosainak eredményeihez (2.o.) képest. Elképzelhető, hogy a tényleges javulás valamivel nagyobb az ábrán mutatottnál, hiszen a kísérleti osztálynak nehezebb dolga volt: a tükrözésnél nem engedték meg a tükrőhasználatot, a forgatásoknál pedig nem három, hanem négy korong hibátlan színezése jelentette a jó megoldást.

Mind a ciklikus rendezés, mind a jelen témakör feladatainak elemzése azt mutatja, hogy a tükörkép és az elforgatott kép megkülönböztetését további szituációkban célszerű gyakorolni, különös tekintettel a diszkrét elemekből álló elrendezésekre.

6.6. OBJEKTUMOK KÉPE KÜLÖNBÖZŐ NÉZŐPONTOKBÓL

Egy térbeli objektum síkbeli ábrázolásának egyik, a hétköznapi életben is alkalmazott módja, hogy róla különböző irányú nézeti képeket készítünk. A tárgy és a megfigyelő egymáshoz viszonyított helyzetének megváltozása más és más nézeti képet eredményez. Az iskolában a tanulók ezzel a problémával technika órán, a műszaki rajzok elemzése és készítése során találkozhatnak. Leggyakrabban az adott objektum elől-, felül- és oldalnézeti képét ábrázolják. Minthogy ezek a tevékenységek egyrészt a vizualitást és az irányt, másrészt a tér- és síkgeometriát kapcsolják össze, érdemes matematika órán is foglalkozni velük. A folyamat kétirányú: megrajzolhatjuk egy térbeli alakzat különböző irányú nézeti képeit, ill. ugyanarról a tárgyról készült nézeti képekből rekonstruálhatjuk a tárgyat. A tevékenységek során várhatóan több kérdés is felmerül:

- Hány nézeti kép szükséges egy tárgyról ahhoz, hogy egyértelműen meghatározhassuk?
- Mikor szükséges külön *jobb* oldali és *bal* oldali nézeti képet készíteni?
- Ha a tárgyat mozdítjuk el a megfigyelőhöz képest, ugyanazokhoz a nézeti képekhez jutunk, mint ha a megfigyelő mozdul el a tárgyhoz képest?

6.6.1. A tájékozódó felmérés

1. probléma

*Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról. Írd a képek alá, hogy melyik milyen irányból készült, ha tudod, hogy melyik készült előlről!*¹



előlről



A feladatban leírt szituáció kétféleképpen képzelhető el. Vagy a megfigyelő járta körbe a rögzített helyzetű bögrét, és készített róla négy kitüntetett irányból fényképet, vagy a rögzített helyű megfigyelő a bögrét körbeforgatva négy kitüntetett helyzetben fényképezett. Mindkét esetben egy síkbeli teljes körülfordulás negyedfordulatokra bontásáról van szó, tehát kapcsolatot teremthetünk a tengely (*alatt-felett* irány) körüli forgatás és a vízszintes sík négy főiránya (*jobb-bal, előtt-mögött*) között. A feladat szövegezése a két szituáció közül a fényképezés irányának változtatását sugallja („*Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról.*”). A megoldáshoz először el kell képzelni egy térbeli mozgást, aztán annak eredményét egy síkbeli képpel kell azonosítani, tehát az enaktív síkról át kell térni az ikonikus síkra.

A feladatot mind a négy évfolyamon kitudtük.

Tapasztalatok

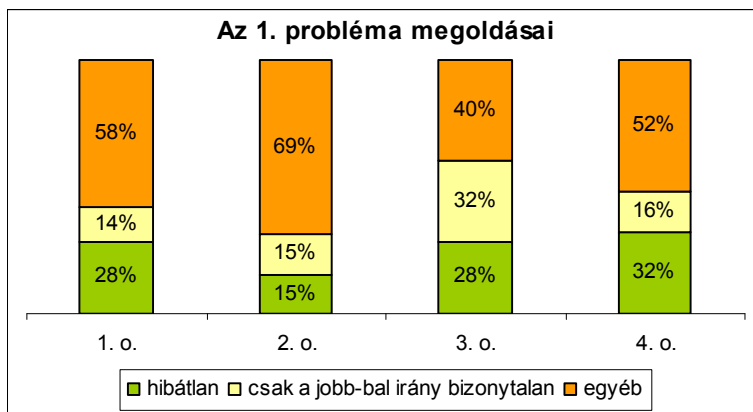
Már a felmérés alatt felfigyeltünk arra, többen nem fogadták el, hogy az első kép *előlről* készült. Feltehetően még nem érzik, hogy az egyik irány választása tetszőleges lehet, ám a többi már ettől függ. A bögre formájából adódhatott, hogy ezek a gyerekek a 4. képet (ezen nem látszik a bögre füle), esetleg a 2.-at tekintették *előlről* készültnek. Annak

¹ Melléklet, 9. old. 5. feladat, 11. old. 3. feladat, 13. old. 2. feladat, 16. old. 6. feladat

ellenére, hogy írás közben ezt megbeszéltük, 8%-uknál volt kimutatható ez a gondolkodásmód. Az értékelésnél az így kapott jó megoldásokat szintén elfogadtuk.

A *jobb-bal* irány felcserélése vagy meghatározásának elkerülése („*oldalról*”) a két irány keveréséből eredhet, vagy abból, hogy nem tudták, magukhoz vagy a bögréhez kell-e viszonyítani.

A helyes megoldások száma minden évfolyamon igen alacsony (6.38. ábra). Még 4. osztályban is csak a tanulók harmada dolgozott hibátlanul. Az értékelhetetlen válaszok magas aránya a feladatszituáció szokatlanságát jelzi.



6.38. ábra

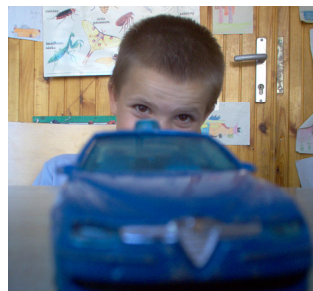
A tájékozódó felmérés idején készített interjúk során is tapasztaltuk, hogy a gyerekek egyik évfolyamon sem találkoztak még a „*Milyennek látjuk ebből az irányból?*” típusú kérdésekkel.

Egy-egy tárgyról különböző irányokból fényképeket készítettünk, s a gyerekek ellenőrizték, hogy azt látják-e ők is, amit a fénykép mutat (6.39. ábra).

Az írásbeli forma további nehézséget jelenthetett, hiszen nem volt előttük a bögre, amin ellenőrizhették volna válaszaikat.

Meglepően nagy azok száma, akik csak a *jobb-bal* irány megkülönböztetésében hibáztak.

Hagyományosan azt tekintik egy tárgy előnézetének, ami a megfigyelővel szemben látszik, *jobboldali* nézetnek pedig a megfigyelő *jobb oldalának* megfelelő irányból látható képet. Sokan nem találkoztak még a fenti a konvencióval, így problémát jelentett számukra, hogy az oldalnézeteket minnek tekintsék. Voltak, akik ezt a kérdést az „*oldalról*” megjelöléssel oldották meg, s voltak olyanok is, akik felcserélték a *jobb-bal* irányokat. Ez vagy egyszerű iránytévesztésből adódott, vagy (más problémákkal, pl. a 6.1.1. fejezet 3. problémájával kapcsolatos vizsgálataink is ezt erősítik meg) abból, hogy nem magukhoz viszonyítottak, hanem a bögréhez.



6.39. ábra

2. probléma

*Melyik helyen milyen irányban kell a levesért nyúlni? Írd betűt a megfelelő nyíl mellé!*²

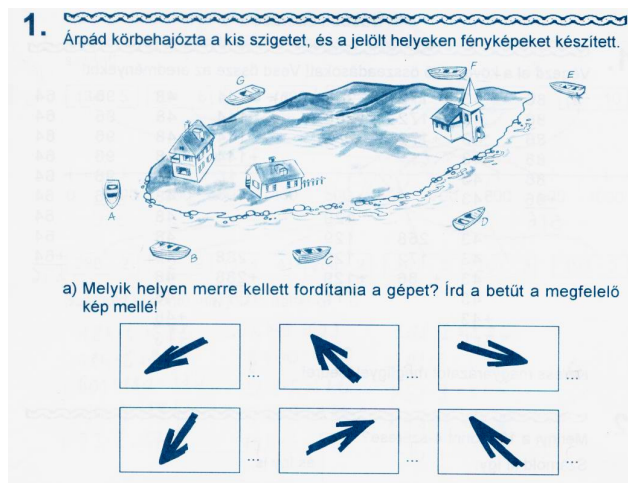


6.40. ábra

A feladat ötlete De Lange (1984) klasszikusnak számító tájékozódási tesztfeladatából eredt (1.1.3. fejezet, 9. o.).

A tájékozódó felméréshez kapcsolódó interjúk során 3-4. osztályos gyerekeknek adtunk hasonló gondolkodásmódot igénylő problémát (C. Neményi Eszter, Wéber Anikó, 1998, 141. o.). A feladat két részből állt, először a fényképkészítés irányát kellett meghatározni (6.41. ábra), majd a képeket az irányokkal azonosítani. Azt tapasztaltuk, hogy mind az irányok meghatározása, mind a fényképek azonosítása megoldhatatlan feladatot jelentett. Ezért az általunk konstruált fenti problémával csak arra a részkérdésre kerestük a választ, hogy képesek-e a 3-4. osztályos tanulók néhány, jól megkülönböztethető irányhoz nyilakat rendelni.

A nyíl a mozgás, a mozdulat, a tekintet irányának a szimbóluma. Az azonosításhoz bele kell képzelniük magukat a szituációba, meg kell állapítaniuk a mozdulat (a levesért nyúlás) irányát, majd ennek meg kell feleltetniük egy szimbólumot. A feladat fontos, mert a vektorfogalom előkészítését is szolgálhatja.



6.41. ábra

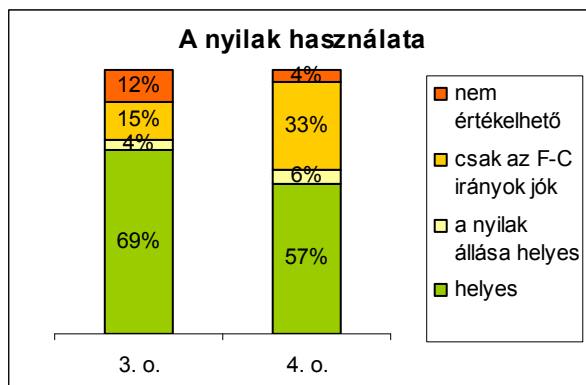
² Melléklet, 13. old. 4. feladat és 16. old. 6. feladat

Tapasztalatok

A válaszok elemzésében zavart okozott, hogy a 6.40. ábrán szerepelt 2 azonos irányú nyíl, ugyanakkor a 6 tényér közül egyhez nem tartozott. Úgy gondoltuk, az azonos irányú nyilakra adott válaszok segítenek majd annak eldöntésében, hogy a tanulók helyesen értelmezték-e a szimbólumot. Azonban sokan, közel 30%-uk, a két nyíl egyikéhez beírta a hiányzó betűt. Az értékelésnél az ilyen típusú megoldásokat is jónak tekintettük.

Ugyancsak elfogadtuk, ha minden nyilat fordított irányban jelölték, bár a feladat szövege a felnőttek számára egyértelműnek tűnik, a „levesért nyúlni” azt jelenti, hogy a kezdőpont a tényér, a végpont a leveses tál.

A nyíl szimbólum használatáról szerzett tapasztalatainkat a 6.42. ábra foglalja össze. A nyilak használata a gyerekek több, mint felének egyik évfolyamon sem okozott nehézséget. Előfordultak ugyanakkor olyan megoldások, amelyeknél a nyilak állása megfelelő volt, de irányukat keverték. Több olyan tanuló is akadt, aki csak a legegyszerűbb, vízszintes, helyzeteket (F-C) tudta azonosítani. Igen magas volt azok aránya, akik nem tudták a mozdulatokhoz hozzárendelni a nyilakat sem irány, sem állás szerint, ők azok, akik vagy egyáltalán nincsenek tisztában a nyíl szimbólum jelentésével, vagy pedig nem értették meg a feladatot.



6.42. ábra

Eredményeinek azt mutatják, hogy a bevezetőben említett tesztfeladatok igen nehéz és összetett problémát jelentenek a 3-4. évfolyamosok számára.

6.6.2. A tanítási kísérlet

A foglalkozások mindegyikén a tényleges tevékenységet állítottuk középpontba.

1. probléma

(6. foglalkozás: megfigyelési mód: írásos feljegyzés, fényképfelvétel és a gyerekek írásbeli munkája)

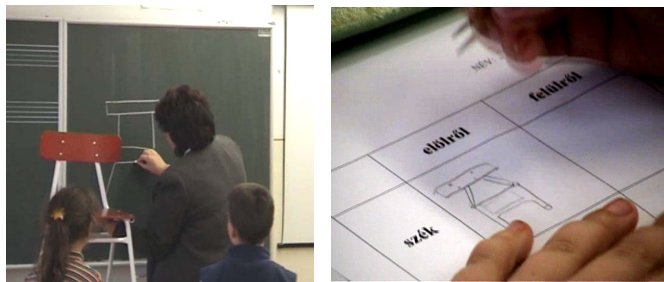
Hétköznapi tárgyakat kellett lerajzolni *előlről*, *felülről*, *oldalról*. Nem akartunk kitérni a *jobb-bal* megkülönböztetés problémájára, hiszen a feladat e nélkül is nehéz és újszerű volt, ezért olyan tárgyakat választottunk, amelyeknek a kétféle oldalnézete megegyezett: szék, pohár, ceruza.

A szék nézeti képeit a tanár irányítása mellett a gyerekek közösen állapították meg.

A tanár a tábla előtt a gyerekek szemmagasságának megfelelően felemelte a széket, s megbeszélték az *elől-*, *oldal-*, *felülnézet* szavak jelentését.

A foglalkozás előtt nem gondoltuk át kellően, hogy a három eset mindegyikében rögzíteni kell vagy a tárgy vagy a megfigyelő helyzetét. Így a magyarázatban az *előlnézet* és az *oldalnézet* megállapítása úgy történt, hogy a gyerekek szeme előtt a széket fordítottuk el, míg a *felülnézetnél* a gyerekek kellett elmozdulniuk, a szék az *oldalnézetnek* megfelelő helyzetben maradt. Már a megbeszéléskor érződött, hogy ez a váltás megértési problémához vezethet.

A „*Honnan látjátok a széket?*”, „*...melyik részét látjátok?*” típusú kérdések nem ekvivalensek, először a megfigyelő szemszögéből kell válaszolni („*Így van, oldalról látjuk.*”), másodsor a tárgyból kiindulva („*Az oldalsó részét.*”). Míg az *elől-* és *oldalnézetnél* mindkét változat elhangzott - holott csak a szék fordult el - a *felülnézetnél* csak az, hogy *felülről* hogyan látjuk.



6.43. ábra

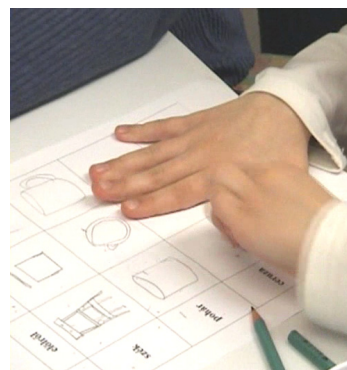
A szék nézeti sematizált képeit a megbeszélés alapján a tanár rajzolta fel a táblára, majd ezután a gyerekek is elkészítették a feladatlapon (a méretarányokra nem kellett ügyelniük). 2 gyerek rajza értékelhetetlen volt, tehát ők egyáltalán nem értették meg a feladatot. A többiek munkáján csak úgy, mint a közös magyarázat során, azt figyelhetjük meg, hogy nem elégedtek meg a kontúrvonalak berajzolásával, minden apró részlet rögzíteni akartak (6.43. ábra). Ebből azt a következtetést vontuk le, hogy a továbbiakban minél egyszerűbb tárgyakkal kell dolgoznunk, mert így a gyerekek figyelmét az irányok megkülönböztetésétől a részletek nem vonják el.

A pohár lerajzolásához a gyerekek a következő tanári utasítást kapták:

„*Az lesz az előlnézet, amit te szemmagasságban látsz, oldalnézet, elfordítod oldalra, felülnézet, tedd le magad elé, és nézd meg, mit látsz! (mutatja)*”

Ismét látszik, hogy míg az *elől-* és *oldalnézet*hez a pohár elfordítását ajánlottuk, addig a *felülnézet*hez a gyerekek kellett változtatniuk testhelyzetükön.

13-an nem síkbeli rajzot készítettek (6.44. ábra), hanem perspektivikus ábrázolásra törekedtek. Ez a ceruzával nem fordult elő, feltehetően azért, mert annak hossza dominál a másik két irányú kiterjedésével szemben. Nem tudatosult tehát a gyerekekben, hogy most a síkbeli ábra megrajzolása a feladat.



6.44. ábra

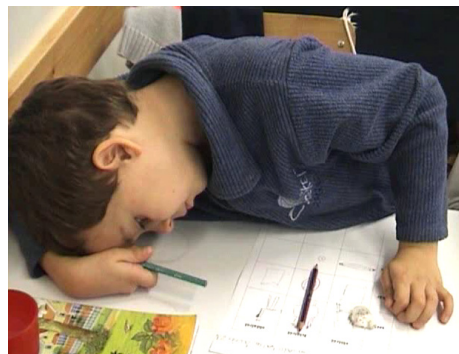
Volt olyan, akit az bizonytalanított el, hogy a pohárnál megegyezik az *elől-* és az *oldalnézet*.

A ceruza rajzolásánál egy újabb problémával is szembekerültünk: a kiindulási helyzet befolyásolja a többi nézeti képet. Többen rákérdeztek, hogyan kell tartani a ceruzát. Tapasztaltunk olyan eseteket, hogy két nézet rajzolása között a tanulók a tárgyat is elfordították, meg saját nézőpontjukat is megváltoztatták. (*Dani: Kati néni, oldalról hogy csináljam? Így? (az álló ceruzát lefekteti)*).

Nizar pl. úgy dolgozott, hogy az *előlnézeti* képhez a ceruzáját állítva tartotta, de vízszintesen, 90°-kal elfordítva rajzolta le. Ezután ránézett *felülről*, majd a ceruzát lefektetve, a 6.44. ábrán látható módon *előlről* nézve rajzolta meg a *felülnézeti* képet. Végül anélkül, hogy változtatott volna a ceruza helyzetén, megfigyelte *oldalról* (6.45. ábra), azonban ismét 90°-kal elfordítva ábrázolt.



6.45. ábra



6.46. ábra

Összegezve megállapíthatjuk, hogy a gyerekek nagy részének nem az irányok megkülönböztetése jelentett problémát, hanem más, a tevékenység során felmerülő kérdés tisztázatlansága, mint pl. az apró részletek berajzolása, a perspektivikus ábrázolás, az *elől-* és *oldalnézet* megegyezése. A legtöbb félreértés a tárgy és a megfigyelési helyzet egymáshoz viszonyított elmozdulásaiból adódott.

2. probléma

(13. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkája)

Második alkalommal a fenti tapasztalatokat figyelembe véve jóval egyszerűbb, két színesrúdból összeállított elrendezésekkel foglalkoztunk, ugyanakkor kíváncsiak voltunk az oldalnézetek megkülönböztetésére is. A színesrudakat jól ismerték a gyerekek, tudták, hogy melyik hány cm hosszú (*sárga=5cm, kék=3cm*).

Az alábbi feladatlappal együtt mindenki megkapta a két rudat is.

ELŐLRŐL	JOBBRÓL	BALRÓL	FELÜLRŐL

A feladatlapon három építmény *előlnézeti* képe látható. Ez alapján meg kellett építeni egy elrendezést, majd megrajzolni a többi nézeti képet.

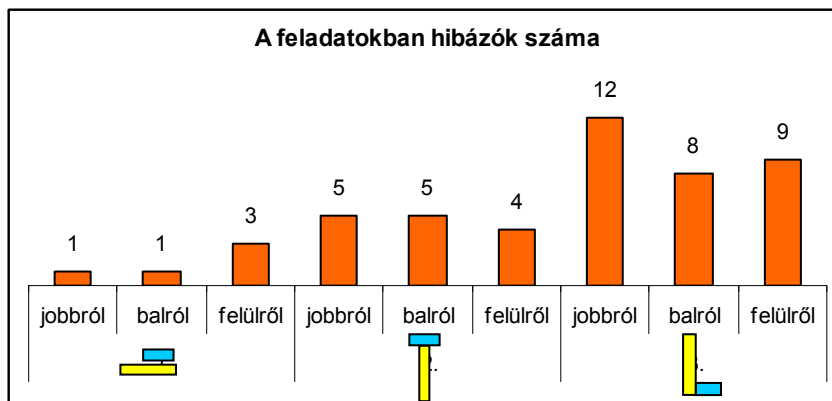
Az első feladatot közösen beszéltek meg.

„*Tedd magad elé a két rudat úgy, hogy előlről úgy nézzenek ki, mint a rajzon!*”

Megfigyeltük, hogy a gyerekek kb. harmada úgy építette meg, mintha a *felülnézeti* adtuk volna meg. A tanító figyelmeztette ugyan őket, hogy a rajz az előlnézeti ábrázolja, de talán szükség lett volna ennek a problémának a hangsúlyosabb, egyértelműbb tisztázására.

Ezután le kellett rajzolniuk, hogy mit látnak, ha ránéznek *jobbról*, *balról*, *felülről*. A megbeszélés eredményeként a helyes képek felkerültek a táblára. A *bal oldali* nézet megbeszélésénél a gyerekek közül többen ráéreztek arra a problémára, jelent-e különbséget a *jobb oldali* nézethez képest, hogy a kék rúd beljebb áll. („*Azért kicsit másabb...*”, „*Messzebb van.*”). Nem került sor azonban annak tisztázására, hogy a nézeti képen nem érzékelhető, hogyan helyezkedik el a tárgy a kép síkjára merőlegesen. Az önálló munkában ennek következményeként fordult elő az alábbi tipikus hiba:

A alakzat *jobb oldali* nézete: a *bal oldali* pedig: (6.47. ábra).

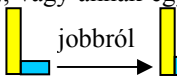


6.47. ábra

A feladatlapon a táblázatos megjelenítési formát használtuk. A korábban tárgyalt problémák közül itt is felfigyeltünk a *sor-oszlop* elnevezések keverésére: Többen a „*Soronként haladjatok!*” utasítást helytelenül értelmezték, és függőleges irányban haladtak (6.4.1. fejezet, 99. old.).

A 2-3. elrendezésnél már önállóan kellett dolgozni. Az előzetes megbeszélés ellenére többen a megadott képeket *felülnézetként* tekintették.

Az írásbeli munkákban az osztály fele (14 fő) dolgozott hibátlanul. További 6 gyerek csak az utolsó építménynél tévesztett, de ott sem minden nézeti képnél. A megadott nézeti kép alapján helyesen készítették el az építményt, de mert itt a két *oldalnézetnél* felmerült az a probléma, hogy az egyik rúd teljesen eltakarja a másikat (*balról*), vagy annak egy részét




(*jobbról*), ezt nem tudták helyesen lerajzolni. A leggyakoribb hiba:  (6.47. ábra).

A 3. alakzat *előlnézeti* képét úgy adtuk meg, hogy az alapján több térbeli kirakás is lehetséges legyen. Ez azonban egy tanulónak sem jutott eszébe, mindenki úgy helyezte el a két rudat, hogy azok érintkezzenek.

3. probléma

(13. foglalkozás, megfigyelési mód: írásos feljegyzés, fényképfelvétel és a gyerekek írásbeli munkája)

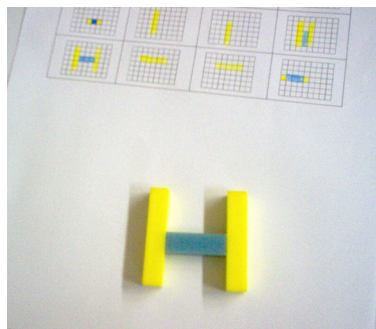
Az előző foglalkozás folytatásaként további elrendezéseket vizsgáltunk. A gyerekek

most 2 sárga és egy kék rudat kaptak. Ismét három *előlnézeti* képet adtuk meg: 1.  2.  3. 

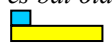


Mindössze két gyerekben merült fel az a kérdés, hogy az *előlnézeti* síkra merőlegesen hogyan helyezkednek el egymáshoz viszonyítva a rudak.

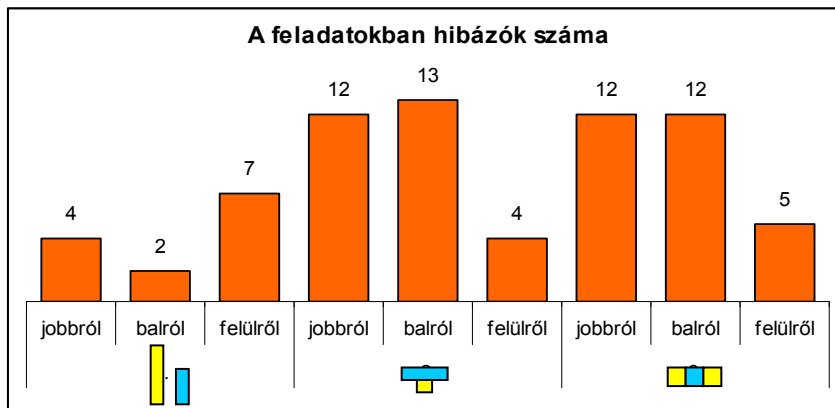
Úgy gondoltuk, hogy az 1. elrendezésnél nehézséget fog jelenteni az, hogy a két rúd nem ér össze, azonban ez viszonylag kevés tanulónál (5 fő) mutatkozott.

Tipikus hibának számított azonban, hogy bizonyos helyzetekben 90° -kal elforgatva ábrázoltak. 12 fő, az osztály csaknem fele, vétett ilyen jellegű hibát, amely vagy arra utalt, hogy nem jó irányból nézték az alakzatot (A 6.48. ábra az *elő-* és a *felülnézet* felcserélését mutatja.), vagy arra, hogy a látott képet transzformálva rajzolták le.



6.48. ábra

A legtöbb hibát a *jobb és bal oldali* nézetek megállapításánál követték el (6.49. ábra). A 2. alakzatnál pl. a *jobb*  és *bal oldali*  nézeteket 5-en cserélték fel, további 6 fő pedig nem tett különbséget köztük, noha egyértelmű, hogy a kék rudat nem a sárga közepére képzelték ().



6.49. ábra

Utolsó feladatként egy tetszőlegesen megépített alakzat nézeti képeit kellett megrajzolniuk. Ezt a kreativitást igénylő feladatot a gyerekek nagy kedvvel végezték (6.50. ábra).



6.50. ábra

A kísérleti tanítás tapasztalatait összegezve, megállapíthatjuk, olyan problémátípusról van szó, amelyen belül különböző nehézségi szintű feladatokat dolgozhatunk ki:


Nehezíthetjük a feladatot más színű (méretű) rudak vagy kettőnél több rúd használatával. Ismét más feladatot kapunk, ha másik, nem az *előnézeti*, képből indulunk ki. Érdemes a gyerekek figyelmét a több megoldás lehetőségére felhívni, majd ezt követően beszélgethetünk arról, hányféle nézeti képet kell megadni ahhoz, hogy az alakzatot a térben egyértelműen megépíthessük. Tovább gondolva ezt a kérdést, rátérhetünk arra is, hogy az alakzat különböző síkra vonatkozó szimmetriáját vizsgáljuk.

A feladattal a téri tájékozódáson (irányok, nézőpontok) túl további geometriai témakörökhöz is kapcsolódhatunk. A térgeometriai alakzatok konstruálásával, a térbeli és síkbeli alakzatok közötti kétirányú összefüggések felismerésével, a különböző helyzetű síkokra vonatkozó szimmetriák megfigyelésével a gyerekek globális értelemben vett térszemléletét fejleszthetjük. Azzal pedig, hogy többféle megoldás keresésére ösztönözzük őket, kreatív személyiségjegyeik fejlődnek, és a matematikáról is reális képet kapnak azáltal, hogy felismerik, egy feltételrendszer több megoldás is kielégíthet.

6.6.3. Utóteszt, késleltetett teszt:




Az utó és a késleltetett tesztben a fejlesztés során megismert problémákhoz hasonló szerepeltek (6.6.2. fejezet, 2-3. probléma, 122-125. old.). Arra voltunk kíváncsiak, hogy a foglalkozások milyen mértékben járultak hozzá egy térbeli alakzat és nézeti képei közötti kapcsolat megértéséhez, valamint a képek megalkotásához. Ezúttal a rudak nem álltak a gyerekek rendelkezésére, így az elkészült rajzokon a mentális tevékenység eredményességét vizsgálhattuk.

3. probléma

Az utótesztben egy rózsaszín (2 cm) és egy kék (3 cm) rúdból álló elrendezést kellett *jobbról, balról felülről* lerajzolni, az *előlnézet* ismeretében: .³

Tapasztalatok


Csak a 2.b. osztály tanulóinak munkáját tudtuk értékelni, hiszen a feladatsituáció számukra volt érthető és ismerős. A két kontrollosztály tanulói is megkapták ugyan a feladatot, de vagy nem foglalkoztak vele, vagy egyszerűen megismételték az első rajzot.

Hibátlanul dolgozott 25 főből 9. További 8 főnél egy-egy olyan hibával találkoztunk, mely már a kísérleti tanítás során is előfordult: 90°-kal elforgatva rajzolták le a képet, vagy a *jobb-bal* helyzetet nem különböztették meg, vagy pedig *felülnézetben* a két alakzatot nem tekintették egy egyenesbe esőnek (oldalnézetekből - amit ők maguk rajzoltak - (*jobbról*: , *balról*: ) ez következett volna. A többi (8 fő) munkában nem találtunk azonosítható hibaokat.





Az utótesztben előforduló típushibák azt támasztják alá, hogy a foglalkozásokon nagyobb hangsúlyt kellett volna ezek megbeszélésére helyezni, ill. célszerű lett volna a frontális és önálló munkaforma mellett az egyéni fejlesztést is alkalmazni.

Természetesen az is csökkentette a jó megoldások számát, hogy az utóteszt írásakor nem volt lehetőségük az elrendezés tényleges megépítésére.

2. probléma

A késleltetett tesztben, hasonló szituációban, egy már ismert elrendezést () tüztünk ki.⁴

Tapasztalatok

Az osztály tanulóinak nagy része (19 fő) nem vette figyelembe, vagy elfelejtette, hogy a sárga rúd 5 egység hosszú. Ha ezt a rudat, az *előlnézeti* kép alapján kockának tekintjük, a megoldás: *jobbról*: , *balról*: , *felülről*: . 14-en adtak így jó megoldást, további 5 munka pedig abban tért el, hogy az oldalnézeteken a kék és sárga négyzet nem helyezték egymásra: .

³ Melléklet, 23. old. 8. feladat

⁴ Melléklet, 25. old. 10. feladat

A rudak hosszát helyesen ábrázolva 4-en oldották meg jól a feladatot, s csak 2 olyan tanuló akadt, akinek a munkáját nem tudtuk értékelni.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a gyerekek nagy része megértette az ábrázolási mód lényegét, s azt az eltelt három hónap alatt nem felejtette el.

Tapasztalatunk szerint az ábrázolás és a tényleges megépíthetőség azonban sok esetben nem kapcsolódik össze, hiszen gyakran talákoztunk olyan rajzzal, amelynek megépítésekor a két rúd egymás mellé esne.

A nézeti képek pontosítása, a többféle lehetőség megkeresése tehát további gyakorlást igényel. Úgy ítéljük meg, hogy ezek a foglalkozások a 2. évfolyamon elkezdhetők, de a fejlesztést a következő két évben célszerű tovább folytatni.

A kontrollosztályok munkájából az látható, hogy az objektumok nézeti képeinek felismerése és megalkotása spontán módon nem fejlődik, szükség van arra, hogy a tanulók a tanítási órán találkozzanak ilyen jellegű feladatokkal.

ÖSSZEGZÉS, TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Kutatásunkkal elsődlegesen a „Tájékozódás térben” c. tananyag ill. fejlesztési feladat tanításának lehetőségeit kerestük az általános iskola 1-4. osztályában, különös tekintettel az irány, irányítás fogalmának (mint mentális objektumnak) az elsajátítására.

Az alábbi négy kutatási kérdést tettük fel:

1. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?
2. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétenek?
3. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?
4. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

Hipotéziseink a következők voltak:

1. A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendők a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.
2. Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonyzavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtlenül.
3. A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.
4. A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

Kutatásunkat a kisiskolások meglévő ismereteinek feltérképezésével kezdtük. Ehhez olyan teszt sorozatot dolgoztunk ki, mely az elméletből levont következtetések mellett a jelenlegi magyar tantervek követelményeit, valamint a forgalomban lévő tankönyvek feladatait is figyelembe vette.

A tájékozódó felmérés eredményeinek értékeléséhez kvantitatív, és kvalitatív módszereket egyaránt használtunk. Arra törekedtünk, hogy megismerjük a tipikus gondolkodási hibákat, megoldási stratégiákat. Az évfolyamok teljesítményének összehasonlítása segített abban, hogy egy-egy konkrét probléma nehézségi szintjét meghatározzuk.

Tapasztalataink alapján a térbeli tájékozódást érintő feladatokat hat témakör köré csoportosítottuk, majd a második évfolyamot kiválasztva összeállítottunk egy hipotetikus tanulási trajektóriát. Tervezetünket 10 hetes tanítási kísérlet során próbáltuk ki.

Elképzeléseink gyakorlati megvalósítását elemeztük, az elméletileg meghatározott fejlődési lépések egy részét kísérletileg alátámasztottuk, más részét módosítottuk, utalva a továbblépés lehetőségeire.

A tanítási kísérlet elsődleges célja a gondolkodás jellegzetességeinek megismerése volt osztálytermi szituációkban, s nem a tanítási program hatékonyságának vizsgálata.

A tantervfejlesztésnek természetesen ezzel nincs vége. A munka egy módosított tanterv kidolgozásával, majd kipróbálásával folytatható. Ezt követően kerülhet sor a kísérleti osztályok számának növelésére.

A dolgozat ennek a munkának csak az első fázisaival foglalkozik.

Az alábbiakban összefoglaljuk az egyes témakörökhöz köthető eredményeinket. Az 1-3. kutatási kérdéssel összhangban beszélünk a gondolkodás jellegzetességeiről, tipikus hibáiról. Utalunk a hétköznapi tapasztalatok szerepére, valamint az eredményesnek bizonyuló tevékenységi formákra.

1. Térbeli viszonzyszavak használata

- A *között* és az *alatt-felett* relációk megadása könnyebb, mint az *előtt-mögött*, vagy a *jobbra-balra*.
- A *jobb-bal* megkülönböztetés képessége 2. osztályban még nem stabil. A tévesztések száma akkor a legkisebb, ha saját testhez kell viszonyítani. Nagyobb, ha más személyhez, s még nagyobb, ha élettelen tárgyhoz. Utóbbi esetben a tanulók szembekerülnek a hétköznapi életből ismert hallgatólagos megállapodások következetlenségeivel. Ekkor a hibák nagy része abból ered, hogy nem tudják, mihez viszonyítsanak: magukhoz, vagy az ábrázolt tárgyhoz.
- A tárgymeghatározás az irány ismeretében könnyebb feladat, mint fordítva, annak megadása, hogy egy adott tárgy milyen irányban helyezkedik el.
- Érthetőbbek azok az utasítások, melyekben elől áll az a tárgy, amihez viszonyítani akarunk, s csak ezt követi a másik tárgy megnevezése (Pl. *A háromszög jobb oldalán van a kör.*).
- A síkbeli tájékozódást az írás-olvasás tevékenysége egyértelműen fejleszti.
- A *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más személyhez viszonyítva, a hétköznapi élet kontextusaiban spontán módon is jól fejlődik.
- Amennyiben valamely élettelen tárgyhoz kell viszonyítani, mindig meg kell állapodni a nézőpontban. Ez az információ csak akkor segíti a tanulókat, ha képesek azt értelmezni, vagyis gyakorlás és tudatosítás előzi meg.
- A fejlesztés során a térbeli szituációk értelmezését az enaktív síkon végeztük, így nem kellett a képi ábrázolásmódból eredő nehézségekkel foglalkozni. Az utó- és a késleltetett teszt azt mutatta, hogy kellő gyakorlás után az enaktív síkról visszatérve az ikonikusra a tanulók eredményesebben birkóznak meg a kitűzött feladatokkal.
- Egy adott térbeli elrendezés verbalizálása 2. osztályban még sok nehézséget okoz, azonban fejleszthető. Már kisszámú, következetes, időben folyamatos gyakorlással is látható eredményt tudunk elérni.

2. Útvonalleírások

- Eredményeink alátámasztják azt a feltételezésünket, hogy a térbeli viszonzyszavak használata rögzített elrendezés (statikus szituáció) esetén egyszerűbb, mint akkor, ha az iránymeghatározást a tanulók mozgásos (dinamikus) szituációban végzik. Utóbbi feltételezi a statikus szituációra kidolgozott feladatokban szerzett jártasságot.
- A *jobb-bal* fogalomról a *jobbfordulat-balfordulat* fogalomra való áttérés 2. osztályban sok nehézséget vet fel.
- A tanulók útvonalleírásaiban gyakran talákoztunk hétköznapi életből átvett, pontatlan szóhasználattal.
- Minthogy az útvonalak leírására a hétköznapi életben számos lehetőség kínálkozik, ez a témakör spontán módon is fejlődik. Elengedhetetlen azonban a verbális kifejezőmód szabályainak megismertetése. A gyakorlásnak nagy szerepe van abban, hogy a

gyerekek megértsek és megszokják a pontos utasítások használatát. A késleltetett teszt tapasztalata szerint a megfelelő szófordulatok, kifejezésmódok elsajátítása viszonylag tartósan bizonyul.

3. Ciklikus rendezés

- Noha a hétköznapi életben többször támaszkodunk a ciklikus rendezés és irányítás fogalmára, a hozzájuk köthető problémaszituációk jórészt ismeretlenek a tanulók előtt.
- A ciklikus irányítás - természetéből adódóan - dinamikus szituációt feltételez, elsősorban a forgatás ismeretét. A mentális forgatás nehéz, különösen diszkrét elemekből álló elrendezések esetén, míg eszközzel végezve egyszerűen megérthető.
- A saját testen végzett forgási tapasztalatok, vagy ezek átvitele más testre, hasznosak a ciklikus irányítás természetének megértéséhez.
- Jóval egyszerűbb feladat egy elforgatott kép megkonstruálása, mint annak eldöntése, hogy egy adott kép elforgatottja-e egy másiknak.
- A ciklikus rendezés fogalma eszközhasználat nélkül, tényleges tevékenységekkel eredményesen fejleszthető, de néhány alkalom kevés ahhoz, hogy a tanulók stabil ismeretekre tegyenek szert.
- Az óra működését a 2. osztályosok közül igen kevesen értik. Ezért mindaddig nem használható más fogalmak kialakításához szemléltető- ill. munkaeszközként, míg működési elvét készségszinten el nem sajátítják.
- A ciklikus irányítással lehetőség nyílik a térbeli és időbeli viszonyok összekapcsolására, ám ez a vizsgált életkorban még korai.

4. Tájékozódás a koordináta-rendszerben

- A táblázat celláinak vizuális azonosítására már az első osztályosok képesek, de a szimbólumhasználat még 3. osztályban is okoz problémát.
- A szimbólumhasználatból eredő kódolási-dekódolási feladatok közül a dekódolás, azaz a hely ismeretében a cella megkeresése a könnyebb, nem pedig fordítva, a cella helyének megadása.
- A táblázatos elrendezést, a négyzet rácson való mozgást a másodikosok kevés magyarázattal könnyen megértik.
- A síkbeli főirányok szerinti tájékozódás spontán módon is fejlődik, bár célzott fejlesztéssel a folyamat felgyorsítható.

5. Geometriai transzformációk

Két transzformációval foglalkoztunk, a forgatással és a tükrözéssel.

- Egy elrendezés mentális tükörképének megalkotására a második osztályosok készségszinten még nem képesek. A zsebtükör segítségével - amennyiben gyakorolták annak helyes használatát - azonban nem okoz nehézséget a tükörkép megrajzolása.
- Egy elrendezés tükörképének megalkotása nehezebb, mint az elforgatottjéé.
- A különálló pontokból alkotott elrendezések transzformált képeinek azonosítása nehezebb, mint a globálisan értelmezhető képeké (fénykép).
- A tükrözött ill. forgatott képek azonosítása annál nehezebb, minél nagyobb szögben fordítjuk el azokat a tanulók saját helyzetéhez képest.
- Az eredményes mentális tükrözést ill. forgatást nagyon sok tényleges tevékenységnek kell megelőznie.

6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

- A tanulók a négy évfolyam egyikén sem találkoztak még a *Milyennek látjuk ebből az irányból?* típusú kérdéssel, ezért a tájékozódó felmérés tesztfeladata nehéz és összetett problémát jelentett.
- A tanítási kísérlet során azt tapasztaltuk, hogy egyszerű (2-3 elemből álló) elrendezés nézeti képeinek megalkotása már 2. osztályban elkezdhető.
- Az enaktív és az ikonikus síkon párhuzamosan zajló tevékenység hozzájárul a térbeli viszonyok megértéséhez, a viszonzyszavak használatának pontosításához.
- A tanulók nagy részének nem az irányok megkülönböztetése jelent problémát, hanem más, a tevékenység során felmerülő gyakorlati kérdések (pl. a tárgy és a megfigyelési helyzet elmozdítása egymáshoz képest). A kérdések sokfélesége azt mutatja, hogy a frontális és önálló munkaforma mellett célszerű egyéni fejlesztést alkalmazni.
- A tanulók megértették az ábrázolási mód lényegét, azonban az ábrázolás és a tényleges megépíthetőség sok esetben nem kapcsolódik össze, s a többféle lehetőség felismerése sem várható el.
- Az objektumok nézeti képeinek megalkotása spontán módon nem fejlődik, a tanórai fejlesztést a második évben meg lehet kezdeni, de célszerű a következő két évben tovább folytatni.

Az 1-3. hipotézis vizsgálata

1. *A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendők a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.*

A spontán fejlődés szerepe az egyes témakörökben eltérő. A *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más személyhez viszonyítva spontán módon is fejlődik, csakúgy, mint az útvonalak leírásának képessége ill. a négyzetrácsban való tájékozódás.

Az útvonalak verbalizálása, a ciklikus rendezés, az elforgatott ill. tükrözött kép természetének megismerése tudatos fejlesztőmunkát igényel, hasonlóan az objektumok nézeti képeinek megalkotásához.

2. *Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonzyszavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtelenül.*

Két témakörnél találoztunk hétköznapi szóhasználatból eredő problémával.

Egyrészt, ha a *jobb-bal* megkülönböztetést valamely élettelen tárgyhoz viszonyítva végezzük, nem hagyatkozhatunk a hétköznapi életben megszokott konvenciókhoz, mindig konkretizálnunk kell a megfigyelő helyét.

Másrészt ügyelnünk kell arra, hogy az útvonalleírásokban kerüljük a hétköznapi életből átvett pontatlan szóhasználatot (pl. „A második utcánál menj *fel*...”).

3. *A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.*

Kutatásunk ezt a hipotézist mind a hat témakörön belül igazolja. A tárgyi tevékenységek lehetővé teszik, hogy a tanulók ne kerüljenek szembe a térbeli szituáció

síkba transzformálásának nehézségével mindaddig, míg a térben felmerülő kérdések nem tisztázódnak. A verbális kifejezőmód elsajátítása ennek megfelelően először szóban történik.

A pontos kifejezőmód elsajátítása jól megtervezett, folyamatos gyakorlást igényel, különben állandóan visszatérnek a hétköznapi életből vett pontatlanságok.

A 4. kutatási kérdés megválaszolásához, azaz a témakörnek a meglévő tananyagstruktúrában történő elhelyezéséhez, a hat résztémakör közötti összefüggésekből indulunk ki.

Az első két témakör egyaránt a térbeli viszonzyszavak használatával foglalkozik. Előbbi statikus, utóbbi dinamikus szituációkat vizsgál.

A harmadik a kanyarodás fogalmán keresztül összefüggésbe hozható az útvonalleírásokkal, s ezért a *jobb-bal* fogalommal is. A ciklikus irányítás fogalma a forgatási kontextusokban érthető meg, s így közvetlen kapcsolatban áll a geometriai transzformációk témakörével.

A koordinátarendszer fogalmának előkészítése a síkbeli tájékozódás gyakorlásának terepe.

Az objektumok nézeti képeinek megalkotásához lineáris irányok természetéről szerzünk tapasztalatokat.

A térbeli tájékozódás témakörét kapcsolatba hoztuk más tantárgyakkal (pl. testnevelés, vizuális kultúra, anyanyelv stb.), ill. a matematika más területeivel (pl. geometria, kombinatorika, számtan-algebra stb.).

Ez azt mutatja, hogy témakörünk tanítása lehetőséget nyújt mind a matematikán belüli, mind az azon kívüli koncentrációra.

A 4. hipotézis vizsgálata

4. A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

Tapasztalataink szerint ez a tárgyalásmód nem csak a tájékozódással összefüggő ismeretek megszerzésében és felszínén tartásában segít, hanem más témakörök fejlesztését is szolgálja.

További kutatási lehetőségek

A további kutatások egyik lehetséges irányának a kísérleti tanítás folytatása látszik, mind a második, mind a többi évfolyamon (ideértve az óvodai nagycsoportot, és az 5-6. évfolyamot is).

A másik érdekes terület a téri tájékozódás témakörének tantárgyközi jellegéből adódik. Sok lehetőség rejlik a tantárgyak közötti koncentrációban, csakúgy, mint a hétköznapi életben előforduló szituációk felhasználásában.

További kutatás tárgyát képezheti a térbeli tájékozódó képesség és az ún. matematikai képességek (logikus gondolkodás, számolás, stb.) közötti összefüggések keresése és elemzése.

A térbeli tájékozódó képesség nemek szerinti változásairól a szakirodalomban több helyen olvashatunk. A tanulmányok a nemek közötti különbségek megnyilvánulását a kisiskolás életkor utáni időszakra teszik, ezért ilyen jellegű kutatásokat nem végeztünk.

„... vizsgálatok bizonyítják, hogy a térszemlélet rendkívül összetett képességcsoport, amelynek fejlesztése csak célirányosan, az egyes részképességekre koncentrálnak lehet sikeres.” (Séra, Kárpáti, Gulyás, 2002, 152. o.).

Ilyen részképességnek tekinthető a térbeli tájékozódó képesség is, melynek fejlesztési lehetőségeit kerestük.

A dolgozatban bemutatásra került feladatokat elsődlegesen a tananyag szempontjából osztályoztuk, s nem a tevékenységek oldaláról közelítettük meg. Folyamatosan törekedtünk arra, hogy a spontán fejlődés eredményeit a tudatos fejlesztéstől különválasszuk, amennyiben és amilyen mértékben ez lehetséges. A tudatos fejlesztést a hagyományos iskolai keretek közé helyeztük, s célul tűztük ki azt, hogy a kiválasztott feladatok illeszkedjenek a jelenleg tanított matematikai témakörökhöz.

A felölelt témakör szélesebbnek bizonyult az eredetileg elképzelnél. Ez okozta, hogy nem állt módunkban egy-egy felismert probléma mélyebb elemzése. Mind a terjedelem, mind az idő korlátozta az összes résztémakör szükséges mélységű kidolgozását.

A kutatásunkkal nyert átfogó képet célszerű lenne pontosítani ill. kiegészíteni további, az irányítással összefüggő fogalmak (pl. szögfogalom) vizsgálatával is.

Úgy véljük, hogy - az említett problémák ellenére - kutatási eredményeink hozzájárulnak a kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez, a „Tájékozódás térben” tananyag ill. fejlesztési feladat kidolgozására és elemzésére bemutatott módszer pedig alkalmazható más, a matematika tanításához kapcsolható részképesség fejlesztési programjának kialakításában is.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Aman, C, J, Roberts, R, J: Developmental Differences in Giving Directions: Spatial Frames of Reference and Mental Rotation, *Child Development*, 64, 1993, (1258-1270).
2. Ambrus A: Bevezetés a matematikadidaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.
3. Bartolini Bussi, M,G, Boni, M, Ferri, F, Garuti, R: Early Approach to Theoretical Thinking: Gears in Primary School, *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1999, (67-87).
4. Besuden, H: Räumliche Orientierung: Die rechts/links Beziehung, *Math. Schule*, 28, 7/8, 1990, (461-474).
5. Bruner, J, S: Új utak az oktatás elméletéhez, Gondolat, Budapest, 1974.
6. Clements, D, H: Geometric and Spatial Thinking in Young Children, in J. V. Copley (ed.): *Mathematics in the Early Years*, Reston, VA: NCTM, 1999, (66-79).
7. Clements, D, H: Linking Research and Curriculum Development, In: L. D. English (ed.): *Handbook of National Research in Mathematics Education*, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (599-630).
8. C. Neményi, E: Geometria tananyag és a geometria tanítása az alsó tagozaton, *Matematika tantárgypedagógiai füzetek*, Budapest, 1999, (64-89).
9. C. Neményi, E: Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai, *Új Pedagógiai Szemle*, 2002. december, (89-98).
10. C. Neményi, E, Wéber, A: Matematika munkafüzet 3. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
11. De Lange, J: Geometry for all or: no geometry at all? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 3, 1984, (90-97).
12. De Villiers, M: The Role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching, RUMEUS Univ. Stellenbosh, 1986.
13. De Villiers, M: To teach definitions in geometry or teach to define? In *PME 22 Proceedings*, 1998.
14. Dékány, J: Kézikönyv a diszkalkúlia felismeréséhez és terápiájához, BGGYTF, Budapest, 1995.
15. Dienes, Z: Építsük fel a matematikát, Gondolat Kiadó, Budapest, 1973.
16. Franke, M: *Didaktik der Geometrie*, Spektrum Akademische Verlag, Heidelberg, Berlin, 2000.
17. Freudenthal, H: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.
18. Freudenthal, H: *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
19. Furinghetti, F, Radford, L: Historical Conceptual Developments and the Teaching of mathematics: from Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice, In: L. D. English (Ed.): *Handbook of National Research in Mathematics Education*, Laurence Erlbaum Associates, London, 2002, (631-654).
20. Hasemann, K: *Anfangsunterricht Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2003.
21. Herendiné Kónya, E: Kerékjátró Béla tétele a nyílt felületek topológiájáról, *Polygon*, XII. köt. 1-2. szám, 2003, (23-34).
22. Herendiné Kónya, E: Az alsó tagozatos geometriatanítás helyzetének elemzése, *Apáczai-Napok Tanulmánykötet*, Győr, 2004.

23. Hilbert, D: Grundlagen der Geometrie, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956.
24. Jegorov, I. P. Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
25. Jones, G., A., Langrall, C, W, Thorton, C, A, Nisbet, S: Elementary Student's Access to Powerful Mathematical Ideas, In: L. D. English (Ed.): Handbook of National Research in Mathematics Education, Laurence Erlbaum Associates, Londo, 2002, (113-142).
26. Kerékjártó, B: A geometriai alapjairól I., Szeged, 1937.
27. Kerékjártó, B: A geometriai alapjairól II., Budapest, 1944.
28. Klein Sándor: A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata, Akadémia Kiadó, Budapest, 1980.
29. Kónya, E: On the fundamental theorem of compact and noncompact surfaces, Annales Mathematicae et Informaticae, 32, 2005, (211-224).
30. Kónya, E: A mathematical and didactical analysis of the concept of orientation, Teaching Mathematics and Computer Science, 4/1, 2006, (111-130).
31. Krüll, K, E: A diszkalkulias (számolásgyenge) gyerekek, Akkord Kiadó, 2000.
32. Lakatos, Imre: Bizonyítások és cáfolatok, Typotex Kft, Budapest, 1998.
33. Lánzos, K: A geometriai térfogalom fejlődése, Gondolat kiadó, Budapest, 1976.
34. Levelt, W. J. M: Nézőpontválasztás és ellipszis a téri leírásokban, In: Lukács, Király, Racsmány, Pléh (szerk.): A téri megismerés és a nyelv, Gondolat, Budapest, 2003, (129-158).
35. Maier, P,H:Raumlisches Vorstellungsvermögen, Auer Verlag, Donauwörth, 1999.
36. Meissner, H, Pinkernel, G: Spatial Abilities in Primary Schools, PME-24 Proceedings, Japan, 2000.
37. Mérei F, Binét, Á: Gyermeklélektan, Gondolat, Budapest, 1983.
38. Nagy J, Józsa K, Vidákovich T, Fazekasné Fenyvesi M: DIFER - Diagnosztikus fejlődésvizsgáló rendszer 4-9 évesek számára. OKÉV, KÁOKSZI, Budapest, 2002.
39. Nahalka, I: A tanulás, In: Falus Iván (szerk.): Didaktika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998, (117-155).
40. Nahalka, I: A természettudományi szakos pedagógusok képzése és a NAT, Pedagógusképzés, 2 (31), 2004, 1. (11-27).
41. Perry, B, Dockett, S: Young Children's Access to Powerful Mathematical Ideas, In: L. D. English (Ed.): Handbook of National Research in Mathematics Education, Laurence Erlbaum Associates, Londo, 2002, (81-112).
42. Piaget, J: Az észleleti tér, a képzetes tér és az alaklátás (a sztereognosztikus észlelés), in. Válogatott tanulmányok, Gondolat, Budapest, 1970, (76-131).
43. Piaget, J, Inhelder, B: Gyermeklélektan, Osiris, Budapest, 1999.
44. Pléh, Cs: Hozzájárulhatnak-e az empirikus pszichológiai kutatások a nyelv-gondolkodás viszony filozófiai problémájának megoldásához? In: Neumer, K. (szerk.): Nyelv, gondolkodás, relativizmus, Osiris, Budapest, 1999, (35-165).
45. Pléh, Cs, Király, I, Lukács, Á, Racsmány, M: A tér a szavak világában, In: Lukács, Király, Racsmány, Pléh (szerk.): A téri megismerés és a nyelv, Gondolat, Budapest, 2003, (7-26).
46. Pusztai, F. (szerk.): Magyar Értelmező Kéziszótár, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2003.
47. Reinhold, S: Topology in Elementary School Mathematics – A Contribution to the Improvement of Children's Spatial Ability? YERME Sommer School, Klagenfurt, 2002.
48. Rényi, A: Ars mathematica, Magvető Kiadó, Budapest, 1973.
49. Roe, J.: Elementary Geometry, Oxford University Press, Oxford, 1993.

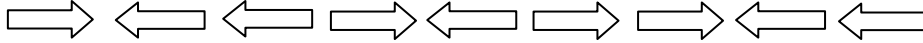
50. Selter, Christoph: Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept, Mathematik Lernen, Heft 83, 1997, (4-8).
51. Seng, S, Chan, B: Spatial Ability and Mathematical Performance: Gender Differences in an Elementary School, 2000.
52. Séra, L, Kárpáti, A, Gulyás, J: A térszemlélet, Comenius Bt, Pécs, 2002.
53. Sfard, A: On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22, , 1991, (1-36).
54. Sfard, A: On real Life and School Mathematics – can they help each other? Talk given at Mathematikbiennalen, Norrköping, 2002.
55. Skemp, R, R: A matematikatanulás pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975.
56. Szendrei, J: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
57. Weyl, H: Szimmetria, Gondolat, Budapest, 1982.
58. Zsámboki, Kné, Horváthné Szigligeti, A: Matematika kézzel, fejjel, szívvel, OKKER, Budapest, 1999.

MELLÉKLET

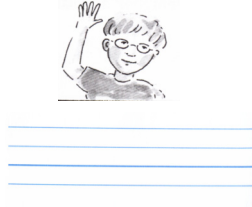
A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 1. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

1. osztály

1. Színezd kékkel a jobbra mutató nyilakat!



2. Melyik kezét emeli a magasba a kisfiú? Írd a képek alá!

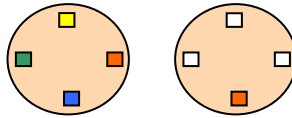


3. Hogyan helyezkedik el a madár a székhez képest? Kösd össze a képeket a megfelelő szavakkal!



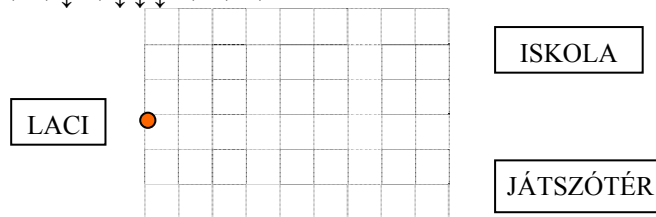
ALATT FELETT ELŐTT JOBBRA BALRA KÖZÖTT MÖGÖTT

4. A két kép ugyanazt a korongot ábrázolja, csak a másodikat elfordítottuk. Színezd ki a többi négyzetet is!



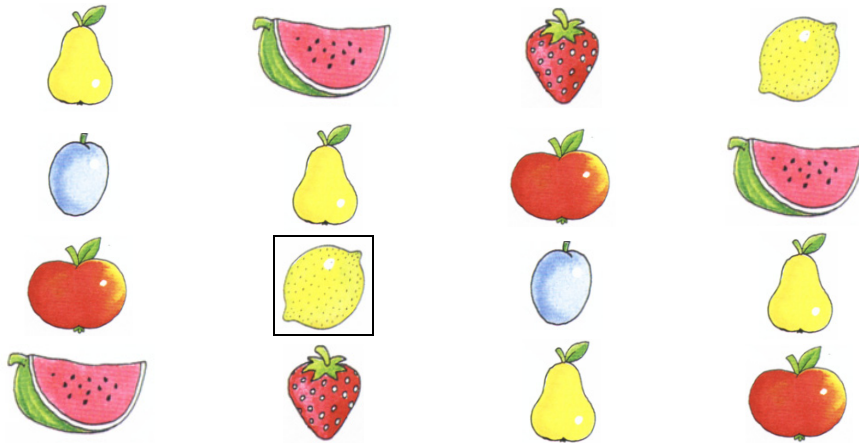
5. Hová ment Laci otthonról? Megtudod, ha megrajzolod az útját a nyilak szerint! Egy nyíl egy lépést jelent.

→ → → ↑ ↑ → → ↓ ↓ ↓ ↓ → → →



Hányszor kanyarodott útközben?

6. Nézd meg a képet és válaszolj a kérdésekre!



Milyen gyümölcsöt kereteztünk be?

Hányadik sorban van?

Hányadik oszlopban van?

Mi van alatta?

Mi van felette?

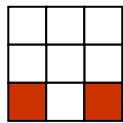
Mi van tőle jobbra?

Mi van tőle balra?

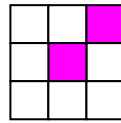
Milyen gyümölcs van a 4. oszlop 2. sorában?

7. Azokat a számokat add össze, melyeknek a helyét a színes négyzetek mutatják!

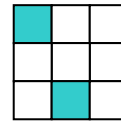
2	3	0
9	6	5
1	7	8



$$\square + \square = \square$$



$$\square + \square = \square$$

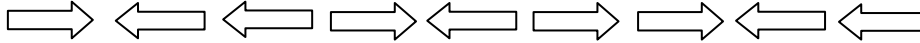


$$\square + \square = \square$$

A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 1. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

2. osztály

1. Színezd kékkel a jobbra mutató nyilakat!



2. Melyik kezét emeli a kisfiú? Írd a képek alá!



.....

3. Hogyan helyezkedik el a madár a székhez képest? Kösd össze a képeket a megfelelő szavakkal!



ALATT
FELETT
ELŐTT
JOBBRA
BALRA
KÖZÖTT
MÖGÖTT

4. Rajzolj a fa alá egy gombát, elé egy virágot, fölé egy madarat, mögé egy tavat, és a fától balra egy labdát!



5. A táblázat oszlopait betűkkel, sorait számokkal jelöltük.

Melyik szám áll az **A2** helyen?

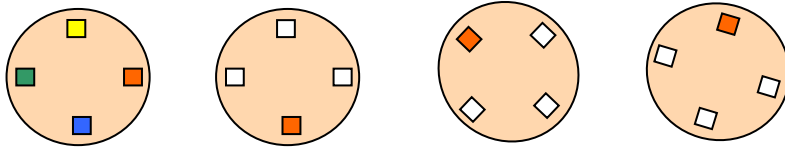
Melyik szám áll a **DI** helyen?

Mennyi a két szám szorzata?

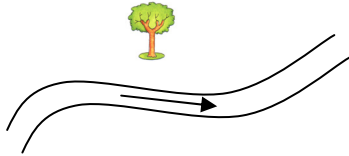
Melyik helyen áll ez a szám?.....

	A	B	C	D
1	2	9	0	5
2	3	6	4	10
3	1	7	8	11
4	12	20	15	20

6. A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!



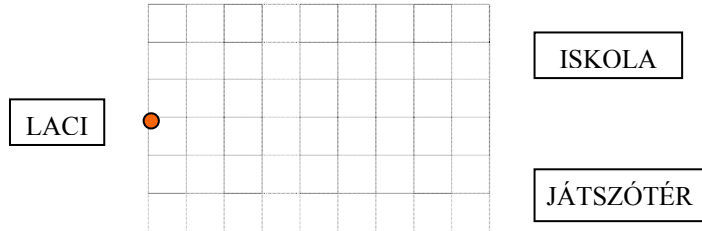
7. Az utca melyik oldalán áll a fa, ha a nyíl a menetirányt jelöli?



A fa az utca oldalán áll.

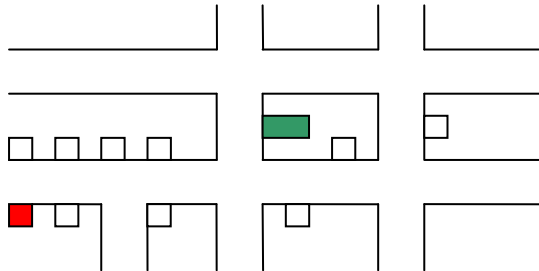
8. Hová ment Laci otthonról? Megtudod, ha megrajzolod az útját a nyilak szerint! Egy nyíl egy lépést jelent.

→ → → ↑ ↑ → → ↓ ↓ ↓ ↓ → → →



Hányszor kanyarodott Laci útközben?

9. A rajzon egy utcarézslet látható. Rajzold be Jutka útját a piros háztól a zöld iskoláig!
Hogyan igazítanád útba Jutkát?



A leíráshoz használhatod a következő mondatokat:

- Menj egyenesen!**
- Fordulj jobbra!**
- Fordulj balra!**
- Az utca jobb oldalán van.**
- Az utca bal oldalán van.**

.....

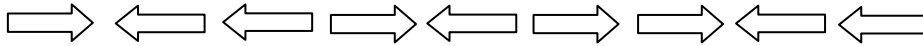
.....

.....

A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 1. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

3. osztály

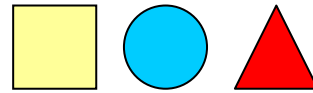
1. Színezd késsel a jobbra mutató nyilakat!



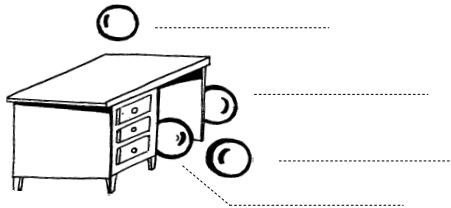
2. A képen egy maci, egy papagáj és egy nyuszi látható.
 Ki van középen?.....
 Ki áll a macitól balra?.....
 Ki áll a papagájtól jobbra?.....
 Merre áll a nyuszi a papagájhoz képest?.....
 Merre áll a maci a nyuszihoz képest?.....
 A képnek melyik oldalán van a tulipán?.....



3. Mi van a négyzettől jobbra?.....
 Mi van a körtől jobbra?.....
 Merre van a háromszög a körhöz képest?.....
 Merre van négyzet a háromszöghöz képest?.....
 Melyik síkidom van bal szélén?.....



4. Írd a labdák mellé, hogy hogyan helyezkednek el az asztalhoz képest!



5. Rajzolj a fa alá egy gombát, elé egy virágot, fölé egy madarat, mögé egy tavat, és a fától balra egy labdát!



6. A táblázat oszlopait betűkkel, sorait számokkal jelöltük.

Melyik szám áll az **A2** helyen?

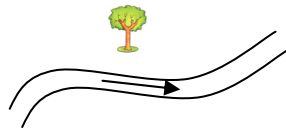
Melyik szám áll a **DI** helyen?

Mennyi a két szám szorzata?

Melyik helyen áll ez a szám?.....

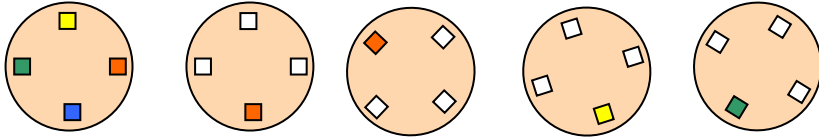
	A	B	C	D
1	2	9	0	5
2	3	6	4	10
3	1	7	8	11
4	12	20	15	20

7. Az utca melyik oldalán áll a fa, ha a nyíl a menetirányt jelöli?

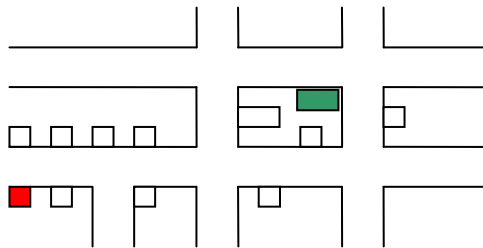


A fa az utca oldalán áll.

8. A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!



9. A rajzon egy utcarészlet látható. Rajzold be Jutka egy lehetséges útját a piros háztól a zöld iskoláig!



Hogyan igazítanád útba Jutkát?
A leíráshoz használhatod a következő mondatokat:

- Menj egyenesen!**
- Fordulj jobbra!**
- Fordulj balra!**
- Az utca jobb oldalán van.**
- Az utca bal oldalán van.**

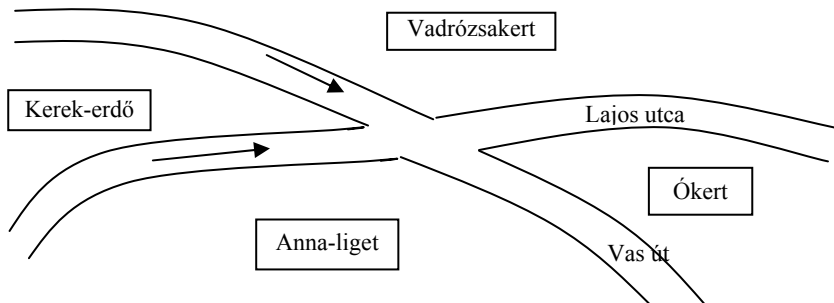
.....
.....

10. A rajzon két egymást keresztező utcát látunk. Ezek a város területét 4 részre osztják. Merre helyezkednek el a városrészek a két utcához képest, ha a nyíl a haladási irányt mutatja?

Folytasd a táblázat kitöltését!
Egészítsd ki a mondatokat!

A Vadrózsakert a Lajos utcától balra van, a Vas úttól pedig van

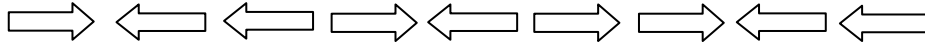
	Vadrózsakert	Kerek-erdő	Ókert	Anna-liget
Lajos utcától		balra		
Vas úttól		jobbra		



A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 1. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

4. osztály

1. Színezd kékkel a jobbra mutató nyilakat!

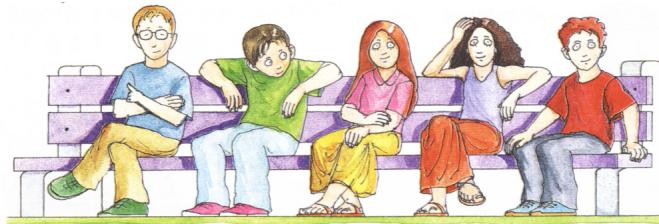


2. A képen egy maci, egy papagáj és egy nyuszi látható.
 Ki van középen?.....
 Ki áll a macitól balra?.....
 Ki áll a papagájtól jobbra?.....
 Merre áll a nyuszi a papagájhoz képest?.....
 Merre áll a maci a nyuszihoz képest?.....
 A képnek melyik oldalán van a tulipán?.....

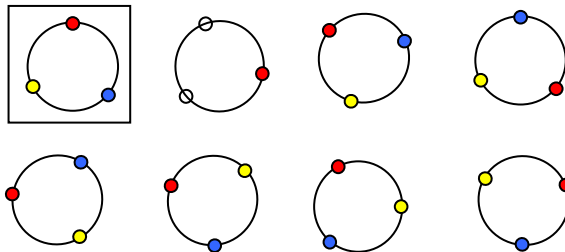


3. Rajzolj egy négyzetet, egy kört és egy háromszöget úgy, hogy a kör balra legyen a háromszögtől és jobbra a négyzettől!

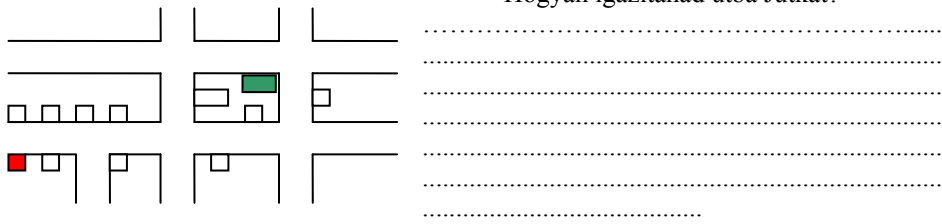
4. Írd a rajzok alá a gyerekek nevét az állításoknak megfelelően!
Peti bal oldali szomszédja Anna. Klári Gyuri és Anna között ül.



5. Egy óriáskerékbe 3 testvér úgy száll be, ahogy az első rajzon a 3 színes pont mutatja. A piros pont Kati, a kék pont Pisti, a sárga pont Andi helyét jelöli.
- Írd be az első rajzon a körök mellé a nevek kezdőbetűjét!
 - A kerék az óramutató járásával azonos irányban indul. Jelöld ezt az irányt az első ábrán nyíllal!
 - A második ábrán Kati helyét bejelöltük, írd be testvéreinek nevét is!
 - Mialatt a kerék forgott, apukájuk letről néhányszor lefényképezte őket. Húzd át azt a rajzot, amelyik nem készülhetett ugyanabban a menetben, mint az első!

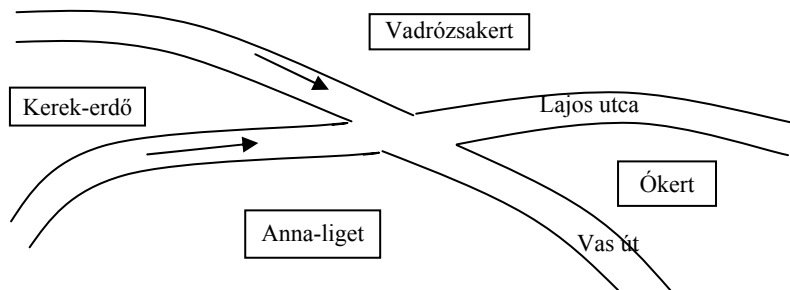


6. A rajzon egy utcarészlet látható. Rajzold be Jutka útját a piros háztól a zöld iskoláig!
Hogyan igazítanád útba Jutkát?



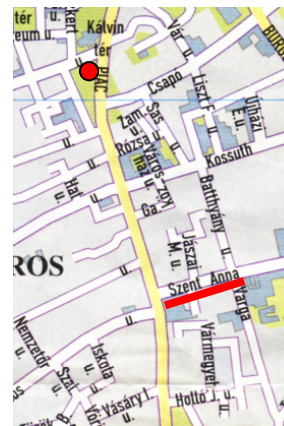
7. A rajzon két egymást keresztező utcát látunk. Ezek a város területét 4 részre osztják. Merre helyezkednek el ezek a városrészek a két utcához képest, ha a nyíl a haladási irányt mutatja?
Folytasd a táblázat kitöltését!

	Vadrózsakert	Kerek-erdő	Ókert	Anna-liget
Lajos utcától		balra		
Vas úttól		jobbra		



8. A Nagytemplom előtt áll egy turista, helyét a térképen piros ponttal jelöltük. Szeretne eljutni a Szent Anna utcára. Magyarázd el neki, hogy merre menjen!

.....



9. Az oszlopokat betűkkel, a sorokat számokkal jelöltük.

Színezd ki a következő négyzeteket:

E7, D7, C7, C6, C5, D5,
E5, E4, E3, E2, D2, C2

8							
7							
6							
5							
4							
3							
2							
1							
	A	B	C	D	E	F	G

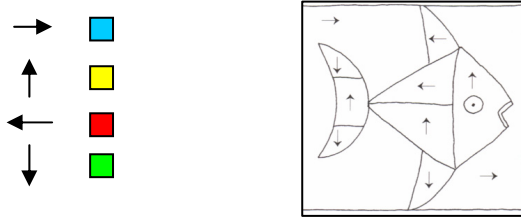
A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 2. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

1. osztály

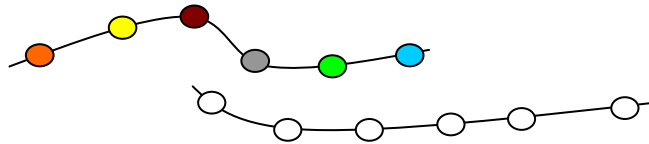
1. Színezd késsel a **balra lefelé** szálló, pirossal a **balra felfelé** szálló madarakat!



2. Színezz a nyilak irányának megfelelően:



3. Színezd ki az alsó gyöngysort úgy, hogy a gyöngyök fordított sorrendben kövessék egymást!



4. Színezd ki a korongok tükörképét!

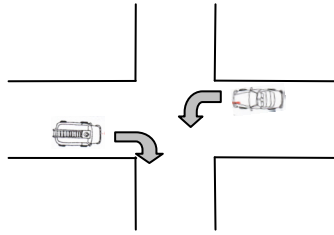


5. Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról. Írd a képek alá, hogy melyik milyen irányból készült, ha tudod, hogy melyik készült előlről!

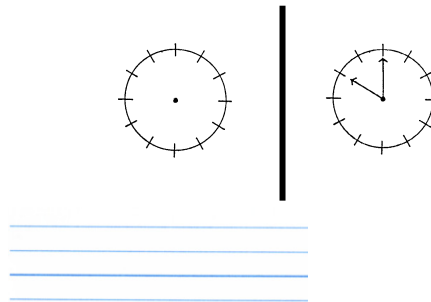


előlről

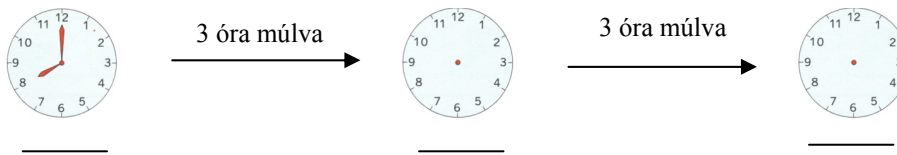
6. Melyik autó kanyarodik jobbra? Színezd ki pirosra!



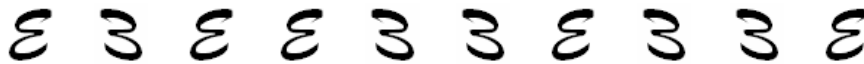
7. Az óra mellé állított tükörben ez látszik:
Rajzold be a mutatókat az eredeti képen, és írd a vonalra, hogy mennyit mutat az óra!



8. Hány órát mutatnak az órák? Rajzold be a mutatókat és írd alá az időpontot!



9. Karikázd be a hármas számokat az alábbiak közül!

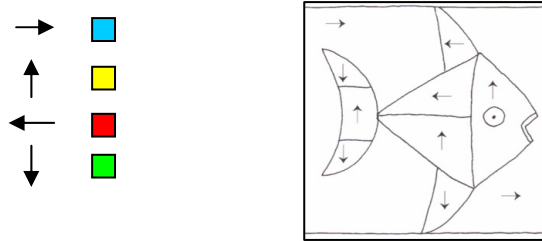


A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 2. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA 2. osztály

1. Színezd késsel a **balra lefelé** szálló, pirossal a **balra felfelé** szálló madarakat!



2. Színezz a nyilak irányának megfelelően:



3. Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról. Írd a képek alá, hogy melyik milyen irányból készült, ha tudod, hogy melyik készült előlről!



előlről

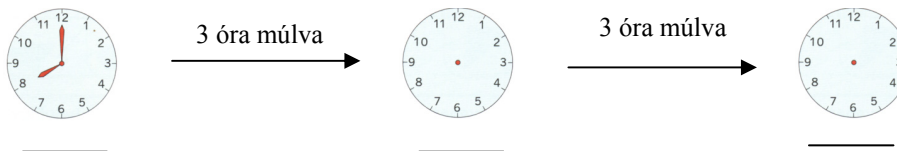
.....

.....

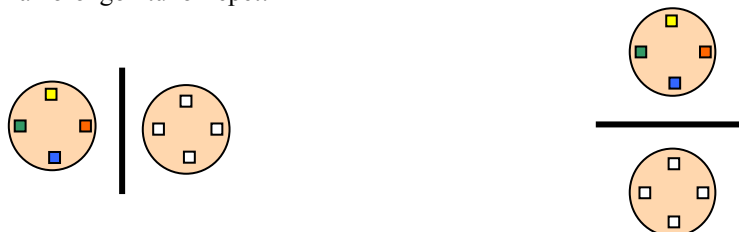
.....

4.

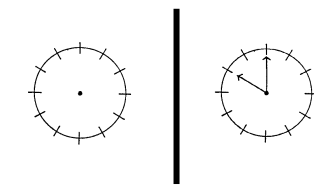
Hány órát mutatnak az órák? Rajzold be a mutatókat és írd alá az időpontot!



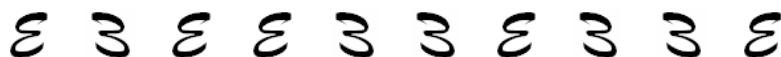
5. Színezd ki a korongok tükörképét!



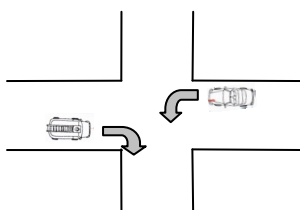
6. Az óra mellé állított tükörben ez látszik:
Rajzold be a mutatókat az eredeti képen, és írd a vonalra, hogy mennyit mutat az óra!



7. Karikázd be a hármas számokat az alábbiak közül!



8. Melyik autó kanyarodik jobbra? Színezd ki pirosra!



9. Karikázd be a helyes sorrendeket!
1. szerda, szombat, hétfő
 2. szombat, szerda, hétfő
 3. szombat, hétfő, szerda
 4. hétfő, szerda, szombat
 5. szerda, hétfő, szombat
 6. hétfő, szombat, szerda

Milyen nap van ma?

Húzd alá azt a sorrendet, amelyik a közvetlenül előttünk álló napokra vonatkozik!

10. A rajz egy kincskereső játék tábláját mutatja. A kerékpár az A2 mezőn van.
Írd a tárgyak neve mellé a helyüket!

Levél:

Pénzeszsák:

Méreg:

Érem:

Mit helyeztek el az alábbi mezőkön:

A3:

D4:

D2:

C1:

A	B	C	D	
	🏆	📄		1
🚲			💣	2
🏠		💰		3
	☠️		🔑	4

A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 2. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

3. osztály

1. Színezd késsel a **balra lefelé** szálló, pirossal a **balra felfelé** szálló madarakat!



2. Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról. Írd a képek alá, hogy melyik milyen irányból készült, ha tudod, hogy melyik készült előlről!



előlről

.....

.....

.....

3. A rajz egy kincskereső játék tábláját mutatja. A kerékpár az A2 mezőn van. Írd a tárgyak neve mellé a helyüket!

Levél:.....

Pénzeszsák:.....

Méreg:.....

Érem:.....

Mit helyeztek el az alábbi mezőkön:

A3:.....

D4:.....

D2:.....

C1:.....

A	B	C	D	
				1
				2
				3
				4

4. Melyik helyen milyen irányban kell a levesért nyúlni? Írd a betűt a megfelelő nyíl mellé!



→	
←	
↗	
↖	
↘	
↙	

5. Testnevelés órán gyakran hallod a **Balra át!**, **Jobbra át!**, **Hátra arc!** utasításokat. Hány **Jobbra át!** felel meg

1 **Hátra arc!**-nak?.....

2 teljes körbefordulásnak?.....

3 **Balra át!**-nak?.....

6. Karikázd be a helyes sorrendeket!

1. szerda, szombat, hétfő

2. szombat, szerda, hétfő

3. szombat, hétfő, szerda

4. hétfő, szerda, szombat

5. szerda, hétfő, szombat

6. hétfő, szombat, szerda

Milyen nap van ma?

Húzd alá azt a sorrendet, amelyik a közvetlenül előttünk álló napokra vonatkozik!

7. Figyeld meg az óramutatók járását! Írd be a helyes válasz betűjelét!

- | |
|---|
| <p>A) 1 derékszögnél kisebb szög.
 B) 1 derékszög
 C) 1 derékszögnél nagyobb, de 2 derékszögnél kisebb szög
 D) 2 derékszögnél nagyobb szög
 E) 4 derékszögnél nagyobb szög</p> |
|---|

Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 40 perc és 4 óra 20 perc között?

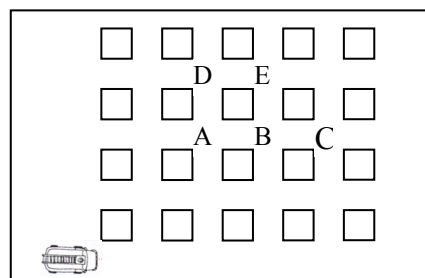
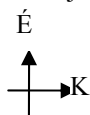
Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 10 perc és 3 óra 30 perc között?

Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 10 perc és 4 óra 15 perc között?

Mekkora szöget zár be egymással a kis- és nagymutató

- 3 óraker
- 7 óraker
- 10 óraker

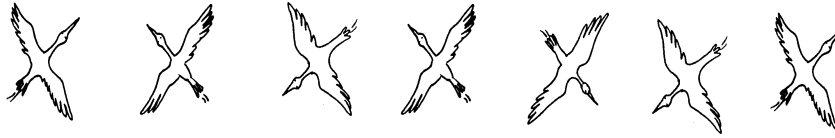
8. A képen háztömbök vannak, és az egyik utcasarkon egy autó. Az autónak 3 háztömbnyit kell mennie keletre, és 2 háztömbnyit északra ahhoz, hogy az iskolához érjen. Melyik betű jelöli az iskolát?



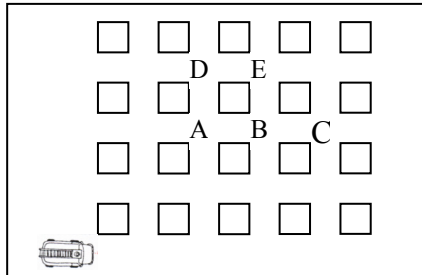
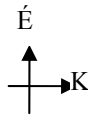
A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS 2. ÍRÁSBELI FELADATLAPJA

4. osztály

1. Színezd késsel a **balra lefelé** szálló, pirossal a **balra felfelé** szálló madarakat!



2. A képen háztömbök vannak, és az egyik utcasarkon egy autó. Az autónak 3 háztömbnyit kell mennie keletre, és 2 háztömbnyit északra ahhoz, hogy az iskolához érjen. Melyik betű jelöli az iskolát?



3. Figyeld meg az óramutatók járását! Írd be a helyes válasz betűjelét!

- F) 1 derékszögnél kisebb szög.
- G) 1 derékszög
- H) 1 derékszögnél nagyobb, de 2 derékszögnél kisebb szög
- I) 2 derékszögnél nagyobb szög
- J) 4 derékszögnél nagyobb szög

Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 40 perc és 4 óra 20 perc között?
 Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 10 perc és 3 óra 30 perc között?
 Mennyivel fordul el a nagymutató 3 óra 10 perc és 4 óra 15 perc között?

Mekkora szöget zár be egymással a kis- és nagymutató

- 3 óraker
- 7 óraker
- 10 óraker

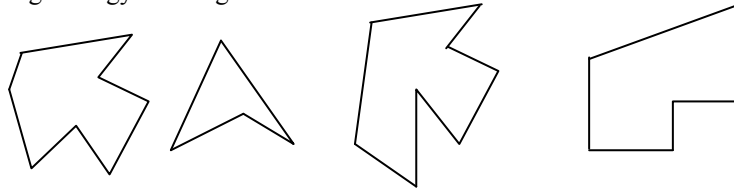
4. Testnevelés órán gyakran hallod a **Balra át!**, **Jobbra át!**, **Hátra arc!** utasításokat. Hány **Jobbra át!** felel meg

1 **Hátra arc!**-nak?.....

2 teljes körbefordulásnak?.....

3 **Balra át!**-nak?.....

5. Jelöld kis ívekkel a sokszögek szögeit! Tegyéél pontot a derékszöghöz, színezd pirosra a 2 derékszögnél nagyobb szögeket!



6. Egy bögrét lefényképeztünk előlről, hátulról, jobbról és balról. Írd a képek alá, hogy melyik milyen irányból készült, ha tudod, hogy melyik készült előlről!



előlről

.....

.....

.....

7. Melyik helyen milyen irányban kell a levesért nyúlni? Írd a betűt a megfelelő nyíl mellé!



→	
←	
↗	
↖	
↘	
↙	

8. A rajz egy kincskereső játék tábláját mutatja. A kerékpár az A2 mezőn van. Írd a tárgyak neve mellé a helyüket!

Levél:.....

Pénzeszsák:.....

Méreg:.....

Érem:.....

Mit helyeztek el az alábbi mezőkön:

A3:.....

D4:.....

D2:.....

C1:.....

A	B	C	D	
	🏆	📄		1
🚲			💣	2
👤		💰		3
	☠️		🔑	4

A TANÍTÁSI KÍSÉRLET MENETE

1. foglalkozás:

Dátum: 2005. október 17. hétfő 3. óra

Az óra anyaga: 26. óra: Kerek tízesek összeadása, kivonása

A foglalkozás időtartama: 10-12 perc

A foglalkozás anyaga: Robotjáték

A foglalkozás témaköre: útvonalleírások – 1. feladat

A feladat ismertetése: Az óra előtt a teremben elhelyeztünk 3 tárgyat. Kiválasztottunk 1-1 gyereket, akik a többiek utasításait követve mozogtak a teremben. A cél a 3 tárgy megtalálása volt.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés

2. foglalkozás:

Dátum: 2005. október 19. szerda, 3. óra

Az óra anyaga: 28. óra: Teljes kétjegyűhöz egyjegyű hozzáadása

A foglalkozás időtartama: 15 perc

A foglalkozás anyaga: A logikai készlet 3 elemének sorba rendezése

A foglalkozás témaköre: térbeli viszonyszavak használata – 1. feladat

A feladat ismertetése: Minden gyerek kap 3 egyszínű elemet: nagy sima kört, háromszöget, négyzetet. A tanító utasításának megfelelő sorrendben kell ezeket maguk előtt a padon elhelyezni. A táblán ellenőrzik a helyes kirakásokat.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés

3. foglalkozás:

Dátum: 2005. október 24. hétfő 3. óra

Az óra anyaga: 30. óra: Teljes kétjegyűből egyjegyű elvétele

A foglalkozás időtartama: 17 perc

A foglalkozás anyaga: Jobbra át!, Hátra arc!, stb utasítások végrehajtása

A foglalkozás témaköre: ciklikus rendezés – 1. feladat

A feladat ismertetése: A gyerekek a padjuk mellett állva végrehajtják az elfordulásra vonatkozó utasításokat.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

4. foglalkozás:

Dátum: 2005. október 27. csütörtök

Az óra anyaga: 33. óra: Szöveges feladatok mérésre

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Az összeadás gyakorlása 4x4-es számtáblázzal

A foglalkozás témaköre: Koordinátarendszer - 1. feladat

A feladat ismertetése: A táblán, és a gyerekeknél van egy 4x4-es számrács. A tanító a táblán letakart 2 cellát, a gyerekeknek a táblaképet a saját táblázatukkal összevetve meg kellett határozni a két szám összegét.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

5. foglalkozás

Dátum: 2005. november 22. kedd

Az óra anyaga: 43. óra: Műveletek gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Útvonalak elmagyarázása az iskola épületén belül

A foglalkozás témaköre: Útvonalleírások – 2. feladat

A feladat ismertetése: Az iskolába vendég érkezik. Hogyan igazítanátok útba, ha ő az iskola különböző helyiségeibe akar eljutni?

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és hangfelvétel a szóbeli munkáról

6. foglalkozás

Dátum: 2005. november 23. szerda

Az óra anyaga: 44. óra: A zárójel használata

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Tárgyak elől-, felül- és oldalnézeti képei

A foglalkozás témaköre: Tér- és síkgeometria kapcsolata – nézeti képek 1. feladat

A feladat ismertetése: Egy szék, egy pohár és egy ceruza nézeti képeit kell elkészíteni.

A megfigyelés módja: videofelvétel

7. foglalkozás

Dátum: 2005. november 24. csütörtök

Az óra anyaga: 45. óra: Gyakorlás a százas körben

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Színes korongok tükrözése, elforgatása

A foglalkozás témaköre: geometriai transzformációk – 5. feladat

A feladat ismertetése: Minden gyerek kap egy színes papírkorongot. Ezt felhasználva ki kell színeznie a feladatlapon megadott korongok tükörképét, elforgatott képét. A megoldáshoz zsebtükröt is használhatnak.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

8. foglalkozás

Dátum: 2005. november 29. kedd

Az óra anyaga: 47. óra: Tömegmérés gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 14 perc

A foglalkozás anyaga: A „madár-szék” feladat eljátszása

A foglalkozás témaköre: Térbeli viszonyszavak használata – 2. feladat

A feladat ismertetése: A tábla elé kitettünk egy asztalt. A kihívott gyerekek 6 kártya közül húz egyet, és a leírtaknak megfelelően elhelyezi a papagájt az asztalhoz viszonyítva. A következő 6 kártya összetettebb feladatokat tartalmaz. Szintén felszólítás után kimegy egy gyerek, és beállítja a felírt szituációt.

A megfigyelés módja: videofelvétel

9. foglalkozás

Dátum: 2005. november 30. szerda

Az óra anyaga: 48. óra: Gyakorlás a százas körben

A foglalkozás időtartama: 30 perc

A foglalkozás anyaga: **Torpedó játék párokban**

A foglalkozás témaköre: Koordinátarendszer – 2. feladat

A feladat ismertetése: Minden gyerek kap egy feladatlapot 2 táblával. Az egyikre berajzolja a saját hajóit, a másikon találgatja a párját. Felváltva kérdeznek, cél a szomszéd hajóinak elsüllyesztése.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

10. foglalkozás

Dátum: 2005. december 5. hétfő

Az óra anyaga: 50. óra: Gyakorlás

A foglalkozás időtartama: 8 perc

A foglalkozás anyaga: **Színes korongok forgatása**

A foglalkozás témaköre: Ciklikus rendezés – 2. feladat

A feladat ismertetése: Minden gyerek kap egy színes korongot és egy feladatlapot. 6 korong közül ki kell választani azokat, melyek nem kaphatók meg az eredeti elforgatásával, majd a maradék korongok esetén meg kell határozni, hogy melyik irányba, mennyivel kell elforgatni az eredetit.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

11. foglalkozás

Dátum: 2005. december 7. szerda

Az óra anyaga: 52. óra: A szorzás értelmezése

A foglalkozás időtartama: 12 perc

A foglalkozás anyaga: **Kacsaringók megrajzolása**

A foglalkozás témaköre: Geometriai transzformációk – 2. feladat

A feladat ismertetése: Négyzethálós papíron a jobbra kanyarodások számát megadva kacsaringókat kell készíteni.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

12. foglalkozás

Dátum: 2005. december 8. csütörtök

Az óra anyaga: 53. óra: A szorzás lejegyzése

A foglalkozás időtartama: 9 perc

A foglalkozás anyaga: **Tájékozódás 10x10-es táblázatban**

A foglalkozás témaköre: Koordinátarendszer – 3. feladat

A feladat ismertetése: Egy 10x10-es táblázatban elhelyeztük 1-től 100-ig a számokat. A táblázat alapján ki kell tölteni 8 különböző alakzatot, majd 3-at úgy, hogy nem látják a táblázatot.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

13. foglalkozás

Dátum: 2006. január 9. kedd 3. óra

Az óra anyaga: 64. óra: A 2-es szorzó- és bennfoglalótábla

A foglalkozás időtartama: 14 perc

A foglalkozás anyaga: Két színesrúd nézeti képeinek megrajzolása

A foglalkozás témaköre: Nézeti képek – 2. feladat

A feladat ismertetése: A gyerekek kapnak 2-2 színesrudat. Ezeket az előlnézetnek megfelelően elhelyezik a padon, majd lerajzolják, hogy mit látnak jobbról, balról, felülről. Nem várjuk el, hogy több lehetséges megoldást is adjanak.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

14. foglalkozás

Dátum: 2006. január 11. szerda 1. óra

Az óra anyaga: 66. óra: A szorzótáblák gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Kockákból álló építmények azonosítása papíron

A foglalkozás témaköre: Geometriai transzformációk – 3. feladat

A feladat ismertetése: A térbeli építmények elképzelése perspektivikus rajz alapján, elmozgatásuk azonosítása.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

15. foglalkozás

Dátum: 2006. január 16. hétfő

Az óra anyaga: 68. óra: A 4-es szorzótábla gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 12 perc

A foglalkozás anyaga: Tájékozódás egy település felülnézeti képén

A foglalkozás témaköre: Útvonalleírások – 3. feladat

A feladat ismertetése: A gyerekek kapnak 1-1 képet. Közösen, szóban oldották meg a feladatot. A gyerekeknek az ujjukkal kellett követni a leírást.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés és hangfelvétel

16. foglalkozás:

Dátum: 2006. január 17. kedd

Az óra anyaga: 69. óra: A tanult szorzó- és bennfoglaló-táblák gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 16 perc

A foglalkozás anyaga: Színesrudak nézeti képei (folytatás)

A foglalkozás témaköre: Nézeti képek – 3. feladat

A feladat ismertetése: A feladat az 1 héttel ezelőtti folytatása. Mindenki kapott egy feladatlapot, valamint két sárga és egy kék rudat.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése és fényképfelvétel

17. foglalkozás:

Dátum: 2006. január 19. csütörtök, 2. óra

Az óra anyaga: Gyakorlás

A foglalkozás időtartama: 30 perc

A foglalkozás anyaga: A lineáris és a ciklikus permutációk kapcsolata

A foglalkozás témaköre: Ciklikus rendezés – 3. feladat

A feladat ismertetése: A gyerekek párban dolgoznak. Színes szívószáldarabokat kapnak, ezekből kell meghatározott színű és számú elemeket damilra felfűzni minél több lehetséges sorrendben. A damilok összekötése után megvizsgálják, hogy mely láncok egyeznek meg.

A megfigyelés módja: videofelvétel

18. foglalkozás:

Dátum: 2006. január 23. hétfő 3. óra

Az óra anyaga: Műveletek gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 5 perc

A foglalkozás anyaga: Fénykép tükörképének, elforgatottjának felismerése

A foglalkozás témaköre: Geometriai transzformációk – 4. feladat

A feladat ismertetése: A gyerekek kaptak egy papírképet, és egy feladatlapot, amelyen az adott kép elforgatottjai, tükörképei voltak. Az eredeti fénykép felhasználásával meg kellett állapítani, hogy melyek származnak forgatásból, melyek tükrözésből.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

19. foglalkozás:

Dátum: 2006. január 24. kedd, 2. óra

Az óra anyaga: A 8-as szorzó- és bennfoglaló-tábla

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Útvonal megrajzolása négyzetrácsos papíron szóbeli diktálás alapján.

A foglalkozás témaköre: Koordinátarendszer – 4. feladat

A feladat ismertetése: *Le, fel, jobbra, balra* utasítások alapján a gyerekek négyzetrácsos papíron először egy nyílt, majd egy zárt töröttvonalat rajzolnak. A lépések és a kanyarodások meghatározása mellett ki kell színeznük a töröttvonalak menetirány szerinti bal oldalát.

A megfigyelés módja: írásos feljegyzés, a gyerekek írásbeli munkájának összegyűjtése

20. foglalkozás:

Dátum: 2006. január 25. szerda 1. óra

Az óra anyaga: Szorzás, osztás gyakorlása

A foglalkozás időtartama: 10 perc

A foglalkozás anyaga: Kép készítése térbeli viszonzszavakat tartalmazó utasítások alapján

A foglalkozás témaköre: Térbeli viszonzszavak használata – 3. feladat

A feladat ismertetése: Az osztályt 3 csoportra osztjuk. Egy-egy tanuló, a többiek szóbeli utasítása alapján kirak egy síkidomokból álló ábrát.

A megfigyelés módja: videofelvétel

UTÓTESZT

1. Melyik kezét emeli a kisfiú? Írd a képek alá!



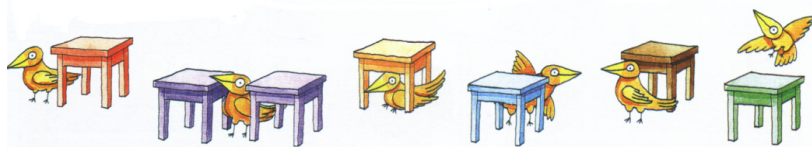
.....

2. A képen egy maci, egy papagáj és egy nyuszi látható. Válaszolj a kérdésekre úgy, hogy a képen lévő állatok helyébe képzeled magad!

- Ki áll a maci bal oldalán?.....
 Ki áll a papagáj jobb oldalán?.....
 Merre áll a nyuszi a papagájhoz képest?.....
 Merre áll a maci a papagájhoz képest?.....

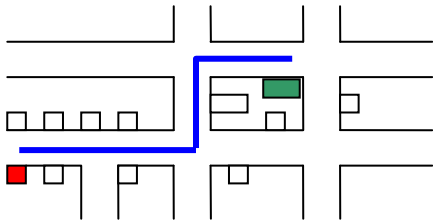


3. Hogyan helyezkedik el a madár a székhez képest? Kösd össze a képeket a megfelelő szavakkal! A jobbra-balra irányokat magadhoz képest állapítsd meg!



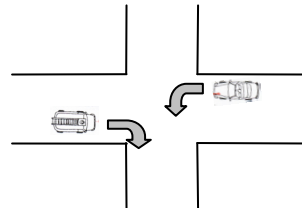
- | | | | | | | |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|
| ALATT | FELETT | ELŐTT | JOBBRA | BALRA | KÖZÖTT | MÖGÖTT |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|--------|

4. A rajzon egy utcarészlet látható. Berajzoltuk Jutka útját a piros háztól a zöld iskoláig. Írd le, hogyan haladt Jutka!

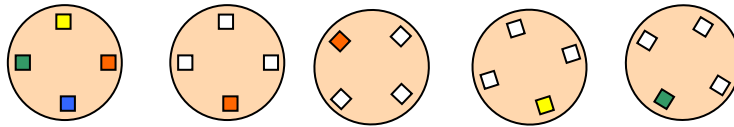


.....

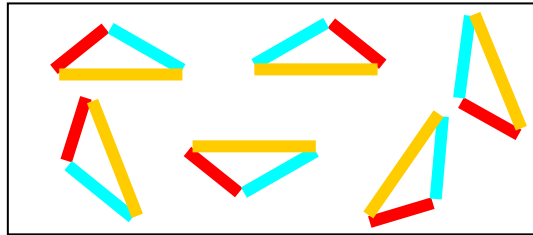
8. Melyik autó kanyarodik jobbra? Színezd ki pirosra!



6. A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!



7. Szívószálakból az ábrán látható háromszöget készítettük. Tegyél X jelet azokba a háromszögekbe, amelyek az eredeti háromszögtől csak azért különböznek, mert a padon elforgattuk, vagy elcsúsztattuk!

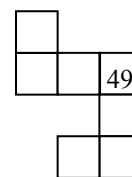


8. Két színesrudat egymás mellé tettünk, és lerajzoltuk őket előlről. Rajzold le, mit látnánk, ha más irányokból néznénk őket?

ELŐLRŐL	JOBBRÓL	BALRÓL	FELÜLRŐL

9. Melyik szám áll az 57-től kettővel jobbra?.....
 Melyik szám áll a 25 alatt eggyel?.....
 Melyik szám áll a 74-től hárommal balra?.....
 Melyik szám áll a 100 felett négygyel?.....

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



Írd be az üres négyzetekbe a táblázatnak megfelelően a számokat!

KÉSLELTETETT TESZT

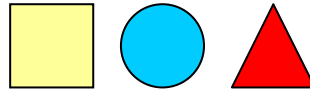
1. Melyik kezét emeli a kisfű? Írd a képek alá!



2. Írd a rajzok alá a gyerekek nevét az állításoknak megfelelően!
Zoli egyik oldalán nem ül senki. Peti bal keze felől Anna ül. Klári Gyuri és Anna között ül.



3. Válaszolj a kérdésekre úgy, hogy magadhoz viszonyítsz!
 Mi van a négyzettől jobbra?.....
 Mi van a körtől jobbra?.....
 Merre van a háromszög a körhöz képest?.....
 Merre van négyzet a háromszöghöz képest?.....
 Melyik síkidom van bal szélén?.....

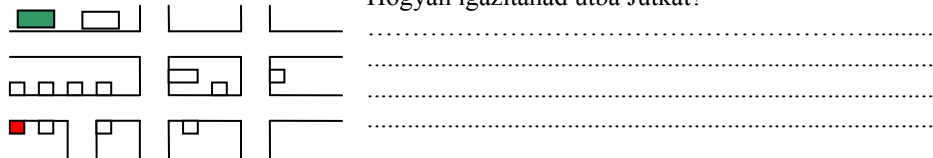


4. Készíts rajzot az utasítások alapján!
 a) Rajzolj egy kört!
 b) A körtől jobbra egy háromszöget!
 c) A háromszög alá egy négyzetet!
 d) A négyzettől jobbra egy csillagot!

5. A vastag vonal jelöli a tükör helyét. Színezd ki a korongok tükörképét!

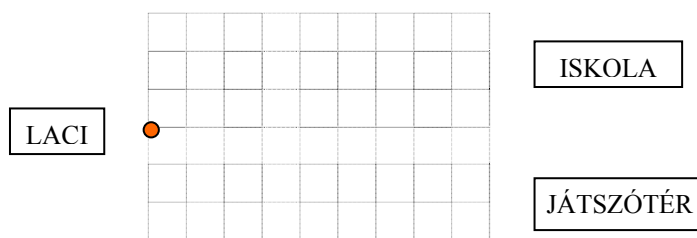


6. A rajzon egy utcarészlet látható. Rajzold be Jutka útját a piros háztól a zöld iskoláig!
 Hogyan igazítanád útba Jutkát?



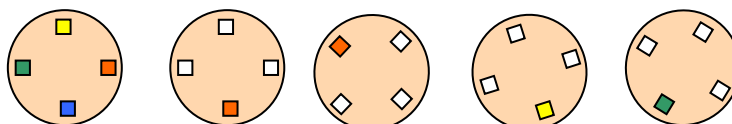
7. Hová ment Laci otthonról? Megtudod, ha megrajzolod az útját a nyilak szerint! Egy nyíl egy lépést jelent.

→ → → → ↑ ↑ → → ↓ → ↓ ↓ ↓ → → → →



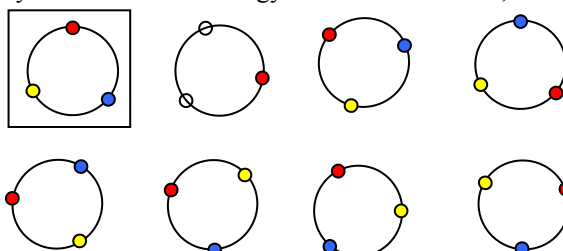
Hányszor kanyarodott Laci útközben?

8. A képek ugyanazt a korongot ábrázolják különböző helyzetekben. Színezd ki a többi négyzetet is!



9. Egy óriáskerékbe 3 testvér úgy száll be, ahogy az első rajzon a 3 színes pont mutatja. A piros pont Kati, a kék pont Pisti, a sárga pont Andi helyét jelöli.

- Írd be az első rajzon a körök mellé a nevek kezdőbetűjét!
- A kerék az óramutató járásával azonos irányban indul. Jelöld ezt az irányt az első ábrán nyíllal!
- A második ábrán Kati helyét bejelöltük, írd be testvéreinek nevét is!
- Mialatt a kerék forgott, apukájuk lentről néhányszor lefényképezte őket. Húzd át azt a rajzot, amelyik nem készülhetett ugyanabban a menetben, mint az első!



10. Két színesrudat egymás mellé tettünk, és lerajzoltuk őket előlről. Rajzold le, mit látnánk, ha más irányokból néznénk őket?

ELÖLRŐL	JOBBRÓL	BALRÓL	FELÜLRŐL

A FELMÉRÉSEKBEN RÉSZTVEVŐ OSZTÁLYOK* LISTÁJA

Fazekas Mihály Általános Iskola,
Debrecen, Vásáry I. u. 10.

1. a,b. osztály
2. a,b. osztály
3. osztály
4. osztály

Védkerti Általános Iskola és Alapfokú Művészetoktatási Intézmény,
Debrecen, Sinay M. u. 6.

1. t. osztály
2. b. osztály
3. a. osztály
4. b. osztály

Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolája,
Debrecen, Hunyadi J. u. 17.

1. b. osztály
2. a. osztály
3. a. osztály
4. z. osztály

* Az osztályok elnevezése a 2004/2005-ös tanévre vonatkozik.

ÖSSZEFOGLALÓ

A dolgozat a térbeli tájékozódásról, a tájékozódó képesség fejlesztéséről szól. A fejlesztésre nagyon sok lehetőség kínálkozik az élet számtalan területén, mi a matematikatanítás keretein belül vizsgáltuk ezeket. Megfigyeléseink, elemzéseink az általános iskola alsó tagozatos tanulóit érintették.

A tájékozódó képesség kulcsát az irányfogalom jelenti. Ez egy topológiai, geometriai jellegű fogalom, mely egyszerűen megjeleníthető az emberi agyban, megértéséhez nincs feltétlenül szükség matematikai értelemben vett fogalmi precizításra, éppen ezért nehéz tanítási anyagként kezelni.

A tanulási zavarokkal, iránytévesztéssel küzdő gyerekek növekvő száma mégis azt jelzi, hogy nem elégedhetünk meg azokkal a tapasztalatokkal, melyeket a tanulók a mindennapi életben spontán módon szereznek. Ezért tartjuk fontosnak, hogy a tanítás, taníthatóság kérdéseivel foglalkozzunk.

A dolgozat az alábbi kutatási kérdésekre kereste a választ:

1. Milyen fogalmi, tevékenységi tartalmak tartoznak a térbeli tájékozódás témakörébe?
2. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?
3. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétenek?
4. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?
5. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

Az **1. fejezetben** a kutatás elméleti háttérét ismertettük.

A térszemlélet, ezen belül a térbeli tájékozódás fogalmának értelmezésében a Guilford-féle felosztásra támaszkodunk, azaz a térszemléletet két fő komponensre, a vizualizációra és a térbeli tájékozódásra bontottuk. A térbeli tájékozódáson az ún. Thurstone-féle $S(3)$ faktoron túl a térbeli relációk felismerésének, a térbeli észlelésnek, saját mozgásunk elképzelésének, valamint a mentális forgatás elvégzésének képességét értettük.

Témakörünk tananyagá formálásának fő irányvonalait a fogalmakat keletkezésükben vizsgáló genetikus matematika didaktika elmélete ill. Freudenthal didaktikai fenomenológiája jelölte ki.

Saját témakörünk tanítási kérdéseinek vizsgálatában egyaránt támaszkodunk a magyar komplex matematikatanítási kísérlet, a holland realiztikus matematikatanítás, valamint a német aktív-felfedezettő tanulási koncepció alapelveire.

Ezek a didaktikai elképzelések a matematika különböző területeinek egységes szemléletű tanítását, a tanulók önállóságának, a tapasztalatszerzésnek a fontosságát, a szociális kontextus szerepét hangsúlyozzák.

Munkánkban a három koncepció alapelvei közül az alábbiakra helyezzük a hangsúlyt:

- a tapasztalatszerzésből kiinduló ismeretszerzés és az életkori sajátosságok figyelembevétele (Varga Tamás-féle kísérlet)
- a tanulók matematikai aktivitásának kontextusfüggősége (realisztikus matematikatanítás)
- az évfolyamokon átívelő spirális és a produktív gyakorlás (Witmann-féle koncepció)

Az ún. kutatáson alapuló tantervfejlesztés (*research-based curriculum development*) fázisait tekintettük irányadónak a térbeli tájékozódás témakörének a meglévő tananyagstruktúrába történő beillesztéséhez. Tekintettel a kutatás körülményeire és lehetőségeire, a fő hangsúlyt egy hipotetikus tanulási trajektória megalkotására valamint az egyéni tesztekre s az osztálytermi kipróbálásra helyeztük. Az elsődleges visszatekintést és felülvizsgálatot követő további ciklusok és a tanterv szélesebb körű kipróbálása újabb kutatások témája lehet.

A **2. fejezet** a térbeli tájékozódás tanításának jelenlegi magyarországi helyzetét mutatta be a Nemzeti Alaptanterv, a különböző kerettantervek és a tankönyvek alapján.

Megállapítottuk, hogy míg a NAT fontos szerepet szán témakörünk tanításának, s ezt nem elszigetelten az alsó tagozatra, hanem az első hat évfolyamra teszi, addig a legtöbb kerettantervben ez nem tükröződik. Jólal kisebb terjedelemben, helyenként következtelenül, ellentmondásosan jelenik meg a térbeli tájékozódás. Az 5-6. osztályban pedig nem találunk ilyen jellegű utalásokat. A kerettantervek nem sugallják sem a szisztematikus, sem a spirális tárgyalásmódot.

A tankönyvcsaládok elemzése megerősítette azt a hipotézisünket, hogy az 1. évfolyam kivételével a témakör explicit módon gyakorlatilag nem szerepel a tanítási anyagban, s a térbeli tájékozódó képesség fejlesztésének jelenlegi iskolai gyakorlata nem kellően átgondolt, esetleges.

A **3. fejezetben** matematikai és matematikatörténeti szempontból tekintettük át az irányítás fogalmkörét. Az irányfogalom matematikai struktúrájának, történeti fejlődésének tanulmányozása a célul kitűzött tananyag kialakítását szolgálta.

Az irányítás komplex fogalom, mely a matematika története során csak egészen későn vált szükséges eszközzé. Hilbert fogalmazta meg az irányított egyenes és sík első egzakt definícióját a XIX. század végén. Ez a tény arra figyelmeztet, hogy komplex geometriai és topológiai fogalomról van szó, mely a hétköznapi élet szituációiból származtatható, ugyanakkor a precíz definíciók megfogalmazása és a kérdéskör alapos megértése egészen nehéz.

A matematikai elemzést az euklideszi geometria három különböző felépítésmódját összehasonlítva végeztük el. (Hilbert, Kerékjártó, Weyl). Ezek a módok az irányfogalom más-más tulajdonságát tekintik alapvetőnek.

A lényeges vonások és a kapcsolódó fogalmak azonosítása hozzájárult ahhoz, hogy kialakítsuk a fejlesztés résztémaköreit. Megjelenésük sorrendje a matematika történetben ill. az axiomatikus tárgyalásmódban segít abban, hogy a rájuk épülő feladatok nehézségi szintjét meghatározzuk.

A **4. fejezetben** a térbeli tájékozódó képességgel összefüggő matematika didaktikai kutatások eredményeit foglaltuk össze. Elsősorban Freudenthal és Piaget munkáira támaszkodtunk.

Igyekeztünk megtalálni azokat a tanulás-tanítás szempontjából kritikus pontokat, melyek a fogalom szerkezetéből, a hétköznapi élettel való kapcsolatából adódnak, majd áttekintettük az irányfogalom - tágabb értelemben a téri tájékozódás - fejlődésének jellemző vonásait.

A matematikai, történeti és didaktikai elemzést az **1. kutatási kérdésre** adott válasszal, azaz a térbeli tájékozódás fejlesztésére szolgáló tananyag részegységeinek meghatározásával zártuk:

1. Térbeli viszonyszavak használata
2. Útvonalak leírása
3. Ciklikus rendezés
4. Tájékozódás a koordinátarendszerben
5. Geometriai transzformációk
6. Objektumok képe különböző nézőpontokból

Az **5. fejezet** a kutatás módszertanát ismertette.

Kutatásunkban három fő rész különíthető el:

- I. Tájékozódó felmérés
 - a. Első írásbeli teszt
 - b. Interjúk
 - c. Második írásbeli teszt
- II. Tanítási kísérlet
- III. Utó- és késleltetett teszt

I. Elsőként tájékozódó felméréseket terveztünk, melyek az alsó tagozatos tanulók meglévő tudásának feltérképezését szolgálták. Az iskolák kiválasztásának fő szempontja az volt, hogy a résztvevő gyerekek összessége lehetőség szerint reprezentálja egy nagyváros kisiskolás-rétegének tényleges összetételét. A felméréseket 2005 tavaszán, három debreceni iskolában mind a négy évfolyamon egy-egy osztályban végeztük. A kiválasztott osztályok egyike sem volt speciális képzési rendszerű, mindegyik saját iskolájának normál tanterve szerint haladt.

I.a. Az írásbeli feladatlap elsődlegesen annak felmérésére szolgált, hogy a különböző évfolyamokon milyen nehézséget jelentenek a kidolgozott tájékozódási feladatok.

I.b. A tájékozódás kifejezése erősen összefügg a kommunikációval, a testmozgással, a gesztikulációval, ezért a vizsgált osztályokban interjúk készítésével tovább finomítottuk az első teszt értékelése után kialakult képet. Minden osztályból 2-2 tanulót választottunk ki.

I. c. A 2. írásbeli feladatlap összeállításakor figyelembe vettük az első teszttel és az interjúkkal szerzett tapasztalatainkat, ezért abban az esetben, ha a probléma egyszerűnek bizonyult, nehezítettünk rajta, ha viszont a tanulók jelentős része nem tudott vele megbirkózni, igyekeztünk egyszerűsíteni, ill. csak egy-egy részaspektusra rákérdezni. Arra is törekedtünk, hogy olyan résztemakörökkel is foglalkozzunk, amelyekkel az első tesztben még nem volt módunk.

II. 2. osztályosok számára megterveztünk és megvalósítottunk egy 10 hetes tanítási kísérletet, melynek célja a tájékozódó felmérés tapasztalatai alapján összeállított tananyag kipróbálása, finomítása volt.

III. A kísérleti tanítás során szerzett tapasztalatainkat 2006 januárjában és áprilisában utó- és késleltetett tesztek felvételével egészítettük ki. Egyrészt a kísérlet eredményességét vizsgáltuk, másrészt a spontán fejlődés mértékére is kíváncsiak voltunk.

A **6. fejezet** a kutatás eredményeinek részletes bemutatását és elemzését tartalmazta. Ezt a munkát a 4. fejezet végén meghatározott 6 résztemakör köré csoportosítva végeztük el. A gondolkodás jellegzetességeit konkrét problémák bemutatásán ill. a tanulói válaszok elemzésén keresztül vizsgáltuk.

A kutatási kérdések és a hozzájuk tartozó hipotézisek áttekintése:

2. Milyen meglévő ismeretekkel rendelkeznek az egyes évfolyamok tanulói?

Hipotézis:

A tanulók térbeli tájékozódó képességének fejlesztéséhez nem elegendők a hétköznapi életben, spontán módon szerzett tapasztalatok.

A spontán fejlődés szerepe az egyes témakörökben eltérő. A *jobb-bal* megkülönböztetés saját testen vagy más személyhez viszonyítva spontán módon is fejlődik, csakúgy, mint az útvonalak leírásának képessége ill. a négyzetrácsban való tájékozódás.

Az útvonalak verbalizálása, a ciklikus rendezés, az elforgatott ill. tükrözött kép természetének megismerése tudatos fejlesztőmunkát igényel, hasonlóan az objektumok nézeti képeinek megalkotásához.

3. Milyen tipikus gondolkodási hibákat vétnek?

Hipotézis:

Az irányítással összefüggő problémák megoldását nehezíti, hogy a térbeli viszonzyszavakat a hétköznapi életben gyakran használjuk következtlenül.

Két témakörnél talákoztunk hétköznapi szóhasználatból eredő problémával.

Egyrészt, ha a *jobb-bal* megkülönböztetést valamely élettelen tárgyhoz viszonyítva végezzük, nem hagyatkozhatunk a hétköznapi életben megszokott konvenciókhoz, mindig konkretizálnunk kell a megfigyelő helyét.

Másrészt ügyelnünk kell arra, hogy az útvonalleírásokban kerüljük a hétköznapi életből átvett pontatlan szóhasználatot (pl. „A második utcánál menj *fel...*”).

4. Melyek azok a tevékenységi formák, amelyekkel bővíthetjük meglévő ismereteiket, javíthatjuk a feltárt gondolkodási hibákat?

Hipotézis:

A térbeli tájékozódó képesség fejlesztésében az első lépést a megfelelően választott tárgyi tevékenységek jelentik. A tárgyi tevékenységekhez kötődően igen fontos a helyes verbális kifejezőmód elsajátítása.

Kutatásunk ezt a hipotézist mind a hat témakörön belül igazolta. A tárgyi tevékenységek lehetővé teszik, hogy a tanulók ne kerüljenek szembe a térbeli szituáció síkba transzformálásának nehézségével mindaddig, míg a térben felmerülő kérdések nem tisztázódnak. A verbális kifejezőmód elsajátítása ennek megfelelően először szóban történik.

A pontos kifejezőmód elsajátítása jól megtervezett gyakorlást igényel, különben állandóan visszatérnek a hétköznapi életből vett pontatlanságok.

5. Hol a helye a meglévő tananyagstruktúrában ennek a témakörnek?

Hipotézis:

A témakör szisztematikus és spirális tárgyalásmódja hozzájárul a térbeli tájékozódó képesség fejlesztéséhez.

A témakörnek a meglévő tananyagstruktúrában történő elhelyezéséhez, a hat résztemakör közötti összefüggésekből indultunk ki.

Az első két témakör egyaránt a térbeli viszonzyszavak használatával foglalkozik. Előbbi statikus, utóbbi dinamikus szituációkat vizsgál.

A harmadik a kanyarodás fogalmán keresztül összefüggésbe hozható az útvonalleírásokkal, s ezért a *jobb-bal* fogalommal is. A ciklikus irányítás fogalma a forgatási kontextusokban érthető meg, s így közvetlen kapcsolatban áll a geometriai transzformációk témakörével.

A koordinátarendszer fogalmának előkészítése a síkbeli tájékozódás gyakorlásának terepe.

Az objektumok nézeti képeinek megalkotásához lineáris irányok természetéről szerzünk tapasztalatokat.

A térbeli tájékozódás témakörét kapcsolatba hoztuk más tantárgyakkal (pl. testnevelés, vizuális kultúra, anyanyelv stb.), ill. a matematika más területeivel (pl. geometria, kombinatorika, számtan-algebra stb.).

Ez azt mutatja, hogy témakörünk tanítása lehetőséget nyújt mind a matematikán belüli, mind az azon kívüli koncentrációra.

Tapasztalataink szerint a szisztematikus és spirális tárgyalásmód nem csak a tájékozódással összefüggő ismeretek megszerzésében és felszínen tartásában segít, hanem más témakörök fejlesztését is szolgálja.

A **7. fejezetben** összefoglaltuk az egyes témakörökhöz köthető legfontosabb eredményeinket, tapasztalatainkat, majd felvázoltunk néhány további kutatási lehetőséget.

SUMMARY

In this work we deal with the spatial orientation and with the development of pupils competence on spatial orientation. The problem of orientation has a rich context in everyday life, so they learn about it not only in different school subjects, but they learn this topic spontaneously and directly too. We investigate pupils' competences in elementary school.

The concept of orientation has a topological and geometrical feature. It turns up spontaneously in one's mind, and since there is little need for conceptual precision, it is not easily seen from the point of view of teaching matter.

Weak spatial orientation often leads to different learning disabilities, e.g. dyscalculia, dyslexia, disgraphia. The increasing number of such children justifies the importance of our topic.

The research questions are the following:

1. What kind of concepts and activities belong to the topic of spatial orientation?
2. What kind of existing knowledge has pupils of elementary school?
3. What types of difficulties can we find studying the thinking processes of pupils of grade 1-4?
4. Which are the activities enlarging pupils knowledge or correcting their recognized faults of thinking?
5. How can we insert the topic in the recent structure of school-work successfully?

In Chapter 1 we present the theoretical background of our research.

We use Guilford's interpretation of spatial ability especially spatial orientation: Spatial ability has two main components: visualization and spatial orientation. The spatial orientation contains five components: the factor S3 of Thurstone, the spatial relations, the spatial perception, the mental rotation and the kinesthetic imagery.

In the work of curriculum development we use two basic mathematical didactical theory: the genetic approach of mathematics education and Freudenthal's didactical phenomenology.

Our investigation of teaching spatial orientation as a topic is based on principles of the conceptions of Hungarian complex experience of mathematics teaching, of the Holland realistic mathematics education (RME) and of the German active-discovery learning.

These didactical theories emphasize an integrated way to teach different mathematical topics, the importance of the social context, pupils' autonomy and experience.

We pick three key elements out of these theories:

- Experience-based knowledge and age-specific teaching (Varga Tamás's complex mathematics)
- Pupils' activities should be embedded in rich problem contexts (realistic mathematics education)
- Spiral treatment and productive practice (elaborated by Eric Witmann)

Inserting the topic of spatial orientation in the recent structure of school-work is based on the phases of research-based curriculum development theory. With respect to circumstances and possibilities of our research we emphasize the construction of a hypothesized learning trajectory, the individual tests and the classroom-based teaching

experiment. The phases and cycles of revisions and field tests in multiple classrooms may be the topic of further research.

The **Chapter 2** shows the recent Hungarian situation in teaching spatial orientation with help of different curricula and textbooks.

Whereas the development of spatial orientation is an important part in the National Fundamental Curriculum (NAT), in other curricula there is not. The NAT deal systematically with our topic in Grade 1-6., but the other curricula mention it only in the Grade 1-4. We can't realize not the systematic either the spiral treatment.

Studying recent textbooks and curricula in Hungary, and speaking to teachers in elementary schools, we established that there are only a few tasks on this topic. Pupils only learn about the orientation at the beginning of the first school year, and nevermore.

In the **Chapter 3** we give a mathematical and historical analysis of the concept of orientation. The study of mathematical structure of the concept served for design the subject matter.

Studying the theory of orientation we can see, that this is a very complex concept, which was formed quite late in the history of mathematics. Hilbert was the first who gave the exact definition of oriented line and plane at the end of the 19th century. It follows that orientation is such a geometrical and topological concept which arises from everyday situations, but the precise definition as well as the curious understanding is quite difficult.

The starting point of our investigation was the axiomatic structure of Euclidean geometry.

We referred to 3 different works (works of Hilbert, Kerékjártó and Weyl), 3 possibilities to build up the concept of orientation. We emphasize not only the differences between the basic approaches of these studies, but the similarities between them, which bring us closer to the core of the concept.

After identification of crucial points and linked concepts we can isolate and group the fundamental problems appearing by the development.

The order of appearance of concepts in the history of mathematics or in the axiomatic treatment helps us to determine the difficulty level of a task related to these concepts. The logical links that are known from the axiomatic treatment may help the children better understand the difficulties of the questions on this topic.

In **Chapter 4** we summarized the results of mathematic didactical theories connected to the ability of spatial orientation. Our analysis based mainly on the works of Freudenthal and Piaget. We tried to find the crucial points arising from the structure of the concept and from the connection with the everyday life then gave a survey of characteristics of the developmental process of spatial orientation.

On the basis of mathematical and historical analysis we gave answer for the **first research question**, and divided the relevant mathematics curriculum regarding the topic of spatial orientation into 6 subtopics:

1. Using words to describe spatial relations
2. Describing routes (using simple maps)
3. Ordering cyclically
4. The coordinate system
5. Geometrical transformations
6. The front-, side-, and top-view of an object

Chapter 5 describes the research methodology.

Our investigation consists of the following phases.

IV. An exploratory study

- a. The first paper-pencil test
- b. Interviews
- c. The second paper-pencil test

V. A teaching experience

VI. A post-test

I. We planned an exploratory study with pupils of grade 1-4. Our aim was to estimate the problems of elementary school-pupils in different ages in order to adjust the actual knowledge with the farther experience. We chose three elementary schools in Debrecen, in Hungary (In spring 2005). We also chose three classes from every grade. The classes were without any specification, their learning based on the normal curriculum of their school. With the composition of the pupils participating in our experiment, we tried to represent the real situation in the grades 1-4 in Hungary.

I. a. We made a paper-pencil test for these pupils.

I. b. We chose pairs of pupils from every class and made interviews with them after the evaluation of the first test. We wanted to refine our estimates, because the paper-pencil test is not the best way to know more about spatial orientations ability. This topic requires communication and different forms of expressions, like body movement and gesticulation.

I. c. We finished the exploratory study with a second paper-pencil test. By composing items we took the results of the first test and the interviews into consideration, furthermore we expanded the area of orientations problem.

II. After this exploratory study we carried out a classroom experience with pupils of grade 2. (In autumn 2005) Our aim was to try our conception and ideas to develop pupil's ability in the field of spatial orientation. Grade 2 seemed good decision in the following aspect: pupils are already familiar with school life, reading and writing; we can see the remained orientation problems, which asks for our special attention. The results of the exploratory study in grades 3 and 4 were useful because of identification problems which remained and knowledge that was getting in every day life in this age.

III. In January 2005 we prepared a post-test for our second graders. The post-test was solved by other second graders too. We were interested in the development of "our" pupils comparing their results with other pupils. We wanted to know also about the spontaneous development of pupils who didn't pay special attention to the topic of orientation.

In **Chapter 6** we present and analyze the results of our research. The results and experiences are classified by the 6 subtopics defined in the end of the Chapter 4.

Now we summarize our research questions and hypothesis:

2. What kind of existing knowledge has pupils of elementary school?

Hypothesis:

Experiences gained in everyday life spontaneously are not enough to develop pupil's ability of spatial orientation.

The importance of spontaneous development is different in each subtopic. The development of left-right distinction related to own body has a spontaneous feature. Describing routes and orienting in grid develop mainly spontaneously too.

Verbalizing routes, ordering cyclically, creating different views of an object and recognizing the nature of a mirror image or a turned image require a conscious developmental project.

3. What types of difficulties can we find studying the thinking processes of pupils of grade 1-4?

Hypothesis:

There are many inconsequent situations in everyday life, and they might be the reason of confusion in problem solving.

We found this reason in two subtopics.

By left-right distinction related to a non-living object the different conventions known from everyday life cause confusions in problem solving. We must determine the position of the observer in every case if we want to get an unambiguous answer.

By describing routes we should not use such inaccurate expression as “At the second street turn *up*...”

4. Which are the activities enlarging pupils knowledge or correcting their recognized faults of thinking?

Hypothesis:

The first step in the developmental process of pupils' ability of spatial orientation is to choose adequate activities. In connection with activities the use of correct verbal expressions is very important.

Our research justified this hypothesis connected all the 6 subtopics.

In primary school the enactive phase of thinking process is very important. If pupils have enough experience in real situations then we can deal with the way of the iconic representation.

In this way pupils learn to use verbal means of expressions at first orally then in written. Acquisition of exact expressions requires well-designed practice otherwise inaccuracies arising from everyday life appear again.

5. How can we insert the topic in the recent structure of school-work successfully?

Hypothesis:

The systematic and spiral treatment of this topic helps to develop pupils' competence in spatial orientation.

We analyzed connections between the 6 subtopics.

The first two deal with using words to describe spatial relations in static and dynamic situations.

The third is in connection with describing routes and with the concept *left-right* too through the concept *turning round*. The cyclic orientation is understandable in turning contexts and so it is associated with geometrical transformations.

The preliminary study of coordinate-systems gives possibility of practice in planar orientation.

When we create different views of an object we experience the nature of linear order and linear directions.

The topic of spatial orientation is in closely connection with other school subjects (art, grammar, physical education) and other fields of mathematics (geometry, combinatorics, arithmetic and algebra). It shows that teaching of our topic provide an opportunity for as to achieve concentration as in mathematics as out of them.

The systematic and spiral treatment helps not to get and keep knowledge in spatial orientation but serve the development of other topics too.

In **Chapter 7** we summarized our results and experience then sketched some further research possibilities.

**KISISKOLÁSOK
TÉRBELI TÁJÉKOZÓDÓ KÉPESSÉGÉNEK
FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEI**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Herendiné Kónya Eszter okleveles középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja
keretében

Témavezető: Dr. Nagy Péter

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja:

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: