



**KOORDINÁTAGEOMETRIAI MÓDSZEREK  
ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE ÉS KÜLÖNBÖZŐ  
SZÍNTŰ ALKALMAZÁSAIK**

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Kiss Sándor

Témavezető: Kovács Zoltán

Debreceni Egyetem  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

*Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és számítástudományi Doktori Iskola Matematika-Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*

*Debrecen, 2010. ....*

*a jelölt aláírása*

*Tanúsítom, hogy Kiss Sándor doktorjelölt 2001-2009 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.*

*Debrecen, 2010. ....*

*a témavezető aláírása*

# KOORDINÁTAGEOMETRIAI MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE ÉS KÜLÖNBÖZŐ SZÍNTŰ ALKALMAZÁSAIK

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban

Írta: Kiss Sándor okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és számítástudományok doktori  
iskolája  
(Matematika-Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Páles Zsolt	.....
tagok:	Dr. Ambrus András	.....
	Dr. Kántor Sándorné	.....

A doktori szigorlat időpontja: 2009. október 21.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ....	.....
tagok:	Dr. ....	.....
	Dr. ....	.....
	Dr. ....	.....
	Dr. ....	.....

Az értekezés védésének időpontja: 2010. .... .

# Tartalomjegyzék

## Jelölések

<b>0. Bevezetés .....</b>	<b>1</b>
0.1. A témaválasztás indoklása .....	1
0.2. Az értekezés célkitűzései .....	3
0.3. Az értekezés szerkezete .....	4
0.4. Az értekezés eredményei .....	5
0.5. The Results of the Dissertation .....	6
0.6. Az értekezés fogalmi kerete és a szükséges háttér-ismeretek .....	8
a) Vektortér .....	8
b) Báziscsere .....	9
c) Az affin tér Weyl-féle axiómarendszere .....	9
d) Affin koordinátarendszer .....	10
e) Skaláris szorzat .....	11
f) Euklideszi tér .....	11
<b>1. fejezet Koordinátarendszerek és koordináták az euklideszi síkon.....</b>	<b>13</b>
1.1. Vonatkoztatási rendszerek a síkon .....	13
1.2. Derékszögű koordinátarendszerek és koordináták .....	15
1.3. Ferdeszögű koordinátarendszerek és koordináták .....	15
1.4. Kontravariáns és kovariáns koordináták .....	16
1.5. Valódi trilineáris koordináták .....	18
1.6. Trilineáris koordináták .....	21
1.7. Baricentrikus koordináták .....	22
1.8. Normált baricentrikus koordináták .....	25
1.9. Areális vagy területi koordináták .....	26
<b>2. fejezet Koordinátatranszformációk.....</b>	<b>27</b>
2.1. A derékszögű és kontravariáns koordináták közötti összefüggések ...	30
2.2. A kontravariáns és kovariáns koordináták közötti összefüggések .....	32
2.3. A derékszögű és kovariáns koordináták közötti összefüggések .....	33
2.4. A valódi trilineáris és kontravariáns koordináták közötti összefüggések .....	34
2.5. A valódi trilineáris és kovariáns koordináták közötti összefüggések ..	35
2.6. A trilineáris és kontravariáns koordináták közötti összefüggések .....	37
2.7. A trilineáris és kovariáns koordináták közötti összefüggések .....	37
2.8. A baricentrikus és kontravariáns koordináták közötti összefüggések	38
2.9. A normált baricentrikus és kontravariáns koordináták közötti összefüggések.....	39
2.10. A baricentrikus és kovariáns koordináták közötti összefüggések.....	40

2.11. A normált baricentrikus és kovariáns koordináták közötti összefüggések .....	41
2.12. A normált baricentrikus és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések .....	41
2.13. A baricentrikus és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések .....	42
2.14. A derékszögű és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések .....	42
2.15. A derékszögű és trilineáris koordináták közötti összefüggések .....	44
2.17. A derékszögű és baricentrikus koordináták közötti összefüggések..	45
<b>3. fejezet Síkmértani alakzatok és a közöttük levő kapcsolatok algebrai jellemzése különböző koordináta-fajtákban .....</b>	<b>47</b>
3.1. Két pont távolsága. Szakasz hossza.....	47
3.2. Szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái.....	50
3.3. Két pont által meghatározott egyenes egyenlete .....	51
3.4. Három pont kollinearitási feltétele .....	51
3.5. Három egyenes összefutási feltétele.....	52
3.6. A háromszög területe.....	53
3.7. Két egyenes párhuzamossági feltétele.....	56
3.8. Adott ponton átmenő adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete .....	58
3.9. Két egyenes merőlegességi feltétele.....	60
3.10. Adott ponton átmenő adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete	61
3.11. Pontnak egyenestől mért távolsága.....	64
3.12. Két egyenes hajlásszöge .....	67
3.13. A Conway-féle képletek .....	69
<b>4. fejezet Alkalmazások.....</b>	<b>74</b>
4.1. A kúpszeletek egyenletei derékszögű és polárkoordinátákban .....	74
a) A kúpszeletek fokális egyenletei .....	74
b) A kúpszeletek fokális egyenletei polárkoordinátákban.....	76
4.2. A kúpszeletek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben .....	77
a) Az ellipszis egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében.	77
b) A hiperbola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében	80
c) A parabola egyenlete egy érintőirány és a tengelyirány koordinátarendszerében .....	82
d) A hiperbola egyenlete aszimptotáinak koordinátarendszerében .....	85
e) A kúpszeletek érintőinek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben .....	86
f) A hiperbola érintőinek egyenlete az aszimptoták koordinátarendszerében .....	88
g) Kúpszeletekkel kapcsolatos tulajdonságok bizonyítása.....	88
4.3. Az egyenlő szárú hiperbola egyenleteiről .....	94

a) Konjugált hiperbolák .....	96
b) Az egyenlő szárú hiperbola, mint racionális függvény grafikus képe .....	97
c) Módszertani javaslatok a kúpszeletek tanításához.....	100
4.4. Az általánosított Fermat-pontok metrikus jellemzése.....	105
I. A háromszög első általánosított Fermat-pontja .....	107
a) Az $AD$ , $BE$ és $CF$ szakaszok hossza .....	108
b) Az első általánosított Fermat-pont távolsága a vonatkoztatási háromszög csúcsaitól .....	109
c) Az $AK$ , $BK$ és $CK$ szakaszokra vonatkozó összefüggések.....	110
II. A háromszög második általánosított Fermat-pontja.....	111
a) Az $AL$ , $BM$ és $CN$ szakaszok hossza.....	112
b) A második általánosított Fermat-pont távolsága a vonatkoztatási háromszög csúcsaitól .....	112
c) Az $AT$ , $BT$ és $CT$ szakaszokra vonatkozó összefüggések .....	112
III. Sajátos eset.....	113
IV. Módszertani elemzések és a témához kapcsolódó más eredmények. .	115
4.5. A Kimberling-féle sejtés igazolása kontravariáns koordináták alkalmazásával .....	116
<b>Irodalomjegyzék.....</b>	<b>126</b>
A szerzőnek az értekezéssel kapcsolatos publikációi .....	128
A szerző előadásai.....	130
<b>1. Függelék. Koordinátatranszformációk (Összefoglalás).....</b>	<b>133</b>
<b>Köszönetnyilvánítás .....</b>	<b>137</b>

## Jelölések

Az  $ABC$  háromszög oldalhosszait jelölje  $a=BC$ ,  $b=CA$ ,  $c=AB$ , szögeinek mértékét  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , területét pedig  $\sigma$ :  $\sigma = T_{ABC}$ . Értekezésemben, a hagyományosak mellett, a John H. Conway által bevezetett alábbi jelöléseket is fogom használni. Az  $ABC$  háromszög területének kétszeresét jelölje  $S$ :  $S = 2\sigma = 2T_{ABC}$ . Tehát a háromszög területképletei alapján:

$$S = bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C = \\ = \frac{abc}{2R} = 4R^2 \sin A \sin B \sin C = 2sr = (a+b+c)r,$$

ahol  $s$  az  $ABC$  háromszög félkerülete,  $R$  a körülírt,  $r$  pedig a beírt kör sugara.

Ha  $\theta$  egy valós szám, akkor legyen  $S_\theta = S \cdot \text{ctg}\theta$ , ahol  $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Következésképpen:

$$S_A = bc \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \\ S_B = ca \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \\ S_C = ab \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Ha  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ , akkor legyen  $S_{\theta\varphi} = S_\theta \cdot S_\varphi = S^2 \text{ctg}\theta \cdot \text{ctg}\varphi$ . Tehát

$$S_{BC} = S_B \cdot S_C = a^2 bc \cos B \cos C, S_{CA} = S_C \cdot S_A = ab^2 c \cos C \cos A$$

$$S_{AB} = S_A \cdot S_B = abc^2 \cos A \cos B.$$

Fennállnak az alábbi összefüggések:

$$(1) S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2, S_A + S_B = c^2$$

$$(2) S_B - S_C = c^2 - b^2, S_C - S_A = a^2 - c^2, S_A - S_B = b^2 - a^2$$

$$(3) S_A + S_B + S_C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

$$(4) S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} = S^2$$

$$(5) bS_B + cS_C = -(b+c)(S_A - bc), cS_C + aS_A = -(c+a)(S_B - ca), \\ aS_A + bS_B = -(a+b)(S_C - ab)$$

$$(6) bS_B - cS_C = -(b-c)(S_A + bc), cS_C - aS_A = -(c-a)(S_B + ca), \\ aS_A - bS_B = -(a-b)(S_C + ab)$$

$$(7) a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = 2S^2$$

$$(8) a^2 S_A + S_{BC} = b^2 S_B + S_{CA} = c^2 S_C + S_{AB} = S^2$$

Az első három összefüggés ellenőrzéssel azonnal igazolható.

A (4) egyenlőség bizonyítása:

$$\begin{aligned} S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} &= abc(a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B) = \\ &= a^2 bc(\cos A + \cos B \cos C) = a^2 bc \sin B \sin C = (2\sigma)^2 = S^2. \end{aligned}$$

Az (5) első egyenlőségét bizonyítjuk:

$$\begin{aligned} bS_B + cS_C &= abc(\cos B + \cos C) = \frac{1}{2}(bc^2 + ba^2 - b^3 + ca^2 + cb^2 - c^3) = \\ &= \frac{1}{2}(b+c)(a^2 + 2bc - b^2 - c^2) = -(b+c)(S_A - bc). \end{aligned}$$

A (6) összefüggések bizonyítása a fentihez hasonló módon történik.

A (7) egyenlőség bizonyítása:

$$a^2 S_A + b^2 S_B + c^2 S_C = abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C) = abc \frac{2\sigma}{R} = 8\sigma^2 = 2S^2.$$

A (8) egyenlőségsor bizonyítása:

$$a^2 S_A + S_{BC} = a^2 bc(\cos A + \cos B \cos C) = a^2 bc \sin B \sin C = 4\sigma^2 = S^2.$$



## 0. Bevezetés

### 0.1. A témaválasztás indoklása

Az 1990-es évek második felében háromszög-geometriával, ezen belül pedig a háromszöghöz kapcsolódó nevezetes körök tanulmányozásával foglalkoztam. Valamilyen átfogó, általános képet szerettem volna kialakítani magamban a háromszög körülírt, beírt, kilencpontos, továbbá Apollóniosz-, Taylor-, Brocard-féle köréről, valamint a háromszög Tucker-, Lemoine-, Soddy-féle köeiről. De nemcsak maguk e nevezetes körök, hanem a háromszögnek e körökhöz köthető nevezetes pontjai és egyenesei is nagyon érdekeltek. Az általam akkor elérhető szakkönyvekre főleg az volt a jellemző, hogy a háromszög-geometria előbb említett témáit jobbra az elemi geometria módszereinek és eszközeinek segítségével tárgyalták. Ezen a területen viszont ezek a módszerek nehézkesnek, körülményesnek bizonyultak, ezért az analitikus geometria felé fordultam. Mivel a háromszöghöz a ferdeszögű koordinátarendszer jobban illeszthető, mint a derékszögű (tengelyekként választhatjuk például a háromszög két tartóegyenesét), ezért a paralel-koordináták használatától az egész témakör egyszerűbb és hatékonyabb tárgyalását reméltem. Ugyanakkor helyenként a vektorgeometria eszközeit is igénybe vettem, azt az alapelvet tartva szem előtt, hogy egy (geometriai) probléma megoldására-tárgyalására lehetőleg a legelőnyösebb módszert alkalmazzam. A témával való több éves foglalkozásomnak egy könyv lett a hozadéka, amely 1999-ben az Erdélyi Tankönyvtanácsnál jelent meg *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal* címen.

Könyvemet Orbán Béla, volt egyetemi tanárom, a kolozsvári Babeş-Bolyai Tudományegyetem nyugalmazott professzora lektorálta. Az előszót is ő írta, amelyből a továbbiakban idézek néhány sort: „...sokan a geometria vonzerejét éppen a jó (nem sablonos) ötleteken alapuló szintetikus (elemi) módszer használatában látják, az analitikus (koordinátageometriai) módszert egyhangúnak, fásasztónak, kevesebb sikerélményt nyújtónak tartják. Véleményem szerint ez nincs így, mivel ha a geometriát tanulmányozó vagy feladatot megoldani akaró személy az analitikus apparátust jól uralja, annak számára a számítások, képletek mind geometriai mondanivalót hordoznak, s ezért érdekesekek. Külön élményt nyújt az algebrai

úton kapott eredmények geometriai kiértékelése, mellyel sokszor új mértani összefüggéseket lehet felfedezni. Böven találunk erre példát a könyvben, mikor a szerző feladatokon keresztül, igen ötletesen mutatja meg az általa választott módszer különböző lehetőségeit. [...]

A könyv a háromszög-geometriára vonatkozóan rengeteg fogalmat és képletet tartalmaz. Ezáltal mintegy a háromszögmértan kis enciklopédiájának tekinthető, melyben könnyen megtalálható a szükséges fogalom vagy képlet. Ezt nagyban elősegíti a könyvhöz csatolt formulagyűjtemény. [...]

Az egész könyv a szerző hatalmas munkáját, odaadását és a tárgy iránti lelkesedését tükrözi, ugyanakkor didaktikai érzékét, hozzáértését bizonyítja. A könyv nyelvezete egyszerű, világos és tömör. Véleményem szerint e munka több szempontból is hiánypótló a hazai (értsd: a romániai) magyar nyelvű tudományos, népszerűsítő és didaktikai szakirodalomban.”

A könyvem megjelenése után, matematikai foglalatosságaim között, annak tárgya ugyan kissé háttérbe szorult, de érdeklődésem a koordináta geometriai módszerek iránt megmaradt. Sőt ez az érdeklődés fokozódott, mivel nemzetközi szakfolyóiratokban több olyan cikkel találkoztam, amelyekben általam akkor még ismeretlen koordináta-fajtákat (trilineáris, baricentrikus) alkalmaztak főleg síkmértani tételek, tulajdonságok bizonyítására.

Később arra is felfigyeltem, hogy a romániai vagy a magyarországi matematikai szakfolyóiratokban például a trilineáris és a baricentrikus koordináták szinte alig fordulnak elő, míg a helyzet egészen más a nyugat-európai vagy az amerikai matematikai szaklapok esetében. A 2000-es évek elején eldöntöttem, hogy amennyire körülményeim lehetővé teszik, elmélyülök ezekben a kérdésekben és ezen a helyzeten megpróbálok változtatni. De azt is élénken éreztem, hogy a szellemi élet periferiáján, az igazi tudományos centrumoktól távol élve, ez nem lesz könnyű feladat. Ezért tudatosan elkezdtem keresni egy szervezett továbbképzési keretlehetőséget, ahol szakkönyvek, folyóiratok, dokumentálódási lehetőségek vannak, emellett pedig az ösztönző tudományos légkört megteremtő kutató matematikusokkal is kapcsolatot teremthetek. Keretnek kézenfekvő lehetőség volt a doktori képzés, tudományos központnak pedig a Debreceni Egyetem.

Amint azt már említettem a nemzetközi szakfolyóiratokban számos olyan geometriai cikk, dolgozat, tanulmány jelent és jelenik meg, amelyekben az értekezésben tárgyalt koordináta-fajták valamelyikét alkalmazzák, egyre gyakrabban a trilineáris és a baricentrikus koordinátákat. Háromszög-geometriai és más jellegű kutatások szinte elképzelhetetlenek ma már e koordináták ismerete és alkalmazása nélkül. Ezek a megfontolások is indokolják e téma választását.

A fogalmi meghatározásoknál forrásként és irányadónak [12]-t és [13]-at tekintettem. A lehető legkevesebb fogalmat vezettem be, csupán

annyit, amennyire feltétlenül szükségem volt. Ugyanez érvényes a klasszikusnak számító, ismert eredményekre is, amelyek közül többet felhasználok, de csak valamely téma bevezetéseként, új eredmények előzményeként.

## 0.2. Az értekezés célkitűzései

Jelen értekezés a matematikának az analitikus geometria néven ismert ágához kapcsolódik, amely elnevezést a [12]-ben leírt értelemben használom: „ az *analitikus geometria (koordinátagometria)* szűkebb értelemben a geometriának az az ága, amely a geometriai alakzatokat és a közöttük fennálló kapcsolatokat koordinátarendszer bevezetésével, az algebra (elsősorban a lineáris algebra) eszközeivel vizsgálja, vagyis a geometriai feladatokat szerkesztés és más szintetikus geometriai módszerek helyett számítással oldja meg. Feladata lényegében kettős: meg kell találnia a geometriailag jellemzett alakzatokat leíró egyenleteket, majd ezekből geometriai következtetéseket kell levonnia. Ennek érdekében a koordinátarendszert arra használja, hogy a pontokat koordinátákkal, a geometriai objektumokat komponensekkel, azok kapcsolatait relációkkal jellemezze s ezáltal a számításra alkalmassá tegye. A tágabb értelemben vett analitikus geometria nemcsak az algebra, hanem pl. az analízis eszközeit is használja, s ebben az értelemben a differenciálgeometria is analitikus geometriának tekinthető.”

A doktori iskolába való felvételem (2001) után az alábbi célokat tűztem ki magamnak:

- megismerni minél több vonatkoztatási rendszert és koordináta-fajtát, elmélyülni az analitikus geometriában
- kipróbálni-alkalmazni a különböző koordináta-fajtákat minél változatosabb geometriai helyzetekben-problémákra
- megmutatni, hogy az analitikus geometria módszerei hogyan alkalmazhatók a kutatásban, új eredmények felfedezésében
- népszerűsíteni a koordinátagometriai módszereket, kiemelve előnyeiket és hátrányaikat egyaránt

A következő évek a kutatás és tapasztalatszerzés jegyében teltek el és úgy 2006 körülre ezen a területen egy nagy mennyiségű ismeretanyag birtokába jutottam. Több cikk publikálása mellett egy könyvnyi anyagot is összeállítottam és 2008-ban a bukaresti Tankönyvkiadónál megjelent *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata* című könyvem, amelyért 2008-ban megkaptam a Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége által kétévenként kiosztásra kerülő Apáczai-díjat. Közben hazai és külföldi doktorandusz szemináriumokon, nyári akadémiákon, konferenciákon, a

Magyar Tudomány Napja Erdélyben rendezvényein, stb. előadásokat tartottam kutatási eredményeimről.

### ***0.3. Az értekezés szerkezete***

Az értekezés a bevezetésből, négy fejezetből és egy függelékkel áll. A 4. fejezet tartalmazza az alkalmazásokat. Az értekezést szerkezetileg az *analógiára* építettem fel, melyet hol az egyes fejezetek alfejezetei között, hol bizonyos alfejezeteken belül érvényesíték. Ennek következtében az értekezésnek vannak vagy teljesen azonos, vagy nagyon hasonló szerkezetű részei. Ezek között a különbségeket csupán az eltérő fogalmi meghatározások jelentik. Ez a felépítés bizonyos szövegrészek szükségszerű ismétlésével jár ugyan, de mindenekelőtt azt tartottam szem előtt, hogy a különböző koordinátarendszerekhez kötődő analitikus geometriai tárgyalási lehetőségek, eljárások, módszerek összehasonlítása minél könnyebb legyen.

Az 1. fejezetben bevezetem a descartes-i koordinátarendszereket és koordinátákat valamint egy adott háromszöghöz kapcsolva a valódi és általános trilineáris illetve a baricentrikus és normált baricentrikus koordinátákat. Egyúttal megadom a háromszög bizonyos pontjainak utóbbi négy típusú koordinátáit. Minden esetben ugyanazokat a pontokat szerepeltetem, hogy a különböző koordináta-típusok összehasonlítása és változásainak követése lehetséges legyen.

A 2. fejezetben egymáshoz viszonyítva sajátos helyzetű koordinátarendszerek leírásával foglalkozom, megadva ugyanazon pont különböző koordináta-típusai közötti összefüggéseket, amelyek lehetővé teszik, hogy az alakzatok koordinátageometriai jellemzőit át tudjuk írni egyik koordináta-fajtából egy másikba. Ez problémamegoldási lehetőségeinket kiszélesíti, változatosabbá teszi, mivel többé nem vagyunk kötve a legrégebbi és talán a leggyakrabban használt derékszögű koordinátarendszerhez.

A 3. fejezetben a geometriai tulajdosságokat különböző fajtájú koordinátákban tárgyalom. A geometriai alakzatok algebrai jellemzőit először derékszögű koordinátákban adom meg, majd áttérek más, az 1. fejezetben felsorolt koordináta-fajtákra. Itt a legelemibb és legismertebb geometriai fogalmakra szorítkoztam, mintegy ízelítőt nyújtva csupán a komparatív tárgyalás mibenlétéből.

A 4. fejezet tartalmazza az alkalmazásokat, amelyek középpontjába most nem a feladatmegoldásokat helyeztem. Az első három fejezet ismereteit felhasználva lehetőség nyílik a geometriai feladatok változatos, több módszerrel történő analitikus megoldására. A 4.1., 4.2. és 4.3. alkalmazásokban a kúpszeletekkel foglalkozom. E részek az ismert

eredményeket néhány újjal egészítik ki, amelyek főleg a ferdeszögű koordinátarendszerek használatához kötődnek. Például kiderül, hogy az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletei formailag változatlanok maradnak a konjugált irányok koordinátarendszerében. Parabola esetén a tengelyirány és egy érintőirány koordinátarendszerében lesz a parabola egyenlete formailag ugyanaz, mint a kanonikus egyenlete.

A 4.3. alfejezetben az egyenlő szárú hiperbola különböző egyenleteivel foglalkozom. Itt bizonyítom, hogy egy elsőfokú racionális kifejezéssel megadott egyváltozós függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. A 4.4. rész tárgya a Fermat-pontok általánosítása és ezek metrikus jellemzése. Végül az utolsó, 4.5. részben kerül sor a Kimberling-sejtés igazolására.

## ***0.4. Az értekezés eredményei***

Értekezésemben analitikus geometriai módszerek összehasonlító vizsgálatával foglalkozom, síkbeli koordinátarendszerekre és koordinátákra korlátozva. Kétfajta vonatkoztatási rendszert használok. Az egyik a síkbeli affin koordinátarendszer, a másik egy adott háromszög. Az 1. fejezetben egy affin koordinátarendszerhez kötve három koordináta-fajtát értelmezek, és pedig a derékszögű, a kontravariáns és a kovariáns koordinátákat. Egy síkbeli háromszöghöz kapcsolva pedig négy koordináta-típust vezetek be: a valódi trilineáris, a trilineáris, a baricentrikus és a normált baricentrikus koordinátákat. A 2. fejezetben levezetem az összes transzformációs képletet, amelyeknek segítségével át lehet térni az egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba illetve bármely koordináta-típusból bármely másikra. Az értekezés többi részében lényegében az itt levezetett eredményeket alkalmazom.

A 3. fejezetben a síkmértani alakzatok és a közöttük fennálló kapcsolatok algebrai jellemzését adom meg mindkét vonatkoztatási rendszerben és az előbb felsorolt koordináta-típusokban. Ennek a fejezetnek két sajátosságát emelném ki: az egyik az, hogy a geometriai tulajdonságok és feltételek analitikus leírása egységes tárgyalásban található meg benne. A másik pedig, hogy ennek következményeként lehetőség nyílik az algebrai összefüggések összehasonlítására, aminek az az azonnali előnye, hogy mérlegelhető-eldönthető egyik vagy másik feltétel relatív bonyolultsága, ami a számítások szempontjából nem jelentéktelen. Ugyancsak itt derül ki az is, hogy mely feltételek koordináta-függetlenek, azaz mely feltételek maradnak formálisan változatlanok a felsorolt koordináta-fajtákra. A 3. fejezet csupán illusztrációként szolgál arra, hogy a 2. fejezet eredményeit felhasználva hogyan lehet a különböző algebrai feltételeket más-más koordinátafajtákra felírni.

A 4. fejezetben különböző alkalmazásokat mutatok be. A kúpszeletek egyenletei különböző koordinátarendszerekben és koordinátákban jól ismertek. A 4.1. alfejezetben bemutatok közülük néhányat. A 4.2.-ben pedig részletesen kifejtem és bizonyítom, hogy az ellipszis és a hiperbola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében formálisan megegyezik a kanonikus egyenletükkel. A parabolánál a tengelyirány és egy érintőirány koordinátarendszerében lesz a parabola egyenlete formálisan ugyanaz, mint a kanonikus egyenlete. A hiperbolának megadom az egyenletét aszimptotáinak koordinátarendszerében is.

Ezek az eredmények átvihetők az érintők egyenleteire is. Igazolom, hogy az érintők egyenleteit a konjugált irányok koordinátarendszerében szintén az ún. duplázási eljárással kapjuk, mint a kanonikus egyenletek esetében. A 4.2. alfejezet utolsó pontjában nyolc, kúpszeletre vonatkozó, tulajdonságot analitikusan bizonyítok, ferdeszögű koordinátarendszereket használva. Az ismert elemi bizonyításokat összehasonlítva az itt található analitikus geometriai bizonyításokkal világosan kiderül, hogy ez utóbbiak alkalmazása bizonyos helyzetekben előnyösebb.

A 4.3. alkalmazásban az egyenlő szárú (derékszögű) hiperbola különböző formájú egyenletével foglalkozom és részletesen bizonyítom, hogy elsőfokú polinomokkal megadott racionális függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. Egyúttal levezetem egy ilyen hiperbola konjugáltjának egyenletét is.

A 4.4. alkalmazásban az általánosított Fermat-pontok metrikus jellemzése baricentrikus koordináták alkalmazásával történik. Ebben az alfejezetben általánosítom a Fermat-pontokat, abban az értelemben, hogy egy adott háromszög oldalaira egyenlő oldalú háromszögek helyett egymással hasonló háromszögeket építék. Ez az általánosítás és a Fermat-pontok metrikus jellemzése hangsúlyozottan a trigonometriára épül. Ennek következtében az analitikus bizonyításon belül sok trigonometriai feltételes azonosság alkalmazására is sor kerül. A kapott eredmények elemi geometriai úton is levezethetők, de hosszadalmasabb, bonyolultabb számításokkal.

Az 4.5. alkalmazásban egy sejtés bizonyításával foglalkozom, amely Clark Kimberlingtől származik:

*Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor talpponti háromszögének érintő és érintő háromszögének talpponti háromszöge homotétikusak.*

## ***0.5. The Results of the Dissertation***

In my dissertation I deal with the comparative study of analytic geometric methods restricted to plane coordinate systems and coordinates. I use two types of reference systems. This first one is the plane affine

coordinate system, while the second one is a given triangle. In the first chapter, related to the affine coordinate system I define three types of coordinates, namely Cartesian, contravariant and covariant coordinates, while related to a given triangle I define four types of coordinates, namely real trilinear, trilinear, barycentric and normed barycentric coordinates. In the second chapter I prove all the transformational formulas, which provide the possibility to switch between the reference systems, respectively from any type of coordinates to any other type of coordinates. In essence the rest of the dissertation is about the application of the results of this proof.

In the third chapter I provide the algebraic properties of the relationships of plane figures in both reference systems in the above mentioned types of coordinates. The peculiarities of this chapter are that the analytic description of the geometric properties and conditions appears in a unified discussion and that it is possible to compare the algebraic connections whereby the immediate advantage is that you can decide how complicated each condition is, which is important from the point of calculations. Likewise, this is the chapter where those conditions emerge that are independent of coordinates, namely which conditions remain formally the same in the above mentioned types of coordinate. Thus the third chapter is just an illustration of how the results of the second chapter can be used in noting the different algebraic conditions for different types of coordinates.

The fourth chapter includes the practical applications. The equations of conic sections in different coordinate systems and coordinates are well-known. I show some in subchapter 4.1., while in 4.2. I fully explicate and prove that the canonical equation of the ellipsis and hyperbola is formally the same as their equation in the conjugate directions coordinate system. Connected to the parabola I found that its canonical equation is formally the same equation as in the axis directions and tangent directions coordinate systems. In the case of the hyperbola I also provide its equation in its asymptotes' coordinates.

These results can be transferred to the equations of the tangents. I prove that the equations of tangents in the conjugate directions coordinate system is also drawn with the help of so called doubling procedure as in the case of the canonical equations. In the last section of subchapter 4.2. I analytically prove some properties of eight conic sections using oblique coordinate systems. Comparing the well-known elementary proofs with these analytic geometric proofs, it clearly comes out that the application of the latter is more preferable in some situations.

In the application in subchapter 4.3. I deal with the different forms of the equation of the rectangular hyperbole and I prove in detail that the graph of a function of one variable given with a first-grade rational polynom is a

rectangular hyperbola. I also deduce the conjugate equation of such a hyperbole.

In the application in subchapter 4.4. the properties of the generalized Fermat points and their metric properties are presented with the help of barycentric coordinates. In this subchapter the Fermat points are generalized to the effect that I construct similar triangles instead of equilateral triangles on the sides of the triangle. This generalization and the metric properties of Fermat points are based on trigonometry; thus a lot of conditional trigonometric identities are used in the analytic proof. The results can be deduced using elementary geometry but the calculations are longer and more complicated.

In the application in subchapter 4.5. I deal with the proof of Clark Kimberling's conjecture:

*If triangle ABC is acute angled, then its intouch-of-orthic and orthic-of-intouch triangles are homothetic.*

## ***0.6. Az értekezés fogalmi kerete és a szükséges háttér-ismeretek***

### **a) Vektortér**

Valamely  $T$  test feletti  $V$  vektortéren vagy lineáris téren olyan halmazt értünk, amelyben értelmezve van egy kétváltozós művelet (összeadás), amelyre  $V$  Abel-csoport, továbbá  $V$  és  $T$  elemei között egy olyan  $\alpha a$  (ahol  $\alpha \in T, a \in V$ ) szorzás, hogy  $\alpha a$  ismét  $V$  eleme legyen és bármely  $a, b \in V$  és  $\alpha, \beta \in T$  elemre:

$$(1) (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad (2) \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad (3) (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad (4) 1a = a, \text{ ahol } 1 \text{ } T\text{-nek az egységeleme.}$$

A  $V$  elemeit vektoroknak, a  $T$  elemeit skalároknak, az  $\alpha a$  szorzást skalárral való szorzásnak nevezik.

Ha egy vektortérben van  $n$ -elemű bázis, akkor  $n$ -dimenziós vektortérről beszélünk. Az  $n$ -dimenziós vektortérben egy  $B = (e_1, \dots, e_n)$  bázis megadásával (rögzítésével) koordinátarendszert vezethetünk be, mivel a tér bármely  $x$  vektora egyértelműen előállítható  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  alakban. Az  $x_1, \dots, x_n$  skalárokat az  $x$  vektornak a  $B$  bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.



## b) Báziscsere

Ha  $V$  a  $T$  test feletti  $n$ -dimenziós vektortér,  $B = (e_1, \dots, e_n)$  ennek egy bázisa, akkor az  $x \in V$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  vektorhoz rendeljük hozzá az

$$x = [x]_B = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

oszlopmatrixot. Tekintsük az  $\bar{e}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  vektorsorozatot.

A  $\bar{B} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  vektorhalmaz akkor és csak akkor bázis, ha az

$$A = [\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]_B = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix nem szinguláris. Ekkor  $A$ -t a  $B$  bázisról a  $\bar{B}$  bázisra való *átterési*

*mátrix*nak hívjuk. Ha  $x = [x]_B = (x_i) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  és  $x = [x]_{\bar{B}} = (\bar{x}_i) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ ,

$i = 1, 2, \dots, n$ , akkor az  $x$  vektor  $B$  és  $\bar{B}$  bázisokra vonatkozó koordinátái

között az  $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  összefüggések állnak fenn, melyeket

mátrix alakban a következőképpen írhatunk:

$$[x]_B = A \cdot [x]_{\bar{B}} \Leftrightarrow [x]_{\bar{B}} = A^{-1} \cdot [x]_B.$$

## c) Az affin tér Weyl-féle axiómarendszere

Legyen  $V$  a  $T$  test feletti vektortér. A nem üres  $E$  halmazzal a  $V$  vektortér feletti (vagy a  $T$  test feletti) *affin térnek* nevezzük, ha létezik egy  $\sigma: E \times E \rightarrow V$  leképezés, amely eleget tesz a következő két feltételnek (Weyl-féle axiómák):

$W_1$ : Tetszőleges  $A \in E$  esetén a  $\sigma_A(B) = \sigma(A, B)$  képlettel értelmezett  $\sigma_A: E \rightarrow V$  leképezés bijekció.

$W_2$ : Tetszőleges  $A, B, C \in E$  esetén  $\sigma(A, B) + \sigma(B, C) = \sigma(A, C)$ .

Az  $E$  tér elemeit *pontoknak*, a  $V$  elemeit az  $E$  eltolásainak vagy (*szabad*) *vektorainak*, a  $V$  vektorteret az  $E$  affin tér *eltolási terének* nevezzük. Tetszőleges  $(A, B)$  rendezett  $E$ -beli párt a  $\sigma: E \times E \rightarrow V$  leképezés egy  $\sigma(A, B) = v \in V$  vektorba viszi át. Ha ezt a vektort  $\overline{AB}$ -vel jelöljük, akkor a  $W_2$ -beli egyenlőség az  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  alakba írható. Ha az  $E$  affin tér eltolásainak  $V$  tere  $n$ -dimenziós, akkor az  $E$  teret magát is  $n$ -dimenziósnak nevezzük.

#### d) Affin koordinátarendszer

Legyen  $E$  a  $T$  test feletti  $n$ -dimenziós affin tér és  $V$  az  $E$  eltolási tere. *Affin koordinátarendszernek* vagy *affin  $n$ -élnak* az  $E$  tér olyan rendezett  $K = (O, E_1, \dots, E_n)$  pontrendszerét nevezzük, amelyekre az  $e_i = \overline{OE_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) vektorok a  $V$  vektortér egy bázisát alkotják. Ha adott az  $O \in E$  pont és egy  $B = (e_1, \dots, e_n)$   $V$ -beli bázis, akkor az  $E_i$  pontokat meg tudjuk határozni. Ezért a  $K = (O, E_1, \dots, E_n)$  helyett gyakran a  $K = (O, e_1, \dots, e_n)$  jelölést használjuk. Az  $O$  pontot a  $K$  koordinátarendszer *kezdőpontjának*, az  $e_i$  vektorokat pedig *koordinátavektoroknak* nevezzük. Tetszőleges  $M \in E$  pont meghatároz egy  $\overline{OM} \in V$  vektort, amelyet az  $M$  pont  $O$ -ra vonatkozó *helyvektorának* nevezünk. Az  $\overline{OM}$  vektort a  $B = (e_1, \dots, e_n)$  bázisban felbonthatjuk:  $\overline{OM} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , ahol  $x_1, \dots, x_n$  a  $T$  test elemei. Ezeket az  $M$  pont  $T$ -beli (*affin*) *koordinátáinak* nevezzük és így jelöljük:  $M = (x_1, \dots, x_n)$ . Azt is mondhatjuk, hogy az  $M$  pont koordinátái azonosak helyvektorának koordinátáival. Ha rögzítjük az  $O \in E$  pontot, akkor a  $W_1$  szerint a  $\sigma_o: E \rightarrow V$ ,  $\sigma_o(M) = \overline{OM}$  leképezés bijekció, amelynek segítségével az  $E$  affin tér azonosítható a  $V$  vektortérrel (tetszőleges  $M$  pontot azonosítunk az  $\overline{OM} \in V$  helyvektorával).

## e) Skaláris szorzat

Legyen  $V$  a valós számok  $\mathbb{R}$  teste feletti vektortér. A  $\varphi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  leképezést *skaláris szorzatnak* nevezzük, ha bármely  $x, y$  vektorra teljesülnek az alábbi tulajdonságok: (1)  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

$$(2) \varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(3) \varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

(4)  $\varphi(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , egyenlőség pedig csak az  $x = 0$  esetben áll fenn. A skaláris szorzat szokásos jelölése:  $xy$  vagy  $x \cdot y$ .

## f) Euklideszi tér

A skaláris szorzattal ellátott lineáris teret *euklideszi térnek* nevezzük. Euklideszi terekben értelmezhető az  $x$  vektor *hossza* vagy *normája*:  $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2}$ . Az  $x$  vektort *egységvektornak* nevezzük, ha  $|x| = 1$ . Ha  $a \neq 0$ , akkor az  $a_0 = \frac{a}{|a|}$  egységvektort  $a$  irányú egységvektornak nevezzük.

Az  $n$ -dimenziós euklideszi tér egy  $B = (e_1, \dots, e_n)$  bázisát *ortonormálnak* vagy *derékszögűnek* nevezzük, ha a bázisbeli elemek egységvektorok és páronként merőlegesek egymásra, azaz ha

$|e_i| = 1, e_i \cdot e_j = 0, i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n)$ . A  $B = (e_1, \dots, e_n)$  ortonormált bázis által meghatározott  $K = (O, e_1, \dots, e_n)$  koordinátarendszert szintén *ortonormálnak* vagy *derékszögűnek* nevezzük. Véges dimenziós euklideszi térben mindig bevezethető ortonormált bázis. Ekkor az  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  és  $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$  vektorok skaláris szorzata  $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Az  $x$  és  $y$  vektorokat *ortogonálisoknak* vagy *merőlegeseknek* nevezzük, ha  $x \cdot y = 0$ .

Megemlítjük még a sajátos  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  (a jobb oldalon  $n$  tényező szerepel) affin teret, amelyet  *$n$ -dimenziós euklideszi térnek* nevezünk, ha eltolási tere egy  $\mathbb{R}$  feletti euklideszi tér. Ezt a teret  $E_n$ -el fogjuk jelölni. Az  $E_n$ -ben értelmezhető két pont távolsága: az  $A, B \in E_n$  pontok  $\rho(A, B)$  *távolságán* az  $\overline{AB}$  vektor hosszát fogjuk érteni. Tekintsünk az  $E_n$  euklideszi térben egy  $K = (O, e_1, \dots, e_n)$  ortonormált koordinátarendszert. Ha  $A = (a_1, \dots, a_n)$  és  $B = (b_1, \dots, b_n)$ , akkor e pontok távolsága:

$\rho(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$ . Ha pedig  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ ,  
akkor az  $x$  vektor hossza:  $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}$ .

A fenti fogalmak értelmezésekor forrásként [1]-et és [12]-t használtam.

# 1. fejezet Koordinátarendszerek és koordináták az euklideszi síkon

Az *elemi (szintetikus) geometria* a tételeit bizonyos alapelvekből (axiómákból) és már igazolt állításokból kiindulva tisztán geometriai érveléssel, az alapfogalmakra és az alakzatok közötti kapcsolatokra építve állapítja meg és bizonyítja. Ezzel szemben az *analitikus geometria* vagy *koordinátageometria* a geometriai problémákat az algebra és az analízis eszközeivel oldja meg. A gyakorlatban a geometriai problémák megoldására megpróbáljuk a leghatékonyabb módszereket alkalmazni. A megoldandó feladattól és a várható siker, eredményesség fokától függően dönthetünk a szintetikus, az analitikus vagy más geometriai eszközök mellett. Természetesen mindig a hatékonyabb módszert részesítjük előnyben.

A geometriai feladatok analitikus megoldásakor az egyik fontos célunk a számítások mennyiségének a minimálisra csökkentése. Ezért olyan koordinátarendszert igyekszünk választani, amely a számítások szempontjából a legelőnyösebb. Ezt a célt nem mindig könnyű megvalósítani. Bár a megoldandó probléma természete „sugallhatja” az alkalmazandó analitikus geometriai eszközöket, valójában nincsenek olyan kritériumok, amelyek adott típusú feladathoz a „legegyszerűbb tárgyalás” ismérvét is kielégítő módszert rendelnének. Ezért aztán a legtöbb esetben egy adott probléma több módszerrel történő megoldása után dönthető csak el, hogy közülük melyik a legegyszerűbb, a leghatékonyabb és a legelegánsabb.

## 1.1. Vonatkoztatási rendszerek a síkon

Ebben a fejezetben az affin koordinátarendszerhez és a háromszöghöz, mint vonatkoztatási rendszerhez kötődő különböző koordináta-típusokat vezetek be. Az affin koordinátarendszer szabatos matematikai értelmezése az affin tér eléggé bonyolult struktúráival és fogalmi rendszerében a felsőfokú képzés keretében természetes, a középiskolában viszont nem járható út. Ezért az affin vonatkoztatási rendszer bevezetésére,

az egyetem előtti oktatásban, egy másik lehetőséget használunk, amely a valós számok és a számegyenes pontjai közötti bijekción alapszik.

Hogyan lehet a síkban egy pont helyzetét meghatározni? Erre többféle mód is kínálkozik, a vonatkoztatási rendszer megválasztásától függően. Például választhatunk a síkban egy rögzített  $O$  pontot és egy  $(\vec{i}, \vec{j})$  bázist. Az  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  rendezett hármast a sík egy *affin koordinátarendszerének* nevezzük. Bármely síkbeli  $M$  pont helyzetét az  $\overline{OM}$  helyvektor egyértelműen meghatározza. Mivel  $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  és ez a felbontás egyértelmű, az  $M$  pont helyzete jellemezhető az  $(x, y)$  rendezett számpárral. Az  $M$  pont koordinátáiként az  $\overline{OM}$  helyvektor  $(\vec{i}, \vec{j})$  bázisra vonatkozó koordinátáit tekintjük.

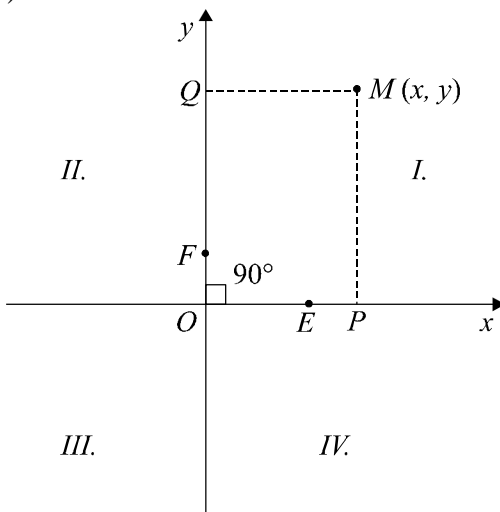
Egy másik lehetőség az  $M$  síkbeli pont helyének meghatározására két számegyenes megadásával lehetséges. Ha egy egyenesen kijelölünk egy  $O$  *kezdőpontot*, egy  $E$  *egységpontot* és egy *pozitív irányítást*, akkor *számegyenesről* beszélünk. Az  $O$  pontnak a 0 számot, az  $E$  pontnak az 1 számot feleltetve meg, a számegyenes tetszőleges  $P$  pontjához hozzárendelhetjük az  $\frac{OP}{OE}$  számot, ahol  $OP$  az  $(OP)$  szakasz előjeles hosszát jelöli. Ezt a számot pozitívnek vesszük, ha  $P$  az  $(OE)$  félegyenesen van, negatívnak ellenkező esetben. Tekintsünk most a síkban két, nem egybeeső  $OE$  és  $OF$  számegyenest. Ezek egyesítését *OEF affin vonatkoztatási rendszernek* nevezzük. Egy tetszőleges  $M$  pont helyzete e számegyenesekhez viszonyítva határozható meg (lásd az 1.3. és 1.4. alfejezetet).

Egy újabb lehetőség az  $M$  síkbeli pont helyének kijelölésére, ha vonatkoztatási rendszerként egy háromszöget választunk (lásd az 1.5., 1.6., 1.7., 1.8., 1.9. alfejezeteket). A háromszöghöz kapcsolódó koordináták kissé más természetűek, mint az affin koordináták. Például egy síkbeli pontot három koordináta jellemez, nem pedig kettő, ahogy azt a derékszögű koordinátáknál megszoktuk. Ezt a szokatlanságukat viszont ellensúlyozza az az előny, hogy a háromszög bizonyos (centrális) pontjainak koordinátái, a vonatkoztatási háromszög oldalhosszaira és szögmértékeire vonatkozóan, szimmetrikusak

Ezzel lehetőségeinket természetesen még nem merítettük ki, de vizsgálatainkat most csak ezekre a vonatkoztatási rendszerekre korlátozzuk.

## 1.2. Derékszögű koordinátarendszerek és koordináták

A síkban tekintsünk két olyan  $x$  és  $y$  számegeyeneset, amelyek egymásra merőlegesek és kezdőpontjaik egybeesnek. Az  $x$  számegeyenes egységpontját jelölje  $E$ , az  $y$  számegeyenesét  $F$ , közös kezdőpontjukat pedig  $O$ . Az  $x$  és  $y$  számegeyenesek együttesét *derékszögű koordinátarendszernek* nevezzük (1.1. ábra).



1.1. ábra

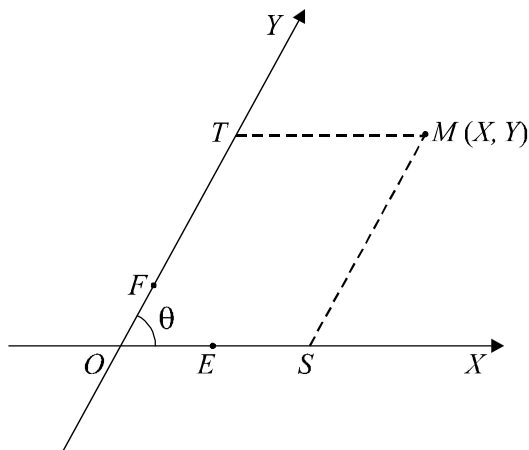
Legyen  $M$  a sík tetszőleges pontja. Az  $M$  ponton át az  $Oy$  tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az  $Ox$  tengelyt a  $P$  pontban, az  $M$  ponton át az  $Ox$  tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az  $Oy$  tengelyt a  $Q$  pontban metszi. Az  $x = \frac{OP}{OE}$  és az  $y = \frac{OQ}{OF}$  számokat az  $M$  pont *derékszögű koordinátáinak* hívjuk.

Ha  $|OE| = |OF|$ , akkor az  $xOy$  derékszögű koordinátarendszert *ortonormálnak* nevezzük. Ortonormált koordinátarendszerekben  $x = \overline{OE} \cdot \overline{OM}$  és  $y = \overline{OF} \cdot \overline{OM}$ , azaz az  $M$  pont abszcisszája egyenlő az  $\overline{OE}$  és  $\overline{OM}$ , az  $M$  pont ordinátája pedig az  $\overline{OF}$  és  $\overline{OM}$  vektorok skaláris szorzatával.

## 1.3. Ferdeszögű koordinátarendszerek és koordináták

A síkban tekintsünk két olyan  $X$  és  $Y$  számegeyeneset, amelyek nem párhuzamosok és kezdőpontjaik egybeesnek. A két számegeyenes hajlásszögét

jelölje  $\theta \in (0, \pi)$ . Az  $X$  számegeyenes egységpontját jelölje  $E$ , az  $Y$  számegeyenesét  $F$ , közös kezdőpontjukat pedig  $O$ . Az  $X$  és  $Y$  számegeyenesek együttesét *ferdeszögű koordinátarendszernek* vagy *affin koordinátarendszernek* nevezzük (1.2. ábra).



1.2. ábra

Ha  $|OE| = |OF|$ , azaz ha az  $OE$  és  $OF$  szakaszok hossza egyenlő, akkor az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszert *normálnak* nevezzük.

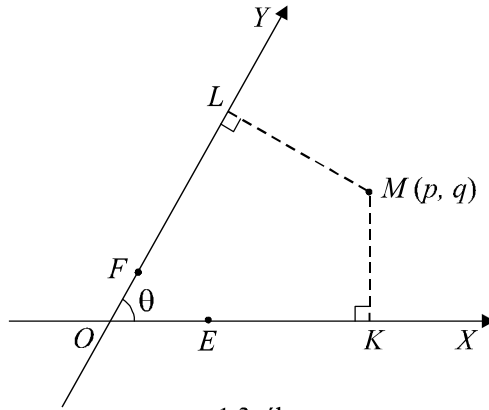
Az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszerben kétféle koordinátát értelmezünk, éspedig a kontravariáns és kovariáns koordinátákat.

### 1.4. Kontravariáns és kovariáns koordináták

Legyen  $M$  a sík tetszőleges pontja. Az  $M$  ponton át az  $OY$  tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az  $OX$  tengelyt az  $S$  pontban, az  $M$  ponton át az  $OX$  tengellyel párhuzamosan húzott egyenes az  $OY$  tengelyt a  $T$  pontban metszi (1.2. ábra). Az  $X = \frac{OS}{OE}$  és az  $Y = \frac{OT}{OF}$  számokat az  $M$  pont *kontravariáns koordinátáinak* hívjuk. Az  $M$  pont kontravariáns koordinátái megegyeznek az  $\overrightarrow{OM}$  helyvektor  $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$  bázisra vonatkozó koordinátáival. A kontravariáns koordináták (háromszög)geometriai alkalmazásaival A *háromszög nevezetes körei* című könyvemben foglalkoztam (Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 1999).

Az  $M$  pontnak az  $OX$  illetve az  $OY$  tengelyre eső merőleges vetülete legyen a  $K$  illetve az  $L$  pont (1.3. ábra).





1.3. ábra

A  $p = \frac{OK}{OE}$  és a  $q = \frac{OL}{OF}$  számokat az  $M$  pont kovariáns koordinátáinak hívjuk. A derékszögű koordináták mintájára a kovariáns koordinátákat eleve értelmezhetjük volna a  $p = \overline{OE} \cdot \overline{OM}$  és  $q = \overline{OF} \cdot \overline{OM}$  skaláris szorzatokkal, aminek az az azonnali előnye, hogy e koordináták könnyen kifejezhetők a kontravariáns koordinátákkal:

$$p = \overline{OE} \cdot \overline{OM} = \overline{OE} \cdot (X\overline{OE} + Y\overline{OF}) = \overline{OE} \cdot \overline{OEX} + \overline{OE} \cdot \overline{OFY},$$

$$q = \overline{OF} \cdot \overline{OM} = \overline{OF} \cdot (X\overline{OE} + Y\overline{OF}) = \overline{OF} \cdot \overline{OEX} + \overline{OF} \cdot \overline{OFY}.$$

Ha  $\overline{OE} \cdot \overline{OE} = s_{11}$ ,  $\overline{OE} \cdot \overline{OF} = s_{12}$ ,  $\overline{OF} \cdot \overline{OE} = s_{21}$ ,  $\overline{OF} \cdot \overline{OF} = s_{22}$ , akkor

$$p = s_{11}X + s_{12}Y \quad \text{és} \quad q = s_{21}X + s_{22}Y. \quad \text{Az } S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \text{ jelöléssel az előbbi}$$

összefüggések felírhatók mátrixalakban:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Normált ferdeszögű (affin) koordinátarendszerek esetén  $S = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$ , tehát  $p = X + Y \cos\theta$  és  $q = X \cos\theta + Y$ . Az  $S$  mátrix első sorának elemei az  $\overline{OE} = \vec{e}_1$ , második sorának elemei pedig az  $\overline{OF} = \vec{e}_2$  alapvektor kovariáns koordinátái.

Ha az  $\overline{OE}$  és  $\overline{OF}$  (nem normált) alapvektorokat a  $k$ -szorosukra növeljük ( $k > 1$ ) és ezeket tekintjük bázisvektoroknak, akkor ugyanannak a pontnak a kovariáns koordinátái az eredeti koordináták  $k$ -szorosára növekednek, kontravariáns koordinátái pedig az eredeti koordináták

$\frac{1}{k}$ -szorosára csökkennek. Valóban, ha  $(p, q)$  ill.  $(p', q')$  az  $M$  pont kovariáns koordinátái az  $(O, \overline{OE}, \overline{OF})$  illetve az  $(O, k\overline{OE}, k\overline{OF})$  vonatkoztatási rendszerben, akkor

$$p' = (k\overline{OE}) \cdot \overline{OM} = k(\overline{OE} \cdot \overline{OM}) = kp, \quad q' = (k\overline{OF}) \cdot \overline{OM} = k(\overline{OF} \cdot \overline{OM}) = kq$$

$$\text{és } \overline{OM} = X \cdot \overline{OE} + Y \cdot \overline{OF} = \frac{X}{k}(k\overline{OE}) + \frac{Y}{k}(k\overline{OF}).$$

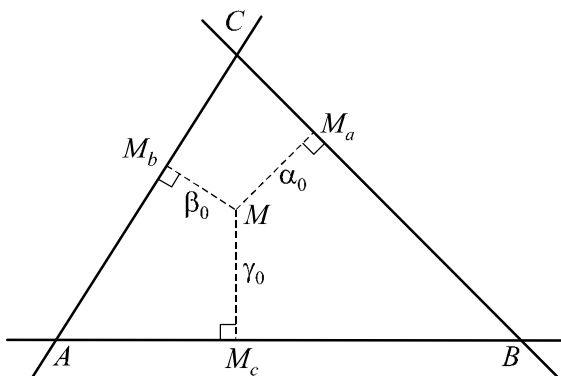
Ez a magyarázata annak, hogy a kovariáns koordinátákhoz az „együtt változó”, a kontravariáns koordinátákhoz pedig az „ellentétesen változó” jelzőket szokás kapcsolni. (A kontravariáns és kovariáns koordináták részletesebb leírását lásd [6]-ban, a 295. oldalon).

Ha  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , akkor a kontravariáns és kovariáns koordináták egybeesnek a derékszögű koordinátákkal.

### 1.5. Valódi trilineáris koordináták

A valódi trilineáris és trilineáris koordinátákat Julius Plücker (1801 – 1868) vezette be 1830-ban, a *Journal für die Reine und Angewandte Mathematick* folyóiratban megjelent *Über ein neues Coordinatensystem (Egy új koordinátarendszerről)* című cikkében.

Legyen  $ABC$  adott háromszög, amelyre a továbbiakban a *vonatkoztatási háromszög* elnevezéssel is hivatkozunk. A háromszög síkjában elhelyezkedő  $M$  pontnak a  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalegyenesekre eső merőleges vetületeit jelölje  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  (1.4. ábra).

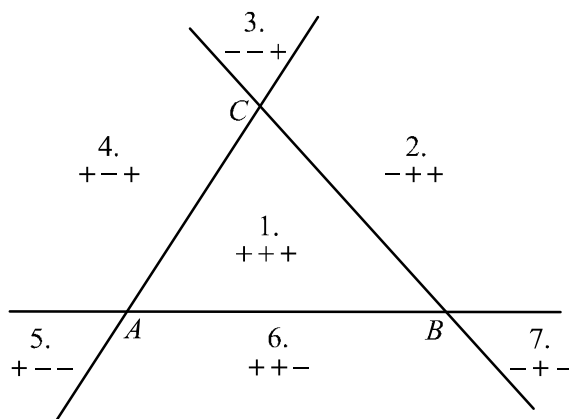


1.4. ábra

A  $BC$  oldalegyenes a háromszög síkját két félsíkra osztja. Az  $A$  csúcsot tartalmazó félsíkot  $BC$  szerint pozitívnak, az  $A$  csúcsot nem tartalmazó félsíkot  $BC$  szerint negatívnak tekintjük. Az  $|MM_a|$  szakasz euklideszi mértékének aszerint fogunk pozitív vagy negatív előjelet tulajdonítani, hogy az  $M$  pont  $BC$  szerint a pozitív vagy a negatív félsíkban van. Az  $|MM_a|$  szakasz előbbi értelemben vett előjeles euklideszi mértékét jelölje  $\alpha_0$ .

Hasonlóan értelmezzük az  $M$  pontnak a  $CA$  ill.  $AB$  oldalegyenesig mért  $\beta_0$  ill.  $\gamma_0$  előjeles távolságát. Az  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  számhármast az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó *valódi trilineáris koordinátáinak* nevezzük. Ezt a továbbiakban a következőképpen fogjuk jelölni:  $M = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ . Ilyen módon az  $ABC$  vonatkoztatási háromszög segítségével a sík bármely  $M$  pontjához egy rendezett  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  számhármast rendelhetünk.

Az  $ABC$  háromszög oldalegyenesei a háromszög síkját hét tartományra osztják. Ezek számozását és az egyes tartományokban elhelyezkedő pontok koordinátáinak előjelét az 1.5. ábra szemlélteti.



1.5. ábra

A háromszög síkjában elhelyezkedő bármely  $M$  pontra, amelynek valódi trilineáris koordinátái  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ , fennáll az alábbi összefüggés:

$$a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = S. \quad (1.1)$$

Mivel bármely háromszögre érvényes a szinusztétel, azaz

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

ahol  $R$  a háromszög köré írt kör sugara, ezért az (1.1) összefüggés felírható az alábbi formába is:  $\alpha_0 \sin A + \beta_0 \sin B + \gamma_0 \sin C = \frac{\sigma}{R}$ . (1.2)

Tegyük fel, hogy adottak az  $M$  pont valódi trilineáris koordinátái. Felmerül a kérdés, hogy hogyan határozható meg az  $M$  pont helyzete? Az  $a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = S$  összefüggés alapján az  $M$  pont bármely két valódi trilineáris koordinátájának ismeretében a harmadik koordináta meghatározható. Ez a tény az  $M$  pont helyzetének meghatározásában a következőképpen tükröződik: például a  $BC$  oldalegyenessel, az  $\alpha_0$  előjelének megfelelő félsíkban,  $|\alpha_0|$  távolságra húzzunk párhuzamost, majd a  $CA$  oldalegyenessel, az  $\beta_0$  előjelének megfelelő félsíkban,  $|\beta_0|$  távolságra húzzunk egy másik párhuzamost. E két párhuzamos metszéspontja lesz az  $M$  pont.

A alábbiakban megadjuk néhány pont valódi trilineáris koordinátáit:

1. A csúcspontok:  $A = \left( \frac{S}{a}, 0, 0 \right) = \left( \frac{bc \sin A}{a}, 0, 0 \right) = \left( \frac{bc}{2R}, 0, 0 \right),$

$$B = \left( 0, \frac{S}{b}, 0 \right) = \left( 0, \frac{ca \sin B}{b}, 0 \right) = \left( 0, \frac{ca}{2R}, 0 \right),$$

$$C = \left( 0, 0, \frac{S}{c} \right) = \left( 0, 0, \frac{ab \sin C}{c} \right) = \left( 0, 0, \frac{ab}{2R} \right).$$

2. A súlypont:  $G = \left( \frac{S}{3a}, \frac{S}{3b}, \frac{S}{3c} \right) = \left( \frac{bc}{6R}, \frac{ca}{6R}, \frac{ab}{6R} \right).$

3. A körülírt kör középpontja:  $O = (R \cos A, R \cos B, R \cos C).$

4. A magasságpont (ortocentrum):

$$H = (2R \cos B \cos C, 2R \cos C \cos A, 2R \cos A \cos B).$$

5. A kilencpontos kör középpontja:

$$\omega = \left( \frac{R}{2} \cos(B-C), \frac{R}{2} \cos(C-A), \frac{R}{2} \cos(A-B) \right).$$

6. A beírt kör középpontja:  $I = \left( \frac{\sigma}{s}, \frac{\sigma}{s}, \frac{\sigma}{s} \right) = (r, r, r).$

## 1.6. Trilineáris koordináták

Ha az  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  számhármast az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó valódi trilineáris koordinátái, akkor a  $(k\alpha_0 : k\beta_0 : k\gamma_0)$  számhármast, ahol  $k \in \mathbb{R}^*$ , az  $M$  pont általános trilineáris koordinátáinak vagy röviden *trilineáris koordinátáinak* fogjuk nevezni. Ebben az esetben a sík bármely  $M$  pontjához végtelen sok rendezett  $(\alpha : \beta : \gamma)$  számhármast tartozik. Ezt a továbbiakban a következőképpen fogjuk jelölni:  $M = (\alpha : \beta : \gamma)$ . Tehát, ha az  $(\alpha : \beta : \gamma)$  és  $(\alpha' : \beta' : \gamma')$  számhármast ugyanannak az  $M$  pontnak a trilineáris koordinátái, akkor létezik egy  $k \neq 0$  állandó úgy, hogy  $\alpha = k\alpha'$ ,  $\beta = k\beta'$ ,  $\gamma = k\gamma'$ . Ennek kifejezésére az  $M = (\alpha : \beta : \gamma) = (\alpha' : \beta' : \gamma')$  jelölést használjuk. Hangsúlyozzuk, hogy ebben a jelölésben a két számhármast közötti egyenlőség csak valódi trilineáris koordinátákra jelent komponensenkénti egyenlőséget is, különben pedig nem. Ez utóbbi esetben az egyenlőség csupán azt fejezi ki, hogy a két számhármast ugyanazt a pontot reprezentálja.

A valódi trilineáris koordinátákat a trilineáris koordinátáktól jelölésben a következőképpen fogjuk megkülönböztetni:

$(\alpha, \beta, \gamma)$  valódi trilineáris koordináták (a koordináták vesszővel vannak elválasztva),

$(\alpha : \beta : \gamma)$  trilineáris koordináták (a koordináták kettősponttal vannak elválasztva).

Ismerve az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó valódi trilineáris koordinátáit, ezekből az  $M$  pont általános trilineáris koordinátáit úgy kapjuk, hogy az előbbieket nem nulla állandókkal szorozzuk (osztjuk). Felmerül viszont a kérdés, hogyan kapjuk az általános trilineáris koordinátáinkból a valódiakat? Erre a kérdésre az alábbiakban válaszolunk.

*Ha  $(\alpha : \beta : \gamma)$  az  $M$  pont általános trilineáris koordinátái, akkor az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó valódi trilineáris koordinátái*

$$\left( \frac{S\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \frac{S\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \right).$$

Valóban, az  $M$  pont valódi trilineáris koordinátáit az általános  $(\alpha : \beta : \gamma)$  trilineáris koordinátáinkból úgy kapjuk, hogy ezeket valamely nem nulla  $k$  állandóval szorozzuk. Tehát az  $M$  pont valódi trilineáris koordinátái  $(k\alpha, k\beta, k\gamma)$  alakúak, amelyekre  $ak\alpha + bk\beta + ck\gamma = S$ .

$$\text{Innen } k = \frac{S}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

Most megadjuk néhány pont trilineáris koordinátáit:

1. A csúcspontok:  $A = (1:0:0)$ ,  $B = (0:1:0)$ ,  $C = (0:0:1)$ .

2. A súlypont:  $G = \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right) = (bc : ca : ab) = (\csc A : \csc B : \csc C)$ .

3. A körülírt kör középpontja:  $O = (\cos A : \cos B : \cos C) = (aS_A : bS_B : cS_C)$ .

4. A magasságpont (ortocentrum):

$$H = (\cos B \cos C : \cos C \cos A : \cos A \cos B) = \left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}\right) =$$

$$= (\sec A : \sec B : \sec C) = \left(\frac{1}{aS_A} : \frac{1}{bS_B} : \frac{1}{cS_C}\right).$$

5. A kilencpontos kör középpontja:

$$\omega = (\cos(B-C) : \cos(C-A) : \cos(A-B)).$$

6. A beírt kör középpontja:  $I = (1:1:1)$ .

## 1.7. Baricentrikus koordináták

A baricentrikus koordinátákat August Ferdinand Möbius (1790-1868) vezette be 1827-ben megjelent *Der barycentrische Calcul (A baricentrikus számítás)* című művében. E koordináták szorosan kapcsolódnak a súlyozott pontrendszer fogalmához.

Ha egy  $M$  ponthoz hozzárendelünk egy  $m$  valós számot, akkor  $M$ -et  $m$  együtthatójú *súlyozott pontnak* nevezzük és  $(M, m)$ -mel jelöljük. Az  $m$  jelenthet például tömeget, elektromos töltést, az  $M$  pontban ható erő nagyságát stb., ezért negatív súlyokat is megengedünk.

Tekintsük az euklideszi tér  $(M_1, m_1), \dots, (M_k, m_k)$  súlyozott pontjaiból álló pontrendszerét. Azt a  $G$  pontot, amelyre

$$m_1 \overline{GM}_1 + \dots + m_k \overline{GM}_k = \vec{0}, \quad (1.3)$$

e pontrendszer *baricentrumának* nevezzük. Ha a térben választunk egy  $G$ -től különböző  $O$  kezdőpontot, akkor a  $G$  pont  $\overline{OG}$  helyvektora kifejezhető az  $M_i$  pontok  $\overline{OM}_i$  helyvektorainak segítségével. Valóban, mivel  $\overline{GM}_i = \overline{OM}_i - \overline{OG}$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , ezért

$$(m_1 + \dots + m_k) \overline{OG} = m_1 \overline{OM}_1 + \dots + m_k \overline{OM}_k. \quad (1.4)$$

Innen látható, hogy a  $G$  pont csak akkor van egyértelműen meghatározva, ha  $m_1 + \dots + m_k \neq 0$ , azaz ha a pontok súlyösszege nem egyenlő nullával. Mivel ekkor

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM}_1 + \dots + m_k \overrightarrow{OM}_k}{m_1 + \dots + m_k}, \quad (1.5)$$

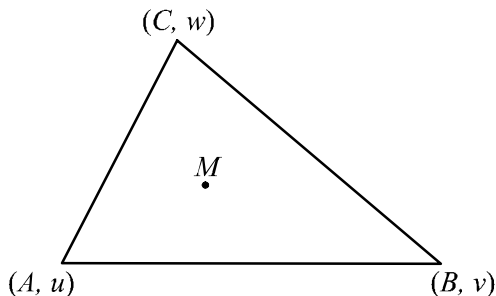
azt mondhatjuk, hogy egy súlyozott pontrendszer baricentrumának helyvektora e pontok helyvektorainak súlyozott középarányosa. Ha a pontrendszer  $M_i$  pontjai egy egyenesen (síkon) helyezkednek el és az  $O$  kezdőpont szintén ezen az egyenesen (síkon) van, akkor az  $\overrightarrow{OG}$  előbbi kifejezése alapján a  $G$  baricentrum is az egyenesen (síkon) lesz. Ha  $c \neq 0$ , akkor  $m_1 \overrightarrow{GM}_1 + \dots + m_k \overrightarrow{GM}_k = \vec{0} \Leftrightarrow c \cdot m_1 \overrightarrow{GM}_1 + \dots + c \cdot m_k \overrightarrow{GM}_k = \vec{0}$ , ezért egy pontrendszer baricentruma változatlan marad, ha a súlyokat ugyanazzal a nem nulla állandóval szorozzuk.

Ha az  $M_i$  pontok súlyai egyenlők, a pontrendszert *homogénnek*, ennek baricentrumát pedig *izobaricentrumnak* fogjuk nevezni. Homogén pontrendszerekre

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OM}_1 + \dots + \overrightarrow{OM}_k}{k}, \quad (1.6)$$

azaz az izobaricentrum helyvektora e pontok helyvektorainak számtani középarányosa.

Az  $ABC$  háromszög  $A, B, C$  csúcsaiba helyezzük el rendre az  $u, v, w$  súlyokat. Ha  $u + v + w \neq 0$ , akkor az  $(A, u), (B, v), (C, w)$  pontrendszer súlypontja egy, az  $ABC$  háromszög síkjában elhelyezkedő,  $M$  pont lesz. Az  $(u : v : w)$  számhármast az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó *általános baricentrikus koordinátáinak* vagy röviden *baricentrikus koordinátáinak* nevezzük (1.6. ábra). Ezt a következőképpen fogjuk jelölni:  $M = (u : v : w)$ .



1.6. ábra

Ha az  $u, v, w$  súlyokat a velük arányos  $ku, kv, kw$  ( $k \neq 0$ ) súlyokkal helyettesítjük, akkor e rendszer súlypontja nem változik meg. Ezért az  $M$  ponthoz végtelen sok rendezett  $(ku : kv : kw)$  számhármass rendelhető. Tehát, ha az  $(u : v : w)$  és  $(u' : v' : w')$  számhármassok ugyanannak az  $M$  pontnak a baricentrikus koordinátái, akkor léteznek egy  $k \neq 0$  állandó úgy, hogy  $u = ku', v = kv', w = kw'$ . Ennek kifejezésére az  $M = (u : v : w) = (u' : v' : w')$  jelölést használjuk. Ebben a jelölésben a két számhármass közötti egyenlőség nem komponensenkénti egyenlőséget jelent, csupán azt fejezi ki, hogy a két számhármass ugyanazt a pontot reprezentálja.

Az  $u + v + w \neq 0$  feltétel mellett, az  $u, v, w$  súlyok változtatásával elérhető, hogy az  $M$  pont leírja az egész síkot.

A 2. fejezetben bizonyítani fogjuk hogy, ha  $(\alpha : \beta : \gamma)$  az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó trilineáris koordinátái,  $(u : v : w)$  pedig az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó baricentrikus koordinátái, akkor  $u = a\alpha, v = b\beta, w = c\gamma$ .

Ebből látható, hogy az  $M$  pont baricentrikus koordinátáinak előjele megegyezik ugyanezen pont trilineáris koordinátáinak előjével.

A alábbiakban megadjuk néhány pont baricentrikus koordinátáit:

1. A csúcspontok:  $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$ .

2. A súlypont:  $G = (1 : 1 : 1)$ .

3. A körülírt kör középpontja:

$$\begin{aligned} O &= (a \cos A : b \cos B : c \cos C) = (a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C) = \\ &= (S_A (S_B + S_C) : S_B (S_C + S_A) : S_C (S_A + S_B)). \end{aligned}$$

4. A magasságpont (ortocentrum):

$$\begin{aligned} H &= (a \cos B \cos C : b \cos C \cos A : c \cos A \cos B) = \left( \frac{a}{\cos A} : \frac{b}{\cos B} : \frac{c}{\cos C} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C} \right) = (S_{BC} : S_{CA} : S_{AB}). \end{aligned}$$

5. A kilencpontos kör középpontja:

$$\omega = (a \cos(B - C) : b \cos(C - A) : c \cos(A - B)).$$

6. A beírt kör középpontja:  $I = (a : b : c)$ .

A háromszög centrális pontjainak trilineáris és baricentrikus koordinátái megtalálhatók [9]-ben.



## 1.8. Normált baricentrikus koordináták

Normálással egyértelmű baricentrikus koordináták vezethetők be. Ha  $(u : v : w)$  az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó baricentrikus koordinátái,

akkor az  $u_0 = \frac{u}{u+v+w}$ ,  $v_0 = \frac{v}{u+v+w}$ ,  $w_0 = \frac{w}{u+v+w}$  valós számokat az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó *normált baricentrikus koordinátáinak* nevezzük. Ezt a következőképpen fogjuk jelölni:  $M = (u_0, v_0, w_0)$ .

A háromszög síkjában elhelyezkedő bármely  $M$  pontra, amelynek normált baricentrikus koordinátái  $(u_0, v_0, w_0)$ , fennáll az alábbi összefüggés:

$$u_0 + v_0 + w_0 = 1. \quad (1.7)$$

A normált baricentrikus koordinátákat a baricentrikus koordinátáktól jelölésben a következőképpen fogjuk megkülönböztetni:

$(u, v, w)$  normált baricentrikus koordináták (a koordináták vesszővel vannak elválasztva),

$(v : v : w)$  baricentrikus koordináták (a koordináták kettősponttal vannak elválasztva).

Normált baricentrikus koordinátákra az  $M = (u, v, w) = (u', v', w')$  egyenlőségek egyben komponensenkénti egyenlőségeket is jelentenek, azaz  $u = u'$ ,  $v = v'$ ,  $w = w'$ .

A 2. fejezetben bizonyítjuk, hogy ha az  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  ill.  $(u_0, v_0, w_0)$  számhármás az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó valódi trilineáris ill. normált baricentrikus koordinátái, akkor  $u_0 = \frac{a\alpha_0}{S}$ ,  $v_0 = \frac{b\beta_0}{S}$ ,  $w_0 = \frac{c\gamma_0}{S}$ .

A alábbiakban megadjuk néhány pont normált baricentrikus koordinátáit:

1. A csúcspontok:  $A = (1:0:0)$ ,  $B = (0:1:0)$ ,  $C = (0:0:1)$ .

2. A súlypont:  $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

3. A körülírt kör középpontja:

$$O = \left(\frac{aR}{S} \cos A, \frac{bR}{S} \cos B, \frac{cR}{S} \cos C\right) = \left(\frac{a^2 S_A}{2S^2}, \frac{b^2 S_B}{2S^2}, \frac{c^2 S_C}{2S^2}\right).$$

4. A magasságpont (ortocentrum):

$$H = \left(\frac{aR}{\sigma} \cos B \cos C, \frac{bR}{\sigma} \cos C \cos A, \frac{cR}{\sigma} \cos A \cos B\right) = \left(\frac{S_{BC}}{S^2}, \frac{S_{CA}}{S^2}, \frac{S_{AB}}{S^2}\right).$$

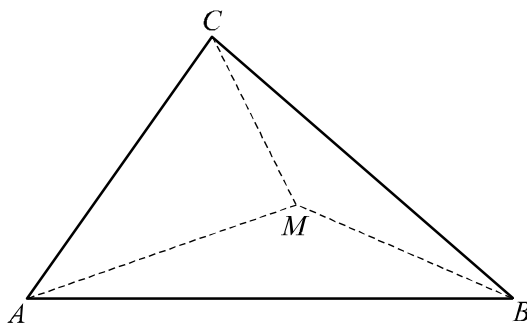
5. A kilencpontos kör középpontja:

$$\omega = \left( \frac{aR}{2S} \cos(B-C), \frac{bR}{2S} \cos(C-A), \frac{cR}{2S} \cos(A-B) \right).$$

6. A beírt kör középpontja:  $I = \left( \frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s} \right).$

### 1.9. Areális vagy területi koordináták

Az  $ABC$  háromszöget nevezzük *pozitív* (*negatív*) *irányításúnak*, ha az óramutató járásával ellentétes (megegyező) körüljárású. Az  $ABC$  háromszög síkjában tekintsünk egy tetszőleges  $M$  pontot (1.7. ábra).



1.7. ábra

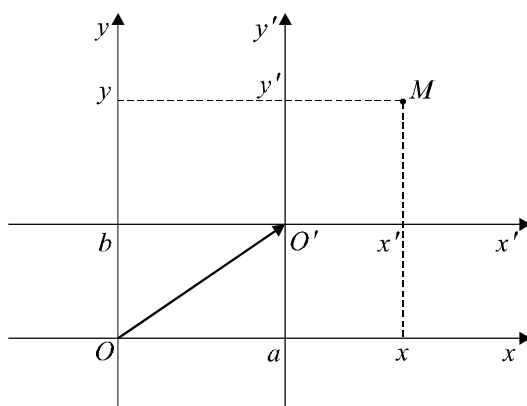
Az  $MBC$ ,  $MCA$ ,  $MAB$  háromszögek területeinek euklideszi mértékét jelölje  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$ ,  $\sigma_c$ . Ezeket a mérőszámokat pozitív vagy negatív előjellel vesszük, attól függően, hogy ezen háromszögek irányítása megegyező-e vagy ellentétes az  $ABC$  háromszög pozitív irányításával. A  $\left( \frac{\sigma_a}{\sigma}, \frac{\sigma_b}{\sigma}, \frac{\sigma_c}{\sigma} \right)$  számhármast az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó *areális* vagy *területi koordinátáinak* nevezzük. Mivel  $\sigma_a = \frac{a\alpha_0}{2}$ ,  $\sigma_b = \frac{b\beta_0}{2}$ ,  $\sigma_c = \frac{c\gamma_0}{2}$ , ezért  $u_0 = \frac{a\alpha_0}{S} = \frac{\sigma_a}{\sigma}$ ,  $v_0 = \frac{b\beta_0}{S} = \frac{\sigma_b}{\sigma}$ ,  $w_0 = \frac{c\gamma_0}{S} = \frac{\sigma_c}{\sigma}$ . Tehát az  $M$  pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó normált baricentrikus koordinátái megegyeznek ugyanezen pont  $ABC$  háromszögre vonatkozó areális vagy területi koordinátáival.

## 2. fejezet Koordinátatranszformációk

Az analitikus geometriában egy-egy probléma tárgyalásakor olyan koordinátarendszert igyekszünk választani, amely a számítások szempontjából a legelőnyösebb. Emiatt szükséges, hogy az alakzatok egyenletét egyik koordinátarendszerből át lehessen írni egy másik koordinátarendszerbe. Affin koordinátarendszerek esetében elegendő ismerni a bázisvektorok közötti összefüggéseket, azaz az egyik bázis vektorainak kifejezését egy másik bázis vektorainak segítségével (bővebben lásd 0.5. b) alpontot).

A matematikai szakirodalomban a *koordinátatranszformáció* elnevezésnek kétféle jelentése van. Az egyik az, hogy ugyanazokat a pontokat két koordinátarendszerben írjuk le (passzív szemlélet), ami feltételezi a két koordinátarendszer egymáshoz viszonyított helyzetének ismeretét. Ennek a helyzetnek a leírását az ún. *koordináta-transzformációs képletek* segítségével végezhetjük el.

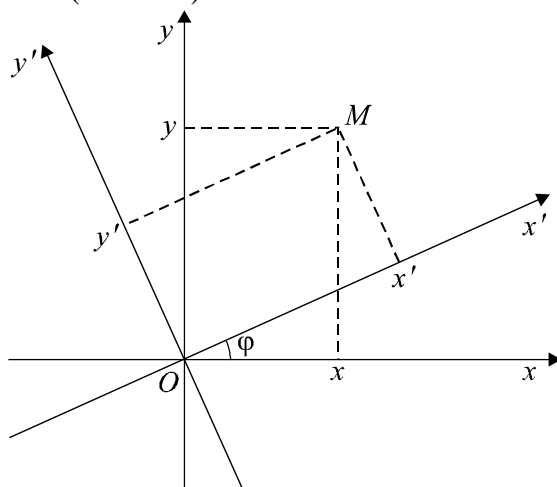
Például tekintsük a síknak azt a két  $xOy$  és  $x'O'y'$  derékszögű koordinátarendszerét (2.1. ábra), amelyekre  $Ox \parallel O'x'$ ,  $Oy \parallel O'y'$  és a megfelelő tengelyek irányítása megegyezik ( $O \neq O'$ ).



2.1. ábra

Az  $O'$  pontnak az  $xOy$  rendszerbeli koordinátái legyenek  $(a, b)$ , a sík tetszőleges  $M$  pontjának  $xOy$  illetve  $x'O'y'$  rendszerbeli koordinátái pedig  $(x, y)$  illetve  $(x', y')$ . Mivel  $x' = x - a$  és  $y' = y - b$ , ugyanazon  $M$  pont analitikus leírása a két koordináta-rendszerben a következő lesz:  $M = (x, y)$  és  $M = (x - a, y - b)$ . Azt is mondhatjuk, hogy az  $xOy$  rendszert „eltoltuk” önmagával párhuzamosan az  $(a, b)$  elmozdulásvektorral. Ezért ezt a műveletet síkbeli *párhuzamos eltolásnak* vagy *transzlációnak* szoktuk nevezni.

Vagy vegyük az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszernek az origó körüli  $\varphi$  szöggel történő *forogatását (rotációját)* az  $x'O'y'$  derékszögű koordináta-rendszerbe (2.2. ábra).



2.2. ábra

Ez a művelet az  $x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  és az  $y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$  transzformációs egyenletekkel jellemezhető, ahol  $\varphi$  az  $Ox$  és  $Ox'$  tengelyek hajlásszöge. Tehát ugyanazon  $M$  pont analitikus leírása a két koordináta-rendszerben a következő lesz:

$$M = (x, y) \text{ és } M = (x \cos \varphi + y \sin \varphi, -x \sin \varphi + y \cos \varphi).$$

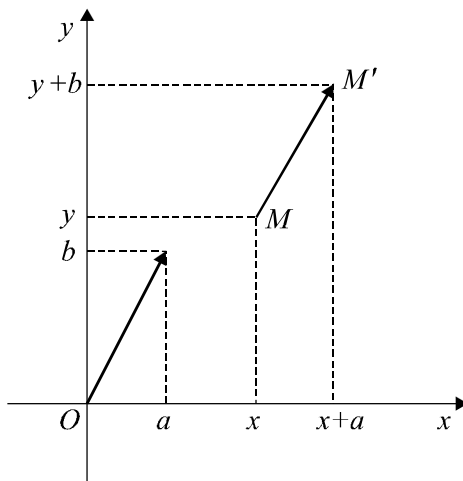
A passzív szemléletű transzformációknál a koordináta-rendszereket változtatjuk és a különböző koordináta-rendszerekben írjuk le ugyanazokat a pontokat, amelyeknek a koordinátái általában megváltoznak.

A koordináta-transzformáció másik jelentése éppen ennek az ellenkezője: az  $M$  pont  $(x, y)$  koordinátáit transzformáljuk az

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

képletek szerint és az így kapott  $(x', y')$  számpárt egy másik  $M'$  pont koordinátáinak tekintjük. Az új  $(x', y')$  koordinátákat ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázolva, az  $M$  ponthoz az új koordinátákkal meghatározott  $M'$  pontot képként rendeljük hozzá (aktív szemlélet).

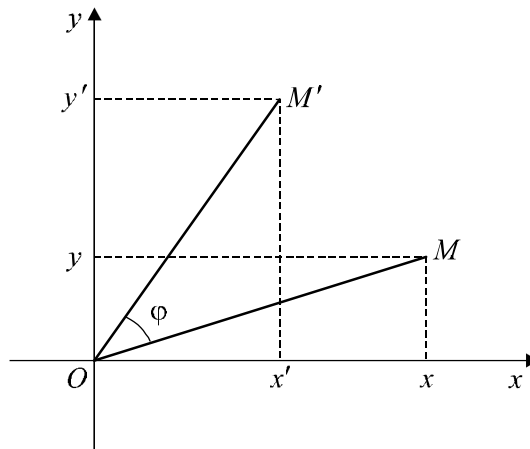
Például az  $xOy$  derékszögű koordinátarendszerben az  $x' = x + a$  és  $y' = y + b$  egyenletekkel adott koordináta-transzformáció aktív szemléletben az  $M = (x, y)$  pontnak megfelelteti az  $M' = (x + a, y + b)$  pontot, ahol  $(a, b)$  egy adott  $\vec{v}$  vektor komponensei (2.3. ábra).



2.3. ábra

Itt a sík egy olyan önmagára való bijektív leképezéséről van szó, amely az  $M = (x, y)$  pontnak úgy felelteti meg az  $M' = (x + a, y + b)$  pontot, hogy  $\overline{MM'} = \vec{v}$ . Ezt a transzformációt szintén *párhuzamos eltolásnak* vagy *transzlációnak* fogjuk nevezni. Lényeges, hogy most az  $xOy$  derékszögű koordinátarendszer rögzített (fix) marad és a sík pontjait toljuk el a  $\vec{v}$  elmozdulásvektorral.

Vagy az  $xOy$  derékszögű koordinátarendszerben az  $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$  és  $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$  egyenletekkel adott koordináta-transzformáció aktív szemléletben az  $M = (x, y)$  pontnak megfelelteti az  $M' = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$  pontot, ahol  $\varphi$  az  $OM$  és  $OM'$  félegyenesek hajlásszöge (2.4. ábra).



2.4. ábra

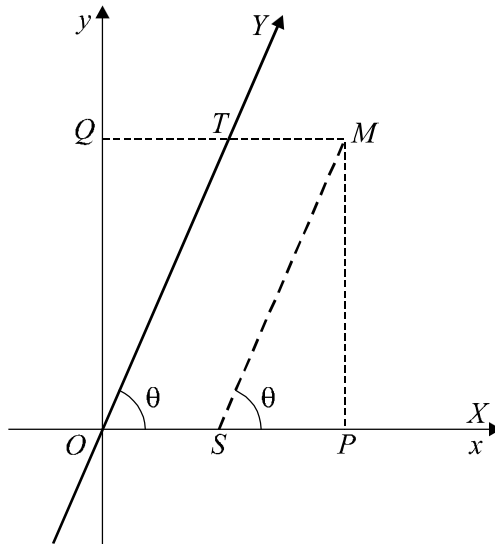
Itt szintén a sík egy önmagára való bijektív leképezéséről van szó. Az  $xOy$  derékszögű koordinátarendszer most is rögzített (fix) marad és a sík pontjait elforgatjuk az  $O$  pont körül  $\varphi$  szöggel úgy, hogy  $OM = OM'$ . Ezt a transzformációt szintén *forgatásnak* vagy *rotációnak* fogjuk nevezni.

Ebben a fejezetben a síkbeli pontok passzív szemléletű leírásával foglalkozom az 1. fejezetben bevezetett, egymáshoz viszonyítva sajátos helyzetű koordinátarendszerekben. Ezen transzformációs képletek ismeretében a síkbeli alakzatok tulajdonságait kifejező összefüggéseket, az őket jellemző egyenleteket, az alakzatok kölcsönös viszonyait kifejező algebrai feltételeket stb. át lehet írni különböző koordináta-fajtákra.

A továbbiakban feltesszük, hogy a koordináta- illetve vonatkoztatási rendszerek egységszakaszainak a hossza ugyanaz, azaz, hogy a számtengelyek normáltak. Úgyisint megállapodunk abban, hogy amikor a következő paragrafusokban koordináták közötti összefüggésekről beszélünk, akkor *ugyanannak a pontnak* különböző típusú koordinátái közötti összefüggésekre gondolunk.

## 2.1. A derékszögű és kontravariáns koordináták közötti összefüggések

A síkban vegyük fel az  $xOy$  derékszögű és az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszert úgy, hogy abszcisszatengelyeik egybeessenek (2.5. ábra). Az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszer tengelyei által alkotott szöget jelölje  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ).



2.5. ábra

Az  $xOy$  rendszer bázisvektorai legyenek  $(\vec{i}, \vec{j})$ , az  $XOY$  rendszeré pedig  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Mivel  $\vec{e}_1 = \vec{i}$  és  $\vec{e}_2 = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$ , az áttérési mátrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix}$ . Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kontravariáns koordinátái pedig  $(X, Y)$ . Következésképpen  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ . Tehát a derékszögű koordinátákról a kontravariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = X + Y \cos \theta, \quad (2.1) \quad y = Y \sin \theta. \quad (2.2)$$

Mivel  $\det A = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{vmatrix} = \sin \theta \neq 0$ , az  $A$  mátrix inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg} \theta \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix}, \text{ azaz } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg} \theta \\ 0 & \frac{1}{\sin \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tehát a fordított irányú áttérés az

$$X = x - y \operatorname{ctg} \theta, \quad (2.3) \quad Y = \frac{y}{\sin \theta} \quad (2.4)$$

képletekkel lehetséges.

## 2.2. A kontravariáns és kovariáns koordináták közötti összefüggések

Az 1.5. alfejezetben már kifejeztük a kovariáns koordinátákat a kontravariáns koordinátákkal:  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ . Mivel az

$S = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{pmatrix}$  mátrix determinánsa  $\det S = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \neq 0$ , az  $S$ -

nek van inverze:  $S^{-1} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 1 \end{pmatrix}$ . Tehát

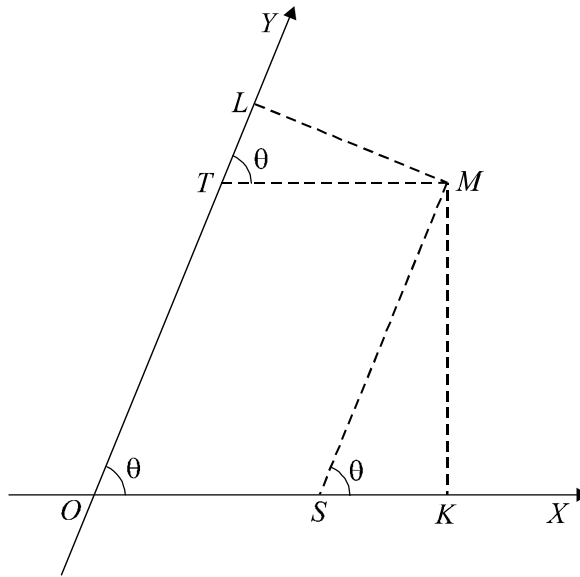
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Ugyanerre az eredményre geometriai úton is eljuthatunk. A síkban vegyük fel az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszert (2.6. ábra). Az  $M$  pont kontravariáns koordinátái legyenek  $(X, Y)$ , kovariáns koordinátái pedig  $(p, q)$ . Az  $MKS$  derékszögű háromszögben:

$$\cos \theta = \frac{KS}{MS} = \frac{p - X}{Y} \Rightarrow p = X + Y \cos \theta.$$

Az  $MLT$  derékszögű háromszögben:  $\cos \theta = \frac{LT}{MT} = \frac{q - Y}{X} \Rightarrow q = X \cos \theta + Y$ .





2.6. ábra

Tehát a kovariáns koordinátákról a kontravariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$p = X + Y \cos \theta, \quad (2.5) \qquad q = X \cos \theta + Y. \quad (2.6)$$

A fordított irányú áttéréshez pedig megoldjuk az  $\begin{cases} X + Y \cos \theta = p \\ X \cos \theta + Y = q \end{cases}$

egyenletrendszert az  $(X, Y)$  ismeretlenekre:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta \\ \cos \theta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} p & \cos \theta \\ q & 1 \end{vmatrix} = p - q \cos \theta,$$

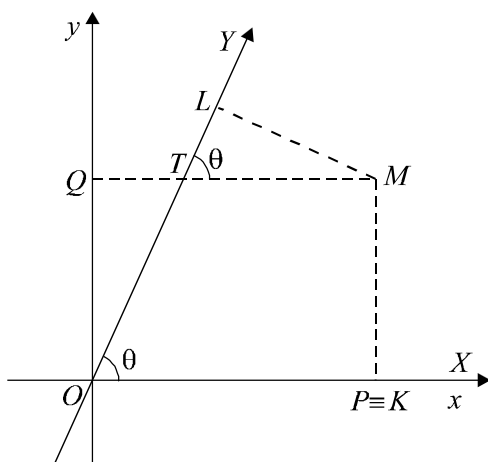
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & p \\ \cos \theta & q \end{vmatrix} = q - p \cos \theta. \text{ Tehát}$$

$$X = \frac{1}{\sin^2 \theta} (p - q \cos \theta), \quad (2.7) \quad Y = \frac{1}{\sin^2 \theta} (-p \cos \theta + q). \quad (2.8)$$

### 2.3. A derékszögű és kovariáns koordináták közötti összefüggések

A síkban vegyük fel az  $xOy$  derékszögű és az  $XOY$  ferdeszögű koordinátarendszert úgy, hogy abszcissa-tengelyeik egybeessenek (2.7.

ábra). Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kovariáns koordinátái pedig  $(p, q)$ .



2.7. ábra

Derékszögű koordinátákról kovariáns koordinátákra az (2.1), (2.2) valamint a (2.7), (2.8) képletek segítségével térhetünk át:

$$x = X + Y \cos \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} (p - q \cos \theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (-p \cos \theta + q) \cos \theta = p,$$

$$y = Y \sin \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} (-p \cos \theta + q) \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} (-p \cos \theta + q).$$

Tehát a derékszögű koordinátákról a kovariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = p, \quad (2.9) \qquad y = \frac{1}{\sin \theta} (-p \cos \theta + q). \quad (2.10)$$

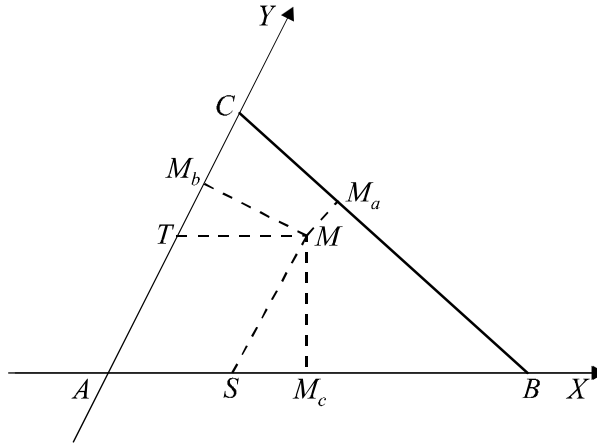
A fordított irányú áttérés pedig a

$$p = x, \quad (2.11) \qquad q = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.12)$$

képletekkel lehetséges.

## 2.4. A valódi trilineáris és kontravariáns koordináták közötti összefüggések

Kapcsoljunk az  $ABC$  háromszöghöz egy  $XAY$  ferdeszögű koordinátarendszert úgy, hogy az  $AB$  egyenes essen egybe az  $AX$ , az  $AC$  egyenes pedig az  $AY$  tengellyel (2.8. ábra). Az  $M$  pont kontravariáns koordinátái legyenek  $(X, Y)$ , valódi trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ .



2.8. ábra

Az  $MM_bT$  derékszögű háromszögben:  $\sin A = \frac{MM_b}{MT} = \frac{\beta_0}{X} \Rightarrow \beta_0 = X \sin A$ .

Az  $MM_cS$  derékszögű háromszögben:  $\sin A = \frac{MM_c}{MS} = \frac{\gamma_0}{Y} \Rightarrow \gamma_0 = Y \sin A$ .

Mivel  $a\alpha_0 + b\beta_0 + c\gamma_0 = S$ , ezért

$$\alpha_0 = \frac{1}{a}(S - b\beta_0 - c\gamma_0) = \frac{\sin A}{a}(bc - bX - cY).$$

Tehát a valódi trilineáris koordinátákról a kontravariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$\alpha_0 = \frac{\sin A}{a}(bc - bX - cY), \quad (2.13)$$

$$\beta_0 = X \sin A, \quad (2.14)$$

$$\gamma_0 = Y \sin A. \quad (2.15)$$

A fordított irányú áttérés pedig az  $X = \frac{\beta_0}{\sin A}$ , (2.16)  $Y = \frac{\gamma_0}{\sin A}$  (2.17)

képletekkel lehetséges.

## 2.5. A valódi trilineáris és kovariáns koordináták közötti összefüggések

Az  $M$  pont kovariáns koordinátái legyenek  $(p, q)$ , valódi trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$  (2.8. ábra). Valódi trilineáris koordinátákról

kovariáns koordinátákra a (2.13), (2.14), (2.15) valamint a (2.7), (2.8) képletek segítségével térhetünk át:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{\sin A}{a}(bc - bX - cY) = \frac{\sin A}{a} \left[ bc - \frac{b}{\sin^2 A}(p - q \cos A) - \frac{c}{\sin^2 A}(-p \cos A + q) \right] = \\ &= \frac{1}{a \sin A} (bc \sin^2 A - bp + bq \cos A + cp \cos A - cq) = \\ &= \frac{1}{a \sin A} [2\sigma \sin A - p(b - c \cos A) - q(c - b \cos A)] = \\ &= \frac{1}{a \sin A} [2\sigma \sin A - a(p \cos C + q \cos B)] = \frac{S}{a} - \frac{1}{\sin A} (p \cos C + q \cos B), \\ \beta_0 &= X \sin A = \frac{1}{\sin^2 A} (p - q \cos A) \sin A = \frac{1}{\sin A} (p - q \cos A), \\ \gamma_0 &= Y \sin A = \frac{1}{\sin^2 A} (-p \cos A + q) \sin A = \frac{1}{\sin A} (-p \cos A + q).\end{aligned}$$

Tehát a valódi trilineáris koordinátákról a kovariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$\alpha_0 = \frac{S}{a} - \frac{1}{\sin A} (p \cos C + q \cos B), \quad (2.18)$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\sin A} (p - q \cos A), \quad (2.19)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sin A} (-p \cos A + q). \quad (2.20)$$

A fordított irányú áttéréshez pedig megoldjuk a  $\begin{cases} p - q \cos A = \beta_0 \sin A \\ -p \cos A + q = \gamma_0 \sin A \end{cases}$

egyenletrendszert a  $(p, q)$  ismeretlenekre:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\cos A \\ -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 A = \sin^2 A \neq 0$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} \beta_0 \sin A & -\cos A \\ \gamma_0 \sin A & 1 \end{vmatrix} = (\beta_0 + \gamma_0 \cos A) \sin A,$$

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_0 \sin A \\ -\cos A & \gamma_0 \sin A \end{vmatrix} = (\beta_0 \cos A + \gamma_0) \sin A.$$

$$\text{Tehát } p = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 + \gamma_0 \cos A), \quad (2.21) \quad q = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 \cos A + \gamma_0). \quad (2.22)$$

## **2.6. A trilineáris és kontravariáns koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont kontravariáns koordinátái legyenek  $(X, Y)$ , trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Mivel  $\alpha = k\alpha_0$ ,  $\beta = k\beta_0$ ,  $\gamma = k\gamma_0$  ( $k \in \mathbb{R}^*$ ), ezért a (2.13), (2.14) és (2.15) képletek alapján a trilineáris koordinátákról a kontravariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$\alpha = \frac{1}{a}(bc - bX - cY), \quad (2.23) \quad \beta = X, \quad (2.24) \quad \gamma = Y. \quad (2.25)$$

A fordított irányú áttéréshez a trilineáris koordinátákat először átalakítjuk valódi trilineáris koordinátákká, majd alkalmazzuk a (2.16) és (2.17) képleteket:

$$X = \frac{\beta_0}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} \frac{S\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{2R}{a} \frac{abc}{2R} \frac{\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{bc\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

$$Y = \frac{\gamma_0}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{2R}{a} \frac{abc}{2R} \frac{\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{bc\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

Tehát kontravariáns koordinátákról trilineáris koordinátákra az

$$X = \frac{bc\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad (2.26) \quad Y = \frac{bc\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (2.27)$$

képletek alapján térhetünk át.

## **2.7. A trilineáris és kovariáns koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont kovariáns koordinátái legyenek  $(p, q)$ , trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Mivel  $\alpha = k\alpha_0$ ,  $\beta = k\beta_0$ ,  $\gamma = k\gamma_0$  ( $k \in \mathbb{R}^*$ ), ezért a (2.18), (2.19) és (2.20) képletek alapján a trilineáris koordinátákról a kovariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$\alpha = \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B, \quad (2.28)$$

$$\beta = p - q \cos A, \quad (2.29)$$

$$\gamma = -p \cos A + q. \quad (2.30)$$

A fordított irányú áttéréshez a trilineáris koordinátákat először átalakítjuk valódi trilineáris koordinátákká, majd alkalmazzuk a (2.21) és (2.22) képleteket:

$$p = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 + \gamma_0 \cos A) = \frac{S}{\sin A} \frac{\beta + \gamma \cos A}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{bc(\beta + \gamma \cos A)}{a\alpha + b\beta + c\gamma},$$

$$q = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 \cos A + \gamma_0) = \frac{S}{\sin A} \frac{\beta \cos A + \gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{bc(\beta \cos A + \gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

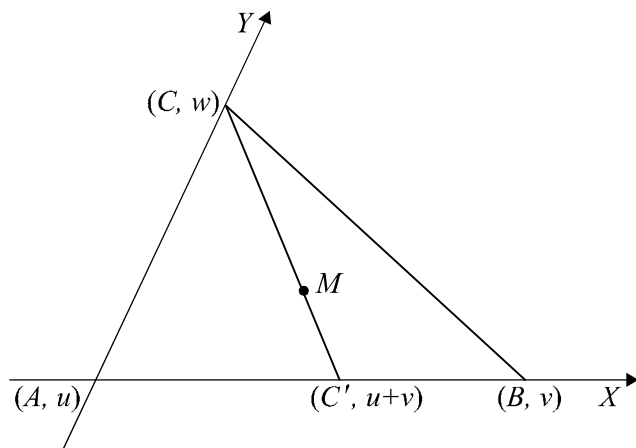
Tehát kovariáns koordinátákról trilineáris koordinátákra a

$$p = \frac{bc(\beta + \gamma \cos A)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad (2.31) \quad q = \frac{bc(\beta \cos A + \gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma} \quad (2.32)$$

képletek alapján térhetünk át.

## 2.8. A baricentrikus és kontravariáns koordináták közötti összefüggések

Kapcsoljunk az  $ABC$  háromszöghöz egy  $XAY$  ferdeszögű koordinátarendszert úgy, hogy az  $AB$  egyenes essen egybe az  $AX$ , az  $AC$  egyenes pedig az  $AY$  tengellyel (2.9. ábra). A továbbiakban feltesszük, hogy az  $XAY$  koordinátarendszer és az  $ABC$  vonatkoztatási háromszög ilyen összekapcsolása változatlan marad és a következő alfejezetek eredményei erre a helyzetre vonatkoznak. Az  $M$  pont kontravariáns koordinátái legyenek  $(X, Y)$ , baricentrikus koordinátái pedig  $(u, v, w)$ . Tételezzük fel, hogy az  $M$  pont nincs egyik oldalegyenesen sem.



2.9. ábra

Ha  $t = u + v + w \neq 0$ , akkor feltehetjük például, hogy  $u + v \neq 0$ . Legyen a  $C'(X', 0)$  pont az  $(A, u)$  és  $(B, v)$  pontrendszer súlypontja. Ekkor

$X' = \frac{cv}{u+v}$ , az  $M$  pont pedig akkor lesz a  $(C', u+v)$  és  $(C, w)$  pontrendszer

súlypontja, ha  $X = \frac{(u+v)X'}{t} = \frac{cv}{t}$  és  $Y = \frac{bw}{t}$ . E két egyenletet átrendezzük,

belőlük egy egyenletrendszert képezünk, majd a  $w$ -t paraméternek tekintve az egyenletrendszert megoldjuk az  $u$  és  $v$  ismeretlenekre vonatkozóan:

$$\begin{cases} tX = cv \\ tY = bw \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v+w)X = cv \\ (u+v+w)Y = bw \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Xu + (X-c)v = -wX \\ Yu + Yv = w(b-Y). \end{cases}$$

A Cramer-féle képletek alapján:  $\Delta = \begin{vmatrix} X & X-c \\ Y & Y \end{vmatrix} = (X - X + c)Y = cY \neq 0$ ,

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} -wX & X-c \\ w(b-Y) & Y \end{vmatrix} = w[-XY + (X-c)(Y-b)] = w(bc - bX - cY),$$

$$\Delta_v = \begin{vmatrix} X & -wX \\ Y & w(b-Y) \end{vmatrix} = wX(b - Y + Y) = bwX. \text{ Tehát}$$

$$u = bc - bX - cY, \quad (2.33) \quad v = bX, \quad (2.34) \quad w = cY. \quad (2.35)$$

Ezek az összefüggések érvényesek maradnak akkor is, ha az  $M$  pont az  $ABC$  háromszög valamelyik oldalegyenesén helyezkedik el.

A kontravariáns koordinátákról a baricentrikus koordinátákra való áttérésről a 2.9. alfejezetben lesz szó.

## **2.9. A normált baricentrikus és kontravariáns koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont normált baricentrikus koordinátáit úgy kapjuk, hogy a baricentrikus koordinátákat elosztjuk a

$$t = u + v + w = bc - bX - cY + bX + cY = bc \neq 0 \text{ mennyiséggel.}$$

Tehát:

$$u_0 = \frac{1}{bc}(bc - bX - cY), \quad (2.36) \quad v_0 = \frac{X}{c}, \quad (2.37) \quad w_0 = \frac{Y}{b}. \quad (2.38)$$

A fordított irányú áttérés pedig az  $X = cv_0$ , (2.39)  $Y = bw_0$  (2.40)

képletekkel lehetséges.

A kontravariáns koordinátákról a baricentrikus koordinátákra úgy térünk át, hogy először baricentrikus koordinátákról áttérünk normált baricentrikusokra, majd pedig alkalmazzuk a (2.39) és (2.40) képleteket:

$$X = \frac{cv}{u+v+w}, \quad (2.41) \quad Y = \frac{bw}{u+v+w}. \quad (2.42)$$

## 2.10. A baricentrikus és kovariáns koordináták közötti összefüggések

Az  $M$  pont kovariáns koordinátái legyenek  $(p, q)$ , baricentrikus koordinátái pedig  $(u, v, w)$  (2.9. ábra). A (2.5), (2.6) valamint a (2.41) és (2.42) képletek alapján

$$p = X + Y \cos A = \frac{cv}{u+v+w} + \frac{bw}{u+v+w} \cos A = \frac{cv + bw \cos A}{u+v+w},$$

$$q = X \cos A + Y = \frac{cv}{u+v+w} \cos A + \frac{bw}{u+v+w} = \frac{cv \cos A + bw}{u+v+w}.$$

Tehát kovariáns koordinátákról baricentrikus koordinátákra a

$$p = \frac{cv + bw \cos A}{u+v+w}, \quad (2.43) \quad q = \frac{cv \cos A + bw}{u+v+w} \quad (2.44)$$

képletek alapján térünk át. A fordított irányú áttéréshez alkalmazzuk a (2.33), (2.34), (2.35) valamint a (2.7) és (2.8) képleteket:

$$u = bc - bX - cY = bc - \frac{b}{\sin^2 A} (p - q \cos A) - \frac{c}{\sin^2 A} (-p \cos A + q) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} (bc \sin^2 A - bp + bq \cos A + cp \cos A - cq) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} \left[ 2\sigma \sin A - p(b - c \cos A) - q(c - b \cos A) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} \left[ 2\sigma \frac{a}{2R} - a(p \cos C + q \cos B) \right] = \frac{a}{\sin^2 A} \left( \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B \right),$$

$$v = bX = \frac{b}{\sin^2 A} (p - q \cos A), \quad w = cY = \frac{c}{\sin^2 A} (-p \cos A + q).$$

Tehát a baricentrikus koordinátákról a kovariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$u = a \left( \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B \right), \quad (2.45)$$

$$v = b(p - q \cos A), \quad (2.46)$$

$$w = c(-p \cos A + q). \quad (2.47)$$



## **2.11. A normált baricentrikus és kovariáns koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont kovariáns koordinátái legyenek  $(p, q)$ , normált baricentrikus koordinátái pedig  $(u_0, v_0, w_0)$  (2.9. ábra). A (2.5), (2.6) valamint a (2.39) és (2.40) képletek alapján

$$p = X + Y \cos A = cv_0 + bw_0 \cos A \quad \text{és} \quad q = X \cos A + Y = cv_0 \cos A + bw_0.$$

Tehát kovariáns koordinátákról normált baricentrikus koordinátákra a

$$p = cv_0 + bw_0 \cos A, \quad (2.48) \quad q = cv_0 \cos A + bw_0 \quad (2.49)$$

képletek alapján térünk át. A fordított irányú áttéréshez alkalmazzuk a (2.36), (2.37), (2.38) valamint a (2.7) és (2.8) képleteket:

$$u_0 = \frac{1}{bc}(bc - bX - cY) = \frac{a}{bc \sin^2 A} \left( \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B \right),$$

$$v_0 = \frac{X}{c} = \frac{1}{c \sin^2 A} (p - q \cos A), \quad w_0 = \frac{Y}{b} = \frac{1}{b \sin^2 A} (-p \cos A + q).$$

Tehát a normált baricentrikus koordinátákról a kovariáns koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$u_0 = \frac{R}{\sigma} \left( \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B \right), \quad (2.50)$$

$$v_0 = \frac{bR}{a\sigma} (p - q \cos A), \quad (2.51) \quad w_0 = \frac{cR}{a\sigma} (-p \cos A + q). \quad (2.52)$$

## **2.12. A normált baricentrikus és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont normált baricentrikus koordinátái legyenek  $(u_0, v_0, w_0)$ , valódi trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ . A (2.36), (2.37), (2.38) valamint a (2.16), (2.17) képletek alapján

$$u_0 = \frac{1}{bc}(bc - bX - cY) = \frac{1}{bc} \left( bc - b \frac{\beta_0}{\sin A} - c \frac{\gamma_0}{\sin A} \right) = \frac{1}{S} (S - b\beta_0 - c\gamma_0) = \frac{a\alpha_0}{S},$$

$$v_0 = \frac{X}{c} = \frac{\beta_0}{c \sin A} = \frac{b\beta_0}{bc \sin A} = \frac{b\beta_0}{S}, \quad w_0 = \frac{Y}{b} = \frac{\gamma_0}{b \sin A} = \frac{c\gamma_0}{bc \sin A} = \frac{c\gamma_0}{S}.$$

Tehát a normált baricentrikus koordinátákról a valódi trilineáris koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$u_0 = \frac{a\alpha_0}{S}, \quad (2.53) \quad v_0 = \frac{b\beta_0}{S}, \quad (2.54) \quad w_0 = \frac{c\gamma_0}{S}. \quad (2.55)$$

A fordított irányú áttérés pedig az

$$\alpha_0 = \frac{S}{a}u_0, \quad (2.56) \quad \beta_0 = \frac{S}{b}v_0, \quad (2.57) \quad \gamma_0 = \frac{S}{c}w_0, \quad (2.58)$$

képletek alapján lehetséges.

### 2.13. A baricentrikus és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések

Az  $M$  pont baricentrikus koordinátái legyenek  $(u:v:w)$ , valódi trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ . A (2.33), (2.34), (2.35) valamint a (2.16), (2.17) képletek alapján

$$u = bc - bX - cY = bc - b \frac{\beta_0}{\sin A} - c \frac{\gamma_0}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} (S - b\beta_0 - c\gamma_0) = \frac{a\alpha_0}{\sin A},$$

$$v = bX = \frac{b\beta_0}{\sin A}, \quad w = cY = \frac{c\gamma_0}{\sin A}.$$

Tehát a baricentrikus koordinátákról a valódi trilineáris koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

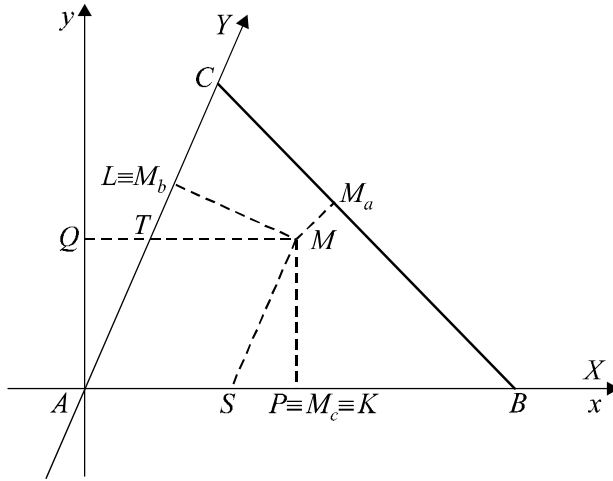
$$u = a\alpha_0, \quad (2.59) \quad v = b\beta_0, \quad (2.60) \quad w = c\gamma_0. \quad (2.61)$$

A fordított irányú áttéréshez először baricentrikus koordinátákról áttérünk normált baricentrikusokra, majd pedig alkalmazzuk a (2.56), (2.57) és (2.58) képleteket:

$$\alpha_0 = \frac{S}{a} \frac{u}{u+v+w}, \quad (2.62) \quad \beta_0 = \frac{S}{b} \frac{v}{u+v+w}, \quad (2.63) \quad \gamma_0 = \frac{S}{c} \frac{w}{u+v+w}. \quad (2.64)$$

### 2.14. A derékszögű és valódi trilineáris koordináták közötti összefüggések

Kapcsoljunk az  $ABC$  háromszöghöz egy  $xAy$  derékszögű koordinátarendszert is úgy, hogy az  $Ax$  tengely essen egybe az  $AX$  tengellyel (2.10. ábra). Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kontravariáns koordinátái  $(X, Y)$ , valódi trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ .



2.10. ábra

A (2.1), (2.2), valamint a (2.16), (2.17) képletek alapján

$$x = X + Y \cos A = \frac{\beta_0}{\sin A} + \frac{\gamma_0 \cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 + \gamma_0 \cos A) \text{ és}$$

$$y = Y \sin A = \gamma_0.$$

Tehát a derékszögű koordinátákról a valódi trilineáris koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = \frac{1}{\sin A} (\beta_0 + \gamma_0 \cos A), \quad (2.65) \quad y = \gamma_0. \quad (2.66)$$

A fordított irányú áttérés az alábbi képletek alapján lehetséges:

$$\gamma_0 = y,$$

$$\beta_0 = x \sin A - \gamma_0 \cos A = x \sin A - y \cos A,$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{a} (S - b\beta_0 - c\gamma_0) = \frac{1}{a} [S - b(x \sin A - y \cos A) - cy] = \\ &= \frac{1}{a} [S - bx \sin A - (c - b \cos A) y] = \frac{1}{a} (S - bx \sin A - ay \cos B) = \\ &= \frac{1}{a} \left( \frac{abc}{2R} - \frac{ab}{2R} x - ay \cos B \right) = \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B. \end{aligned}$$

Tehát valódi trilineáris koordinátákról derékszögű koordinátákra az

$$\alpha_0 = \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B, \quad (2.67) \quad \beta_0 = x \sin A - y \cos A, \quad (2.68)$$

$$\gamma_0 = y. \quad (2.69) \text{ képletek alapján térhetünk át.}$$

## **2.15. A derékszögű és trilineáris koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kontravariáns koordinátái  $(X, Y)$ , trilineáris koordinátái pedig  $(\alpha, \beta, \gamma)$  (2.10. ábra). A (2.1), (2.2), valamint a (2.26), (2.27) képletek alapján

$$x = X + Y \cos A = \frac{bc\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma} + \frac{bc\gamma \cos A}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{bc}{a\alpha + b\beta + c\gamma} (\beta + \gamma \cos A),$$

$$y = Y \sin A = \frac{bc\gamma \sin A}{a\alpha + b\beta + c\gamma} = \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

Tehát a derékszögű koordinátákról a trilineáris koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = \frac{bc(\beta + \gamma \cos A)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}, \quad (2.70) \quad y = \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}. \quad (2.71)$$

A fordított irányú áttérés a (2.67), (2.68) és (2.69) képletek alapján lehetséges.

## **2.16. A derékszögű és normált baricentrikus koordináták közötti összefüggések**

Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kontravariáns koordinátái  $(X, Y)$ , normált baricentrikus koordinátái pedig  $(u_0, v_0, w_0)$ . A (2.1), (2.2), valamint a (2.39), (2.40) képletek alapján

$$x = X + Y \cos A = cv_0 + bw_0 \cos A \quad \text{és} \quad y = Y \sin A = bw_0 \sin A.$$

Tehát a derékszögű koordinátákról a normált baricentrikus koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = cv_0 + bw_0 \cos A, \quad (2.72) \quad y = bw_0 \sin A. \quad (2.73)$$

A fordított irányú áttérés az alábbi képletek alapján lehetséges:

$$w_0 = \frac{y}{b \sin A} = \frac{c}{S} y,$$

$$v_0 = \frac{1}{c} (x - bw_0 \cos A) = \frac{1}{c} \left( x - \frac{y}{\sin A} \cos A \right) = \frac{b}{S} (x \sin A - y \cos A),$$

$$u_0 = 1 - v_0 - w_0 = 1 - \frac{b}{S} (x \sin A - y \cos A) - \frac{c}{S} y = \frac{a}{S} \left( \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B \right).$$

Tehát

$$u_0 = \frac{a}{S} \left( \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B \right), \quad (2.74)$$

$$v_0 = \frac{b}{S} (x \sin A - y \cos A), \quad (2.75) \quad w_0 = \frac{c}{S} y. \quad (2.76)$$

### 2.17. A derékszögű és baricentrikus koordináták közötti összefüggések

Az  $M$  pont derékszögű koordinátái legyenek  $(x, y)$ , kontravariáns koordinátái  $(X, Y)$ , baricentrikus koordinátái pedig  $(u, v, w)$ . Először baricentrikus koordinátákról áttérünk normált baricentrikusokra, majd alkalmazzuk a (2.1), (2.2), valamint a (2.41), (2.42) képleteket

$$x = X + Y \cos A = \frac{cv}{u+v+w} + \frac{bw \cos A}{u+v+w} = \frac{cv + bw \cos A}{u+v+w} \quad \text{és}$$

$$y = Y \sin A = \frac{bw \sin A}{u+v+w}.$$

Tehát a derékszögű koordinátákról a baricentrikus koordinátákra való transzformációs képletek a következők:

$$x = \frac{cv + bw \cos A}{u+v+w}, \quad (2.77) \quad y = \frac{bw \sin A}{u+v+w}. \quad (2.78)$$

A fordított irányú áttérés az alábbi képletek alapján lehetséges:

$$u = a \left( \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B \right), \quad (2.79)$$

$$v = b(x \sin A - y \cos A), \quad (2.80)$$

$$w = cy. \quad (2.81)$$

Ezeknek a transzformációs képleteknek a segítségével az  $M$  pont 1. fejezetben tárgyalt bármely fajta koordinátája megkapható valamelyik koordináta-típus ismeretében. Ajánlatos mindig a legkönnyebben meghatározható koordináta-fajtából kiindulni.

Affin koordinátarendszereknél az áttérés megvalósítható általánosan. A síkban válasszunk egy rögzített  $O$  pontot és egy  $(\vec{i}, \vec{j})$  bázist, azaz egy  $K = (O, \vec{i}, \vec{j})$  affin koordinátarendszert. Legyen  $K' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$  egy másik affin koordinátarendszer. Ha  $\overline{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ,  $\vec{i}' = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j}$ ,  $\vec{j}' = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j}$ ,

akkor az áttérési mátrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Ha az  $A$  mátrix nem szinguláris,

akkor az  $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$  reláció alapján

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$
 ahol  $(x, y)$  illetve  $(x', y')$  az  $M$  pont koordinátái a két rendszerben.

A 2. fejezet eredményeit egy külön táblázatban, az 1. függelékben foglaltuk össze.

### 3. fejezet Síkmértani alakzatok és a közöttük levő kapcsolatok algebrai jellemzése különböző koordináta-fajtákban

Az analitikus geometriában maga a módszer abban a pillanatban dől el, amikor megválasztjuk a vonatkoztatási rendszert és a koordináta típusát. Ezért olyan fontos, hogy a geometriai feltételeket, tulajdonságokat, viszonyokat kifejező egyenlőségek, egyenlőtlenségek, összefüggések mennyire bonyolultak vagy nem. Ezt pedig csak akkor lehet eldönteni, ha lehetőség van azok összevetésére, összehasonlítására. Az értekezésnek ebben a fejezetében pontosan erről van szó, persze csak illusztrálásképpen, de a 2. fejezet áttérési képleteinek birtokában ez tovább vihető, kiterjeszhető a geometria más területeire.

Az a kérdés is nagyon érdekelt és foglalkoztatott, hogy a különböző geometriai viszonyokat kifejező összefüggések mennyire formalizálhatók, azaz hogy melyek nem koordinátafüggők? Ennek annyiban van jelentősége, hogy az itt tárgyalt hét koordináta-fajtának megfelelő hét képlet helyett csak egyet kell megjegyezni-megtanulni, ha azok formálisan koordináta-függetlenek.

#### 3.1. Két pont távolsága. Szakasz hossza

##### Derékszögű koordinátákban.

A  $P = (x, y)$  és  $P' = (x', y')$  derékszögű koordinátáikkal adott pontok távolsága illetve az általuk meghatározott szakasz hossza:

$$|PP'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

##### Kontravariáns koordinátákban.

A  $P = (X, Y)$  és  $P' = (X', Y')$  kontravariáns koordinátáikkal adott pontok távolságát az előbbi képlet segítségével számíthatjuk ki, áttérve derékszögű koordinátákra:

$$\begin{aligned}
|PP'| &= \sqrt{(X + Y \cos \theta - X' - Y' \cos \theta)^2 + (Y \sin \theta - Y' \sin \theta)^2} = \\
&= \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + 2(X - X')(Y - Y') \cos \theta}.
\end{aligned}$$

**Kovariáns koordinátákban.**

A  $P = (p, q)$  és  $P' = (p', q')$  kovariáns koordinátáikkal adott pontok által meghatározott szakasz hosszát szintén az előbbi képlet segítségével kapjuk, áttérve derékszögű koordinátákra:

$$\begin{aligned}
|PP'| &= \sqrt{(p - p')^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (-p \cos \theta + q + p' \cos \theta - q')^2} = \\
&= \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{(p - p')^2 + (q - q')^2 - 2(p - p')(q - q') \cos \theta}
\end{aligned}$$

**Valódi trilineáris koordinátákban.**

A  $P = (\alpha, \beta, \gamma)$  és  $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$  valódi trilineáris koordinátáikkal adott pontok által meghatározott szakasz hosszának kiszámítása végett áttérünk derékszögű koordinátákra:

$$\begin{aligned}
|PP'| &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 A} (\beta + \gamma \cos A - \beta' - \gamma' \cos A)^2 + (\gamma - \gamma')^2} = \\
&= \frac{1}{\sin A} \sqrt{(\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 + 2(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') \cos A}
\end{aligned}$$

Mivel  $a\alpha + b\beta + c\gamma = S = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$ , ezért

$$(\alpha - \alpha')^2 = -\frac{b}{a}(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') - \frac{c}{a}(\alpha - \alpha')(\gamma - \gamma'),$$

$$(\beta - \beta')^2 = -\frac{a}{b}(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') - \frac{c}{b}(\beta - \beta')(\gamma - \gamma'),$$

$$(\gamma - \gamma')^2 = -\frac{a}{c}(\alpha - \alpha')(\gamma - \gamma') - \frac{b}{c}(\beta - \beta')(\gamma - \gamma').$$

$$\begin{aligned}
\text{Tehát } |PP'| &= \frac{1}{\sin A} \sqrt{(\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2 + 2(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') \cos A} = \\
&= \frac{1}{\sin A} \sqrt{-\frac{a}{b}(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') - \frac{c}{b}(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') - \dots + 2(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') \cos A} = \\
&= \frac{1}{bc \sin A} \sqrt{-abc [a(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') + b(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') + c(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')]} = \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{-abc [a(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') + b(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') + c(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')]} .
\end{aligned}$$

Ez utóbbi képlet átírható az alábbi formába is:

$$a(\alpha - \alpha')^2 \cos A + b(\beta - \beta')^2 \cos B + c(\gamma - \gamma')^2 \cos C =$$



$$\begin{aligned}
&= -(c \cos B + b \cos C)(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') - \\
&- (a \cos C + c \cos A)(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') - (b \cos A + a \cos B)(\alpha - \alpha')(\beta - \beta') = \\
&= -a(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') - b(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') - c(\alpha - \alpha')(\beta - \beta'), \text{ azaz} \\
|PP'| &= \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{-abc [a(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') + b(\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') + c(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')]} = \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{abc [a(\alpha - \alpha')^2 \cos A + b(\beta - \beta')^2 \cos B + c(\gamma - \gamma')^2 \cos C]} = \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{a^2 (\alpha - \alpha')^2 S_A + b^2 (\beta - \beta')^2 S_B + c^2 (\gamma - \gamma')^2 S_C}.
\end{aligned}$$

Sőt, a távolságképlet tovább alakítható és újabb formákba írható fel (lásd még [20], 78. oldal). Alább megadunk még két képletet:

$$\begin{aligned}
|PP'| &= \sqrt{\frac{(\alpha - \alpha')^2 \sin 2A + (\beta - \beta')^2 \sin 2B + (\gamma - \gamma')^2 \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C}} = \\
&= \sqrt{\frac{(\beta - \beta')(\gamma - \gamma') \sin A + (\gamma - \gamma')(\alpha - \alpha') \sin B + (\alpha - \alpha')(\beta - \beta') \sin C}{\sin A \sin B \sin C}}
\end{aligned}$$

### Normált baricentrikus koordinátákban.

A  $P=(u, v, w)$  és  $P'=(u', v', w')$  normált baricentrikus koordinátáikkal adott pontok távolságának kiszámítása végett áttérünk valódi trilineáris koordinátákra:

$$\begin{aligned}
|PP'| &= \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{-abc \left[ a \frac{S^2}{bc} (v - v')(w - w') + b \frac{S^2}{ca} (w - w')(u - u') + c \frac{S^2}{ab} (u - u')(v - v') \right]} = \\
&= \sqrt{-a^2 (v - v')(w - w') - b^2 (w - w')(u - u') - c^2 (u - u')(v - v')} = \\
&= \frac{1}{S} \sqrt{abc \left[ a \frac{S^2}{a^2} (u - u')^2 \cos A + b \frac{S^2}{b^2} (v - v')^2 \cos B + c \frac{S^2}{c^2} (w - w')^2 \cos C \right]} = \\
&= \sqrt{bc (u - u')^2 \cos A + ca (v - v')^2 \cos B + ab (w - w')^2 \cos C} = \\
&= \sqrt{(u - u')^2 S_A + (v - v')^2 S_B + (w - w')^2 S_C}.
\end{aligned}$$

**Megjegyzés.** Ha a  $P$  és  $P'$  pontok trilineáris illetve baricentrikus koordinátáikkal adottak, akkor először áttérünk valódi trilineáris illetve normált baricentrikus koordinátákra, majd alkalmazzuk a megfelelő képletet a  $|PP'|$  szakasz hosszának kiszámítására.

### 3.2. Szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái

#### Derékszögű koordinátákban.

Legyenek  $M_1 = (x_1, y_1)$  és  $M_2 = (x_2, y_2)$  derékszögű koordinátáikkal adott pontok. Ha az  $M = (x, y)$  pont az  $|M_1M_2|$  szakaszt a  $k = \frac{MM_1}{MM_2}$  arányban

osztja, akkor  $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$  és  $y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$ .

Ha  $k < 0$ , akkor az  $M$  pont az  $|M_1M_2|$  szakasz belső pontja, ha pedig  $k > 0$  és  $k \neq 1$ , akkor az  $M$  pont az  $|M_1M_2|$  szakaszon kívül, de az  $M_1M_2$  egyenesen helyezkedik el. Ugyanez érvényes kontravariáns és kovariáns koordinátákra is.

#### Valódi trilineáris koordinátákban.

Legyenek  $M_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  és  $M_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  valódi trilineáris koordinátáikkal adott pontok. Ha az  $M = (\alpha, \beta, \gamma)$  szintén valódi trilineáris koordinátáival adott pont az  $|M_1M_2|$  szakaszt a  $k = \frac{MM_1}{MM_2}$  arányban osztja,

akkor áttérve derékszögű koordinátákra, az  $x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}$  és  $y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$

képletek alapján:

$$\begin{cases} \beta + \gamma \cos A = \frac{\beta_1 + \gamma_1 \cos A - k(\beta_2 + \gamma_2 \cos A)}{1 - k} \\ \gamma = \frac{\gamma_1 - k\gamma_2}{1 - k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\beta_1 - k\beta_2}{1 - k} \\ \gamma = \frac{\gamma_1 - k\gamma_2}{1 - k} \end{cases}$$

Mivel  $a\alpha + b\beta + c\gamma = S$ ,  $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = S$  és  $a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 = S$ , érvényes az alábbi egyenértékű átalakítás:

$$a\alpha + b \frac{\beta_1 - k\beta_2}{1 - k} + c \frac{\gamma_1 - k\gamma_2}{1 - k} = S \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha_1 - k\alpha_2}{1 - k}.$$

Tehát  $M = \left( \frac{\alpha_1 - k\alpha_2}{1 - k}, \frac{\beta_1 - k\beta_2}{1 - k}, \frac{\gamma_1 - k\gamma_2}{1 - k} \right)$ . Ugyanez érvényes normált

baricentrikus koordinátákra is.

### 3.3. Két pont által meghatározott egyenes egyenlete

**Derékszögű koordinátákban.**

Az  $M_1 = (x_1, y_1)$  és  $M_2 = (x_2, y_2)$  derékszögű koordinátáikkal adott pontok által meghatározott  $M_1M_2$  egyenes egyenlete

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - y_1x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Kontravariáns és kovariáns koordinátákban az egyenes egyenlete formálisan ugyanez lesz.

Az egyenes egyenlete derékszögű, kontravariáns és kovariáns koordinátákban  $lx + my + n = 0$  alakú, ahol az  $l, m, n$  együtthatók egyszerre nem nullák, az  $(x, y)$  pedig az egyenes  $M$  futópontjának koordinátái.

**Trilineáris koordinátákban.**

Az  $M_1 = (\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1)$  és  $M_2 = (\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2)$  trilineáris koordinátáikkal adott pontok által meghatározott  $M_1M_2$  egyenes egyenletét determináns alakban megkaphatjuk, ha áttérünk például kontravariáns koordinátákra

$$\begin{vmatrix} bc\beta & bc\gamma & a\alpha + b\beta + c\gamma \\ bc\beta_1 & bc\gamma_1 & a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 \\ bc\beta_2 & bc\gamma_2 & a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Baricentrikus koordinátákban az egyenes egyenlete formálisan ugyanez lesz. Az egyenes egyenlete trilineáris és baricentrikus koordinátákban  $lx + my + nz = 0$  alakú, ahol az  $l, m, n$  együtthatók egyszerre nem nullák, az  $(x : y : z)$  pedig az egyenes  $M$  futópontjának koordinátái.

### 3.4. Három pont kollinearitási feltétele

**Derékszögű koordinátákban.**

Az  $M_1 = (x_1, y_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2)$ ,  $M_3 = (x_3, y_3)$  derékszögű koordinátáikkal adott pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen (azaz kollinearisak), ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)x_3 - (x_1 - x_2)y_3 + x_1y_2 - y_1x_2 = 0.$$

Kontravariáns és kovariáns koordinátákban a kollinearitási feltétel formálisan ugyanez lesz.

**Trilineáris koordinátákban.**

Az  $M_1 = (\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1)$ ,  $M_2 = (\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2)$ ,  $M_3 = (\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3)$  trilineáris koordinátáikkal adott pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen (azaz kollineárisak), ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\alpha_3 + (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)\beta_3 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\gamma_3 = 0.$$

Baricentrikus koordinátákban a kollinearitási feltétel formálisan ugyanez lesz.

### 3.5. Három egyenes összefutási feltétele

**Derékszögű koordinátákban.** Tekintsük a derékszögű koordinátákban adott  $L_1 : l_1x + m_1y + n_1 = 0$ ,  $L_2 : l_2x + m_2y + n_2 = 0$ ,  $L_3 : l_3x + m_3y + n_3 = 0$

egyeneseket. Tegyük fel, hogy az  $L_1$  és  $L_2$  egyenesek az  $M$  pontban metszik

egymást. Az  $M$  pont koordinátáit az  $\begin{cases} l_1x + m_1y = -n_1 \\ l_2x + m_2y = -n_2 \end{cases}$  egyenletrendszer

megoldásaként kapjuk:  $M = \left( \frac{m_1n_2 - n_1m_2}{l_1m_2 - m_1l_2}, \frac{n_1l_2 - l_1n_2}{l_1m_2 - m_1l_2} \right)$ .

Az  $L_1$ ,  $L_2$  és  $L_3$  egyenesek akkor és csak akkor összefutók (mennek át ugyanazon az  $M$  ponton), ha  $M \in L_3$ , azaz

$$\begin{aligned} l_3 \frac{m_1n_2 - n_1m_2}{l_1m_2 - m_1l_2} + m_3 \frac{n_1l_2 - l_1n_2}{l_1m_2 - m_1l_2} + n_3 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow l_3(m_1n_2 - n_1m_2) + m_3(n_1l_2 - l_1n_2) + n_3(l_1m_2 - m_1l_2) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Kontravariáns és kovariáns koordinátákban az összefutási feltétel formálisan ugyanez lesz.

**Trilineáris koordinátákban.** Tekintsük a trilineáris koordinátákban adott  $L_1 : l_1\alpha + m_1\beta + n_1\gamma = 0$ ,  $L_2 : l_2\alpha + m_2\beta + n_2\gamma = 0$ ,  $L_3 : l_3\alpha + m_3\beta + n_3\gamma = 0$

egyeneseket. Tegyük fel, hogy az  $L_1$  és  $L_2$  egyenesek az  $M$  pontban metszik egymást. Az  $M$  pont koordinátáit az  $\begin{cases} l_1\alpha + m_1\beta = -n_1\gamma \\ l_2\alpha + m_2\beta = -n_2\gamma \end{cases}$  egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$M = (m_1n_2 - n_1m_2, n_1l_2 - l_1n_2, l_1m_2 - m_1l_2).$$

Az  $L_1$ ,  $L_2$  és  $L_3$  egyenesek akkor és csak akkor összefutók (mennek át ugyanazon az  $M$  ponton), ha  $M \in L_3$ , azaz

$$l_3(m_1n_2 - n_1m_2) + m_3(n_1l_2 - l_1n_2) + n_3(l_1m_2 - m_1l_2) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Baricentrikus koordinátákban az összefutási feltétel formálisan ugyanez lesz.

### 3.6. A háromszög területe

#### Derékszögű koordinátákban.

Az  $M_1 = (x_1, y_1)$ ,  $M_2 = (x_2, y_2)$ ,  $M_3 = (x_3, y_3)$  derékszögű koordinátáikkal adott pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}|\Delta|, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

#### Kontravariáns koordinátákban.

Az  $M_1 = (X_1, Y_1)$ ,  $M_2 = (X_2, Y_2)$ ,  $M_3 = (X_3, Y_3)$  kontravariáns koordinátáikkal adott pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{M_1M_2M_3} = \frac{\sin \theta}{2}|\Delta|, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Valóban, kontravariáns koordinátákról áttérve derékszögű koordinátákra

$$M_1 = (X_1 + Y_1 \cos \theta, Y_1 \sin \theta), M_2 = (X_2 + Y_2 \cos \theta, Y_2 \sin \theta),$$

$$M_3 = (X_3 + Y_3 \cos \theta, Y_3 \sin \theta).$$

$$\text{Tehát } \Delta_1 = \begin{vmatrix} X_1 + Y_1 \cos \theta & Y_1 \sin \theta & 1 \\ X_2 + Y_2 \cos \theta & Y_2 \sin \theta & 1 \\ X_3 + Y_3 \cos \theta & Y_3 \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \sin \theta \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = \sin \theta \cdot \Delta, \text{ ahol}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Következésképpen } T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\Delta_1| = \frac{\sin \theta}{2} |\Delta|.$$

### Kovariáns koordinátákban.

Az  $M_1 = (p_1, q_1)$ ,  $M_2 = (p_2, q_2)$ ,  $M_3 = (p_3, q_3)$  kovariáns koordinátáikkal adott pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2 \sin \theta} |\Delta|, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Valóban, kovariáns koordinátákról áttérve derékszögű koordinátákra

$$M_1 = \left( p_1, \frac{1}{\sin \theta} (-p_1 \cos \theta + q_1) \right), M_2 = \left( p_2, \frac{1}{\sin \theta} (-p_2 \cos \theta + q_2) \right),$$

$$M_3 = \left( p_3, \frac{1}{\sin \theta} (-p_3 \cos \theta + q_3) \right).$$

$$\text{Tehát } \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & \frac{1}{\sin \theta} (-p_1 \cos \theta + q_1) & 1 \\ p_2 & \frac{1}{\sin \theta} (-p_2 \cos \theta + q_2) & 1 \\ p_3 & \frac{1}{\sin \theta} (-p_3 \cos \theta + q_3) & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\sin \theta}, \text{ ahol}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}. \text{ Következésképpen } T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\Delta_2| = \frac{1}{2 \sin \theta} |\Delta|.$$

### Valódi trilineáris koordinátákban.

Az  $M_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ,  $M_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ,  $M_3 = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$  valódi trilineáris koordinátáikkal adott pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{abc}{2S^2} |\Delta|, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Valóban, valódi trilineáris koordinátákról áttérve derékszögű koordinátákra

$$M_1 = \left( \frac{1}{\sin A} (\beta_1 + \gamma_1 \cos A), \gamma_1 \right), M_2 = \left( \frac{1}{\sin A} (\beta_2 + \gamma_2 \cos A), \gamma_2 \right),$$

$$M_3 = \left( \frac{1}{\sin A} (\beta_3 + \gamma_3 \cos A), \gamma_3 \right).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{\sin A} \begin{vmatrix} \beta_1 + \gamma_1 \cos A & \gamma_1 & 1 \\ \beta_2 + \gamma_2 \cos A & \gamma_2 & 1 \\ \beta_3 + \gamma_3 \cos A & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin A} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin A} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{S \sin A} \begin{vmatrix} a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{a}{S \sin A} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \frac{a\Delta}{S \sin A}, \end{aligned}$$

ahol  $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ . Következésképpen

$$T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{2} |\Delta_3| = \frac{a}{2S \sin A} |\Delta| = \frac{abc}{2Sbc \sin A} |\Delta| = \frac{abc}{2S^2} |\Delta|.$$

### Normált baricentrikus koordinátákban.

Az  $M_1 = (u_1, v_1, w_1)$ ,  $M_2 = (u_2, v_2, w_2)$ ,  $M_3 = (u_3, v_3, w_3)$  normált baricentrikus koordinátáikkal adott pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{M_1 M_2 M_3} = \sigma |\Delta|, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Valóban, normált baricentrikus koordinátákról áttérve valódi trilineáris koordinátákra

$$M_1 = \left( \frac{S}{a} u_1, \frac{S}{b} v_1, \frac{S}{c} w_1 \right), M_2 = \left( \frac{S}{a} u_2, \frac{S}{b} v_2, \frac{S}{c} w_2 \right), M_3 = \left( \frac{S}{a} u_3, \frac{S}{b} v_3, \frac{S}{c} w_3 \right).$$

$$\text{Tehát } \Delta_4 = \frac{S^3}{abc} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \frac{S^3 \Delta}{abc}, \text{ ahol } \Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Következésképpen } T_{M_1 M_2 M_3} = \frac{abc}{2S^2} |\Delta_4| = \frac{abc}{2S^2} \cdot \frac{S^3}{abc} |\Delta| = \frac{S}{2} |\Delta| = \sigma |\Delta|.$$

**Megjegyzés.** Ha az  $M_1, M_2, M_3$  pontok trilineáris illetve baricentrikus koordinátáikkal adottak, akkor először áttérünk valódi trilineáris illetve

normált baricentrikus koordinátákra, majd alkalmazzuk a megfelelő képletet az  $M_1M_2M_3$  háromszög területének kiszámítására.

### 3.7. Két egyenes párhuzamossági feltétele

**Derékszögű koordinátákban.** Tekintsük a derékszögű koordinátákban adott  $L: lx + my + n = 0$  és  $L': l'x + m'y + n' = 0$  egyeneseket. Ha  $l^2 + m'^2 = 0$  vagy  $l'^2 + m^2 = 0$ , akkor az egyik egyenes párhuzamos az  $Ox$ , a másik egyenes pedig az  $Oy$  tengellyel, következésképpen egymással nem lehetnek párhuzamosak. Tehát ahhoz, hogy a két egyenes párhuzamos legyen szükséges, hogy  $lm' \neq 0$  és  $l'm \neq 0$ . A párhuzamosság szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenesek irányítványozói egyenlők legyenek, azaz

$$L \parallel L' \Leftrightarrow \frac{l}{m} = \frac{l'}{m'} \Leftrightarrow lm' - l'm = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0.$$

Ha  $l^2 + l'^2 = 0$  és  $mm' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Ox \parallel L'$ .

Ha  $m^2 + m'^2 = 0$  és  $ll' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Oy \parallel L'$ . Ha  $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ , akkor a két egyenes egybeesik.

**Kontravariáns koordinátákban.** Tekintsük a kontravariáns koordinátákban adott  $L: lX + mY + n = 0$  és  $L': l'X + m'Y + n' = 0$  egyeneseket. Ha  $l^2 + m'^2 = 0$  vagy  $l'^2 + m^2 = 0$ , akkor az egyik egyenes párhuzamos az  $Ox$ , a másik egyenes pedig az  $Oy$  tengellyel, következésképpen egymással nem lehetnek párhuzamosak. Tehát ahhoz, hogy a két egyenes párhuzamos legyen szükséges, hogy  $lm' \neq 0$  és  $l'm \neq 0$ . Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: l(\sin \theta)x + (m - l \cos \theta)y + n \sin \theta = 0,$$

$$L': l'(\sin \theta)x + (m' - l' \cos \theta)y + n' \sin \theta = 0.$$

$$\text{Tehát } L \parallel L' \Leftrightarrow \frac{l \sin \theta}{m - l \cos \theta} = \frac{l' \sin \theta}{m' - l' \cos \theta} \Leftrightarrow lm' - l'm = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0.$$

Ha  $l^2 + l'^2 = 0$  és  $mm' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Ox \parallel L'$ .

Ha  $m^2 + m'^2 = 0$  és  $ll' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Oy \parallel L'$ . Ha  $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ , akkor a két egyenes egybeesik.

**Kovariáns koordinátákban.** Tekintsük a kovariáns koordinátákban adott  $L: lp + mq + n = 0$  és  $L': l'p + m'q + n' = 0$  egyeneseket. Ha  $l^2 + m'^2 = 0$  vagy  $l'^2 + m^2 = 0$ , akkor az egyik egyenes párhuzamos az  $Ox$ , a másik egyenes



pedig az  $Oy$  tengellyel, következésképpen egymással nem lehetnek párhuzamosak. Tehát ahhoz, hogy a két egyenes párhuzamos legyen szükséges, hogy  $lm' \neq 0$  és  $l'm \neq 0$ . Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: (l + m \cos \theta)x + m(\sin \theta)y + n = 0,$$

$$L': (l' + m' \cos \theta)x + m'(\sin \theta)y + n' = 0.$$

$$\text{Tehát } L \parallel L' \Leftrightarrow \frac{l + m \cos \theta}{m \sin \theta} = \frac{l' + m' \cos \theta}{m' \sin \theta} \Leftrightarrow lm' - l'm = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0.$$

Ha  $l^2 + l'^2 = 0$  és  $mm' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Ox \parallel L'$ .

Ha  $m^2 + m'^2 = 0$  és  $ll' \neq 0$ , akkor  $L \parallel Oy \parallel L'$ . Ha  $\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$ , akkor a két egyenes egybeesik.

**Trilineáris koordinátákban.** Tekintsük a trilineáris koordinátákban adott  $L: l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  és  $L': l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit kontravariáns koordinátákra:

$$L: (am - bl)X + (an - cl)Y + bcl = 0,$$

$$L': (am' - bl')X + (an' - cl')Y + bcl' = 0.$$

Tehát

$$\begin{aligned} L \parallel L' &\Leftrightarrow (am - bl)(an' - cl') - (am' - bl')(an - cl) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

**Baricentrikus koordinátákban.** Tekintsük a baricentrikus koordinátákban adott  $L: lu + mv + nw = 0$  és  $L': l'u + m'v + n'w = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit trilineáris koordinátákra:

$$L: al\alpha + bm\beta + cn\gamma = 0,$$

$$L': al'\alpha + bm'\beta + cn'\gamma = 0.$$

$$\text{Tehát } L \parallel L' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

### 3.8. Adott ponton átmenő adott egyenessel párhuzamos egyenes egyenlete

#### Derékszögű koordinátákban.

Legyen  $L$  az  $lx + my + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és  $P = (x', y')$  az adott pont derékszögű koordinátákban ( $P \notin L$ ). Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és párhuzamos az  $L$  egyenessel. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'x' + m'y' + n' = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'x' + m'y' + n' = 0,$$

$$L \parallel L' \Leftrightarrow lm' - l'm = 0.$$

Ha  $OP \parallel L$ , akkor  $L' \equiv OP$  és az  $L'$  egyenlete  $lx + my = 0 \Leftrightarrow y'x - x'y = 0$ .

Ha viszont az  $OP$  egyenes nem párhuzamos az  $L$  egyenessel, akkor  $lx' + my' \neq 0$  és  $n' \neq 0$ , következésképpen

$$l' = -\frac{l \cdot n'}{lx' + my'} \quad \text{és} \quad m' = -\frac{m \cdot n'}{lx' + my'}.$$

Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$lx + my - lx' - my' = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ m & -l & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Az előbbi gondolatmenetet megismételve kontravariáns és kovariáns koordinátákra, az  $L'$  egyenes egyenlete formálisan ugyanez lesz. A fenti levezetés hasonló az alább következő trilineáris és baricentrikus koordinátákban való tárgyaláshoz. Leírását elsősorban ez az analógia indokolja, mivel a derékszögű, kontravariáns és kovariáns koordináták esetében az  $L'$  egyenes egyenletének meghatározására van egyszerűbb lehetőség is. Valóban, mivel  $L \parallel L'$ , az  $L'$  egyenes egyenlete  $lx + my + n' = 0$  alakú, a  $P \in L'$  feltételből pedig  $n' = -(lx' + my')$ . Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete  $lx + my - lx' - my' = 0$ .

#### Trilineáris koordinátákban.

Legyen  $L$  az  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (\alpha' : \beta' : \gamma')$  az adott pont trilineáris koordinátákban ( $P \notin L$ ). Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és párhuzamos az  $L$  egyenessel. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ , akkor  $P \in L' \Leftrightarrow l'\alpha' + m'\beta' + n'\gamma' = 0$ ,

$$L \parallel L' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b & c \\ m & n \end{vmatrix} l' + \begin{vmatrix} c & a \\ n & l \end{vmatrix} m' + \begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix} n' = 0.$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\lambda_a = \begin{vmatrix} b & c \\ m & n \end{vmatrix} = bn - cm, \quad \lambda_b = \begin{vmatrix} c & a \\ n & l \end{vmatrix} = cl - an, \quad \lambda_c = \begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix} = am - bl.$$

Megoldva az  $\begin{cases} \alpha' l' + \beta' m' = -\gamma' n' \\ \lambda_a l' + \lambda_b m' = -\lambda_c n' \end{cases}$  egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$

ismeretlenekre azt kapjuk, hogy

$$l' = \beta' \lambda_c - \gamma' \lambda_b, \quad m' = \gamma' \lambda_a - \alpha' \lambda_c, \quad n' = \alpha' \lambda_b - \beta' \lambda_a.$$

Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \lambda_b & \lambda_c \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \gamma' & \alpha' \\ \lambda_c & \lambda_a \end{vmatrix} \beta + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \lambda_a & \lambda_b \end{vmatrix} \gamma = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ bn - cm & cl - an & am - bl \end{vmatrix} = 0.$$

**Baricentrikus koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lu + mv + nw = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (u' : v' : w')$  az adott pont baricentrikus koordinátákban ( $P \notin L$ ). Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és párhuzamos az  $L$  egyenessel. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'u + m'v + n'w = 0$ , akkor  $P \in L' \Leftrightarrow l'u' + m'v' + n'w' = 0$ ,

$$L \parallel L' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & n \end{vmatrix} l' + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & l \end{vmatrix} m' + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l & m \end{vmatrix} n' = 0.$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\mu_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & n \end{vmatrix} = n - m, \quad \mu_b = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & l \end{vmatrix} = l - n, \quad \mu_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l & m \end{vmatrix} = m - l.$$

Megoldva az  $\begin{cases} u'l' + v'm' = -w'n' \\ \mu_a l' + \mu_b m' = -\mu_c n' \end{cases}$  egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$  ismeret-

lenekre azt kapjuk, hogy  $l' = v'\mu_c - w'\mu_b$ ,  $m' = w'\mu_a - u'\mu_c$ ,  $n' = u'\mu_b - v'\mu_a$ .

Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} v' & w' \\ \mu_b & \mu_c \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} w' & u' \\ \mu_c & \mu_a \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} u' & v' \\ \mu_a & \mu_b \end{vmatrix} w = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ n - m & l - n & m - l \end{vmatrix} = 0.$$

### 3.9. Két egyenes merőlegességi feltétele

**Derékszögű koordinátákban.** Tekintsük a derékszögű koordinátákban adott  $L: lx + my + n = 0$  és  $L': l'x + m'y + n' = 0$  egyeneseket. Ha  $l^2 + l'^2 = 0$  vagy  $m^2 + m'^2 = 0$ , akkor az egyenesek párhuzamosak. Tehát ahhoz, hogy a két egyenes merőleges legyen szükséges, hogy  $ll' \neq 0$  és  $mm' \neq 0$ . A merőlegesség szükséges és elégséges feltétele

$$L \perp L' \Leftrightarrow \frac{l}{m} = -\frac{m'}{l'} \Leftrightarrow ll' + mm' = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l & m \\ -m' & l' \end{vmatrix} = 0.$$

Ha  $l^2 + m'^2 = 0$  és  $l'm \neq 0$ , akkor  $L \perp Oy$  és  $L' \perp Ox$ , azaz  $L \perp L'$ .

Ha  $l'^2 + m^2 = 0$  és  $lm' \neq 0$ , akkor  $L \perp Ox$  és  $L' \perp Oy$ , azaz  $L \perp L'$ .

**Kontravariáns koordinátákban.** Tekintsük a kontravariáns koordinátákban adott  $L: lX + mY + n = 0$  és  $L': l'X + m'Y + n' = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: l(\sin \theta)x + (m - l \cos \theta)y + n \sin \theta = 0,$$

$$L': l'(\sin \theta)x + (m' - l' \cos \theta)y + n' \sin \theta = 0.$$

Tehát

$$\begin{aligned} L \perp L' &\Leftrightarrow ll' \sin^2 \theta + (m - l \cos \theta)(m' - l' \cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ll' + mm' - (lm' + l'm) \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos \theta \\ l' & l & m' \\ m' & -m & l' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

**Kovariáns koordinátákban.** Tekintsük a kovariáns koordinátákban adott  $L: lp + mq + n = 0$  és  $L': l'p + m'q + n' = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: (l + m \cos \theta)x + m(\sin \theta)y + n = 0,$$

$$L': (l' + m' \cos \theta)x + m'(\sin \theta)y + n' = 0.$$

Tehát

$$\begin{aligned} L \perp L' &\Leftrightarrow (l + m \cos \theta)(l' + m' \cos \theta) + mm' \sin^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ll' + mm' + (lm' + l'm) \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos \theta \\ -l' & l & m' \\ -m' & -m & l' \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

**Trilineáris koordinátákban.** Tekintsük a trilineáris koordinátákban adott  $L: l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  és  $L': l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit kontravariáns koordinátákra:

$$L: (am - bl)X + (an - cl)Y + bcl = 0,$$

$$L': (am' - bl')X + (an' - cl')Y + bcl' = 0.$$

Tehát

$$\begin{aligned} L \perp L' &\Leftrightarrow (am - bl)(am' - bl') + (an - cl)(an' - cl') - \\ &\quad - [(am - bl)(an' - cl') + (am' - bl')(an - cl)] \cos A = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (am - bl)(am' - bl' - an' \cos A + cl' \cos A) + \\ &\quad + (an - cl)(an' - cl' - am' \cos A + bl' \cos A) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (am - bl)(am' - an' \cos A - al' \cos C) + \\ &\quad + (an - cl)(an' - am' \cos A - al' \cos B) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (am - bl)(m' - n' \cos A - l' \cos C) + \\ &\quad + (an - cl)(n' - m' \cos A - l' \cos B) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n) \cos A - (nl' + n'l) \cos B - (lm' + l'm) \cos C = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (l - m \cos C - n \cos B)l' + (m - n \cos A - l \cos C)m' + (n - l \cos B - m \cos A)n' = 0. \end{aligned}$$

**Baricentrikus koordinátákban.** Tekintsük a baricentrikus koordinátákban adott  $L: lu + mv + nw = 0$  és  $L': l'u + m'v + n'w = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit trilineáris koordinátákra:  $L: al\alpha + bm\beta + cn\gamma = 0$ ,  $L': al'\alpha + bm'\beta + cn'\gamma = 0$ . Tehát

$$\begin{aligned} L \perp L' &\Leftrightarrow a^2 ll' + b^2 mm' + c^2 nn' - bc(mn' + m'n) \cos A - \\ &\quad - ca(nl' + n'l) \cos B - ab(lm' + l'm) \cos C = 0. \end{aligned}$$

### 3.10. Adott ponton átmenő adott egyenesre merőleges egyenes egyenlete

**Derékszögű koordinátákban.**

Legyen  $L$  az  $lx + my + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és

$P = (x', y')$  az adott pont derékszögű koordinátákban. Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $L$  egyenesre. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'x + m'y + n' = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'x' + m'y' + n' = 0,$$

$$L \perp L' \Leftrightarrow ll' + mm' = 0.$$

Ha  $OP \perp L$ , akkor  $L' \equiv OP$  és az  $L'$  egyenlete  $mx - ly = 0 \Leftrightarrow y'x - x'y = 0$ .  
 Ha viszont az  $OP$  nem merőleges  $L$ -re, akkor  $mx' - ly' \neq 0$  és  $n' \neq 0$ ,  
 következésképpen  $l' = -\frac{m \cdot n'}{mx' - ly'}$  és  $m' = \frac{l \cdot n'}{mx' - ly'}$ .

Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:  $-mx + ly + mx' - ly' = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ l & m & 0 \end{vmatrix} = 0$ .

### Kontravariáns koordinátákban.

Legyen  $L$  az  $lX + mY + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és  
 $P = (X', Y')$  az adott pont kontravariáns koordinátákban. Keressük annak az  
 $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $L$   
 egyenesre. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'X + m'Y + n' = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'X' + m'Y' + n' = 0,$$

$$L \perp L' \Leftrightarrow (l - m \cos \theta)l' + (m - l \cos \theta)m' = 0.$$

Ha  $OP \perp L$ , akkor  $L' \equiv OP$  és az  $L'$  egyenlete  
 $(m - l \cos \theta)X - (l - m \cos \theta)Y = 0 \Leftrightarrow Y'X - X'Y = 0$ .

Ha viszont az  $OP$  egyenes nem merőleges  $L$ -re, akkor  
 $(m - l \cos \theta)X' - (l - m \cos \theta)Y' \neq 0$  és  $n' \neq 0$ . Megoldva a fenti két  
 egyenletről álló egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$  ismeretlenekre azt kapjuk,

hogy  $l' = -\frac{(m - l \cos \theta)n'}{(m - l \cos \theta)X' - (l - m \cos \theta)Y'}$  és

$m' = \frac{(l - m \cos \theta)n'}{(m - l \cos \theta)X' - (l - m \cos \theta)Y'}$ . Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$-(m - l \cos \theta)X + (l - m \cos \theta)Y + (m - l \cos \theta)X' - (l - m \cos \theta)Y' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X' & Y' & 1 \\ l - m \cos \theta & m - l \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

### Kovariáns koordinátákban.

Legyen  $L$  az  $lp + mq + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és

$P = (p', q')$  az adott pont kovariáns koordinátákban. Keressük annak az  $L'$   
 egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $L$   
 egyenesre. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'p + m'q + n' = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'p' + m'q' + n' = 0,$$

$$L \perp L' \Leftrightarrow (l+m \cos \theta)l' + (m+l \cos \theta)m' = 0.$$

Ha  $OP \perp L$ , akkor  $L' \equiv OP$  és az  $L'$  egyenlete

$$(m+l \cos \theta)p - (l+m \cos \theta)q = 0 \Leftrightarrow q'p - p'q = 0.$$

Ha viszont az  $OP$  egyenes nem merőleges  $L$ -re, akkor

$(m+l \cos \theta)p' - (l+m \cos \theta)q' \neq 0$  és  $n' \neq 0$ . Megoldva a fenti két egyenletből álló egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$  ismeretlenekre azt kapjuk,

$$\text{hogy } l' = -\frac{(m+l \cos \theta)n'}{(m+l \cos \theta)p' - (l+m \cos \theta)q'}$$
 és

$$m' = \frac{(l+m \cos \theta)n'}{(m+l \cos \theta)p' - (l+m \cos \theta)q'}.$$
 Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$-(m+l \cos \theta)p + (l+m \cos \theta)q + (m+l \cos \theta)p' - (l+m \cos \theta)q' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} p & q & 1 \\ p' & q' & 1 \\ l+m \cos \theta & m+l \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Trilineáris koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (\alpha' : \beta' : \gamma')$  az adott pont trilineáris koordinátákban.

Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $L$  egyenesre. Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'\alpha' + m'\beta' + n'\gamma' = 0,$$

$$L \perp L' \Leftrightarrow (l-m \cos C - n \cos B)l' +$$

$$+(m-n \cos A - l \cos C)m' + (n-l \cos B - m \cos A)n' = 0.$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$\lambda_a = l - m \cos C - n \cos B, \quad \lambda_b = m - n \cos A - l \cos C, \quad \lambda_c = n - l \cos B - m \cos A.$$

Megoldva az  $\begin{cases} \alpha'l' + \beta'm' = -\gamma'n' \\ \lambda_a l' + \lambda_b m' = -\lambda_c n' \end{cases}$  egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$

ismeretlenekre azt kapjuk, hogy  $l' = \beta'\lambda_c - \gamma'\lambda_b$ ,  $m' = \gamma'\lambda_a - \alpha'\lambda_c$ ,  $n' = \alpha'\lambda_b - \beta'\lambda_a$ . Tehát az  $L'$  egyenes

$$\text{egyenlete: } \begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \lambda_b & \lambda_c \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \gamma' & \alpha' \\ \lambda_c & \lambda_a \end{vmatrix} \beta + \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \lambda_a & \lambda_b \end{vmatrix} \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ l-m \cos C - n \cos B & m-n \cos A - l \cos C & n-l \cos B - m \cos A \end{vmatrix} = 0.$$

**Baricentrikus koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lu + mv + nw = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (u' : v' : w')$  az adott pont baricentrikus koordinátákban. Keressük annak az  $L'$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton és merőleges az  $L$  egyenesre.

Ha az  $L'$  egyenes egyenlete  $l'u + m'v + n'w = 0$ , akkor

$$P \in L' \Leftrightarrow l'u' + m'v' + n'w' = 0,$$

$$L \parallel L' \Leftrightarrow a(al - bm \cos C - cn \cos B)l' +$$

$$+ b(bm - cn \cos A - al \cos C)m' + c(cn - al \cos B - bm \cos A)n' = 0.$$

$$\mu_a = a(al - bm \cos C - cn \cos B),$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:  $\mu_b = b(bm - cn \cos A - al \cos C)$ ,

$$\mu_c = c(cn - al \cos B - bm \cos A).$$

Megoldva az  $\begin{cases} u'l' + v'm' = -w'n' \\ \mu_a l' + \mu_b m' = -\mu_c n' \end{cases}$  egyenletrendszert az  $l'$  és  $m'$  ismeretlenekre azt kapjuk, hogy  $l' = v'\mu_c - w'\mu_b$ ,  $m' = w'\mu_a - u'\mu_c$ ,  $n' = u'\mu_b - v'\mu_a$ .

Tehát az  $L'$  egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} v' & w' \\ \mu_b & \mu_c \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} w' & u' \\ \mu_c & \mu_a \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} u' & v' \\ \mu_a & \mu_b \end{vmatrix} w = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ \mu_a & \mu_b & \mu_c \end{vmatrix} = 0.$$

### 3.11. Pontnak egyenestől mért távolsága

**Derékszögű koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lx + my + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és  $P = (x', y')$  az adott pont derékszögű koordinátákban. Legyen továbbá  $L'$  a  $P$  ponton átmenő és az  $L$  egyenesre merőleges egyenes. Célunk a  $|PQ|$  távolság meghatározása, ahol  $\{Q\} = L \cap L'$ . Vezessük be az alábbi jelöléseket:  $E(x, y) = lx + my + n$ ,  $E = E(x', y') = lx' + my' + n$ . Meghatározzuk a  $Q$  pont koordinátáit megoldva az

$$\begin{cases} lx + my = -n \\ -mx + ly = -mx' + ly' \end{cases} \text{ egyenletrendszert: } \Delta = \begin{vmatrix} l & m \\ -m & l \end{vmatrix} = l^2 + m^2 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -n & m \\ -mx' + ly' & l \end{vmatrix} = m^2 x' - lmy' - nl = (l^2 + m^2)x' - l(lx' + my' + n) = \Delta x' - lE,$$



$$\Delta_y = \begin{vmatrix} l & -n \\ -m & -mx' + ly' \end{vmatrix} = -lmx' + l^2 y' - mn = (l^2 + m^2) y' - m(lx' + my' + n) = \Delta y' - mE.$$

Tehát a  $Q$  pont koordinátái:  $Q = \left( x' - \frac{lE}{\Delta}, y' - \frac{mE}{\Delta} \right).$

Következésképpen  $d(P, L) = |PQ| = \sqrt{(l^2 + m^2) \frac{E^2}{\Delta^2}} = \frac{|E|}{\sqrt{\Delta}} = \frac{|lx' + my' + n|}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$

**Kontravariáns koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lX + mY + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és  $P = (X', Y')$  az adott pont kontravariáns koordinátákban. Legyen továbbá  $L'$  a  $P$  ponton átmenő és az  $L$  egyenesre merőleges egyenes. Célunk a  $|PQ|$  távolság meghatározása, ahol  $\{Q\} = L \cap L'$ . Vezessük be az alábbi jelöléseket:  $E(X, Y) = lX + mY + n$ ,  $E = E(X', Y') = lX' + mY' + n$ . Meghatározzuk a  $Q$  pont koordinátáit megoldva az

$$\begin{cases} lX + mY = -n \\ -(m - l \cos \theta) X + (l - m \cos \theta) Y = -(m - l \cos \theta) X' + (l - m \cos \theta) Y' \end{cases}$$

egyenletrendszer:  $\Delta = \begin{vmatrix} l & m \\ -(m - l \cos \theta) & l - m \cos \theta \end{vmatrix} = l^2 + m^2 - 2lm \cos \theta \neq 0,$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -n & m \\ -(m - l \cos \theta) X' + (l - m \cos \theta) Y' & l - m \cos \theta \end{vmatrix} = \Delta x' - (l - m \cos \theta) E,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} l & -n \\ -(m - l \cos \theta) & -(m - l \cos \theta) X' + (l - m \cos \theta) Y' \end{vmatrix} = \Delta y' - (m - l \cos \theta) E.$$

Tehát a  $Q$  pont koordinátái:  $Q = \left( X' - (l - m \cos \theta) \frac{E}{\Delta}, Y' - (m - l \cos \theta) \frac{E}{\Delta} \right).$

Következésképpen  $d(P, L) = |PQ| =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\left[ (l - m \cos \theta)^2 + (m - l \cos \theta)^2 + 2(l - m \cos \theta)(m - l \cos \theta) \cos \theta \right] \frac{E^2}{\Delta^2}} = \\ &= \frac{|E|}{\Delta} \sqrt{l(l - m \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) + m(m - l \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta)} = \\ &= \frac{|E| \sin \theta}{\sqrt{\Delta}} = \frac{|lx' + my' + n| \sin \theta}{\sqrt{l^2 + m^2 - 2lm \cos \theta}}. \end{aligned}$$

**Kovariáns koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lp + mq + n = 0$  ( $lm \neq 0$ ) egyenletű adott egyenes és  $P = (p', q')$  az adott pont kontravariáns koordinátákban. Legyen továbbá  $L'$  a  $P$  ponton átmenő és az  $L$  egyenesre merőleges egyenes. Célunk a  $|PQ|$  távolság meghatározása, ahol  $\{Q\} = L \cap L'$ . Vezessük be az alábbi jelöléseket:  $E(p, q) = lp + mq + n$ ,  $E = E(p', q') = lp' + mq' + n$ . Meghatározzuk a  $Q$  pont koordinátáit megoldva az

$$\text{az } \begin{cases} lp + mq = -n \\ -(m + l \cos \theta)p + (l + m \cos \theta)q = -(m + l \cos \theta)p' + (l + m \cos \theta)q' \end{cases}$$

$$\text{egyenletrendszer: } \Delta = \begin{vmatrix} l & m \\ -(m + l \cos \theta) & l + m \cos \theta \end{vmatrix} = l^2 + m^2 + 2lm \cos \theta \neq 0,$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} -n & m \\ -(m + l \cos \theta)p' + (l + m \cos \theta)q' & l - m \cos \theta \end{vmatrix} = \Delta p' - (l + m \cos \theta)E,$$

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} l & -n \\ -(m + l \cos \theta) & -(m + l \cos \theta)p' + (l + m \cos \theta)q' \end{vmatrix} = \Delta q' - (m + l \cos \theta)E.$$

$$\text{Tehát a } Q \text{ pont koordinátái: } Q = \left( p' - (l + m \cos \theta) \frac{E}{\Delta}, q' - (m + l \cos \theta) \frac{E}{\Delta} \right).$$

$$\text{Következésképpen } d(P, L) = |PQ| =$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{[(l + m \cos \theta)^2 + (m + l \cos \theta)^2 - 2(l + m \cos \theta)(m + l \cos \theta) \cos \theta] \frac{E^2}{\Delta^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \theta} \frac{|E|}{\Delta} \sqrt{l(l + m \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta) + m(m + l \cos \theta)(1 - \cos^2 \theta)} =$$

$$= \frac{|E|}{\sqrt{\Delta}} = \frac{|lx' + my' + n|}{\sqrt{l^2 + m^2 + 2lm \cos \theta}}.$$

**Valódi trilineáris koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (\alpha', \beta', \gamma')$  az adott pont valódi trilineáris koordinátákban. Legyen továbbá  $L'$  a  $P$  ponton átmenő és az  $L$  egyenesre merőleges egyenes. Célunk a  $|PQ|$  távolság meghatározása, ahol  $\{Q\} = L \cap L'$ . Átírjuk az  $L$  egyenes egyenletét kontravariáns koordinátákra:

$$L: (am - bl)X + (an - cl)Y + bcl = 0.$$

$$\text{A } P \text{ pont kontravariáns koordinátái: } P = \left( \frac{\beta'}{\sin A}, \frac{\gamma'}{\sin A} \right). \text{ Tehát}$$

$$d(P, L) = |PQ| = \frac{\left| (am-bl) \frac{\beta'}{\sin A} + (an-cl) \frac{\gamma'}{\sin A} + bcl \right| \sin A}{\sqrt{(am-bl)^2 + (an-cl)^2 - 2(am-cl)(an-cl) \cos A}} =$$

$$= \frac{|l\alpha' + m\beta' + n\gamma'|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn \cos A - 2nl \cos B - 2lm \cos C}}.$$

**Normált baricentrikus koordinátákban.** Legyen  $L$  az  $lu + mv + nw = 0$  egyenletű adott egyenes és  $P = (u', v', w')$  az adott pont normált baricentrikus koordinátákban. Legyen továbbá  $L'$  a  $P$  ponton átmenő és az  $L$  egyenesre merőleges egyenes. Célunk a  $|PQ|$  távolság meghatározása, ahol  $\{Q\} = L \cap L'$ . Átírjuk az  $L$  egyenes egyenletét valódi trilineáris koordinátákra:  $L: a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ . A  $P$  pont valódi trilineáris koordinátái:  $P = \left( \frac{Su'}{a}, \frac{Sv'}{b}, \frac{Sw'}{c} \right)$ . Tehát  $d(P, L) = |PQ| =$

$$= \frac{\left| a\frac{Su'}{a} + b\frac{Sv'}{b} + c\frac{Sw'}{c} \right|}{\sqrt{(a\alpha)^2 + (b\beta)^2 + (c\gamma)^2 - 2bmcn \cos A - 2cnal \cos B - 2albm \cos C}} =$$

$$= S \frac{|lu' + mv' + nw'|}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - 2bcmn \cos A - 2canl \cos B - 2ablm \cos C}} =$$

$$= S \frac{|lu' + mv' + nw'|}{\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 - 2mnS_A - 2nlS_B - 2lmS_C}}.$$

### 3.12. Két egyenes hajlásszöge

**Derékszögű koordinátákban.** Tekintsük a derékszögű koordinátákban adott  $L: lx + my + n = 0$  és  $L': l'x + m'y + n' = 0$  egyeneseket. A két egyenesnek a derékszögnél kisebb hajlásszögét jelölje  $\varphi$ , az egyeneseknek az  $Ox$  tengellyel alkotott pozitív szögét pedig  $\omega$  illetve  $\omega'$ . A jelöléseket most és az alábbiakban válasszuk úgy, hogy  $\omega \leq \omega'$  teljesüljön. Ennek megfelelően  $tg \omega = -\frac{l}{m}$  illetve  $tg \omega' = -\frac{l'}{m'}$ . Ekkor  $\varphi = \omega' - \omega$  és

$$tg \varphi = tg(\omega' - \omega) = \frac{tg \omega' - tg \omega}{1 + tg \omega \cdot tg \omega'} = \frac{lm' - l'm}{ll' + mm'}.$$

**Kontravariáns koordinátákban.** Tekintsük a kontravariáns koordinátákban adott  $L: lX + mY + n = 0$  és  $L': l'X + m'Y + n' = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: l(\sin \theta)x + (m - l \cos \theta)y + n \sin \theta = 0,$$

$$L': l'(\sin \theta)x + (m' - l' \cos \theta)y + n' \sin \theta = 0.$$

Most  $tg \omega = -\frac{l \sin \theta}{m - l \cos \theta}$  illetve  $tg \omega' = -\frac{l' \sin \theta}{m' - l' \cos \theta}$ . Tehát

$$tg \varphi = tg(\omega' - \omega) = \frac{tg \omega' - tg \omega}{1 + tg \omega \cdot tg \omega'} = \frac{(lm' - l'm) \sin \theta}{ll' + mm' - (lm' + l'm) \cos \theta}.$$

**Kovariáns koordinátákban.** Tekintsük a kovariáns koordinátákban adott  $L: lp + mq + n = 0$  és  $L': l'p + m'q + n' = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit derékszögű koordinátákra:

$$L: (l + m \cos \theta)x + m(\sin \theta)y + n = 0,$$

$$L': (l' + m' \cos \theta)x + m'(\sin \theta)y + n' = 0.$$

Ebben az esetben  $tg \omega = -\frac{l + m \cos \theta}{m \sin \theta}$  illetve  $tg \omega' = -\frac{l' + m' \cos \theta}{m' \sin \theta}$  és

$$tg \varphi = tg(\omega' - \omega) = \frac{tg \omega' - tg \omega}{1 + tg \omega \cdot tg \omega'} = \frac{(lm' - l'm) \sin \theta}{ll' + mm' + (lm' + l'm) \cos \theta}.$$

**Trilineáris koordinátákban.** Tekintsük a trilineáris koordinátákban adott  $L: l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$  és  $L': l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit kontravariáns koordinátákra:

$$L: (am - bl)X + (an - cl)Y + bcl = 0,$$

$$L': (am' - bl')X + (an' - cl')Y + bcl' = 0.$$

Ha a két egyenesnek a derékszögnél kisebb hajlásszöge  $\varphi$ , akkor

$$\begin{aligned} tg \varphi &= \frac{[(am - bl)(an' - cl') - (an - cl)(am' - bl')] \sin A}{(am - bl)(an' - bl') + (an - cl)(an' - cl') - [(am - bl)(an' - cl') + (am' - bl')(an - cl)] \cos A} = \\ &= \frac{(mn' - m'n) \sin A + (nl' - n'l) \sin B + (lm' - l'm) \sin C}{ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n) \cos A - (nl' + n'l) \cos B - (lm' + l'm) \cos C} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{ll' + mm' + nn' - (mn' + m'n) \cos A - (nl' + n'l) \cos B - (lm' + l'm) \cos C}. \end{aligned}$$

**Baricentrikus koordinátákban.** Tekintsük a baricentrikus koordinátákban adott  $L: lu + mv + nw = 0$  és  $L': l'u + m'v + n'w = 0$  egyeneseket. Átírjuk az egyenesek egyenleteit trilineáris koordinátákra:

$$L: a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

$$L': a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0.$$

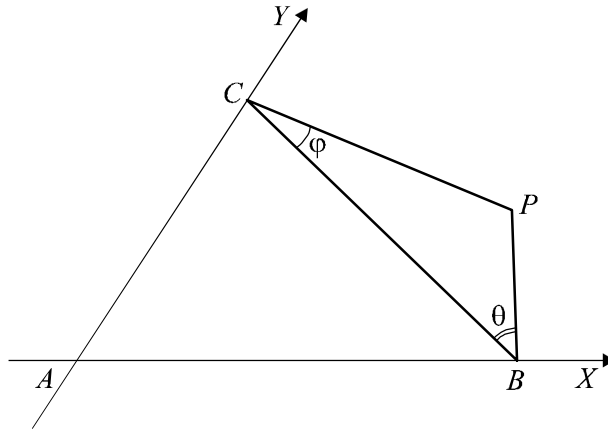
Ha a két egyenesnek a derékszögnél kisebb hajlásszöge  $\varphi$ , akkor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{bc(mn' - m'n)\sin A + ca(nl' - n'l)\sin B + ab(lm' - l'm)\sin C}{a^2l'l' + b^2mm' + c^2nn' - bc(mn' + m'n)\cos A - ca(nl' + n'l)\cos B - ab(lm' + l'm)\cos C} = \\ &= S \frac{mn' - m'n + nl' - n'l + lm' - l'm}{a^2l'l' + b^2mm' + c^2nn' - (mn' + m'n)S_A - (nl' + n'l)S_B - (lm' + l'm)S_C} = \\ &= S \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{a^2l'l' + b^2mm' + c^2nn' - (mn' + m'n)S_A - (nl' + n'l)S_B - (lm' + l'm)S_C}. \end{aligned}$$

### 3.13. A Conway-féle képletek

Legyen  $P$  az  $ABC$  háromszög síkjának tetszőleges pontja, amely nincs rajta egyik oldal tartóegyenesén sem ( $P \notin BC$ ,  $P \notin CA$ ,  $P \notin AB$ ). Legyen továbbá  $m(\angle BCP) = \varphi$  és  $m(\angle CBP) = \theta$ . A  $\varphi$  illetve  $\theta$  valós számnak a  $BC$  oldal szerint pozitív vagy negatív előjelet tulajdonítunk attól függően, hogy a  $BCA$  és  $BCP$  illetve a  $CBA$  és  $CBP$  háromszögek ellentétes vagy azonos körüljárásúak (3.1. ábra). Célunk most a  $P$  pont baricentrikus koordinátáinak a meghatározása. Előrebocsátjuk, hogy

$$P = (-a^2 : S_\varphi + S_C : S_\theta + S_B).$$



3.1. ábra

Először meghatározzuk a  $P$  pont kontravariáns koordinátáit, majd pedig áttérünk baricentrikus koordinátákra. Ehhez szükségünk lesz az alábbi eredményre: ha a kontravariáns koordinátákban adott  $Y = mX$  egyenletű  $d$  egyenes az  $XOY$  ferdeszögű koordináta-rendszer  $OX$  tengelyével  $\beta \in [0, \pi)$  mértékű szöget alkot, a koordinátatengelyek hajlásszöge pedig  $\alpha$ , akkor a  $d$  egyenes irányítványozója (meredeksége)  $m = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ .

Kapcsoljunk az  $ABC$  háromszöghöz egy  $XAY$  ferdeszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az  $AB$  egyenes egybeessen az  $AX$ , az  $AC$  egyenes pedig az  $AY$  tengellyel (3.1. ábra). A  $P$  pont kontravariáns koordinátái legyenek  $(X, Y)$ , baricentrikus koordinátái pedig  $(u, v, w)$ .

**1. eset.**  $0 < \varphi < \pi$ ;  $0 < \theta < \pi$ ;  $\varphi + \theta < \pi$  (a  $P$  pont a  $BC$  egyenes által meghatározott, az  $A$  pontot nem tartalmazó félsíkban van) (3.1. ábra)

A  $BP$  egyenes irányítványozója  $m = -\frac{\sin(B + \theta)}{\sin(C - \theta)}$ , egyenlete pedig

$Y = m(X - c)$ . A  $CP$  egyenes irányítványozója  $m' = -\frac{\sin(B - \varphi)}{\sin(C + \varphi)}$ , egyenlete

pedig  $Y - b = m'X$ . Következésképpen  $m(X - c) = b + m'X \Leftrightarrow (m - m')X = b + cm$ . Külön kiszámítjuk az  $m - m'$  és a  $b + cm$  mennyiségeket:

$$\begin{aligned}
m - m' &= -\frac{\sin(B + \theta)}{\sin(C - \theta)} + \frac{\sin(B - \varphi)}{\sin(C + \varphi)} = \\
&= \frac{\sin(B - \varphi)\sin(C - \theta) - \sin(B + \theta)\sin(C + \varphi)}{\sin(C + \varphi)\sin(C - \theta)} = \\
&= \frac{1}{2} [\cos(B + C + \varphi + \theta) - \cos(B + C - \varphi - \theta)] = -\frac{\sin A \sin(\varphi + \theta)}{\sin(C + \varphi)\sin(C - \theta)}, \\
b + cm &= b - c \frac{\sin(B + \theta)}{\sin(C - \theta)} = \frac{b \sin(C - \theta) - c \sin(B + \theta)}{\sin(C - \theta)} = -\frac{a \sin \theta}{\sin(C - \theta)}.
\end{aligned}$$

Tehát  $X = \frac{a \sin \theta \sin(C + \varphi)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)}$  és  $Y = \frac{a \sin \varphi \sin(B + \theta)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)}$ . Most meghatározzuk a  $P$  pont baricentrikus koordinátáit:

$$u = bc - bX - cY = bc - \frac{ab \sin \theta \sin(C + \varphi)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)} - \frac{ac \sin \varphi \sin(B + \theta)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)} = -\frac{a^2 \sin \varphi \sin \theta}{\sin A \sin(\varphi + \theta)},$$

$$v = bX = \frac{ab \sin \theta \sin(C + \varphi)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)}, \quad w = cY = \frac{ac \sin \varphi \sin(B + \theta)}{\sin A \sin(\varphi + \theta)}.$$

Következésképpen  $P = \left( -a^2 : \frac{ab \sin(C + \varphi)}{\sin \varphi} : \frac{ac \sin(B + \theta)}{\sin \theta} \right)$ . A  $P$  pont

második és harmadik komponensét átalakítjuk:

$$\frac{ab \sin(C + \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{ab \sin C \cos \varphi + ab \sin \varphi \cos C}{\sin \varphi} = S_C \operatorname{ctg} \varphi + S_C = S_\varphi + S_C,$$

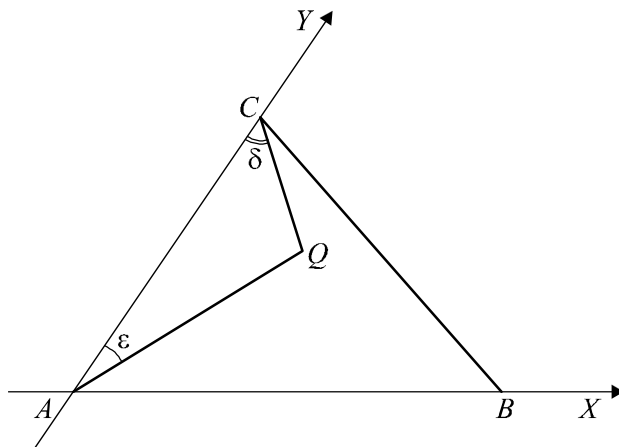
$$\frac{ac \sin(B + \theta)}{\sin \theta} = \frac{ac \sin B \cos \theta + ac \sin \theta \cos B}{\sin \theta} = S_B \operatorname{ctg} \theta + S_B = S_\theta + S_B.$$

$$\text{Tehát } P = \left( -a^2 : S_\varphi + S_C : S_\theta + S_B \right).$$

**2. eset.**  $-\pi < \varphi < 0$ ;  $-\pi < \theta < 0$ ;  $\varphi + \theta > -\pi$  (a  $P$  pont a  $BC$  egyenes által meghatározott, az  $A$  pontot tartalmazó félsíkban van). Megismételve az előbbi gondolatmenetet azt kapjuk, hogy ebben az esetben a  $P$  pont baricentrikus koordinátái:  $P = \left( a^2 : S_\varphi - S_C : S_\theta - S_B \right)$ .

Legyen  $Q$  az  $ABC$  háromszög síkjának tetszőleges pontja, amely nincs rajta egyik oldal tartóegyenesén sem ( $Q \notin BC$ ,  $Q \notin CA$ ,  $Q \notin AB$ ). Legyen továbbá  $m(CAQ \sphericalangle) = \varepsilon$  és  $m(ACQ \sphericalangle) = \delta$ . Az  $\varepsilon$  illetve  $\delta$  valós számoknak a  $CA$  oldal szerint pozitív vagy negatív előjelet tulajdonítunk attól

függően, hogy a  $CAB$  és  $CAQ$  illetve az  $ACB$  és  $ACQ$  háromszögek ellentétes vagy azonos körüljárásúak (3.2. ábra).



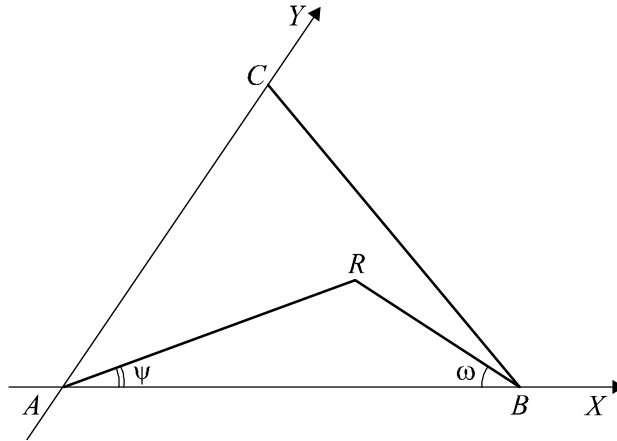
3.2. ábra

**1. eset.**  $0 < \varepsilon < \pi$ ;  $0 < \delta < \pi$ ;  $\varepsilon + \delta < \pi$  (a  $Q$  pont a  $CA$  egyenes által meghatározott, a  $B$  pontot nem tartalmazó félsíkban van). Ebben az esetben a  $Q$  pont baricentrikus koordinátái:  $Q = (S_\delta + S_C : -b^2 : S_\varepsilon + S_A)$ .

**2. eset.**  $-\pi < \varepsilon < 0$ ;  $-\pi < \delta < 0$ ;  $\varepsilon + \delta > -\pi$  (a  $Q$  pont a  $CA$  egyenes által meghatározott, a  $B$  pontot tartalmazó félsíkban van) (3.2. ábra). Most a  $Q$  pont baricentrikus koordinátái:  $Q = (S_\delta - S_C : b^2 : S_\varepsilon - S_A)$ .

Legyen  $R$  az  $ABC$  háromszög síkjának tetszőleges pontja, amely nincs rajta egyik oldal tartóegyenesén sem ( $R \notin BC$ ,  $R \notin CA$ ,  $R \notin AB$ ). Legyen továbbá  $m(ABR\curvearrowright) = \omega$  és  $m(BAR\curvearrowright) = \psi$ . Az  $\omega$  illetve  $\psi$  valós számoknak az  $AB$  oldal szerint pozitív vagy negatív előjelet tulajdonítunk attól függően, hogy az  $ABC$  és  $ABR$  illetve a  $BAC$  és  $BAR$  háromszögek ellentétes vagy azonos körüljárásúak (3.3. ábra).





3.3. ábra

**1. eset.**  $0 < \omega < \pi$ ;  $0 < \psi < \pi$ ;  $\omega + \psi < \pi$  (az  $R$  pont az  $AB$  egyenes által meghatározott, a  $C$  pontot nem tartalmazó, félsíkban van). Ebben az esetben az  $R$  pont baricentrikus koordinátái:

$$R = (S_\omega + S_B : S_\psi + S_A : -c^2).$$

**2. eset.**  $-\pi < \omega < 0$ ;  $-\pi < \psi < 0$ ;  $\omega + \psi > -\pi$  (az  $R$  pont az  $AB$  egyenes által meghatározott, a  $C$  pontot tartalmazó félsíkban van) (3.3. ábra). Ebben az esetben az  $R$  pont baricentrikus koordinátái:

$$R = (S_\omega - S_B : S_\psi - S_A : c^2).$$

A  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  pontok baricentrikus koordinátáit megadó képleteket *Conway-féle képleteknek* nevezzük.

## 4. fejezet Alkalmazások

### 4.1. A kúpszeletek egyenletei derékszögű és polárkoordinátákban

**Előzmények.** Sain Márton *Matematikatörténeti ABC* (Nemzeti Tankönyvkiadó – TYPOTEX, Budapest, 1998, hatodik kiadás) című könyvében az „analitikus geometria” címszónál a következőket írja: „A pergéi Apollóniosz a *Kúpszeletekről* nyolc kötetből álló könyvet írt. Bár nem alkalmazhatta a ma használatos koordináta-geometriai módszereket, hiszen ezt akkor még az algebrai jelölések hiánya miatt nem tehette meg, azonban kúpszelettételeit úgy fogalmazta, hogy azokat mindig két kitüntetett irányra (két konjugált átmérőre) vonatkoztatta, tehát valójában ferdeszögű koordinátarendszerben gondolkodott. Eredményei minden további nélkül átírhatók a mai jelölésekkel.” B. L. van der Waerden [22]-ben röviden ismerteti Apollóniosz kúpszeletekkel kapcsolatos eredményeit. Ragaszkodva Apollóniosz szelleméhez keverve használja mind az elemi, mind a mai analitikus geometria jelöléseit, de koordinátarendszereket nem alkalmaz. Ezért merült fel bennem az a kérdés, hogy vajon hogyan néznek ki a kúpszeletek egyenletei ilyen ferdeszögű koordinátarendszerekben? A továbbiakban ezt a kérdést vizsgálom meg (lásd 4.2.-t), miután ebben a részben bevezetésként megadom a kúpszeletek néhány ismert egyenletét.

#### a) A kúpszeletek fokális egyenletei

Az ellipszis, a parabola illetve a hiperbola kanonikus egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = a^2 - c^2) \quad (1)$$

$$y^2 = 2px, \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (b^2 = c^2 - a^2) \quad (3)$$

ahol  $a$  és  $b$  a féltengelyek hossza,  $2c$  a fókusz távolság,  $p$  pedig a parabola paramétere. Ezeket az egyenleteket úgy kapjuk, hogy koordinátatengelyekként

az ellipszis és hiperbola esetében a szimmetriatengelyeket, a parabolánál pedig az egyetlen szimmetriatengelyre merőleges, a csúcsponton átmenő egyenest vesszük. Ha az így kapott  $xOy$  derékszögű vonatkoztatási rendszerek  $Oy$  tengelyét, önmagával párhuzamosan, valamelyik fókuszba toljuk, a kúpszeletek fokális egyenleteit kapjuk.

Az  $Oy$  tengelyt ellipsziszénél a  $(-c,0)$ , parabolánál a  $\left(\frac{p}{2},0\right)$ , hiperbolánál a  $(c,0)$  fókuszpontba toljuk, majd elvégezzük az alábbi koordináta-transzformációkat:

$$\text{ellipsziszre } \begin{cases} x' = x + c \\ y' = y \end{cases}, \text{ azaz}$$

$$\begin{aligned} b^2(x' - c)^2 + a^2y'^2 = a^2b^2 &\Leftrightarrow a^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2x'^2 - b^2(x' - c)^2 + a^2b^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2(x'^2 + y'^2) = (cx' + b^2)^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = \left(\frac{c}{a}x' + \frac{b^2}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

$$\text{parabolára } \begin{cases} x' = x - \frac{p}{2} \\ y' = y \end{cases}, \text{ azaz}$$

$$y'^2 = 2p\left(x' + \frac{p}{2}\right) \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = x'^2 + 2px' + p^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = (x' + p)^2.$$

$$\text{hiperbolára } \begin{cases} x' = x - c \\ y' = y \end{cases}, \text{ azaz}$$

$$\begin{aligned} b^2(x' + c)^2 - a^2y'^2 = a^2b^2 &\Leftrightarrow a^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2x'^2 + b^2(x' + c)^2 - a^2b^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2(x'^2 + y'^2) = (cx' + b^2)^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = \left(\frac{c}{a}x' + \frac{b^2}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

Az  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  mennyiséget az ellipszis illetve a hiperbola *numerikus excentricitásának* hívjuk. Ellipsziszénél  $0 < \varepsilon < 1$ , hiperbolánál  $\varepsilon > 1$ , parabola esetén pedig  $\varepsilon$ -t 1-nek vesszük. A fókuszokat (vagy parabolánál a fókusz) tartalmazó tengelyre, valamelyik fókuszban emelt merőlegesen a kúpszelet egy húr határoz meg. E húr félhosszát a *kúpszelet paraméterének* nevezzük és  $p$ -vel jelöljük. Ellipszis és hiperbola esetén  $p = \frac{b^2}{a}$ , a parabolánál pedig az említett húr félhossza egyenlő a fókuszpontnak a vezéregyenesig mért távolságával, amit eleve a parabola paraméterének nevezünk. Tehát a kúpszeletek fokális egyenlete

$$x^2 + y^2 = (\varepsilon x + p)^2 \quad (4)$$

alakú, ahol  $\varepsilon$  a kúpszelet numerikus excentricitása,  $p$  pedig a paramétere.

Ha az  $Oy$  tengelyt ellipsziszénél a  $(c,0)$ , hiperbolánál a  $(-c,0)$  fókuszpontba toljuk, akkor fokális egyenletük

$$x^2 + y^2 = (\varepsilon x - p)^2, \quad (5)$$

ahol  $\varepsilon$ -nak és  $p$ -nek ugyanaz a jelentése, mint a (4) képletben. A parabolának csak egy fokális egyenlete van.

## b) A kúpszeletek fokális egyenletei polárkoordinátákban

I. Ellipsziszénél válasszuk a polártengely kezdőpontját a  $(-c,0)$  fókuszpontban, iránya pedig mutasson a másik fókuszpont felé, parabolánál a  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  fókuszpontban, iránya egyezzen meg a tengelyiránnyal, hiperbola esetén a  $(c,0)$  fókuszpontban, iránya legyen a másik fókuszpont felé mutató iránnyal ellentétes.

Ha a polártengely egybeesik egy  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszer  $x$ -tengelyének pozitív féltengelyével, akkor a  $P$  pont  $(x,y)$  derékszögű koordinátái és  $(r,\varphi)$  polárkoordinátái között érvényesek az  $x = r \cos \varphi$  és  $y = r \sin \varphi$  összefüggések, ahol  $r$  a vezérsugár ( $0 < r < \infty$ ),  $\varphi$  a poláris szög ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Az  $x^2 + y^2 = (\varepsilon x + p)^2$  fokális egyenletben  $x$ -et és  $y$ -t helyettesítve, a kúpszeletek polárkoordinátás egyenletét kapjuk:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi &= (\varepsilon r \cos \varphi + p)^2 \Leftrightarrow r^2 = (\varepsilon r \cos \varphi + p)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \pm r &= \varepsilon r \cos \varphi + p \Leftrightarrow r(\pm 1 - \varepsilon \cos \varphi) = p. \end{aligned}$$

1. Ha  $0 < \varepsilon < 1$  és  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , az ellipszis egyenlete  $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ . (9)

2. Ha  $\varepsilon = 1$  és  $0 < \varphi < 2\pi$ , a parabola egyenlete  $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ . (10)

Jelölje  $\theta$  a hiperbola első negyedbe eső aszimptotájának az  $Ox$  tengellyel alkotott hajlásszögét:  $\cos \theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \theta = \arccos \frac{1}{\varepsilon}$ .

3. Ha  $\varepsilon > 1$  és  $\theta < \varphi < 2\pi - \theta$ , a hiperbola  $(c,0)$  fókuszpontjához közelebbi ágának egyenlete  $r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$ . (11)

Ha  $\varepsilon > 1$  és  $\pi - \theta < \varphi < \pi + \theta$ , a hiperbola  $(-c, 0)$  fókuszpontjához közelebbi ágának egyenlete  $r = \frac{P}{-1 - \varepsilon \cos \varphi}$ . (12)

II. Ha ellipszisenél a polártengely kezdőpontja a  $(c, 0)$ , hiperbolánál a  $(-c, 0)$  fókuszpontba esik, iránya pedig megegyezik az I. pontban meghatározott iránnyal, akkor az  $x^2 + y^2 = (\varepsilon x - p)^2$  fokális egyenlet alapján az ellipszis és hiperbola egyenlete polárkoordinátákban a következő lesz:

1. Ha  $0 < \varepsilon < 1$  és  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , az ellipszis egyenlete  $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ . (13)

2. Ha  $\varepsilon > 1$  és  $0 \leq \varphi < \theta$  vagy  $2\pi - \theta < \varphi < 2\pi$ , a hiperbola  $(c, 0)$  fókuszpontjához közelebbi ágának egyenlete  $r = \frac{P}{-1 + \varepsilon \cos \varphi}$ . (14)

Ha  $\varepsilon > 1$  és  $0 \leq \varphi < \pi - \theta$  vagy  $\pi + \theta < \varphi < 2\pi$ , a hiperbola  $(-c, 0)$  fókuszpontjához közelebbi ágának egyenlete  $r = \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ . (15)

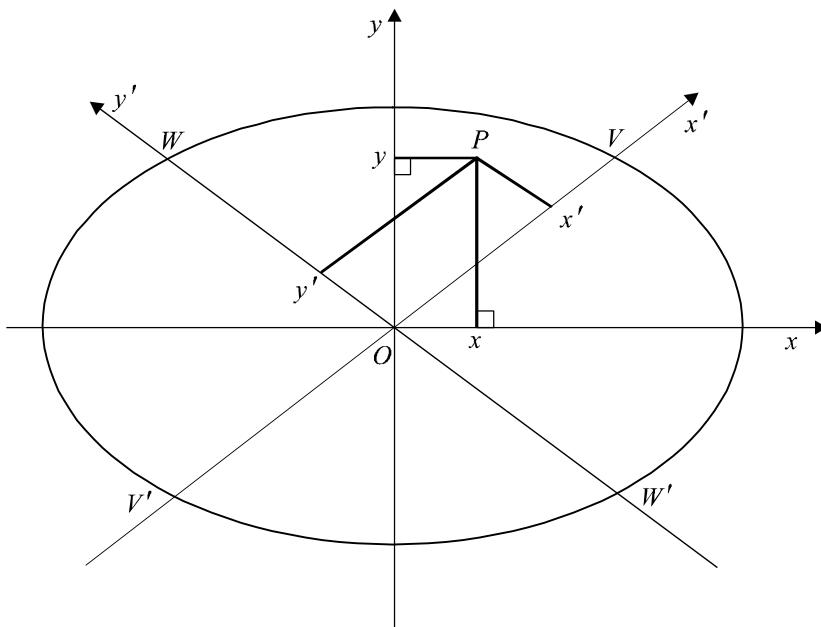
## **4.2. A kúpszeletek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben**

Centrális másodrendű görbéknel (körök, ellipszisek, hiperbolák) egy adott átmérővel párhuzamos húrok felezőpontjainak mértani helye egy másik átmérő, amelyet *konjugált átmérő*nek nevezünk. Az ilyen görbékre igaz, hogy egy átmérő végpontjaiban a görbéhez húzott érintők párhuzamosak a konjugált átmérővel (ennek bizonyítását lásd e rész g) alpontjában). Körök esetében a konjugált átmérők egymásra mindig merőlegesek.

### **a) Az ellipszis egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében**

Legyen  $V = (u, v)$  az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  kanonikus egyenletű  $E$  ellipszis tetszőleges pontja, ahol  $2a$  az ellipszis nagy-,  $2b$  kistengelyének hossza,  $2c$  pedig a fókusz távolsága. Az ellipszis két szimmetriatengelyéből álló derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontját jelölje  $O$ , az  $OV$  irány

konjugált iránya pedig legyen  $OW$ , ahol  $W \in E$  (4.2.1. ábra). Meghatározzuk a  $W = (\alpha, \beta)$  pont koordinátáit az  $u$  és  $v$  függvényében.



4.2.1. ábra

Ha  $VV'$  és  $WW'$  az ellipszis konjugált átmérői, akkor a  $W$  illetve a  $W'$  pontban az ellipszis érintője párhuzamos a  $VV'$  egyenessel. Mivel  $V' = (-u, -v)$ , a  $VV'$  iránytényezője  $m_{VV'} = \frac{v}{u}$ . A  $W$  pontban az ellipszis  $d$

érintőjének egyenlete  $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1$ , iránytényezője pedig  $m_d = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ .

A  $d \parallel VV'$  alapján  $\frac{v}{u} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$ , azaz  $v = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot u$ .

$$\text{Tehát } \frac{u^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot u^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{b^2}\right) \frac{u^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{\beta} - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{u}{\beta} + \frac{a}{b}\right) = 0. \quad \text{Következésképpen } \beta = \pm \frac{b}{a} u \quad \text{és}$$

$$\alpha = \mp \frac{a}{b} v, \text{ azaz } W = \left(-\frac{a}{b} v, \frac{b}{a} u\right) \text{ és } W' = \left(\frac{a}{b} v, -\frac{b}{a} u\right).$$

Ha  $V = (a \cos t, b \sin t)$ , akkor  $W = (-a \sin t, b \cos t)$ , ahol  $t \in [0, 2\pi)$ .

Az  $OV$  szakasz hossza legyen  $p$ , az  $OW$  szakaszé pedig  $q$ . Tekintsük most az  $\vec{e}_1 = \frac{1}{p}\overrightarrow{OV}$  és  $\vec{e}_2 = \frac{1}{q}\overrightarrow{OW}$  bázisvektorú  $x'Oy'$  normált ferdeszögű koordináta-rendszert (4.2.1. ábra). Egy tetszőleges  $P$  pont  $xOy$  rendszerbeli koordinátái legyenek  $(x, y)$ ,  $x'Oy'$  rendszerbeli koordinátái pedig  $(x', y')$ . Mivel  $\vec{e}_1 = \frac{u}{p}\vec{i} + \frac{v}{p}\vec{j}$  és  $\vec{e}_2 = -\frac{av}{bq}\vec{i} + \frac{bu}{aq}\vec{j}$ , az  $xOy$  rendszerből az  $x'Oy'$  rendszerbe való áttérési mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & -\frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix}. \text{ Tehát } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & -\frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

ahonnan  $x = \frac{u}{p}x' - \frac{av}{bq}y'$  és  $y = \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'$ . Következésképpen az  $E$  ellipszis  $x'Oy'$  rendszerbeli egyenlete:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} \left( \frac{u}{p}x' - \frac{av}{bq}y' \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left( \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y' \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2 p^2} x'^2 + \frac{v^2}{b^2 q^2} y'^2 + \frac{v^2}{b^2 p^2} x'^2 + \frac{u^2}{a^2 q^2} y'^2 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \left( \frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} = 1. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlet formálisan megegyezik az ellipszis kanonikus egyenletével, aminek az a magyarázata, hogy ha a  $V$  pont egybeesik az ellipszis  $(a, 0)$  koordinátájú csúcspontjával, akkor a konjugált irányba eső  $W = (0, b)$  pont az ellipszis másik csúcspontja lesz. Ez abból is következik, hogy az ellipszis szimmetriatengelyei egymásra merőleges konjugált irányok. Tehát itt lényegében arról van szó, hogy a konjugált irányok  $x'Oy'$  ferdeszögű koordináta-rendszerében az ellipszis egyenlete

$$\frac{x'^2}{p^2} + \frac{y'^2}{q^2} = 1 \quad (1)$$

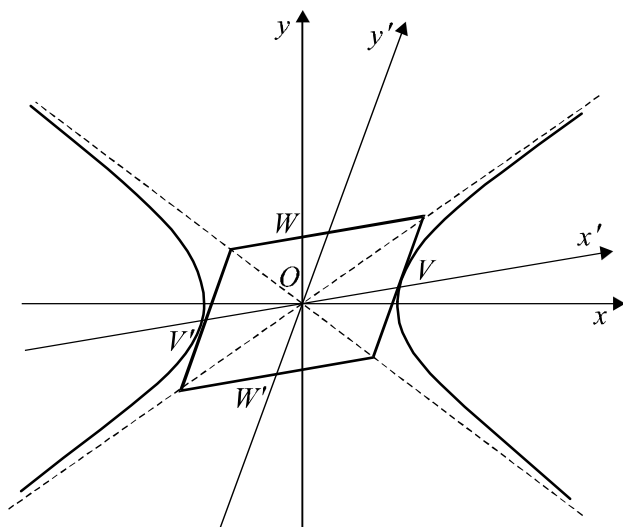
alakú, ahol  $2p$  illetve  $2q$  a konjugált átmérők hosszait jelentik. Az ellipszis kanonikus egyenletét az előbbi általános egyenletből abban a sajátos esetben kapjuk, amikor  $V = (a, 0)$ , azaz  $2p = 2a$  és  $2q = 2b$ .

**Megjegyzés.** Az ellipszis szimmetriatengelyeire eső konjugált átmérők sajátos tulajdonsága, hogy az egyik a legnagyobb, a másik pedig a legkisebb az ellipszis összes átmérői közül. Tehát a kanonikus egyenlettel kapcsolatban megalapozott a nagy- és kistengely elnevezések használata. Az általános esetben viszont az ellipszis konjugált átmérőpárjainak nagyságrendi alapon történő megkülönböztetése (nagy- és kisátmérő) értelmét veszti, mivel az  $OV$  bizonyos irányaira  $p < q$ , más irányaira viszont  $p > q$ .

### **b) A hiperbola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében**

Legyen  $V = (u, v)$  az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  kanonikus egyenletű  $H$  hiperbola tetszőleges pontja, ahol  $2a$  a hiperbola valós,  $2b$  képzetes tengelyének hossza,  $2c$  pedig a fókusz távolsága. A hiperbola két szimmetriatengelyéből álló derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontját jelölje  $O$ , az  $OV$  irány konjugált iránya pedig legyen  $OW$ ,  $W \in \overline{H}$ , ahol  $\overline{H}$  a  $H$  hiperbola konjugált hiperbolája (4.2.2. ábra). Meghatározzuk a  $W = (\alpha, \beta)$  pont koordinátáit az  $u$  és  $v$  függvényében.





4.2.2. ábra

Ha  $VV'$  és  $WW'$  a hiperbola konjugált átmérői, akkor a  $W$  illetve a  $W'$  pontban a konjugált hiperbola érintője párhuzamos a  $VV'$  egyenessel,

azaz  $v = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot u$ . Tehát  $\frac{u^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot u^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \left( -1 + \frac{\beta^2}{b^2} \right) \frac{u^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{u^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow \left( \frac{u}{\beta} - \frac{a}{b} \right) \left( \frac{u}{\beta} + \frac{a}{b} \right) = 0.$$

Következésképpen  $\beta = \pm \frac{b}{a} u$  és  $\alpha = \pm \frac{a}{b} v$ , azaz  $W = \left( \frac{a}{b} v, \frac{b}{a} u \right)$  és

$W' = \left( -\frac{a}{b} v, -\frac{b}{a} u \right)$ . Ha  $V = \left( \frac{a}{\cos t}, b \cdot \operatorname{tg} t \right)$ , akkor  $W = \left( a \cdot \operatorname{tg} t, \frac{b}{\cos t} \right)$ , ahol

$$t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Az  $OV$  illetve  $OW$  szakasz hossza legyen  $p$  illetve  $q$ . Tekintsük most az  $\vec{e}_1 = \frac{1}{p} \overrightarrow{OV}$  és  $\vec{e}_2 = \frac{1}{q} \overrightarrow{OW}$  bázisvektorú  $x'Oy'$  normált ferdeszögű

koordináta-rendszert. Egy tetszőleges  $P$  pont  $xOy$  rendszerbeli koordinátái legyenek  $(x, y)$ ,  $x'Oy'$  rendszerbeli koordinátái pedig  $(x', y')$ . Mivel

$$\vec{e}_1 = \frac{u}{p} \vec{i} + \frac{v}{p} \vec{j} \text{ és } \vec{e}_2 = \frac{av}{bq} \vec{i} + \frac{bu}{aq} \vec{j}, \text{ az } xOy \text{ rendszerből az } x'Oy' \text{ rendszerbe}$$

való áttérési mátrix  $A = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & \frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix}$ . Tehát  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{p} & \frac{av}{bq} \\ \frac{v}{p} & \frac{bu}{aq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , ahonnan

$x = \frac{u}{p}x' + \frac{av}{bq}y'$  és  $y = \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y'$ . Következésképpen a H hiperbola  $x'Oy'$  rendszerbeli egyenlete:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} \left( \frac{u}{p}x' + \frac{av}{bq}y' \right)^2 - \frac{1}{b^2} \left( \frac{v}{p}x' + \frac{bu}{aq}y' \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{u^2}{a^2 p^2} x'^2 + \frac{v^2}{b^2 q^2} y'^2 - \frac{v^2}{b^2 p^2} x'^2 - \frac{u^2}{a^2 q^2} y'^2 = 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \left( \frac{x'^2}{p^2} - \frac{y'^2}{q^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{p^2} - \frac{y'^2}{q^2} = 1. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlet is formálisan megegyezik a hiperbola kanonikus egyenletével, amelyet itt is sajátos esetként kapunk, éspedig ha a  $V$  pont egybeesik az  $(a,0)$  csúcsponttal (a hiperbola szimmetriatengelyei is egymásra merőleges konjugált irányok). Tehát a hiperbola egyenlete a konjugált irányok  $x'Oy'$  ferdeszögű koordináta-rendszerében

$$\frac{x'^2}{p^2} - \frac{y'^2}{q^2} = 1 \quad (2)$$

alakú, ahol  $2p$  és  $2q$  a konjugált átmérők hosszai.

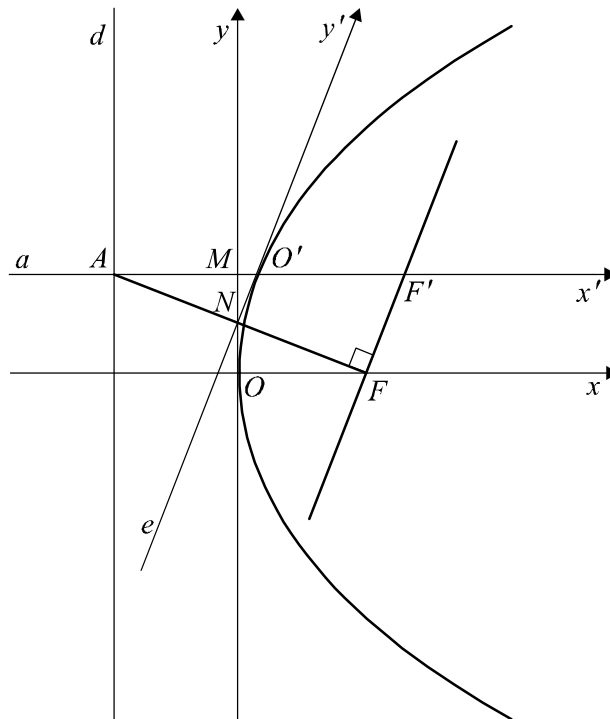
### c) A parabola egyenlete egy érintőirány és a tengelyirány koordinátarendszerében

Tekintsük a  $d$  vezéregyenesű,  $F$  fókuszpontú  $\Gamma$  parabolát, amelynek kanonikus egyenlete  $y^2 = 2px$ , ahol  $p$  a parabola paramétere. Legyen

$O' = \left( \frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m} \right)$  a parabola tetszőleges pontja ( $m \neq 0$ ). Mivel az  $O'$  pontban

a parabola  $e$  érintőjének egyenlete  $\frac{p}{m}y = p \left( x + \frac{p}{2m^2} \right) \Leftrightarrow y = mx + \frac{p}{2m}$ , az  $m$

ennek az érintőnek az iránytényezője, azaz  $m = tg\alpha$ , ahol  $\alpha$  az  $e$  érintő és  $Ox$  tengely hajlásszöge (4.2.3. ábra).



4.2.3. ábra

Mivel a parabolának nincsenek konjugált átmérői, ezért ebben az esetben nem beszélhetünk konjugált irányokról. Tekinthejtük viszont az  $O'$  ponton átmenő, a parabola  $Ox$  tengelyével párhuzamos  $a$  egyenest. Válasszuk az  $a$  és  $e$  egyeneseket az  $x'O'y'$  ferdeszögű koordináta-rendszer tengelyeként (legyen  $a$  az  $O'x'$ , azaz az abszcissza-,  $e$  pedig az  $O'y'$ , azaz az ordinátatengely).

Ha egy tetszőleges  $P$  pont  $xOy$  rendszerbeli koordinátái  $(x, y)$ ,  $x'O'y'$  rendszerbeli koordinátái pedig  $(x', y')$ , akkor  $\overrightarrow{OO'} = \frac{p}{2m^2}\vec{i} + \frac{p}{m}\vec{j}$ , az áttérési mátrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{pmatrix}$ , tehát  $x = x' + y' \cos \alpha + \frac{p}{2m^2}$  és  $y = y' \sin \alpha + \frac{p}{m}$ . (Az  $x'O'y'$  rendszert az  $xOy$  rendszerből úgy kapjuk, hogy először az  $Oy$  tengelyt elforgatjuk az  $O$  pont körül, majd az így kapott  $xOy'$  koordináta-rendszert eltoljuk az  $O' = \left(\frac{p}{2m^2}, \frac{p}{m}\right)$  pontba.) Tehát a parabola  $x'O'y'$  rendszerbeli egyenlete:

$$\left(y' \sin \alpha + \frac{p}{m}\right)^2 = 2p \left(x' + y' \cos \alpha + \frac{p}{2m^2}\right) \Leftrightarrow y'^2 \sin^2 \alpha = 2px' \Leftrightarrow y'^2 = 2 \left(p + \frac{p}{m^2}\right)x'.$$

A  $\lambda = \frac{p}{\sin^2 \alpha} = p + \frac{p}{m^2}$  jelöléssel a parabola  $x'O'y'$  rendszerbeli egyenlete

$$y'^2 = 2\lambda x', \quad (3)$$

amely formailag azonos a parabola kanonikus egyenletével. Nevezzük a  $\lambda$ -t az  $O'$  ponthoz tartozó paraméternek. Mi most a  $\lambda$  paraméter mértani jelentése? Legyen  $\{M\} = a \cap Oy$  és  $\{A\} = a \cap d$ :

$\lambda = p + \frac{p}{m^2} = p + 2MO' = 2(AM + MO') = 2AO'$  (4.2.3 ábra). Tehát  $\lambda$  az  $O'$  pont  $d$  vezéregyenestől való távolságának a kétszerese ( $\lambda \geq p$ ). Ha  $F'$  az  $A$  pont  $O'$  szerinti szimmetrikusa, akkor  $\lambda$  az  $F'$  pontnak a  $d$  vezéregyenestől való távolsága. Nevezzük az  $F'$  pontot *pszeudo-fókuszpont*nak.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a parabola  $F$  fókuszpontjának az  $x'O'y'$  rendszerbeli koordinátáit, az  $x'$  és  $y'$  koordinátákat kifejezzük az  $x$  és  $y$  koordináták függvényében:

$$y' = \frac{y}{\sin \alpha} - \frac{p}{m \sin \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} - \frac{p \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} - \lambda \cos \alpha,$$

$$x' = x - y' \cos \alpha - \frac{p}{2m^2} = x - \frac{y}{\sin \alpha} \cos \alpha + \lambda \cos^2 \alpha - \frac{p}{2m^2} = x - \frac{y}{m} + \lambda(1 - \sin^2 \alpha) - \frac{p}{2m^2} = x - \frac{y}{m} + \lambda - p - \frac{p}{2m^2} = x - \frac{y}{m} + \frac{p}{m^2} - \frac{p}{2m^2} = x - \frac{y}{m} + \frac{p}{2m^2}.$$

Az előbbi képletek alapján a parabola  $F$  fókuszpontjának az  $x'O'y'$  rendszerbeli koordinátái  $\left(\frac{\lambda}{2}, -\lambda \cos \alpha\right)$ , az  $F'$  pont koordinátái pedig  $\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right)$ . Következésképpen  $FF' \parallel e$ .

Az  $A$  pont  $xOy$  rendszerbeli koordinátái  $\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{m}\right)$ , az  $F$  ponté  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ . Mivel az  $AF$  egyenes iránytényezője  $m_{AF} = -\frac{1}{m}$ , ezért  $AF \perp e$  és  $AF \perp FF'$ . Az  $[AF]$  szakasz  $N$  felezőpontjának koordinátái  $\left(0, \frac{p}{2m}\right)$ ,

felezőmerőlegesének egyenlete pedig  $y = mx + \frac{p}{2m}$ , amely éppen az  $O'$  pontban a parabola  $e$  érintőjének egyenlete (4.2.3. ábra).

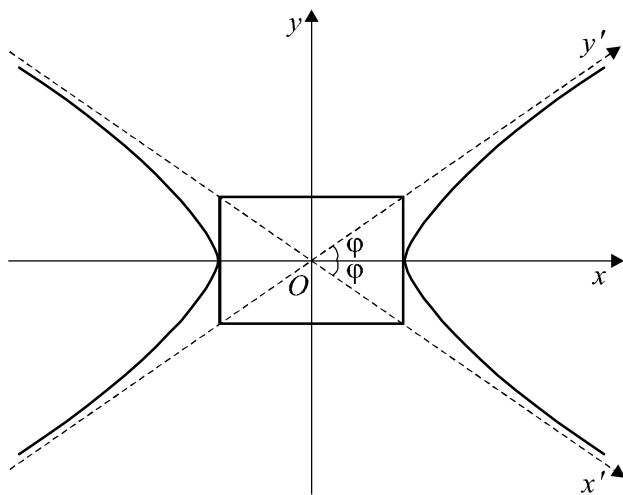
**Megjegyzések.** 1. Az  $e$  érintő és az  $AF$  egyenes  $N$  metszéspontja egybeesik az  $OM$  szakasz felezőpontjával.

2. Ha az  $O'$  pont leírja a  $\Gamma$  parabolát, az  $F'$  pseudo-fókuszpont az  $y^2 = p\left(x - \frac{p}{2}\right)$  egyenletű parabolán mozog, amelynek csúcspontja éppen a  $\Gamma$  parabola  $F$  fókuszpontjába esik.

3. Ha  $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , azaz  $m \rightarrow \infty$ , akkor  $\lambda \rightarrow p$  és ekkor a parabola kanonikus egyenletét kapjuk.

#### d) A hiperbola egyenlete aszimptotáinak koordinátarendszerében

Válasszuk most a  $H$  hiperbola aszimptotáit egy  $x'Oy'$  koordinátarendszer tengelyeként (4.2.4. ábra). Ha az aszimptoták egységvektorai  $\vec{e}_1$  és  $\vec{e}_2$ , az általuk alkotott szöveget pedig  $2\varphi$  jelöli, akkor  $\vec{e}_1 = \cos \varphi \cdot \vec{i} - \sin \varphi \cdot \vec{j}$  és  $\vec{e}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$ .



4.2.4. ábra

Mivel  $\sin \varphi = \frac{b}{c}$  és  $\cos \varphi = \frac{a}{c}$ , az  $(\vec{i}, \vec{j})$  ortonormált bázisról az  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

„aszimptotikus” bázisra való áttérési mátrix  $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

Ha egy tetszőleges  $P$  pont  $xOy$  rendszerbeli koordinátái  $(x, y)$ ,  $x'Oy'$  rendszerbeli koordinátái pedig  $(x', y')$ , akkor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ,

következésképpen  $x = \frac{a}{c}(x' + y')$  és  $y = \frac{b}{c}(-x' + y')$ . Tehát a hiperbola egyenlete az aszimptotáiból álló  $x'Oy'$  ferdeszögű koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} (x' + y')^2 - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2} (-x' + y')^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x' + y')^2 - (-x' + y')^2 &= c^2 \Leftrightarrow x'y' = \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

### e) A kúpszeletek érintőinek egyenletei ferdeszögű koordinátarendszerekben

**1. Ellipszis.** Legyen  $M_0$  az ellipszis tetszőleges pontja,  $(x_0, y_0)$  az  $M_0$  pont koordinátái az  $xOy$  derékszögű,  $(x'_0, y'_0)$  pedig a konjugált irányok  $x'Oy'$  ferdeszögű koordinátarendszerében. Ismert, hogy, az  $M_0$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete az  $xOy$  rendszerben  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ . Ezt az egyenletet az ellipszis  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  egyenletéből úgy kapjuk, hogy miután azt az  $\frac{x \cdot x}{a^2} + \frac{y \cdot y}{b^2} = 1$  alakba írtuk, a baloldal első tagjában  $x$ -t  $x_0$ -val, a második tagjában  $y$ -t  $y_0$ -val helyettesítjük. Nevezzük ezt az eljárást *duplázási eljárás*nak. Most megnézzük, hogy ez az eljárás „öröklődik”-e a ferdeszögű koordinátarendszerekre?

A transzformációs képletek alapján a  $d$  érintő egyenlete az  $x'Oy'$  rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{u}{p} x'_0 - \frac{av}{bq} y'_0 \right) \left( \frac{u}{p} x' - \frac{av}{bq} y' \right) + \frac{1}{b^2} \left( \frac{v}{p} x'_0 + \frac{bu}{aq} y'_0 \right) \left( \frac{v}{p} x' + \frac{bu}{aq} y' \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \frac{x'_0 x'}{p^2} + \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right) \frac{y'_0 y'}{q^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'_0 x'}{p^2} + \frac{y'_0 y'}{q^2} = 1.$$

**2. Hiperbola.** Legyen  $M_0$  a hiperbola tetszőleges pontja,  $(x_0, y_0)$  az  $M_0$  pont koordinátái az  $xOy$  derékszögű,  $(x'_0, y'_0)$  pedig a konjugált irányok  $x'O'y'$  ferdeszögű koordináta-rendszerében. Az  $M_0$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete az  $xOy$  rendszerben  $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ . Az áttérési képletek alapján a  $d$

érintő egyenlete az  $x'O'y'$  rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{u}{p} x'_0 + \frac{av}{bq} y'_0 \right) \left( \frac{u}{p} x' + \frac{av}{bq} y' \right) - \frac{1}{b^2} \left( \frac{v}{p} x'_0 + \frac{bu}{aq} y'_0 \right) \left( \frac{v}{p} x' + \frac{bu}{aq} y' \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \frac{x'_0 x'}{p^2} - \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \frac{y'_0 y'}{q^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x'_0 x'}{p^2} - \frac{y'_0 y'}{q^2} = 1.$$

**3. Parabola.** Legyen  $M_0$  a parabola tetszőleges pontja,  $(x_0, y_0)$  az  $M_0$  pont koordinátái az  $xOy$  derékszögű,  $(x'_0, y'_0)$  pedig egy érintőirány és a tengelyirány  $x'O'y'$  ferdeszögű koordináta-rendszerében. Az  $M_0$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete az  $xOy$  rendszerben  $y_0 y = p(x + x_0)$ . Az áttérési képletek alapján a  $d$  érintő egyenlete az  $x'O'y'$  rendszerben a következő lesz:

$$\left( y'_0 \sin \alpha + \frac{p}{m} \right) \left( y' \sin \alpha + \frac{p}{m} \right) = p \left( x' + y' \cos \alpha + \frac{p}{2m^2} + x'_0 + y'_0 \cos \alpha + \frac{p}{2m^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_0 y' \sin^2 \alpha + \frac{p}{m} y'_0 \sin \alpha + \frac{p}{m} y' \sin \alpha + \frac{p^2}{2m^2} = p(x' + x'_0) + p(y' + y'_0) \cos \alpha + \frac{p^2}{2m^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'_0 y' \frac{p}{\lambda} + \frac{p}{m} y'_0 \sin \alpha + \frac{p}{m} y' \sin \alpha = p(x' + x'_0) + p(y' + y'_0) \cos \alpha \Leftrightarrow y'_0 y' = \lambda(x' + x'_0).$$

Tehát megállapíthatjuk, hogy a konjugált irányok illetve parabola esetén egy érintőirány és a tengelyirány koordinátarendszerében a kúpszeletek adott pontbeli érintőjének egyenletét szintén a duplázási eljárással kapjuk, mint a kanonikus egyenleteik esetében.

## f) A hiperbola érintőinek egyenlete az aszimptoták koordinátarendszerében

Legyen  $M_0$  a hiperbola tetszőleges pontja,  $(x_0, y_0)$  az  $M_0$  pont koordinátái az  $xOy$  derékszögű,  $(x'_0, y'_0)$  pedig az aszimptoták  $x'Oy'$  ferdeszögű koordináta-rendszerében. Az  $M_0$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete az  $xOy$  rendszerben  $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$ . A transzformációs képletek alapján a  $d$  érintő egyenlete az  $x'Oy'$  rendszerben a következő lesz:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{c}(x'_0 + y'_0) \cdot \frac{a}{c}(x' + y') - \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{c}(-x'_0 + y'_0) \cdot \frac{b}{c}(-x' + y') = 1 \Leftrightarrow y'_0x' + x'_0y' = \frac{c^2}{2}.$$

Tehát az érintő egyenletét ebben az esetben is duplázással kapjuk, és pedig úgy, hogy a hiperbola  $x'y' = \frac{c^2}{4}$  egyenletét  $x'y' + x'y' = \frac{c^2}{2}$  alakba írjuk, majd a baloldal egyik tagjában  $x'$ -t  $x'_0$ -val, a másik tagjában  $y'$ -t  $y'_0$ -val helyettesítjük.

## g) Kúpszeletekkel kapcsolatos tulajdonságok bizonyítása

Ebben a részben azt mutatjuk meg, hogy kúpszeletekkel kapcsolatos tulajdonságok bizonyítása sok esetben lényegesen egyszerűsíthető, ha a bizonyítás során valamely ferdeszögű koordinátarendszerben felírt egyenletüket használjuk.

*1. Igazoljuk, hogy az ellipszis (hiperbola) adott pontbeli érintője párhuzamos az ehhez a ponthoz tartozó átmérő konjugált átmérőjével.*

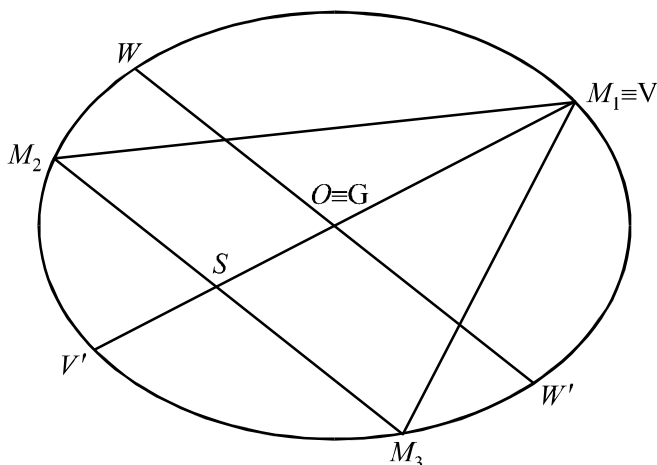
**Bizonyítás.** Ha  $VV'$  és  $WW'$  az ellipszis (hiperbola) konjugált átmérői, akkor a konjugált irányok  $x'Oy'$  koordináta-rendszerében a  $V = (p, 0)$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete  $\frac{p \cdot x'}{p^2} \pm \frac{0 \cdot y'}{q^2} = 1 \Leftrightarrow x' = p$ , azaz  $d \parallel OW$ .

*2. Írjunk az  $E$  ellipszisbe egy olyan  $M_1M_2M_3$  háromszöget, amelynek súlypontja egybeesik az ellipszis középpontjával. Igazoljuk, hogy az ellipszis  $M_1, M_2, M_3$  pontjaihoz tartozó normálisai egy ponton mennek át.*



**Bizonyítás.** Ezzel a feladattal kapcsolatban több nehézség is felmerül. Például hogyan írjunk az ellipszisbe egy olyan háromszöget, amely a feltételeket teljesíti? Egyáltalán létezik-e ilyen háromszög? Először a feladat feltételeit kielégítő  $M_1M_2M_3$  háromszög létezését bizonyítjuk.

A  $V \equiv M_1 \in E$  ponthoz tartozó  $VV'$  átmérő konjugált átmérője legyen  $WW'$ . A  $VV'$  átmérő a  $WW'$ -vel párhuzamos húrok felezőpontjainak mértani helye (4.2.5. ábra).



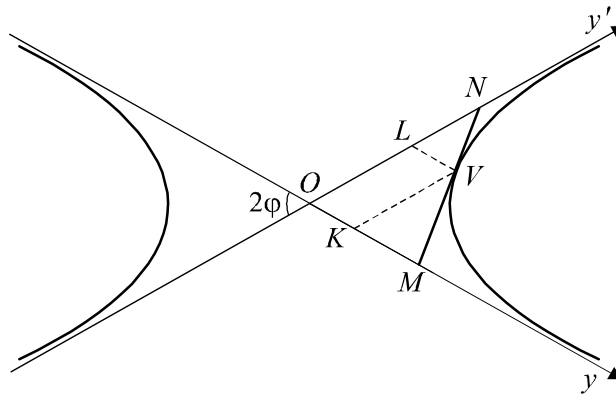
4.2.5. ábra

Ha  $S$  az  $[OV']$  szakasz felezőpontja, akkor az  $S$  ponton átmenő  $d$  egyenes az  $E$  ellipszist az  $M_2$  és  $M_3$  pontokban metszi. Mivel  $OV = 2 \cdot OS$ , az  $[M_1S]$  szakasz akkor és csak akkor lesz az  $M_1M_2M_3$  háromszög súlyvonala, ha az  $S$  pont az  $[M_2M_3]$  szakaszt is felezi, azaz ha  $M_2M_3 \parallel WW'$ . Ebben az esetben pedig az  $M_1M_2M_3$  háromszög  $G$  súlypontja egybeesik  $O$ -val, az ellipszis centrumával.

Az ellipszis  $M_i$  pontjához tartozó érintőt jelölje  $d_i, i = 1, 2, 3$ . Az 1. tulajdonság alapján  $d_1 \parallel M_2M_3$ ,  $d_2 \parallel M_3M_1$ ,  $d_3 \parallel M_1M_2$ . Tehát az  $M_i$  pontokbeli normálisok az  $M_1M_2M_3$  háromszög magasságvonalai lesznek, ezek pedig egy pontban metszik egymást. (Ennek a feladatnak más megoldásai megtalálhatók *A merőleges affinitás és néhány alkalmazása* című cikkemben: Matlap, V. évf., 2001. november, 9. szám, 330 – 334)

3. A hiperbola  $V$  pontbeli érintőjéből az aszimptoták által kivágott  $[MN]$  szakaszt a  $V$  pont felezi.

**Bizonyítás.** A  $V=(u,v)$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete az aszimptoták  $x'Oy'$  ferdeszögű koordinátarendszerében  $vx' + uy' = \frac{c^2}{2}$ .



4.2.6. ábra

Ha  $d$  az aszimptotákat az  $M$  és  $N$  pontokban metszi (4.2.6. ábra), akkor  $M = \left(\frac{c^2}{2v}, 0\right)$  és  $N = \left(0, \frac{c^2}{2u}\right)$ . Mivel  $uv = \frac{c^2}{4} \Leftrightarrow u = \frac{c^2}{4v} \Leftrightarrow v = \frac{c^2}{4u}$ , a  $V$  pont az  $MN$  szakasz felezőpontja.

4. A hiperbola bármely érintője és aszimptotái által határolt háromszög területe  $ab$ , azaz állandó.

**Bizonyítás.** Ha a  $d$  érintő az aszimptotákat az  $M$  illetve  $N$  pontban metszi, akkor  $M = \left(\frac{c^2}{2v}, 0\right)$  és  $N = \left(0, \frac{c^2}{2u}\right)$ . Tehát

$$T_{OMN} = \frac{1}{2} |OM| |ON| \sin 2\varphi = \frac{1}{2} \left| \frac{c^2}{2v} \right| \left| \frac{c^2}{2u} \right| \sin 2\varphi = c^2 \sin \varphi \cos \varphi = ab.$$

**Megjegyzés.** A 3. és 4. tulajdonságok egyik következménye, hogy a hiperbola  $V$  pontján át az aszimptotákkal párhuzamosan húzott egyenesek az aszimptotákkal egy állandó területű  $OKVL$  paralelogrammát képeznek:

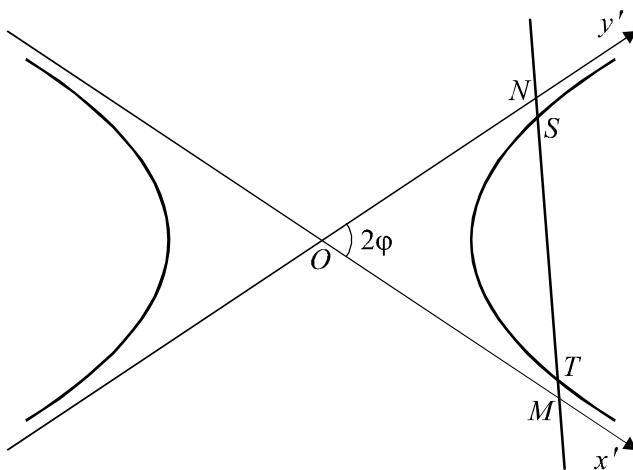
$$T_{OKVL} = \frac{1}{2} T_{OMN} = \frac{1}{2} ab.$$

5. A hiperbola valamely aszimptotájával párhuzamos egyenes a hiperbolát egyetlen pontban metszi.

**Bizonyítás.** Ha a  $d$  egyenes párhuzamos az  $Oy'$  tengellyel (aszimptotával), akkor az aszimptoták  $x'Oy'$  koordináta-rendszerében az egyenlete  $x' = u$  alakú, következésképpen  $y' = \frac{c^2}{4u}$ . Tehát  $d$  a hiperbolát az egyetlen  $\left(u, \frac{c^2}{4u}\right)$  pontban metszi. Ha a  $d$  egyenes párhuzamos az  $Ox'$  tengellyel (aszimptotával), akkor egyenlete  $y' = v$  alakú és  $x' = \frac{c^2}{4v}$ . Tehát  $d$  a hiperbolát szintén egyetlen pontban metszi.

6. Ha egy  $d$  egyenes a hiperbolát két pontban metszi, akkor a  $d$ -nek az aszimptoták és a hiperbola ágai közé eső szakaszai egyenlők.

**Bizonyítás.** A  $d$  egyenesnek az  $Ox'$  tengellyel (aszimptotával) való metszéspontja legyen  $M$ , az  $Oy'$  tengellyel (aszimptotával) pedig  $N$ . A  $d$  egyenes a hiperbolát a  $T$  és  $S$  pontokban metszi ( $T$  legyen közelebb  $M$ -hez,  $S$  pedig az  $N$ -hez) (4.2.7. ábra).



4.2.7. ábra

Ha  $T = (\alpha, \beta)$  és  $S = (u, v)$ , akkor az 5. tulajdonság alapján  $\alpha \neq u, \beta \neq v$  és  $\alpha\beta = \frac{c^2}{4} = uv$ . A  $d$  egyenes irányításegyezője  $m = \frac{\beta - v}{\alpha - u} \Leftrightarrow \beta - m\alpha = v - mu$ , tehát egyenlete  $y' - \beta = m(x' - \alpha)$ . Meghatározzuk az  $M$  és  $N$  pontok koordinátáit az aszimptoták  $x'Oy'$  koordinátarendszerében:

$$y' = 0 \Rightarrow x' - \alpha = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow x' = \alpha - \frac{\beta}{m} \Rightarrow M = \left( \alpha - \frac{\beta}{m}, 0 \right);$$

$$x' = 0 \Rightarrow y' - \beta = -m\alpha \Rightarrow y' = \beta - m\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = (0, \beta - m\alpha) \text{ vagy } N = (0, v - mu).$$

Kiszámítjuk a  $TM$  és az  $SN$  szakaszok hosszát:

$$TM^2 = \frac{\beta^2}{m^2} + \beta^2 + 2\frac{\beta^2}{m} \cos 2\varphi = \frac{\beta^2}{m^2} (m^2 + 2m \cos 2\varphi + 1),$$

$$SN^2 = u^2 + m^2 u^2 + 2mu^2 \cos 2\varphi = u^2 (m^2 + 2m \cos 2\varphi + 1). \text{ Mivel}$$

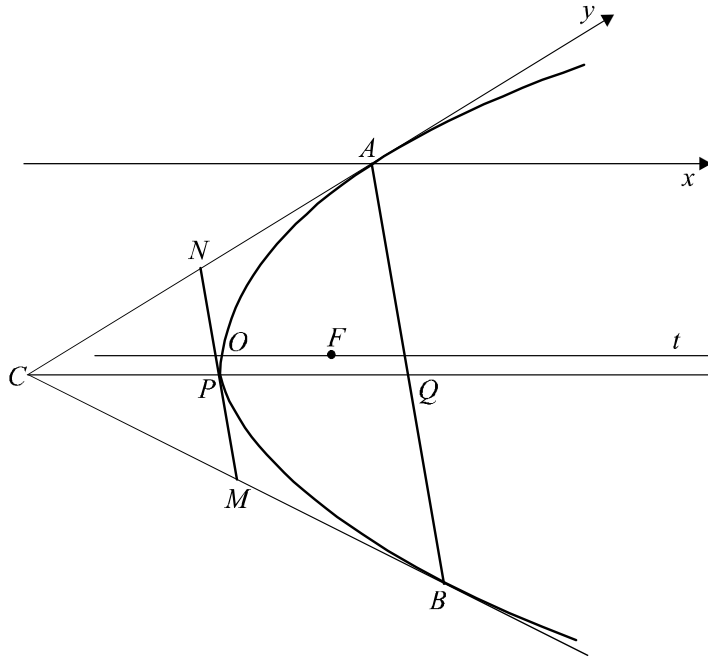
$$TM^2 = SN^2 \Leftrightarrow \beta^2 = m^2 u^2 \Leftrightarrow \beta^2 (\alpha - u)^2 = u^2 (\beta - v)^2 \Leftrightarrow \left( \frac{c^2}{4} - u\beta \right)^2 = \left( u\beta - \frac{c^2}{4} \right)^2$$

és ez utóbbi egyenlőség igaz, ezért  $TM = SN$ .

Most Arkhimédész két, parabolával kapcsolatos tételét bizonyítjuk. A parabola két érintője és az érintési pontokat összekötő szelő által meghatározott háromszöget *Arkhimédész-féle háromszögnek* nevezzük. A szelőre illeszkedő oldalt a háromszög *alapjának* hívjuk.

7. Az *Arkhimédész-féle háromszög alapjához tartozó súlyvonal párhuzamos a parabola tengelyével.*

**Bizonyítás.** A parabola  $A$  és  $B$  pontjaihoz tartozó érintők metszéspontja legyen  $C$ , az  $ABC$  háromszög  $AB$  alapjának felezőpontja pedig  $Q$ . Válasszuk vonatkoztatási rendszerként az  $A$  ponthoz tartozó érintőirányt és a tengelyirányt. Ebben az  $xAy$  ferdeszögű koordináta-rendszerben a parabola egyenlete  $y^2 = 2\lambda x$ , ahol  $\lambda$  az  $A$  ponthoz tartozó paraméter.



4.2.8. ábra

Ha a  $B$  pont koordinátái  $(u, v)$ , akkor  $v^2 = 2\lambda u$  és  $Q = \left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)$ .

Meghatározzuk a  $C$  pont koordinátáit. A  $B$  pontbeli érintő egyenlete  $vy = \lambda(x + u) \Leftrightarrow vx - 2uy + uv = 0$ . Ez az érintő az ordináta-tengelyt (az  $A$  pontbeli érintőt) a  $\frac{\lambda u}{v}$  ordinátájú pontban metszi, azaz  $C = \left(0, \frac{\lambda u}{v}\right)$  vagy  $C = \left(0, \frac{v}{2}\right)$ . A  $C$  és  $Q$  pontok ordinátái egyenlők, ezért a  $CQ$  súlyvonal párhuzamos a parabola  $t$  tengelyével.

8. Az  $ABC$  Arkhimédész-féle háromszög  $AB$  alapjával párhuzamos  $MN$  középvonalnak ( $M \in BC, N \in AC$ ) a  $CQ$  súlyvonallal való  $P$  metszéspontja rajta van a parabolán és a  $P$  ponthoz tartozó érintő éppen az  $MN$  egyenes.

**Bizonyítás.** Mivel  $P$  a  $CQ$  szakasz felezőpontja, ezért  $P = \left(\frac{u}{4}, \frac{v}{2}\right)$ . A  $P$  pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét, következésképpen  $P$  rajta van a parabolán. A  $P$  pontbeli  $d$  érintő egyenlete:  $4vx - 4uy + uv = 0$ . Megoldva a 
$$\begin{cases} vx - 2uy + uv = 0 \\ 4vx - 4uy + uv = 0 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, megkapjuk az  $M$  pont koordinátáit.

Mivel  $M = \left(\frac{u}{2}, \frac{3v}{4}\right), N = \left(0, \frac{v}{4}\right)$ , az  $MN$  egyenes egyenlete szintén  $4vx - 4uy + uv = 0$ , azaz  $d \equiv MN$  (4.2.8. ábra).

### 4.3. Az egyenlő szárú hiperbola egyenleteiről

M. Vygodsky művében, [21]-ben, a 110. oldalon találtam meg annak rövid kifejtését, hogy az elsőfokú polinomok segítségével értelmezett  $y = f(x) = \frac{mx+n}{px+q}$  racionális függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. Ez adta az ötletet, hogy alaposabban foglalkozzam az egyenlő szárú hiperbolákkal és összehasonlítsam különböző alakú egyenleteiket. Tárgyalásomban kitérek a konjugált egyenlő szárú hiperbolákra is.

Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerrel ellátott síkban tekintsük az  $(x, y)$  koordinátájú tetszőleges  $M$  pontot és az  $x^2 - y^2 = 4$ , (1)  $xy = 2$ , (2)  $y = \frac{3x-4}{x-2}$ . (3) egyenleteket, amelyekkel kapcsolatban két kérdést fogalmazunk meg.

1. Milyen alakzatot ír le az (1), (2) illetve (3) egyenletet kielégítő  $(x, y)$  koordinátájú  $M$  pont?
2. E három alakzat hogyan viszonyul egymáshoz?

A továbbiakban ezekre a kérdésekre keressük a válaszokat. A problémakört egy általánosabb keretben fogjuk tárgyalni. Tegyük fel, hogy az  $a$  valós és  $b$  képzetes féltengelyű hiperbola az  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (4) kanonikus (középponti) egyenletével van megadva, ahol  $2c$  a hiperbola fókusz-távolsága,  $c > a > 0$  és  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Ha  $a = b$ , akkor a hiperbolát *egyenlő szárú vagy derékszögű hiperbolának* nevezzük. Az egyenlő szárú hiperbola egyenlete

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (5)$$

Egyenlő szárú hiperbolákra  $c = \sqrt{2}a$ , tehát a fókusz-távolságuk  $2c = 2\sqrt{2}a$ .

Ebben a részben, ha hiperbolákról beszélünk, akkor többnyire egyenlő szárú hiperbolákra gondolunk. Az (5) alatti hiperbolát jelöljük  $H$ -val. Legyenek  $F_1$  és  $F_2$  a  $H$  hiperbola fókuszpontjai,  $A_1$  és  $A_2$  pedig a csúcspontjai. E pontok derékszögű koordinátái:

$$F_1 = (\sqrt{2}a, 0), F_2 = (-\sqrt{2}a, 0), A_1 = (a, 0), A_2 = (-a, 0).$$

Az egyenlő szárú hiperbola aszimptotái az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszer első és második szögfelezői, amelyek merőlegesek egymásra.

A sík aktív szemléletű  $\varphi$  szöggel való rotációja után az  $M = (x, y)$  pont  $M' = (x', y')$  képpontjának az  $xOy$  rendszerbeli koordinátái:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Jelölje  $H_\varphi$  azt a hiperbolát, amelyet a  $H$  egyenlő szárú hiperbola  $\varphi$  szöggel való rotációja után kapunk. Felírjuk a  $H_\varphi$  hiperbola egyenletét. Ehhez kifejezzük  $x$ -t és  $y$ -t  $x'$  és  $y'$  függvényében megoldva az

$$\begin{cases} x \cos \varphi - y \sin \varphi = x' \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi = y' \end{cases} \text{ egyenletrendszer:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} x' & -\sin \varphi \\ y' & \cos \varphi \end{vmatrix} = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \cos \varphi & x' \\ \sin \varphi & y' \end{vmatrix} = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

A Cramer-féle képletek alapján:

$$x = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi \quad \text{és} \quad y = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.$$

Az (5) egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)^2 - (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 &= a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x'^2 - y'^2) \cos 2\varphi + 2x'y' \sin 2\varphi &= a^2. \end{aligned}$$

Tehát a  $H_\varphi$  hiperbola egyenlete:

$$(x'^2 - y'^2) \cos 2\varphi + 2x'y' \sin 2\varphi = a^2. \quad (6)$$

Jelölje  $G$  a  $H_{\pi/4}$  hiperbolát  $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ . A  $G$  hiperbola egyenlete:

$$x'y' = \frac{a^2}{2}. \quad (7)$$

Legyenek  $E_1$  és  $E_2$  a  $G$  hiperbola fókuszpontjai,  $B_1$  és  $B_2$  pedig a csúcspontjai. Az  $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$  és  $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$  transzformációs képletek alapján e pontok derékszögű koordinátái:

$$E_1 = (a, a), \quad E_2 = (-a, -a), \quad B_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right), \quad B_2 = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

A  $G$  hiperbola ágai az első és harmadik negyedben helyezkednek el, valós tengelye az első szögfelező, aszimptotái pedig maguk a koordinátatengelyek.

## a) Konjugált hiperbolák

Két olyan hiperbolát, amelyek aszimptotái közösek és az egyik valós féltengelye a másiknak képzetes féltengelye és fordítva, *konjugált hiperboláknak* nevezünk. A (4) alatti hiperbola konjugáltjának egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \quad (8)$$

Ha  $a = b$ , akkor *egyenlő szárú vagy derékszögű konjugált hiperboláról* beszélünk, amelynek egyenlete  $x^2 - y^2 = -a^2$ . (9)

A  $H$  egyenlő szárú hiperbola konjugáltját jelölje  $H^*$ . Ennek aszimptotái szintén az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszer első és második szögfelezői. Legyenek  $F_1^*$  és  $F_2^*$  a  $H^*$  konjugált hiperbola fókuszpontjai,  $A_1^*$  és  $A_2^*$  pedig a csúcspontjai. E pontok derékszögű koordinátái:  $F_1^* = (0, \sqrt{2}a)$ ,  $F_2^* = (0, -\sqrt{2}a)$ ,  $A_1^* = (0, a)$ ,  $A_2^* = (0, -a)$ . Jelölje  $G^*$  a  $H_{-\pi/4}$  hiperbolát  $\left(\varphi = -\frac{\pi}{4}\right)$ . A  $G^*$  hiperbola egyenlete:  $x'y' = -\frac{a^2}{2}$ . (10)

Legyenek  $E_1^*$  és  $E_2^*$  a  $G^*$  hiperbola fókuszpontjai,  $B_1^*$  és  $B_2^*$  pedig a csúcspontjai. Az  $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$  és  $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$  transzformációs képletek alapján e pontok derékszögű koordinátái:  $E_1^* = (a, -a)$ ,  $E_2^* = (-a, a)$ ,  $B_1^* = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $B_2^* = \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ . A  $G^*$  hiperbola ágai a második és negyedik negyedben helyezkednek el, valós tengelye a második szögfelező, aszimptotái pedig maguk a koordinátatengelyek. A  $G^*$  és  $G$  hiperbolák egymás konjugáltjai. Mindkét hiperbolára az jellemző, hogy pontjaik koordinátáinak szorzata állandó (lásd a (7) és (10) alatti egyenleteket).

Az eddigiekből világosan látszik, hogy bizonyos sajátos helyzetű hiperbolák egyenlete  $x'y' = k = \text{állandó}$  (11) alakú. Természetesen adódik ezek után a kérdés: a (11) egyenletet kielégítő  $(x', y')$  számpároknak megfelelő  $M'$  pontok milyen alakzatot írnak le egy  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben? Ez az alakzat egyenlő szárú hiperbola lesz a  $k$  állandó bármely zérótól különböző valós értékére.



Valóban, ha az  $x^2 - y^2 = 2k$  (12) egyenletű egyenlő szárú hiperbolát  $\frac{\pi}{4}$  szöggel elforgatjuk, akkor olyan hiperbolát kapunk, amelynek egyenlete éppen a (11) alatti egyenlet lesz. A  $k$  és  $-k$  értékeknek megfelelő hiperbolák egymás konjugáltjai. A  $k > 0$  értékhez tartozó hiperbola valós tengelye az első szögfelező, a  $-k$  értékhez tartozó hiperbola valós tengelye pedig a második szögfelező. Jelölje ezeket a hiperbolákat  $K$  és  $K^*$ . Ezek féltengelyei:  $a = b = \sqrt{2|k|}$ , ( $k \neq 0$ ).

A  $K$  hiperbola fókuszpontjai  $(\sqrt{2k}, \sqrt{2k})$ ,  $(-\sqrt{2k}, -\sqrt{2k})$ , csúcspontjai pedig  $(\sqrt{k}, \sqrt{k})$ ,  $(-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$ . A  $K^*$  konjugált hiperbola fókuszpontjai  $(\sqrt{2|k|}, -\sqrt{2|k|})$ ,  $(-\sqrt{2|k|}, \sqrt{2|k|})$ , csúcspontjai pedig  $(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|})$ ,  $(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|})$ . E hiperbolák fókusz távolsága  $4\sqrt{k}$ .

### b) Az egyenlő szárú hiperbola, mint racionális függvény grafikus képe

Az  $x'y' = k$  ( $k \neq 0$ ) egyenletű egyenlő szárú  $K$  hiperbolát toljuk el az  $(a, b)$  vektorral. A kapott, szintén egyenlő szárú hiperbolát, jelölje  $Q$ . A  $K$  hiperbola  $(x', y')$  koordinátájú  $M'$  pontjai a  $Q$  hiperbola  $(x, y)$  koordinátájú  $M$  pontjaiba transzformálódnak az  $x = x' + a$  és  $y = y' + b$  képletek alapján. A  $Q$  hiperbola egyenlete:  $(x - a)(y - b) = k \Leftrightarrow (x - a)y = k + b(x - a)$ . Ha  $x \neq a$ , akkor az előbbi egyenlet  $y = \frac{bx + c}{x - a}$  alakba írható, ahol  $c = k - ab$ . Innen azt feltételezhetjük, hogy elsőfokú polinomokkal értelmezett racionális függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. A továbbiakban ezt a kérdést fogjuk megvizsgálni.

Tekintsük az  $y = f(x) = \frac{mx + n}{px + q}$  (13) racionális függvényt, ahol

$p \neq 0$ ,  $m^2 + n^2 \neq 0$  és  $x \neq -\frac{q}{p}$ . Alkalmazzuk erre a függvényre az

$x' = x + \frac{q}{p}$  és  $y' = y - \frac{m}{p}$  koordinátatranszformációt, azaz toljuk el a

függvény grafikus képét a  $\begin{pmatrix} \frac{q}{p} \\ -\frac{m}{p} \end{pmatrix}$  vektorral:

$$(px+q)y = mx+n \Leftrightarrow (px+q)py = mpx+np \Leftrightarrow px'(py'+m) = m(px'-q)+np \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p^2 x'y' = np - mq.$$

A  $\delta = \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} = np - mq$  jelöléssel az  $x'y' = \frac{\delta}{p^2}$  (14) egyenletet kapjuk, amely

egyenlő szárú hiperbola egyenlete. Nevezzük a  $\delta$  valós számot az  $f$  függvény determinánsának. Következésképpen a (13) alatti  $f$  függvény grafikus képe olyan egyenlő szárú hiperbola, melynek középpontja a

$C = \left(-\frac{q}{p}, \frac{m}{p}\right)$  pontban van, valós tengelye párhuzanos az  $xOy$  derékszögű

koordinátarendszer első szögfelezőjével, ha  $\delta > 0$ , illetve a második szögfelezőjével, ha  $\delta < 0$ . Jelölje ezt a hiperbolát  $T$ . Ennek féltengelyei:

$a = b = \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}$ , aszimptotái pedig az  $x = -\frac{q}{p}$  és  $y = \frac{m}{p}$  egyenesek. A  $T$  valós

illetve képzetes tengelyének egyenlete  $y = x + \frac{m+q}{p}$  illetve  $y = -x + \frac{m-q}{p}$ .

Jelölje  $D_1$  és  $D_2$  a  $T$  hiperbola fókuszpontjait,  $C_1$  és  $C_2$  pedig a csúcspontjait. A  $\delta$  előjelétől függően e pontok derékszögű koordinátái a  $\delta > 0$  esetben:

$$D_1 = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}\right), D_2 = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}\right),$$

$$C_1 = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}\right), C_2 = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}\right);$$

a  $\delta < 0$  esetben:

$$D_1 = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}\right), D_2 = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}\right),$$

$$C_1 = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}\right), C_2 = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}\right).$$

A  $T$  hiperbola fókusz távolsága:  $D_1 D_2 = \frac{4\sqrt{|\delta|}}{|p|}$ .

Jelölje  $T^*$  a  $T$  hiperbola konjugáltját. Hogyan kapjuk meg a  $T^*$  egyenletét? Az  $x'y' = -\frac{\delta}{p^2}$  (15) egyenletű hiperbolának a  $\left(-\frac{q}{p}, \frac{m}{p}\right)$  vektorral való eltolásával, azaz alkalmazva a (15) egyenletre az  $x = x' - \frac{q}{p}$  és

$y = y' + \frac{m}{p}$  koordinátatranszformációt:

$$\begin{aligned} x'y' = -\frac{\delta}{p^2} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{q}{p}\right)\left(y - \frac{m}{p}\right) = -\frac{\delta}{p^2} \Leftrightarrow (px + q)(py - m) = -\delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (px + q)py = (px + q)m - \delta \Leftrightarrow (px + q)py = mpx + np - 2\delta. \end{aligned}$$

Tehát a  $T^*$  konjugált hiperbola egyenlete:  $y = f^*(x) = \frac{mx + n - \frac{2\delta}{p}}{px + q}$ . (16)

A  $T^*$  konjugált hiperbola determinánása:

$$\delta^* = \left(n - \frac{2\delta}{p}\right)p - mq = np - mq - 2\delta = \delta - 2\delta = -\delta,$$

azaz a  $T$  determinánsának ellentettje.

Jelölje  $D_1^*$  és  $D_2^*$  a  $T^*$  hiperbola fókuszpontjait,  $C_1^*$  és  $C_2^*$  pedig a csúcspontjait. A  $\delta$  előjelétől függően e pontok derékszögű koordinátái a  $\delta > 0$  esetben:

$$D_1^* = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}\right), D_2^* = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{2\delta}}{|p|}\right),$$

$$C_1^* = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}\right), C_2^* = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{\delta}}{|p|}\right);$$

a  $\delta < 0$  esetben:

$$D_1^* = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}\right), D_2^* = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{2|\delta|}}{|p|}\right),$$

$$C_1^* = \left(-\frac{q}{p} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} + \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}\right), C_2^* = \left(-\frac{q}{p} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}, \frac{m}{p} - \frac{\sqrt{|\delta|}}{|p|}\right).$$

Most válaszolunk a feltett kérdésekre: bár az (1), (2) illetve (3) alatti egyenletek alakjukat tekintve lényegesen különböznek egymástól, mégis mindegyik egy-egy egyenlő szárú hiperbola egyenlete. Hogy ezek a hiperbolák milyen kapcsolatban vannak egymással? Ha az  $x^2 - y^2 = 4$  egyenletű hiperbolát elforgatjuk  $\frac{\pi}{4}$  szöggel, akkor az  $xy = 2$  egyenletű hiperbolát kapjuk. Toljuk el az  $xy = 2$  hiperbolát a  $(2, 3)$  vektorral. A kapott hiperbola egyenlete  $(x-2)(y-3) = 2 \Leftrightarrow (x-2)y = 3x-4$ . Ha  $x \neq 2$ , akkor  $y = \frac{3x-4}{x-2}$ , ami éppen a (3) egyenlet. Összefoglalva: (1)-ből (2)-öt  $\frac{\pi}{4}$  szöggel való forgatással, (2)-ből (3)-at pedig a  $(2, 3)$  vektorral való eltolással kapjuk.

### c) Módszertani javaslatok a kúpszeletek tanításához

Az 1990-es évek elejéig a romániai iskolarendszerben a kúpszeleteket tanítottuk mind az elméleti líceumokban, mind a szakközépiskolákban, a XI. osztályokban. Akkor még az analitikus mértan külön tárgyként szerepelt a tananyagban és emellett még a tanterv tartalmazta a lineáris algebra elemeit (mátrixok, detminánsok, lineáris egyenletrendszerek) és a metematikai analízis elemeit (sorozatok, határértékek, folytonosság, deriváltak, függvény-ábrázolás). Az azóta eltelt időben végrehajtott többrendbeli reformintézkedések következményeként ma már a kúpszeletek csak az elméleti líceumok (főgimnáziumok) reál profilú osztályainak tanterveiben szerepelnek. Ezek a tantervek csak és kizárólag a kúpszeletek kanonikus egyenleteinek az oktatását írják elő.

Az ellipszis és a hiperbola konjugált irányokra vonatkozó illetve a parabolának a tengelyirány és egy érintőirány szerinti egyenlete az értekezésben tárgyalta formában, a szükséges magasabb szintű fogalmak miatt, csak főiskolákon, egyetemeken, tanár-továbbképzőkön stb. vezethető le. Viszont a 4.2. és 4.3. alfejezetek eredményeinek ismeretében a kúpszeletek tanítására javasolnék egy olyan megközelítést, amely már középiskolás szinten alkalmazható és amelyet az alábbi lépésekben lehetne megvalósítani:

1. a ferdeszögű koordinátarendszerek és a paralel- vagy kontravariáns koordináták bevezetése
2. a derékszögű koordinátarendszerek és a derékszögű koordináták bevezetése
3. a kúpszeletek kanonikus egyenleteinek a levezetése

4. a kúpszeletek egyenleteinek felírása sajátos helyzetű ferdeszögű és derékszögű koordináta-rendszerekben  
 A 4. lépést most leírom részletesebben, de mellőzve a számítások egy részét.

I. Legyenek  $F_1$  és  $F_2$  az ellipszis fókuszpontjai. Az  $xOy$  ferdeszögű koordináta-rendszert vegyük fel úgy, hogy  $O$  kezdőpontja az  $|F_1F_2|$  szakasz felezőpontjában legyen, tengelyei pedig ne essenek egybe az  $F_1F_2$  egyenessel. A továbbiakban kontravariáns koordinátákban dolgozunk. A tengelyek hajlásszögét jelöljük  $\theta$ -val, a sík tetszőleges pontja pedig legyen  $M = (x, y)$ . Az ellipszis azon  $M$  pontok mértani helye a síkban, amelyekre  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , ahol  $a > 0$  és  $2a > F_1F_2$ . Ha az ellipszis fókusz távolsága  $F_1F_2 = 2c$ ,  $F_1 = (\alpha, \beta)$ , akkor  $F_2 = (-\alpha, -\beta)$  és az ellipszis egyenlete:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta + \sqrt{(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2} + 2(x+\alpha)(y+\beta)\cos\theta = 2a.$$

Átrendezések és kétszeri négyzetreemelés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$(a^2 - c^2 + \beta^2 \sin^2 \theta)x^2 + 2[(a^2 - c^2)\cos\theta - \alpha\beta \sin^2 \theta]xy + (a^2 - c^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta)y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

A  $b^2 = a^2 - c^2$  jelöléssel az ellipszis egyenlete a következő lesz:

$$(b^2 + \beta^2 \sin^2 \theta)x^2 + 2(b^2 \cos\theta - \alpha\beta \sin^2 \theta)xy + (b^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta)y^2 = a^2b^2.$$

Ha az  $x$ -tengely az ellipszist a  $V = (p, 0)$  pontban, az  $y$ -tengely pedig a  $W = (0, q)$  pontban metszi, akkor

$$(b^2 + \beta^2 \sin^2 \theta)p^2 = a^2b^2 \text{ és } (b^2 + \alpha^2 \sin^2 \theta)q^2 = a^2b^2.$$

Tehát az ellipszis egyenlete így alakul:

$$\frac{a^2b^2}{p^2}x^2 + 2(b^2 \cos\theta - \alpha\beta \sin^2 \theta)xy + \frac{a^2b^2}{q^2}y^2 = a^2b^2.$$

Most kimutatjuk, hogy ha az  $OV$  és  $OW$  konjugált irányok, akkor az  $xy$ -os tag együttthatója nullával egyenlő. Figyelembe véve, hogy  $c^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cos\theta$ , az alábbi eredményeket kapjuk:

$$\begin{aligned} 2(b^2 \cos\theta - \alpha\beta \sin^2 \theta) &= \frac{1}{\cos\theta}(2b^2 \cos^2 \theta - 2\alpha\beta \cos\theta \sin^2 \theta) = \\ &= \frac{1}{\cos\theta}[2b^2 \cos^2 \theta + (\alpha^2 + \beta^2 - c^2)\sin^2 \theta] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{a^2 b^2}{p^2} + \frac{a^2 b^2}{q^2} - 2b^2 + 2b^2 \cos^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta \right) = \\
&= \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{a^2 b^2}{p^2} + \frac{a^2 b^2}{q^2} - 2b^2 \sin^2 \theta - c^2 \sin^2 \theta \right) = \\
&= \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{a^2 b^2}{p^2} + \frac{a^2 b^2}{q^2} - a^2 \sin^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta \right) = \\
&= \frac{a^2 + b^2}{\cos \theta} \left( \frac{a^2 b^2}{p^2 q^2} \cdot \frac{p^2 + q^2}{a^2 + b^2} - \sin^2 \theta \right).
\end{aligned}$$

Ha az  $OV$  és  $OW$  konjugált irányok, akkor érvényesek Apollóniosz ellipszisre vonatkozó tételei: az ellipszis konjugált félátmérőinek négyzetösszege  $a^2 + b^2$ , illetve az általuk meghatározott háromszög területe  $\frac{ab}{2}$ . Ebből adódóan  $p^2 + q^2 = a^2 + b^2$  és  $\sin \theta = \frac{ab}{pq}$ . Következésképpen az  $xy$ -os tag együtthatója nulla lesz és megkapjuk az ellipszis konjugált irányokra vonatkozó  $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$  egyenletét.

Az előbbi levezetés elvégezhető a hiperbolára is. A  $-b^2 = a^2 - c^2$  jelöléssel a  $H$  hiperbola egyenlete a következő lesz:

$$(b^2 - \beta^2 \sin^2 \theta)x^2 + 2(b^2 \cos \theta + \alpha\beta \sin^2 \theta)xy + (b^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta)y^2 = a^2 b^2.$$

A  $\bar{H}$  konjugált hiperbola egyenlete pedig:

$$(b^2 - \beta^2 \sin^2 \theta)x^2 + 2(b^2 \cos \theta + \alpha\beta \sin^2 \theta)xy + (b^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta)y^2 = -a^2 b^2.$$

Ha az  $x$ -tengely a  $H$  hiperbolát a  $V = (p, 0)$  pontban, az  $y$ -tengely pedig a  $\bar{H}$  konjugált hiperbolát a  $W = (0, q)$  pontban metszi, akkor

$$(b^2 - \beta^2 \sin^2 \theta)p^2 = a^2 b^2 \text{ és } (b^2 - \alpha^2 \sin^2 \theta)q^2 = -a^2 b^2.$$

Tehát a hiperbola egyenlete így alakul:

$$\frac{a^2 b^2}{p^2} x^2 + 2(b^2 \cos \theta + \alpha\beta \sin^2 \theta)xy - \frac{a^2 b^2}{q^2} y^2 = a^2 b^2.$$

Most az  $xy$ -os tag együtthatója:

$$2(b^2 \cos \theta + \alpha\beta \sin^2 \theta) = \frac{a^2 - b^2}{\cos \theta} \left( -\frac{a^2 b^2}{p^2 q^2} \cdot \frac{p^2 - q^2}{a^2 - b^2} + \sin^2 \theta \right).$$

Az ellipszisre vonatkozó Apollóniosz-féle tételeknek megfelelő tulajdonságok a hiperbolára a következőképpen módosulnak: a hiperbola konjugált félátmérőinek négyzetkülönbsége  $a^2 - b^2$ , illetve az általuk

meghatározott háromszög területe  $\frac{ab}{2}$ . Azaz hiperbolára  $p^2 - q^2 = a^2 - b^2$ , de a  $\sin \theta = \frac{ab}{pq}$  képlet formálisan változatlan marad. Következésképpen az  $xy$ -os tag együtthatója nulla lesz és a hiperbola konjugált irányokra vonatkozó egyenlete  $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$  alakú lesz. (Az ellipszis és a hiperbola esete együtt is tárgyalható úgy, ahogy az [6]-ban a 405. oldalon található)

II. Legyen  $F$  a parabola fókuszpontja,  $d$  pedig a vezéregyenes. Az  $xOy$  ferdeszögű koordinátarendszert vegyük fel úgy, hogy  $O$  kezdőpontja a ( $dF$  félsíban legyen,  $x$ -tengelye pedig legyen merőleges  $d$ -re, de ne essen egybe a parabola tengelyével. A tengelyek hajlásszögét jelöljük  $\theta$ -val, a sík tetszőleges pontja pedig legyen  $M = (x, y)$ . A parabola azon  $M$  pontok mértani helye a síkban, amelyek az  $F$  ponttól és a  $d$  egyenestől egyenlő távolságra vannak. Az  $O$  pontnak a  $d$  egyenesre eső merőleges vetületét jelölje  $A$ , az  $|OA|$  szakasz hosszát pedig  $a$  ( $a > 0$ ). Az  $A$  pont kontravariáns koordinátái  $A = (-a, 0)$  és ha  $F = (\alpha, \beta)$ , akkor a parabola egyenlete:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta = a + x + y\cos\theta.$$

Négyzetreemelés és rendezés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} (\sin^2\theta)y^2 - 2(a + \alpha + \beta\cos\theta)x - 2(a\cos\theta + \alpha\cos\theta + \beta)y &= \\ = a^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta. \end{aligned}$$

Ha az  $O$  pont a parabolán van, akkor  $OA = OF \Leftrightarrow a^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta$ . Ekkor a parabola egyenlete:

$$(\sin^2\theta)y^2 - 2(a + \alpha + \beta\cos\theta)x - 2(a\cos\theta + \alpha\cos\theta + \beta)y = 0.$$

Ha az  $Oy$  tengely átmegy az  $|AF|$  szakasz  $P = \left(\frac{a-\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$

felezőpontján, akkor az  $Oy$  tengely az  $O$  pontban érinti a parabolát. Ekkor  $\alpha = a$  és  $\beta(\beta + 2\alpha\cos\theta) = 0$ . Ha  $\beta \neq 0$ , akkor a parabola egyenlete a következő lesz:

$$\begin{aligned} (\sin^2\theta)y^2 - 2(2\alpha + \beta\cos\theta)x = 0 &\Leftrightarrow (\sin^2\theta)y^2 = 2(2\alpha - 2\alpha\cos^2\theta)x \Leftrightarrow \\ (\sin^2\theta)y^2 = 4\alpha(\sin^2\theta)x &\Leftrightarrow y^2 = 4\alpha x \Leftrightarrow y^2 = 4ax \Leftrightarrow y^2 = 2\lambda x, \end{aligned}$$

ahol  $\lambda = 2a$ . Ez utóbbi egyenlet éppen a parabola egyenlete a tengelyirány és egy érintőirány koordinátarendszerében (lásd 4.2. c) alpontot). Ha pedig

$\beta = 0$ , akkor az  $x$ -tengely egybeesik a parabola tengelyével, azaz átmege az  $F$  fókuszponton,  $N \equiv O$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  és  $\lambda = AF = p$ . Ebben a sajátos esetben a parabola  $y^2 = 2px$  kanonikus egyenletét kapjuk.

A parabola a középiskolai tantervekben több helyen is előfordul. A románai iskolarendszerben a diákok a parabola fogalmával először IX. osztályban találkoznak, mint az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ) másodfokú függvény grafikonjának mértani képével. Később, XI. osztályban bevezetjük a parabola szabatos matematikai fogalmát és levezetjük  $y^2 = 2px$ , ( $p \in \mathbb{R}_+$ ) kanonikus egyenletét. A függvények tanulmányozása során tanítjuk az  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  négyzetgyök-függvényt, amelynek a grafikus képe egy „félparabola”. Nagyon fontos, hogy a középiskola ideje alatt világosan tisztázzuk és tudatosítsuk a diákokban, hogy a parabola fogalma bevezethető elemei geometriai úton, függvénytani fogalmakkal és analitikusan. Ezeknek a didaktikai kérdéseknek a taglalásával részletesen foglalkoztam *Módszertani javaslatok a parabola tanításához* című cikkemben (Matlap, VI. évf., 2002 január, 1. szám, 2-6).

III. Most foglalkozzunk a hiperbola  $xy = k$  alakú egyenleteivel, konkrét feladatokból kiindulva.

1. Írjuk fel az  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$  kanonikus egyenletű hiperbola egyenletét aszimptotáinak  $XOY$  koordinátarendszerében.

**Megoldás.** Mivel  $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$ , ezért a kért egyenlet:

$$XY = \frac{c^2}{4} \Leftrightarrow XY = \frac{20}{4} \Leftrightarrow XY = 5.$$

2. Írjuk fel az  $x^2 - y^2 = 10$  egyenlő szárú hiperbola egyenletét aszimptotáinak  $XOY$  koordinátarendszerében.

**Megoldás.** Mivel  $a^2 = 10$ , ezért a kért egyenlet:

$$XY = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow XY = \frac{10}{2} \Leftrightarrow XY = 5.$$

3. Az  $x^2 - y^2 = 10$  egyenlő szárú hiperbolát forgassuk el  $45^\circ$ -kal. Írjuk fel a kapott hiperbola egyenletét.

**Megoldás.** A sík aktív szemléletű  $\varphi$  szöggel való rotációja után az  $M = (x, y)$  pont  $M' = (x', y')$  képpontjának az  $xOy$  rendszerbeli koordinátái:



$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$ ,  $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$ . Mivel most  $\varphi = 45^\circ$ , ezért  
 $x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi = x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$  és

$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi = x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ . Tehát

$x'y' = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ , azaz az elforgatott hiperbola egyenlete szintén  $xy = 5$  alakú.

**Az eredmények diszkussziója.** Bár a fenti három számpélda eredménye látszólag ugyanaz az  $xy = 5$  alakú egyenlet, mindhárom esetben ezek különböző hiperbolák egyenletei. Éppen ezért egy hiperbola nem adható meg az  $xy = k$  alakú egyenletével, még akkor sem, ha egyenlő szárú hiperboláról van szó. Amint az előbbi példákban is kiderül, az  $xy = k$  egyenlet lehet egy egyenlő szárú hiperbola aszimptotáira vonatkozó egyenlete vagy egy egyenlő szárú hiperbola  $45^\circ$ -al való elforgatottjának az egyenlete. Ha pedig nem egyenlő szárú hiperboláról van szó, akkor az  $xy = k$  alakú egyenletén kívül még meg kell adni vagy a féltengelyek egyikének hosszát vagy egyik aszimptotájának az  $x$ -tengellyel bezárt szögét ahhoz, hogy a hiperbola egyértelműen meg legyen határozva. Tehát az olyan feladatok, hogy „Ábrázoljuk az  $xy = k$  egyenletű hiperbolát” nincsenek helyesen kitűzve vagy csak akkor fogadhatók el mégis, ha hallgatólagosan egyenlő szárú hiperbolára gondolunk.

#### 4.4. Az általánosított Fermat-pontok metrikus jellemzése

**Előzmények.** A háromszög Fermat-pontjai a Pierre Fermat (1601-1665) által a XVII. század közepe körül felvetett alábbi problémával vannak kapcsolatban:

*Adott ABC hegyesszögű háromszög síkjában határozzuk meg azt a P pontot, amelyre a PA+PB+PC összeg a legkisebb.*

Ennek a feladatnak és a különböző általánosításainak megoldásával sok matematikus foglalkozott, köztük Jacob Steiner is. Ezért a szakirodalomban az előbbi feladat a *Fermat-Steiner probléma* néven ismert. A továbbiakban nem a Fermat-Steiner problémát tárgyalom, ellenben az egész kérdéskör rendkívül gazdag szakirodalmából utalok néhányra:

1. H. Mowaffaq, *An Advanced Calculus Approach to Finding the Fermat Point*, Mathematics Magazine **67**, 29-34, 1994.
2. Shay Gueron and Ran Tessler, *The Fermat-Steiner Problem*, The American Mathematical Monthly **109**, 443-451, 2002

3. P. G. Spain, *The Fermat Point of a Triangle*, Mathematics Magazine **69**, 131-133, 1996.

4. J. Tong and Y. S. Chua, *The Generalized Fermat's Point*, Mathematics Magazine **68**, 214-215, 1995.

A Fermat-Steiner probléma történeti áttekintése megtalálható 2.-ben. Most pedig rátérünk a Fermat-pontok általánosítására és e pontok metrikus jellemzésére, a trigonometria és az analitikus geometria eszközeinek segítségével.

Ha az  $ABC$  háromszög  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalaira kifelé megszerkesztjük a  $BCX_1$ ,  $CAY_1$ ,  $ABZ_1$  egyenlő oldalú háromszögeket, akkor

$$\pm AF_1 \pm BF_1 \pm CF_1 = AX_1 = BY_1 = CZ_1, \quad (\text{I})$$

ahol  $\{F_1\} = AX_1 \cap BY_1 \cap CZ_1$  az  $ABC$  háromszög *első (külső) Fermat-pontja*. Minusz jelet annál a tagnál veszünk, amelynek megfelelő csúcsszög nagyobb, mint  $120^\circ$ .

Ha az  $ABC$  háromszög  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  oldalaira befelé szerkesztjük meg a  $BCX_2$ ,  $CAY_2$ ,  $ABZ_2$  egyenlő oldalú háromszögeket, akkor

$$\pm AF_2 \pm BF_2 \pm CF_2 = AX_2 = BY_2 = CZ_2, \quad (\text{II})$$

ahol  $\{F_2\} = AX_2 \cap BY_2 \cap CZ_2$  az  $ABC$  háromszög *második (belső) Fermat-pontja*. Minusz jelet annál a tagnál veszünk, amelynek megfelelő csúcsszög nagyobb, mint  $60^\circ$ .

Most azt vizsgáljuk, hogy ezek az ismert összefüggések hogyan módosulnak abban az esetben, ha az  $ABC$  háromszög oldalaira kifelé illetve befelé, három egymással hasonló háromszöget építünk.

A bizonyítások során használt képleteket előbb felsoroljuk, majd igazoljuk azokat:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C \quad (1)$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C \quad (2)$$

$$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C \quad (3)$$

$$\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B = 1 + \cos A \cos B \cos C \quad (4)$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \quad (5)$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \quad (6)$$

Az (1) képlet bizonyítása:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + 2 \sin \gamma \cos \gamma = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} \sin \gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

A (3) képlet bizonyítása:

$$\begin{aligned} \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B &= \\ = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin(B + C) &= \sin A(\cos A + \cos B \cos C) = \\ = \sin A[-\cos(B + C) + \cos B \cos C] &= \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

A (4) képlet bizonyítása:

$$\begin{aligned} \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B &= \\ = \cos A \sin B \sin C + \sin A \sin(B + C) &= \cos A \sin B \sin C + \sin^2 A = \\ = 1 - \cos^2 A + \cos A \sin B \sin C &= 1 + \cos A(-\cos A + \sin B \sin C) = \\ = 1 + \cos A[\cos(B + C) + \sin B \sin C] &= 1 + \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

Az (5) képlet bizonyítása:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \\ = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1 + 4 \cos A \cos B \cos C) &= 2(1 + \cos A \cos B \cos C). \end{aligned}$$

## I. A háromszög első általánosított Fermat-pontja

Az  $ABC$  háromszög oldalaira kifelé építsük fel az egymással hasonló  $BCD$ ,  $CAE$  és  $ABF$  háromszögeket úgy, hogy  $m(\angle BAF) = \alpha = m(\angle CAE)$ ,  $m(\angle CBD) = \beta = m(\angle ABF)$ ,  $m(\angle ACE) = \gamma = m(\angle BCD)$ .

Mivel  $A + B + C = \pi = \alpha + \beta + \gamma$ , ezért  $m(\angle BDC) = \alpha$ ,  $m(\angle CEA) = \beta$ ,  $m(\angle AFB) = \gamma$ .

Az  $ABC$  háromszögre vonatkozó baricentrikus koordinátákban fogunk dolgozni. A Conway-féle képletek alapján a  $D$ ,  $E$ ,  $F$  pontok baricentrikus koordinátái:

$$\begin{aligned} D &= (-a^2, S_\gamma + S_C, S_\beta + S_B), E = (S_\gamma + S_C, -b^2, S_\alpha + S_A), \\ F &= (S_\beta + S_B, S_\alpha + S_A, -c^2). \end{aligned}$$

Az  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  egyenesek egyenletei:  $-(S_\beta + S_B)y + (S_\gamma + S_C)z = 0$ ,  $(S_\alpha + S_A)x - (S_\gamma + S_C)z = 0$ ,  $-(S_\alpha + S_A)x + (S_\beta + S_B)y = 0$ .

Mivel bármely két egyenletet összeadva a harmadik egyenlet  $(-1)$ -szeresét kapjuk, az  $AD$ ,  $BE$  és  $CF$  egyenesek egy  $K$  pontban metszik egymást. Ezt a  $K$  pontot a *háromszög első általánosított Fermat-pontjának* nevezzük.

A  $K$  pont baricentrikus koordinátái:

$$K = \left( (S_\beta + S_B)(S_\gamma + S_C) : (S_\gamma + S_C)(S_\alpha + S_A) : (S_\alpha + S_A)(S_\beta + S_B) \right) = \left( \frac{1}{S_\alpha + S_A}, \frac{1}{S_\beta + S_B}, \frac{1}{S_\gamma + S_C} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Vezessük be a következő jelölést: } \lambda &= \lambda(A, B, C, \alpha, \beta, \gamma) = \\ &= \sin A \sin B \sin C \left( \text{ctg} A \sin^2 \alpha + \text{ctg} B \sin^2 \beta + \text{ctg} C \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \right) = \\ &= \frac{1}{4R^2} \left( S_A \sin^2 \alpha + S_B \sin^2 \beta + S_C \sin^2 \gamma + 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \right). \end{aligned}$$

### a) Az $AD$ , $BE$ és $CF$ szakaszok hossza

Az  $AD$ ,  $BE$  és  $CF$  szakaszok hosszának kiszámításához felhasználjuk az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned} t_\alpha &= S_\beta + S_\gamma = S \cdot \text{ctg} \beta + S \cdot \text{ctg} \gamma = S \left( \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right) = \frac{S}{\sin \beta \sin \gamma} \sin(\beta + \gamma) = \frac{S \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \\ t_\beta &= S_\gamma + S_\alpha = \frac{S \sin \beta}{\sin \gamma \sin \alpha}, \quad t_\gamma = S_\alpha + S_\beta = \frac{S \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}. \end{aligned}$$

A  $D$ ,  $E$  illetve  $F$  pont koordinátáinak összege  $t_\alpha$ ,  $t_\beta$  illetve  $t_\gamma$ . Az  $AD$  szakasz hossza:

$$\begin{aligned} AD &= \frac{1}{t_\alpha} \sqrt{(a^2 + t_\alpha)^2 S_A + (S_\gamma + S_C)^2 S_B + (S_\beta + S_B)^2 S_C} = \\ &= \frac{1}{t_\alpha} \sqrt{(a^2 + 2t_\alpha)(a^2 S_A + S_{BC}) + S_A t_\alpha^2 + S_B S_\gamma^2 + S_C S_\beta^2} = \\ &= \frac{1}{t_\alpha} \sqrt{(a^2 + 2t_\alpha) S^2 + S_A t_\alpha^2 + S_B S_\gamma^2 + S_C S_\beta^2} = \\ &= \frac{1}{t_\alpha} \sqrt{(a^2 + 2t_\alpha) S^2 + \frac{S^2 \sin^2 \alpha}{S_A \sin^2 \beta \sin^2 \gamma} + \frac{S^2 \cos^2 \gamma}{S_B \sin^2 \gamma} + \frac{S^2 \cos^2 \beta}{S_C \sin^2 \beta}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + S_A \sin^2 \alpha + S_B \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + S_C \cos^2 \beta \sin^2 \gamma} = \\
&= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{S_A \sin^2 \alpha + S_B \sin^2 \beta + S_C \sin^2 \gamma + 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} = \frac{2R\sqrt{\lambda}}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

Tehát:  $AD = \frac{2R\sqrt{\lambda}}{\sin \alpha}$ ,  $BE = \frac{2R\sqrt{\lambda}}{\sin \beta}$ ,  $CF = \frac{2R\sqrt{\lambda}}{\sin \gamma}$ . (7)

A (7) képletek alapján:  $AD \cdot \sin \alpha = BE \cdot \sin \beta = CF \cdot \sin \gamma = 2R\sqrt{\lambda}$ . (8)

### b) Az első általánosított Fermat-pont távolsága a vonatkoztatási háromszög csúcsaitól

A továbbiakban kiszámítjuk az  $AK$ ,  $BK$  és  $CK$  szakaszok hosszát. A  $K$  pont koordinátáinak összege:

$$\begin{aligned}
\Phi &= (S_\beta + S_B)(S_\gamma + S_C) + (S_\gamma + S_C)(S_\alpha + S_A) + (S_\alpha + S_A)(S_\beta + S_B) = \\
&= S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} + S_{\beta\gamma} + S_{\gamma\alpha} + S_{\alpha\beta} + (S_B + S_C)S_\alpha + (S_C + S_A)S_\beta + (S_A + S_B)S_\gamma = \\
&= a^2 S_\alpha + b^2 S_\beta + c^2 S_\gamma + 2S^2.
\end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (\operatorname{ctg} \alpha \sin^2 A + \operatorname{ctg} \beta \sin^2 B + \operatorname{ctg} \gamma \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C) = \lambda.$$

Valóban

$$\begin{aligned}
&\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (\operatorname{ctg} \alpha \sin^2 A + \operatorname{ctg} \beta \sin^2 B + \operatorname{ctg} \gamma \sin^2 C + 2 \sin A \sin B \sin C) = \\
&= \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg} A \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg} B \sin^2 \beta + \operatorname{ctg} C \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin^2 A + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \sin^2 B + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \sin^2 C = \\
&= \cos A \sin B \sin C \sin^2 \alpha + \sin A \cos B \sin C \sin^2 \beta + \sin A \sin B \cos C \sin^2 \gamma \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos \alpha (\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma) \sin^2 A + \cos \beta (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma) \sin^2 B + \\
&+ \cos \gamma (\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) \sin^2 C = \cos A (\cos A + \cos B \cos C) \sin^2 \alpha + \\
&+ \cos B (\cos B + \cos A \cos C) \sin^2 \beta + \cos C (\cos C + \cos A \cos B) \sin^2 \gamma \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sin^2 A \cos^2 \alpha + \sin^2 B \cos^2 \beta + \sin^2 C \cos^2 \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = \\
&= \sin^2 \alpha \cos^2 A + \sin^2 \beta \cos^2 B + \sin^2 \gamma \cos^2 C + \cos A \cos B \cos C (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) +
\end{aligned}$$

$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1+\cos A\cos B\cos C)-2\cos A\cos B\cos C(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1+2\cos A\cos B\cos C+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-2\cos A\cos B\cos C=0,$$

ami igaz.

Tehát

$$\lambda = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\operatorname{ctg}\alpha\sin^2 A + \operatorname{ctg}\beta\sin^2 B + \operatorname{ctg}\gamma\sin^2 C + 2\sin A\sin B\sin C) =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^2S}(a^2S_\alpha + b^2S_\beta + c^2S_\gamma + 2S^2) = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R^2S}\Phi.$$

Az  $AK$  szakasz hossza:

$$AK = \frac{1}{\Phi}\sqrt{[\Phi - (S_\beta + S_B)(S_\gamma + S_C)]^2 S_A + (S_\gamma + S_C)^2 (S_\alpha + S_A)^2 S_B + (S_\alpha + S_A)^2 (S_\beta + S_B)^2 S_C} =$$

$$= \frac{|S_\alpha + S_A|}{\Phi}\sqrt{(S_B + S_C + S_\beta + S_\gamma)^2 S_A + (S_\gamma + S_C)^2 S_B + (S_\beta + S_B)^2 S_C} =$$

$$= \frac{|S_\alpha + S_A|}{\Phi}\sqrt{(a^2 + t_\alpha)^2 S_A + (S_\gamma + S_C)^2 S_B + (S_\beta + S_B)^2 S_C} =$$

$$= \frac{|S_\alpha + S_A|}{\Phi} ADt_\alpha = \frac{|S_\alpha + S_A|}{\Phi} \frac{2Rt_\alpha\sqrt{\lambda}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2R\sqrt{\lambda}} |S_\alpha + S_A| = \frac{S}{2R\sqrt{\lambda}\sin A} |\sin(A + \alpha)| =$$

$$= \frac{S}{a\sqrt{\lambda}} |\sin(A + \alpha)| = \frac{bc}{2R\sqrt{\lambda}} |\sin(A + \alpha)|.$$

$$\text{Tehát } AK = \frac{bc}{2R\sqrt{\lambda}} |\sin(A + \alpha)|, \quad BK = \frac{ca}{2R\sqrt{\lambda}} |\sin(B + \beta)|,$$

$$CK = \frac{ab}{2R\sqrt{\lambda}} |\sin(C + \gamma)|. \quad (9)$$

### c) Az $AK$ , $BK$ és $CK$ szakaszokra vonatkozó összefüggések

Igazoljuk az alábbi feltételes trigonometriai azonosságot:

$$1. \quad bc\sin\alpha\sin(A + \alpha) + ca\sin\beta\sin(B + \beta) + ab\sin\gamma\sin(C + \gamma) = 4R^2\lambda.$$

Valóban

$$bc\sin\alpha\sin(A + \alpha) + ca\sin\beta\sin(B + \beta) + ab\sin\gamma\sin(C + \gamma) =$$

$$= 4R^2\sin B\sin C\sin\alpha(\sin A\cos\alpha + \sin\alpha\cos A) +$$

$$+ 4R^2\sin C\sin A\sin\beta(\sin B\cos\beta + \sin\beta\cos B) +$$

$$+ 4R^2\sin A\sin B\sin\gamma(\sin C\cos\gamma + \sin\gamma\cos C) =$$

$$=4R^2 \sin A \sin B \sin C \left[ \operatorname{ctg} A \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg} B \sin^2 \beta + \operatorname{ctg} C \sin^2 \gamma + (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)/2 \right] =$$

$$=4R^2 \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg} A \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg} B \sin^2 \beta + \operatorname{ctg} C \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) = 4R^2 \lambda.$$

Mivel  $A + \alpha + B + \beta + C + \gamma = 2\pi$ , az  $A + \alpha > \pi$ ,  $B + \beta > \pi$ ,  $C + \gamma > \pi$  egyenlőtlenségek közül csak egyik teljesülhet.

Ha  $A + \alpha < \pi$ ,  $B + \beta < \pi$ ,  $C + \gamma < \pi$ , akkor a  $K$  pont az  $ABC$  háromszög belső pontja és az 1. azonosság alapján

$$AK \sin \alpha + BK \sin \beta + CK \sin \gamma = 2R\sqrt{\lambda} = AD \sin \alpha = BE \sin \beta = CF \sin \gamma. \quad (10)$$

Ha például  $A + \alpha > \pi$ , akkor

$$-AK \sin \alpha + BK \sin \beta + CK \sin \gamma = 2R\sqrt{\lambda} = AD \sin \alpha = BE \sin \beta = CF \sin \gamma. \quad (11)$$

## II. A háromszög második általánosított Fermat-pontja

Az  $ABC$  háromszög oldalaira befelé építsük fel az egymással hasonló  $BCL$ ,  $CAM$  és  $ABN$  háromszögeket úgy, hogy

$$m(BAN \sphericalangle) = \alpha = m(CAM \sphericalangle), \quad m(CBL \sphericalangle) = \beta = m(ABN \sphericalangle),$$

$$m(ACM \sphericalangle) = \gamma = m(BCL \sphericalangle). \quad \text{Mivel } A + B + C = \pi = \alpha + \beta + \gamma, \text{ ezért}$$

$m(BLC \sphericalangle) = \alpha$ ,  $m(CMA \sphericalangle) = \beta$ ,  $m(ANB \sphericalangle) = \gamma$ . Az  $AL$ ,  $BM$  és  $CN$  egyenesek egy  $T$  pontban metszik egymást. Ezt a  $T$  pontot a *háromszög második általánosított Fermat-pontjának* nevezzük.

A második általánosított Fermat-pontra vonatkozó eredményeket úgy kapjuk, hogy az I. rész képleteiben  $\alpha$ -t  $(-\alpha)$ -val,  $\beta$ -t  $(-\beta)$ -val,  $\gamma$ -t  $(-\gamma)$ -val helyettesítjük.

A Conway-féle képletek alapján az  $L$ ,  $M$ ,  $N$  pontok baricentrikus koordinátái:

$$L = (a^2, S_\gamma - S_C, S_\beta - S_B), \quad M = (S_\gamma - S_C, b^2, S_\alpha - S_A),$$

$$N = (S_\beta - S_B, S_\alpha - S_A, c^2).$$

Az  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  egyenesek egyenletei:  $-(S_\beta - S_B)y + (S_\gamma - S_C)z = 0$ ,

$$(S_\alpha - S_A)x - (S_\gamma - S_C)z = 0, \quad -(S_\alpha - S_A)x + (S_\beta - S_B)y = 0.$$

A  $T$  pont baricentrikus koordinátái:

$$T = ((S_\beta - S_B)(S_\gamma - S_C) : (S_\gamma - S_C)(S_\alpha - S_A) : (S_\alpha - S_A)(S_\beta - S_B)) =$$

$$= \left( \frac{1}{S_\alpha - S_A}, \frac{1}{S_\beta - S_B}, \frac{1}{S_\gamma - S_C} \right).$$

Vezessük be a következő jelölést:  $\mu = \mu(A, B, C, \alpha, \beta, \gamma) =$   
 $= \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg} A \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg} B \sin^2 \beta + \operatorname{ctg} C \sin^2 \gamma - 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) =$   
 $= \frac{1}{4R^2} (S_A \sin^2 \alpha + S_B \sin^2 \beta + S_C \sin^2 \gamma - 2S \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).$

**a) Az  $AL$ ,  $BM$  és  $CN$  szakaszok hossza**

Az  $AL$ ,  $BM$  és  $CN$  szakaszok hossza:

$$AL = \frac{2R\sqrt{\mu}}{\sin \alpha}, \quad BM = \frac{2R\sqrt{\mu}}{\sin \beta}, \quad CN = \frac{2R\sqrt{\mu}}{\sin \gamma}. \quad (12)$$

A (12) képletek alapján:

$$AL \cdot \sin \alpha = BM \cdot \sin \beta = CN \cdot \sin \gamma = 2R\sqrt{\mu}. \quad (13)$$

**b) A második általánosított Fermat-pont távolsága a vonatkoztatási háromszög csúcsaitól**

A  $T$  pont koordinátáinak összege:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (S_\beta - S_B)(S_\gamma - S_C) + (S_\gamma - S_C)(S_\alpha - S_A) + (S_\alpha - S_A)(S_\beta - S_B) = \\ &= S_{BC} + S_{CA} + S_{AB} + S_{\beta\gamma} + S_{\gamma\alpha} + S_{\alpha\beta} - (S_B + S_C)S_\alpha - (S_C + S_A)S_\beta - (S_A + S_B)S_\gamma = \\ &= -a^2 S_\alpha - b^2 S_\beta - c^2 S_\gamma + 2S^2 = -(a^2 S_\alpha + b^2 S_\beta + c^2 S_\gamma - 2S^2). \end{aligned}$$

Hasonlóan, mint az I.b) pontban igazolható, hogy

$$\begin{aligned} \mu &= \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (\operatorname{ctg} \alpha \sin^2 A + \operatorname{ctg} \beta \sin^2 B + \operatorname{ctg} \gamma \sin^2 C - 2 \sin A \sin B \sin C) = \\ &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{4R^2 S} (a^2 S_\alpha + b^2 S_\beta + c^2 S_\gamma - 2S^2) = -\frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{4R^2 S} \Gamma. \end{aligned}$$

Az  $AT$ ,  $BT$  és  $CT$  szakaszok hossza:  $AT = \frac{bc}{2R\sqrt{\mu}} \sin|A - \alpha|,$

$$BT = \frac{ca}{2R\sqrt{\mu}} \sin|B - \beta|, \quad CT = \frac{ab}{2R\sqrt{\mu}} \sin|C - \gamma|. \quad (14)$$

**c) Az  $AT$ ,  $BT$  és  $CT$  szakaszokra vonatkozó összefüggések**

Érvényes az alábbi feltételes trigonometriai azonosság:

1.  $bc \sin \alpha \sin(A - \alpha) + ca \sin \beta \sin(B - \beta) + ab \sin \gamma \sin(C - \gamma) = -4R^2 \mu.$



Mivel  $A - \alpha + B - \beta + C - \gamma = 0$ , az  $A > \alpha$ ,  $B > \beta$ ,  $C > \gamma$  egyenlőtlenségek közül egyidejűleg legfennebb kettő teljesülhet.

Ha például  $A < \alpha$ ,  $B > \beta$ ,  $C > \gamma$ , akkor az 1. azonosság alapján

$$AT \sin \alpha - BT \sin \beta - CT \sin \gamma = 2R\sqrt{\mu} = AL \sin \alpha = BM \sin \beta = CN \sin \gamma. \quad (15)$$

Vagy ha  $A < \alpha$ ,  $B < \beta$ ,  $C > \gamma$ , akkor

$$AT \sin \alpha + BT \sin \beta - CT \sin \gamma = 2R\sqrt{\mu} = AL \sin \alpha = BM \sin \beta = CN \sin \gamma. \quad (16)$$

### III. Sajátos eset

Ebben a részben alkalmazzuk az alábbi képleteket:

$$1) abc(\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C) = R(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$2) \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C + \sqrt{3}) = \\ = 1 + \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C,$$

$$3) \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C - \sqrt{3}) = \\ = 1 - \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C,$$

Az 1) képlet bizonyítása:

$$abc(\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C) = abc \left( \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) = 2Rabc \left( \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \right) = \\ = R(2bc \cos A + 2ca \cos B + 2ab \cos C) = R(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2) = \\ = R(a^2 + b^2 + c^2)$$

A 2) és 3) képlet bizonyítása:

$$\sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C \pm \sqrt{3}) = \sin A \sin B \sin C \left( \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \pm \sqrt{3} \right) = \\ = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B \pm \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C = \\ = 1 \pm \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C.$$

Ha  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ , akkor  $K \equiv F_1$  és  $T \equiv F_2$ , ahol  $F_1$  illetve  $F_2$  az  $ABC$  háromszög első illetve második Fermat-pontja ( $X_{13}$  illetve  $X_{14}$  [9]-ben).

Ebben az esetben

$$\lambda^* = \lambda \left( A, B, C, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{4} \sin A \sin B \sin C (\operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C + \sqrt{3}) = \\ = \frac{3}{32R^2} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}\Delta) = \frac{3}{4} (1 + \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C),$$

$$\begin{aligned}\mu^* &= \mu\left(A, B, C, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \sin A \sin B \sin C \left(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C - \sqrt{3}\right) = \\ &= \frac{3}{32R^2} \left(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\Delta\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{3} \sin A \sin B \sin C + \cos A \cos B \cos C\right).\end{aligned}$$

A (8) képletek alapján  $AD = BE = CF = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda^*}$ . (17)

A (9) képletekből következően pedig

$$\begin{aligned}AF_1 &= \frac{bc}{2R\sqrt{\lambda^*}} \left| \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) \right|, \quad BF_1 = \frac{ca}{2R\sqrt{\lambda^*}} \left| \sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) \right|, \\ CF_1 &= \frac{ab}{2R\sqrt{\lambda^*}} \left| \sin\left(C + \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad (18)\end{aligned}$$

Ha  $A < 2\pi/3$ ,  $B < 2\pi/3$ ,  $C < 2\pi/3$ , akkor

$$AF_1 + BF_1 + CF_1 = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda^*} = AD = BE = CF. \quad (19)$$

Ha  $A > 2\pi/3$ , akkor

$$-AF_1 + BF_1 + CF_1 = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\lambda^*} = AD = BE = CF. \quad (20)$$

A (13) képletek alapján  $AL = BM = CN = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\mu^*}$ . (21)

A (14) képletekből következően pedig  $AF_2 = \frac{bc}{2R\sqrt{\mu^*}} \sin\left|A - \frac{\pi}{3}\right|$ ,

$$BF_2 = \frac{ca}{2R\sqrt{\mu^*}} \sin\left|B - \frac{\pi}{3}\right|, \quad CF_2 = \frac{ab}{2R\sqrt{\mu^*}} \sin\left|C - \frac{\pi}{3}\right|. \quad (22)$$

Ha  $A < \pi/3$ ,  $B > \pi/3$ ,  $C > \pi/3$ , akkor

$$AF_2 - BF_2 - CF_2 = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\mu^*} = AL = ME = NF. \quad (23)$$

Ha  $A < \pi/3$ ,  $B < \pi/3$ ,  $C > \pi/3$ , akkor

$$AF_2 + BF_2 - CF_2 = \frac{4R}{\sqrt{3}} \sqrt{\mu^*} = AL = ME = NF. \quad (24)$$

#### IV. Módszertani elemzések és a témához kapcsolódó más eredmények

Történetileg tekintve a klasszikus vagy sajátos helyzetű Fermat-pontokra vonatkozó eredményeket (amikor az oldalakra épített háromszögek egyenlő oldalúak), hosszú idő alatt, az elemi geometria eszközeinek igénybevételével érték el a különböző korok matematikusai. Ezek között igen fontosak az ennek az alfejezetnek az elején közölt metrikus relációk, az (I) és a (II). Mivel e relációk függenek a  $ABC$  vonatkoztatási háromszög természetétől (hegyes- vagy tompaszögű eset), levezetésük elemi geometriailag sem egyszerű és főleg hosszadalmas, ha a sok lehetséges esetet mind figyelembe vesszük. E módszer egy másik hátránya, hogy nem adja meg például az  $AX_1$  és  $AX_2$  szakaszok hosszát az  $ABC$  vonatkoztatási háromszög elemeinek függvényében. Az említett hátrányokat az analitikus megközelítés részben ellensúlyozza, de ami ennél fontosabb, hogy lehetővé teszi a probléma általánosítását, mégpedig egységes tárgyalásban. Ennek a módszernek viszont az a hátránya, hogy elég sok és alkalmasint bonyolult trigonometriai feltételes azonosságot használ és helyenként sok számítást igényel.

Az itt bizonyított trigonometriai azonosságok közül néhányat fel tudtam használni az általános Napoleon-háromszögek területeinek összegére és különbségére vonatkozó két fontos eredmény levezetésére (lásd *The sum and difference of the areas of Napoleon triangles*, Teaching Mathematics and Computer Science, **1** (2007), p. 99-108). Pontosabban a fenti cikkben arról van szó, hogy ha a jelen alfejezet feltételei mellett a  $BCD$ ,  $CAE$  és  $ABF$  háromszögek köré írt körök középpontjait  $U$ ,  $V$  és  $W$  jelöli, a  $BCL$ ,  $CAM$  és  $ABN$  háromszögek köré írt körök középpontjait pedig  $U'$ ,  $V'$  és  $W'$ , akkor az  $UVW$  és  $U'V'W'$  Napoleon-háromszögek területeire fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\sigma[UVW] + \sigma[U'V'W'] = \frac{1}{4}(a^2 \operatorname{ctg} \alpha + b^2 \operatorname{ctg} \beta + c^2 \operatorname{ctg} \gamma),$$

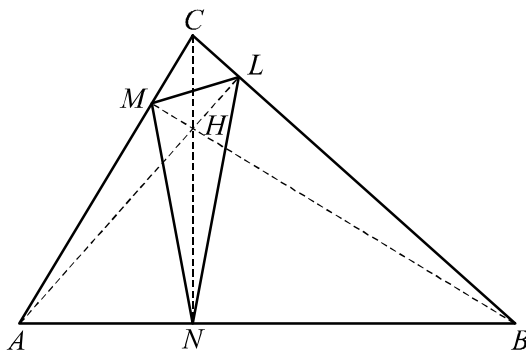
$$\sigma[UVW] - \sigma[U'V'W'] = \sigma[ABC],$$

ahol  $\sigma[ABC]$  az  $ABC$  háromszög területét jelöli,  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  pedig az oldalakra épített hasonló háromszögek szögeinek mértéke.

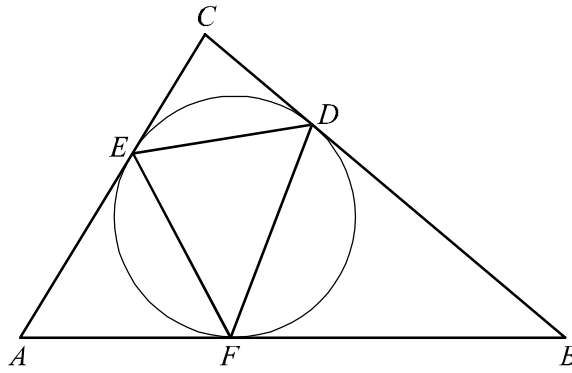
#### 4.5. A Kimberling-féle sejtés igazolása kontravariáns koordináták alkalmazásával

**Előzmények.** Az alább következő sejtés igazolásával nagyon sokat foglalkoztam, különböző koordináta-fajtákat alkalmazva és próbálva ki. Miután az egyik változatot cikk formájában elküldtem a *Forum Geometricorum* nevű folyóirathoz, végül egy főszerkesztői észrevétel alapján sikerült a számításokat lényegesen csökkenteni. Talán ennek a cikknek a megírása során tudatosult bennem igazán, hogy mit jelent valójában egy jó ötlet, hogy az mennyire más irányt szabhat egy geometriai probléma tárgyalásának. Az analitikus módszerek hatékonyak ugyan, szinte biztosan elvezetnek a megoldáshoz, de általában számítás-igényesek. Ezt a hátrányt az elemi geometriai módszerekkel esetenként ellensúlyozni lehet, de igen gyakran ez egy eredeti ötlet meglétét feltételezi. Ha az ötlet „kipattan” a megoldás előtt vagy közben, akkor nyert ügyünk van. De ha nem, akkor kénytelenek vagyunk valamilyen más (nem elemi) geometriai eszközhöz folyamodni. Alább a Kimberling-sejtés igazolásának az első változatát mutatom be.

Az  $ABC$  háromszög magasságainak  $L \in BC, M \in CA, N \in AB$  talppontjai által meghatározott  $LMN$  háromszöget *talpponti*, (4.4.1. ábra) a beírt körnek az oldalakkal való  $D \in BC, E \in CA, F \in AB$  érintési pontjai által meghatározott  $DEF$  háromszöget pedig *érintő háromszögnek* (4.4.2. ábra) nevezzük.



4.4.1. ábra



4.4.2. ábra

Az alábbi kérdés-sejtés Clark Kimberlingtől származik (Kimberling, C.: Triangle Centers and Central Triangles. *Congr. Numer.* **129**, 1998, 274. oldal):

*Az ABC háromszög talpponti háromszögének érintő és érintő háromszögének talpponti háromszöge homotétikusak?*

A levezetések és bizonyítások során használt feltételes trigonometriai azonosságokat először felsoroljuk, majd rendre mindegyiket igazoljuk:

1.  $a \cos B - b \cos A = \frac{1}{c}(a^2 - b^2)$ ,
2.  $a \cos A - b \cos B = -\frac{1}{c}(a^2 - b^2) \cos C$ ,
3.  $\cos(A - B) \cos C + \cos^2 B = \sin^2 A$ ,
4.  $\cos(A - C) \cos B + \cos^2 C = \sin^2 A$ ,
5.  $bc \cos(A - B) + (a^2 - b^2) \cos B = ac$ ,
6.  $bc \cos(A - C) + (a^2 - c^2) \cos C = ab$ ,
7.  $c(a^2 + b^2) \cos B - bc^2 \cos(A - B) = a(a^2 - b^2)$ ,
8.  $b(a^2 + c^2) \cos C - b^2 c \cos(A - C) = a(a^2 - c^2)$ .

Az azonosságok bizonyításai:

$$1. a \cos B - b \cos A = a \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} - b \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{1}{2c}(2a^2 - 2b^2) = \frac{1}{c}(a^2 - b^2).$$

$$\begin{aligned} 2. a \cos A - b \cos B &= a \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} - b \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \\ &= \frac{1}{2abc} \left[ a^2(-a^2 + b^2 + c^2) - b^2(a^2 - b^2 + c^2) \right] = \\ &= -\frac{1}{c}(a^2 - b^2) \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{c}(a^2 - b^2) \cos C. \end{aligned}$$

$$3. \cos(A-B)\cos C + \cos^2 B = \frac{1}{2}\cos(A-B+C) + \frac{1}{2}\cos(A-B-C) + \cos^2 B =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2B - \frac{1}{2}\cos 2A + \cos^2 B = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) = \sin^2 A.$$

$$5. bc\cos(A-B) + (a^2 - b^2)\cos B = bc\cos A\cos B + bc\sin A\sin B + (a^2 - b^2)\cos B =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)\cos B + bc\sin A\sin B = ac\cos^2 B + bc\sin A\sin B =$$

$$= c(a - a\sin^2 B + b\sin A\sin B) = ac - c\sin B(a\sin B - b\sin A) = ac.$$

$$7. c(a^2 + b^2)\cos B - bc^2\cos(A-B) = c(a^2 + b^2)\cos B - bc^2\cos A\cos B - bc^2\sin A\sin B =$$

$$= a^2c\cos B + bc\cos B(b - c\cos A) - bc^2\sin A\sin B =$$

$$= a^2c\cos B + abc\cos B\cos C - bc^2\sin A\sin B =$$

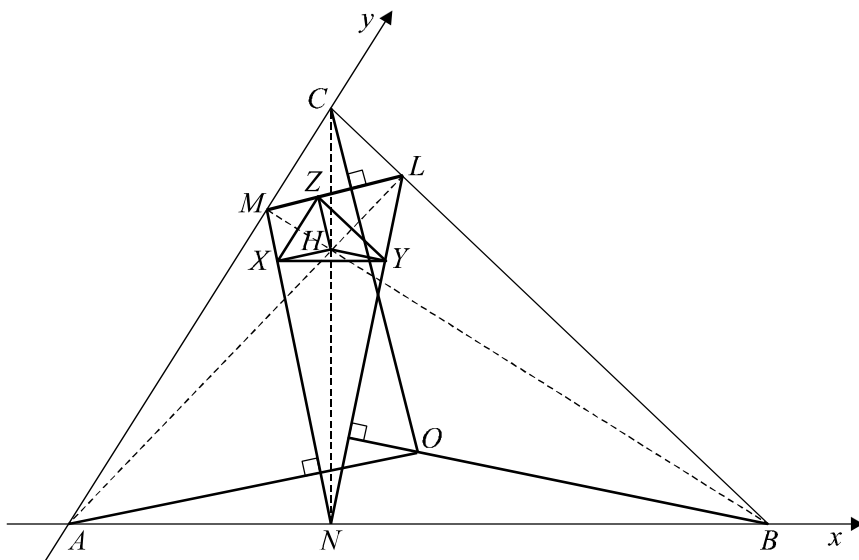
$$= ac[a\cos B + b\cos(B+C)] = ac(a\cos B - b\cos A) =$$

$$= ac\frac{1}{c}(a^2 - b^2) = a(a^2 - b^2).$$

I. A  $BAC$  normált ferdeszögű koordináta-rendszerben (az  $AB$  egyenes az  $x$ -tengely, az  $AC$  egyenes az  $y$ -tengely) szereplő pontok koordinátái (4.4.3.

ábra):  $A(0,0)$ ,  $B(c,0)$ ,  $C=(0,b)$ ,  $L = \left(\frac{bc}{a}\cos C, \frac{bc}{a}\cos B\right)$ ,

$M = (0, c\cos A)$ ,  $N = (b\cos A, 0)$ .



4.4.3. ábra

Legyen  $H$  az  $ABC$  háromszög ortocentruma,  $O$  a háromszög köré írt kör középpontja,  $R$  pedig a sugara:

$$O = \left( \frac{2R^2}{a} \cos B, \frac{2R^2}{a} \cos C \right), \quad H = \left( \frac{4R^2}{a} \cos A \cos C, \frac{4R^2}{a} \cos A \cos B \right).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy az  $ABC$  háromszög nem derékszögű és nem egyenlőszárú. Az  $LMN$  talpponti háromszög érintő háromszögét jelölje  $XYZ$  ( $X \in MN, Y \in NL, Z \in LM$ ). Először igazolni fogjuk, hogy az  $XYZ$  és az  $ABC$  háromszögek homotétikusok (4.4.3. ábra).

Érvényesek az alábbi tulajdonságok:

1. Az  $ABC$  háromszög  $H$  ortocentruma az  $LMN$  háromszög beírt illetve az  $XYZ$  háromszög körülírt körének a középpontja.

2. Az  $OA, OB, OC$  egyenesek rendre merőlegesek az  $LMN$  talpponti háromszög oldalaira ( $OA \perp MN, OB \perp NL, OC \perp LM$ ).

A 2. tulajdonság alapján  $HX \parallel OA, HY \parallel OB, HZ \parallel OC$ . Tehát a  $HX, HY, HZ$  egyenesek irányítványozói megegyeznek az  $OA, OB, OC$  egyenesek irányítványozóival. A továbbiakban meghatározzuk az  $X, Y, Z$  pontok koordinátáit. Ehhez szükségünk van a  $HX, HY, HZ$  illetve az  $MN, NL, LM$  egyenesek egyenleteire.

A  $HX, HY, HZ$  egyenesek irányítványozói:

$$m_{HX} = \frac{\cos C}{\cos B},$$

$$m_{HY} = -\frac{2R^2 \cos C}{ac - 2R^2 \cos B} = -\frac{\cos C}{\cos(A - C)},$$

$$m_{HZ} = -\frac{ab - 2R^2 \cos C}{2R^2 \cos B} = -\frac{\cos(A - B)}{\cos B}.$$

A  $HX$  egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_H &= m_{HX}(x - x_H) \Leftrightarrow \cos C \cdot x - \cos B \cdot y = \\ &= \cos C \cdot x_H - \cos B \cdot y_H \Leftrightarrow a \cos C \cdot x - a \cos B \cdot y = 4R^2 \cos A (\cos^2 C - \cos^2 B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \cos C \cdot x - a \cos B \cdot y = (b^2 - c^2) \cos A. \end{aligned}$$

A  $HY$  egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_H &= m_{HY}(x - x_H) \Leftrightarrow \cos C \cdot x + \cos(A - C) \cdot y = \\ &= \cos C \cdot x_H + \cos(A - C) \cdot y_H \Leftrightarrow a \cos C \cdot x + a \cos(A - C) \cdot y = \\ &= 4R^2 \cos A [\cos^2 C + \cos(A - C) \cos B] \Leftrightarrow \cos C \cdot x + \cos(A - C) \cdot y = a \cos A. \end{aligned}$$

A  $HZ$  egyenes egyenlete:

$$y - y_H = m_{HZ}(x - x_H) \Leftrightarrow \cos(A - B) \cdot x + \cos B \cdot y =$$

$$= \cos(A-B) \cdot x_H + \cos B \cdot y_H \Leftrightarrow a \cos(A-B) \cdot x + a \cos B \cdot y =$$

$$= 4R^2 \cos A [\cos(A-B) \cos C + \cos^2 B] \Leftrightarrow \cos(A-B) \cdot x + \cos B \cdot y = a \cos A.$$

Az  $MN$ ,  $NL$ ,  $LM$  egyenesek irányítványozói:  $m_{MN} = -\frac{c \cos A}{b \cos A} = -\frac{c}{b}$ ,

$$m_{NL} = -\frac{c \cos B}{a \cos A - c \cos C} = \frac{bc}{a^2 - c^2}, \quad m_{LM} = -\frac{a \cos A - b \cos B}{b \cos C} = \frac{a^2 - b^2}{bc}.$$

Az  $MN$  egyenes egyenlete:

$$by = -c(x - b \cos A) \Leftrightarrow cx + by = bc \cos A.$$

Az  $NL$  egyenes egyenlete:

$$(a^2 - c^2)y = bc(x - b \cos A) \Leftrightarrow bcx - (a^2 - c^2)y = b^2 c \cos A.$$

Az  $LM$  egyenes egyenlete:

$$bc(y - c \cos A) = (a^2 - b^2)x \Leftrightarrow -(a^2 - b^2)x + bcy = bc^2 \cos A.$$

Meghatározzuk az  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  pontok koordinátáit. Az  $X$  pont koordinátáit a  $HX$  és az  $MN$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} a \cos C \cdot x - a \cos B \cdot y = (b^2 - c^2) \cos A \\ cx + by = bc \cos A. \end{cases}$$

A Cramer-szabály alapján:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a \cos C & -a \cos B \\ c & b \end{vmatrix} = a(b \cos C + c \cos B) = a^2 \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} (b^2 - c^2) \cos A & -a \cos B \\ bc \cos A & b \end{vmatrix} = b \cos A (b^2 - c^2 + ac \cos B) = ab^2 \cos A \cos C,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a \cos C & (b^2 - c^2) \cos A \\ c & bc \cos A \end{vmatrix} = c \cos A (c^2 - b^2 + ab \cos C) = ac^2 \cos A \cos B.$$

$$\text{Tehát: } X = \left( \frac{b^2}{a} \cos A \cos C, \frac{c^2}{a} \cos A \cos B \right).$$

Az  $Y$  pont koordinátáit a  $HY$  és az  $NL$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} \cos C \cdot x + \cos(A-C) \cdot y = a \cos A \\ bcx - (a^2 - c^2)y = b^2 c \cos A. \end{cases}$$

A Cramer-szabály alapján:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos C & \cos(A-C) \\ bc & -(a^2 - c^2) \end{vmatrix} = -(a^2 - c^2) \cos C - bc \cos(A-C) = -ab \neq 0,$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a \cos A & \cos(A-C) \\ b^2 c \cos A & -(a^2 - c^2) \end{vmatrix} = -\cos A [a(a^2 - c^2) + b^2 c \cos(A-C)] =$$

$$= -b(a^2 + c^2) \cos A \cos C,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos C & a \cos A \\ bc & b^2 c \cos A \end{vmatrix} = bc \cos A (b \cos C - a) = -bc^2 \cos A \cos B.$$

$$\text{Tehát: } Y = \left( \frac{a^2 + c^2}{a} \cos A \cos C, \frac{c^2}{a} \cos A \cos B \right).$$

Az  $Z$  pont koordinátáit a  $HZ$  és az  $LM$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} \cos(A-B) \cdot x + \cos B \cdot y = a \cos A \\ -(a^2 - b^2)x + bcy = bc^2 \cos A. \end{cases}$$

A Cramer-szabály alapján:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(A-B) & \cos B \\ -(a^2 - b^2) & bc \end{vmatrix} = bc \cos(A-B) + (a^2 - b^2) \cos B = ac \neq 0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a \cos A & \cos B \\ bc^2 \cos A & bc \end{vmatrix} = bc \cos A (a - c \cos B) = b^2 c \cos A \cos C,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos(A-B) & a \cos A \\ -(a^2 - b^2) & bc^2 \cos A \end{vmatrix} = \cos A [bc^2 \cos(A-B) + a(a^2 - b^2)] = c(a^2 + b^2) \cos A \cos B.$$

$$\text{Tehát: } Z = \left( \frac{b^2}{a} \cos A \cos C, \frac{a^2 + b^2}{a} \cos A \cos B \right).$$

Mivel az  $X$  és  $Y$  pontok ordinátái, illetve az  $X$  és  $Z$  pontok abszcisszái egyenlők, ezért  $XY \parallel AB$  és  $XZ \parallel AC$ . Az  $YZ$  egyenes irányítányezője pedig:

$$m_{YZ} = -\frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cos B}{(a^2 - b^2 + c^2) \cos C} = -\frac{2ab \cos B \cos C}{2ac \cos B \cos C} = -\frac{b}{c} = m_{BC}, \text{ azaz } YZ \parallel BC.$$

Következésképpen az  $XYZ$  és  $ABC$  háromszögek párhuzamosan hasonlóak.

II. Az  $ABC$  háromszög beírt körének az oldalakkal való érintési pontjai legyenek  $D$ ,  $E$  és  $F$  ( $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ ). A  $DEF$  háromszög talpponti háromszögét jelölje  $UVW$  ( $U \in EF, V \in FD, W \in DE$ ), az  $ABC$  háromszög félkerületét pedig  $2s$  ( $2s = a + b + c$ ). Most igazolni fogjuk, hogy az  $UVW$  és  $ABC$  háromszögek homotétikusak.

$$\text{Mivel } D = \left[ \frac{c}{a}(s-c), \frac{b}{a}(s-b) \right], E = (0, s-a), F = (s-a, 0), \text{ ezért az}$$

$EF, FD$  és  $DE$  egyenesek irányítányezői:

$$m_{EF} = -1, m_{FD} = \frac{b(s-b)}{c(s-c) - a(s-a)} = \frac{b}{a-c}, m_{DE} = \frac{b(s-b) - a(s-a)}{c(s-c)} = \frac{a-b}{c}.$$

Az  $EF$  egyenes egyenlete:  $y = -[x - (s-a)] \Leftrightarrow x + y = s - a$ .

Az  $FD$  egyenes egyenlete:

$$(a-c)y = b[x - (s-a)] \Leftrightarrow bx - (a-c)y = b(s-a).$$

Az  $DE$  egyenes egyenlete:

$$cy - c(s-a) = (a-b)x \Leftrightarrow -(a-b)x + cy = c(s-a).$$

Felírjuk a  $DEF$  háromszög  $DU$ ,  $EV$  és  $FW$  magasságvonalainak egyenleteit. A merőlegességi feltétel alapján meghatározzuk a  $DU$ ,  $EV$  és  $FW$  egyenesek irányítványezőit:

$$m_{DU} = -\frac{1 + m_{EF} \cdot \cos A}{m_{EF} + \cos A} = -\frac{1 - \cos A}{-1 + \cos A} = 1,$$

$$m_{EV} = -\frac{1 + m_{FD} \cdot \cos A}{m_{FD} + \cos A} = -\frac{a-c + b \cos A}{b + (a-c) \cos A} = -\frac{b}{a+c},$$

$$m_{FW} = -\frac{1 + m_{DE} \cdot \cos A}{m_{DE} + \cos A} = -\frac{c + (a-b) \cos A}{a-b + c \cos A} = -\frac{a+b}{c}.$$

A  $DU$  egyenes egyenlete:

$$ay - b(s-b) = ax - c(s-c) \Leftrightarrow ax - ay = (b-c)(s-a).$$

Az  $EV$  egyenes egyenlete:

$$(a+c)y - (a+c)(s-a) = -bx \Leftrightarrow bx + (a+c)y = (a+c)(s-a).$$

Az  $FW$  egyenes egyenlete:

$$cy = -(a+b)[x - (s-a)] \Leftrightarrow (a+b)x + cy = (a+b)(s-a).$$

Meghatározzuk az  $U$ ,  $V$ ,  $W$  pontok koordinátáit. Az  $U$  pont koordinátáit az  $EF$  és a  $DU$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} x + y = s - a \\ ax - ay = (b-c)(s-a). \end{cases}$$

$$\text{Tehát: } U = \left( \frac{1}{a}(s-a)(s-c), \frac{1}{a}(s-a)(s-b) \right).$$

A  $V$  pont koordinátáit az  $FD$  és az  $EV$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} bx - (a-c)y = b(s-a) \\ bx + (a+c)y = (a+c)(s-a). \end{cases}$$

$$\text{Tehát: } V = \left( \frac{a+c}{ab}(s-a)(s-c), \frac{1}{a}(s-a)(s-b) \right).$$

A  $W$  pont koordinátáit az  $DE$  és az  $FW$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$\begin{cases} -(a-b)x + cy = c(s-a) \\ (a+b)x + cy = (a+b)(s-a). \end{cases}$$

$$\text{Tehát: } W = \left( \frac{1}{a}(s-a)(s-c), \frac{a+b}{ac}(s-a)(s-b) \right).$$

Mivel az  $U$  és  $V$  pontok ordinátái, illetve az  $U$  és  $W$  pontok abszcisszái egyenlők, ezért  $UV \parallel AB$  és  $UW \parallel AC$ . Az  $VW$  egyenes irányítányezője pedig:

$$m_{vw} = -\frac{b(a+b-c)(s-b)}{c(a-b+c)(s-c)} = -\frac{2b(s-b)(s-c)}{2c(s-b)(s-c)} = -\frac{b}{c} = m_{BC}, \text{ azaz } VW \parallel BC.$$

Következésképpen az  $UVW$  és  $ABC$  háromszögek is párhuzamosan hasonlóak.

Tehát igazoltuk, hogy az  $XYZ$  háromszög is és az  $UVW$  háromszög is homotétikus az  $ABC$  háromszöggel, amiből következik, hogy e háromszögek egymással is homotétikusak. Ezzel a sejtés igazolását befejeztük.

III. Legyen  $P$  az  $XYZ$  és  $ABC$ ,  $Q$  pedig az  $ABC$  és  $UVW$  háromszögek által meghatározott homotétia középpontja,  $\alpha$  és  $\beta$  e homotétiák arányai. Meghatározzuk ezeket az arányokat kiszámítva az  $XYZ$  és az  $UVW$  háromszögek oldalhosszait. Ha  $\sigma$  jelöli az  $ABC$  háromszög területét,  $r$  a beírt kör sugarát,  $d$  a körülírt kör átmérőjét, akkor

$$\begin{aligned} XY &= \frac{a^2 + c^2}{a} \cos A \cos C - \frac{b^2}{a} \cos A \cos C = \\ &= \frac{1}{a} (a^2 - b^2 + c^2) \cos A \cos C = 2c \cos A \cos B \cos C, \\ UV &= \frac{a+c}{ab} (s-a)(s-c) - \frac{1}{a} (s-a)(s-c) = \frac{1}{ab} (a-b+c)(s-a)(s-c) = \\ &= \frac{2}{ab} (s-a)(s-b)(s-c) = \frac{2\sigma^2}{abs} = \frac{2\sigma \cdot c}{4R \cdot s} = \frac{csr}{2sR} = \frac{cr}{2R} = \frac{cr}{d}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{YZ}{a} = \frac{ZX}{b} = \frac{XY}{c} = 2 \cos A \cos B \cos C \text{ és} \\ \beta &= \frac{a}{VW} = \frac{b}{WU} = \frac{c}{UV} = \frac{d}{r}. \end{aligned}$$

Jelölje  $T_\alpha$  a  $P$  centrumú,  $\alpha$  arányú,  $T_\beta$  pedig a  $Q$  centrumú,  $\beta$  arányú homotétiát. Mivel  $T_\beta \circ T_\alpha(X) = T_\beta(A) = U$ , a  $T = T_\beta \circ T_\alpha$  homotétia az  $XYZ$  háromszögnek az  $UVW$  háromszöget felelteti meg. A  $T$  aránya

$$\gamma = \alpha \cdot \beta = \frac{YZ}{VW} = \frac{2d}{r} \cos A \cos B \cos C. \text{ Ha } S \text{ a } T \text{ homotétia centruma, akkor}$$

a  $P$ ,  $Q$  és  $S$  pontok kollineárisak. Az általuk meghatározott egyenest e homotétiák *tengelyének* nevezzük.

Jelölje  $R_\alpha$  az  $XYZ$  háromszög,  $R_\beta$  pedig az  $UVW$  háromszög körülírt körének sugarát. Mivel a  $k$  állandójú homotétia az  $R$  sugarú kört a  $|k|R$  sugarú körbe transzformálja, ezért

$$R_\alpha = \alpha \cdot R = 2R \cos A \cos B \cos C = d \cos A \cos B \cos C \text{ és}$$

$$R_\beta = \frac{1}{\beta} \cdot R = \frac{r}{2R} \cdot R = \frac{r}{2}.$$

Ez utóbbi összefüggés azt fejezi ki, hogy az  $UVW$  háromszög körülírt körének sugara egyenlő az  $ABC$  háromszögbe írt kör sugarának a felével. Ez a tulajdonság abból is adódik, hogy az  $UVW$  háromszög körülírt köre egybeesik a  $DEF$  érintő háromszög Feuerbach-körével.

IV. Mivel az  $XYZ$  háromszög körülírt körének középpontja az  $ABC$  háromszög  $H$  ortocentruma és  $T_\alpha(H) = O$ , a  $T_\alpha$  homotétia  $P$  centruma az  $ABC$  háromszög  $OH$  Euler-egyenesén van. Most egy hasonló tulajdonságot igazolunk a  $Q$  pontra vonatkozóan: a  $T_\beta$  homotétia  $Q$  centruma a  $DEF$  háromszög  $IK$  Euler-egyenesén van, ahol  $I$  az  $ABC$  háromszög beírt körének,  $K$  pedig az  $UVW$  háromszög körülírt körének a középpontja. A  $T_\beta(O) = K$  alapján a  $Q$ ,  $O$  és  $K$  pontok kollineárisak. Elegendő tehát igazolni, hogy a  $Q$ ,  $O$  és  $I$  pontok is kollineárisak. Ehhez meghatározzuk a  $Q$  pont koordinátáit.

A  $Q$  pont koordinátáit az  $AU$  és az  $BV$  egyenesek egyenleteiből alkotott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Az  $AU$  egyenes egyenlete:

$$y = \frac{s-b}{s-c} x. \text{ A } BV \text{ egyenes egyenlete: } y_v \cdot x + (c - x_v) y = c \cdot y_v. \text{ A } Q \text{ pont}$$

abszcisszája:

$$\begin{aligned} & [(s-c)y_v + (c-x_v)(s-b)]x = c(s-c)y_v \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ (s-c)\frac{1}{a}(s-a)(s-b) + \left[ c - \frac{a+c}{ab}(s-a)(s-c) \right] (s-b) \right\} x = c(s-c)\frac{1}{a}(s-a)(s-b) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [abc - 2(s-a)(s-b)(s-c)]x = bc(s-a)(s-c). \end{aligned}$$

Következésképpen  $x_Q = \frac{bc(s-a)(s-c)}{abc - 2(s-a)(s-b)(s-c)}$  és

$$y_Q = \frac{bc(s-a)(s-b)}{abc - 2(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A kollinearitás igazolásához a  $Q$ ,  $O$  és  $I$  pontok trilineáris koordinátáit használjuk:

$$I \in OQ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ (s-b)(s-c) & (s-c)(s-a) & (s-a)(s-b) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum (s-a)(s-b)(\cos B - \cos A) = 0 \Leftrightarrow \sum ab \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{c} (a-b)(1 + \cos C) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{ab}{c} (a-b) \sin^2 C = \sum \frac{abc}{4R^2} (a-b) \Leftrightarrow \sum (a-b) = 0, \text{ ami igaz. Ezzel}$$

igazoltuk, hogy a  $Q$ ,  $O$ ,  $K$  és  $I$  pontok egy egyenesen vannak.

V. Következtetések: A szóban forgó homotétiák centrumai azonosíthatók a [9]-ben található nevezetes pontok közül az alábbi hárommal:  
 Az  $ABC$  és  $XYZ$  háromszögek által meghatározott homotétia centruma:  $X_{25}$   
 Az  $ABC$  és  $UVW$  háromszögek által meghatározott homotétia centruma:  $X_{57}$   
 Az  $UVW$  és  $XYZ$  háromszögek által meghatározott homotétia centruma:  $X_{1876}$

Végül megjegyezzük, hogy *egy háromszög talpponti háromszögének érintő és érintő háromszögének talpponti háromszöge csak akkor párhuzamosan hasonlók, ha az eredeti háromszög hegyesszögű*. Tompaszögű háromszögekre csak az igaz, hogy az *érintő háromszög talpponti háromszöge homotétikus az  $ABC$  vonatkoztatási háromszöggel*, de a talpponti háromszög érintő háromszöge nem homotétikus  $ABC$ -vel. Ez utóbbi esetben az  $ABC$  háromszög tompaszögének csúcsa a talpponti háromszög beírt körének középpontja.

## Irodalomjegyzék

- [1] V. T. Baziljev – K. I. Dunyicsev – V. P. Ivanyickaja, *Geometria I.*  
V. T. Baziljev – K. I. Dunyicsev, *Geometria II.*  
Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] O. Bottema, *On the Area of a Triangle in Barycentric Coordinates*, *Crux.*  
*Math.* **8**, (1982) 228 – 231.
- [3] C. B. Boyer, *History of Analytic Geometry*, New York: Yeshiva University,  
1956.
- [4] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest,  
1973.
- [5] H. S. M. Coxeter, *Some Applications of Trilinear Coordinates*, *Linear*  
*Algebra, Appl.* **226 – 228** (1995) 375 – 388.
- [6] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest,  
1960.
- [7] C. Kimberling, *Central Points and Central Lines in the Plane of a*  
*Triangle*, *Mathematics Magazine* **67** (1994) 163 – 187.
- [8] C. Kimberling, *Triangle Centers and Central Triangles*, *Congressus*  
*Numerantium*, **129**, Winnipeg, 1998.
- [9] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*,  
<http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [10] C. Kimberling, *A class of major centers of triangles*, *Aequationes*  
*Mathematicae*, **55** (1998) 251-258.
- [11] S. L. Loney, *The Element of Coordinate Geometry, Part II. Trilinear*  
*Coordinates*, Macmillan, London, 1957.

- [12] *Matematikai kislexikon* (Szerkesztő: Farkas Miklós), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [13] *Matematikai kislexikon* (Szerzők: Maurer I. Gyula, Orbán Béla, Radó Ferenc, Szilágyi Pál, Vincze Mária), Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1983.
- [14] D. M. Y. Sommerville, *Analytical Conics*, 3<sup>rd</sup> ed. London, G. Bell and Sons, 1961.
- [15] Peter Yff, *A Triangle Property in Trilinear Coordinates*, Proceedings of the Conference on Algebra and Geometry, Kuwait (1981) 207 – 214.
- [16] Paul Yiu, *The Uses of Homogeneous Barycentric Coordinates in Plane Euclidean Geometry*, Internat. 3. Math. Ed. Sci. Tech. **31** (2000) 569 – 578.
- [17] Paul Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, 2002  
<http://www.math.fau.edu/Yiu/GeometryNotes020402.pdf>
- [18] D. Pedoe, *Notes on the History of Geometrical Ideas I. Homogeneous Coordinates*, Mathematics Magazine, Vol. 48, No. 4 (Sep. 1975), pp. 215 – 217.
- [19] Radó Ferenc – Orbán Béla, *A geometria mai szemmel*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1981.
- [20] W. A. Whitworth, *Trilinear Coordinates and Other Methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions*, Cambridge: Deighton, Bell, and Co., London: Bell and Daldy, 1866.  
<http://historical.library.cornell.edu/cgi-bin/cul.math/docviewer?did=01190002&seq=&view=50&frames=0&pagenum=1>
- [21] M. Vygosky: *Mathematical handbook*, Mir Publishers, Moscow, 1975.
- [22] B. L. van der Waerden: *Egy tudomány ébredése*, Gondolat, Budapest, 1977.

## **Matematikadidaktika:**

- [23] Ambrus András, *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995.

- [24] P. Bednorz, *Bevezetés a tanulás lélektanába*, Medicina Kiadó, Budapest, 2006.
- [25] Csíkszenmihályi Mihály, *Kreativitás*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [26] Dr. Czeglédy István, Dr. Orosz Gyuláné, Dr. Szalontai Tibor, Szilák Aladárné, *Matematika tantárgypedagógia I., II.*, Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2000.
- [27] Dienes Zoltán, *Építsük fel a matematikát*, SHL Hungary Kft., 1997.
- [28] Klein Sándor, *A komplex matematikatanítási módszer*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.
- [29] W. Metzsig, *Tanuljunk meg tanulni*, Medicina Kiadó, Budapest, 2003.
- [30] Pólya György, *A gondolkodás iskolája*, Akkord Kiadó, 2000.
- [31] R. Skemp, *A matematikatanulás pszichológiája*, Edge 2000 Kiadó, 2005.
- [32] R. J. Sternberg, *A matematikai gondolkodás természete*, Vince Kiadó, 1998.
- [33] Wiegandt Richárd, *A természettudományok integrált oktatása*, Természet Világa, 2008. december

## ***A szerzőnek az értekezéssel kapcsolatos publikációi***

### **I. Szakkönyvek:**

1. Kiss Sándor, *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata*  
Editura didactică și pedagogică, Bukarest, 2008, 171 oldal
2. Kiss Sándor, *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan  
ferdeszögű koordinátákkal*, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 1999, 206 oldal

### **II. Szakfolyóiratokban megjelent cikkek és tanulmányok:**

1. Kiss Sándor, *Az egyenlő szárú hiperbola egyenleteiről*



Matlap, XII. évf., 2008 június, 6. szám, 215-218.

2. Sándor Kiss, *The sum and difference of the areas of Napoleon triangles*  
Teaching Mathematics and Computer Science, **1** (2007), p. 99-108.

3. Sándor Kiss, *The Orthic-of-Intouch and Intouch-of-Orthic Triangles*  
Forum Geometricorum **6** (2006) pp. 171-177.  
<http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200617.pdf>

4. Kiss Sándor, *A kúpszeletek egyenleteiről*  
II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Pont  
Társadalomtudományi folyóirat 2005./1. - Matematikai Szakmódszertani  
különszám.

5. Sándor Kiss, *Using SMS rules to hit elementary results on conic sections*  
In: KARL JOSEF PARISOT & VÁSÁRHELYI ÉVA Positionen -  
Mathematikdidaktik in Entwicklung Publikationen des Dissertantenseminars  
Salzburg 2004, Pozíciók - Matematikadidaktika fejlődésben, A 2004-es  
Salzburgi doktorandusz szeminárium publikációi, 117-125.

6. Kiss Sándor, *Paralelogrammákba írható paralelogrammák(II)*  
Matlap, VIII. évf., 2004 március, 3. szám, 85-86.

7. Kiss Sándor, *Paralelogrammákba írható paralelogrammák(I)*  
Matlap, VIII. évf., 2004 február, 2. szám, 41-45.

8. Sándor Kiss, *A new proof and generalizations of Malfatti's problem*  
Octogon, Vol. 10. Nr. 1. April 2002. pp. 117-125.

9. Kiss Sándor, *Módszertani javaslatok a parabola tanításához*  
Matlap, VI. évf., 2002 január, 1. szám, 2-6.

10. Kiss Sándor, *A merőleges affinitás és néhány alkalmazása*  
Matlap, V. évf., 2001 november, 9. szám, 330-334.

11. Sándor Kiss, *Concurrent lines in connection with Morley's triangle*  
Octogon, Vol. 9., No.2., October 2001, pp. 846-851.

12. Sándor Kiss, *About Morgan's theorem*  
Octogon, Vol. 8., Nr.1., April 2000, pp. 60-69.

## A szerző előadásai

1) *Euler-körök egy tulajdonsága* (közös előadás Horváth Sándorral)  
A Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Erdélyi Múzeum-Egyesület + Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság, Kolozsvár, 2008. nov. 14.

2) *A Napoleon háromszögek területeinek összegéről és különbségéről*  
A Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Erdélyi Múzeum-Egyesület + Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság, Kolozsvár, 2007. nov. 16-17.

3) *The Equations of the Conics in Oblique Coordinates Systems*  
The 7<sup>th</sup> Junior Mathemaical Congress, June 25- July 2, 2006, Târgu-Mureş (Marosvásárhely), Románia.

4) *Concept-pyramids*  
Second Central-European Conference on Mathematics Didactics, Komarno, 10-12. Dec. 2004.  
II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Révkomárom, 2004. dec. 10-12.

5) *Koordinátatranszformációk*  
A Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Erdélyi Múzeum-Egyesület + Farkas Gyula Egyesület a Matematikáért és Informatikáért, Kolozsvár, 2004. nov. 12-13.

6) *Tévútak és kreativitás a problémamegoldásban*  
Bolyai Nyári Akadémia, Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Sepsiszentgyörgy, 2004. júl. 15.

7) *Using SMS rules to hit elementary results on conics sections*  
Módszertani konferencia doktoranduszoknak, Eötvös Loránd Tudományegyetem (Budapest) – Paris Lodron Universitát (Salzburg), Salzburg, 2004. jún. 26 – júl. 2.

8) *Koordinátarendszerek komparatív vizsgálata a hatékonyság szempontjából*  
A Magyar Tudomány Napja Erdélyben, Erdélyi Múzeum-Egyesület + Radó Ferenc Matematikaművelő Társaság, Kolozsvár, 2003. nov. 28.

9) *Az ellipszis és a hiperbola konjugált átmérőkre vonatkoztatott egyenletei*

Bolyai Nyári Akadémia, Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Sepsiszentgyörgy, 2003. júl. 14.

*10) Fogalom – piramisok*

Bolyai Nyári Akadémia, Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Sepsiszentgyörgy, 2003. júl. 14.

*11) Koordinátarendszerek és koordinátatípusok*

Módszertani konferencia doktoranduszoknak, Eötvös Loránd Tudományegyetem (Budapest) – Paris Lodron Universitát (Salzburg), Salzburg, 2003. jún. 21-26.

*12) About the equations of the conics*

First Central-European Conference on Mathematics Didactics, Komarno, 24-25. January 2003.

I. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Révkomárom, 2003. jan. 24-25.

*13) Kúpszeletek*

Bolyai Nyári Akadémia, Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Sepsiszentgyörgy, 2002. júl. 17.

*14) A Fermat-féle probléma és általánosításai*

Bolyai Nyári Akadémia, Romániai Magyar Pedagógusok Szövetsége, Sepsiszentgyörgy, 2000. júl. 18.



## 1. Függelék. Koordinátatranszformációk (Összefoglalás)

Koordináta-típusok	Derékszögű ( $x, y$ )	Kontravariáns ( $X, Y$ )	Kovariáns ( $p, q$ )
Derékszögű ( $x, y$ )		$x = X + Y \cos \theta$ $y = Y \sin \theta$	$x = p$ $y = \frac{1}{\sin \theta}(-p \cos \theta + q)$
Kontra-variáns ( $X, Y$ )	$X = x - y \operatorname{ctg} \theta$ $Y = \frac{y}{\sin \theta}$		$X = \frac{1}{\sin^2 \theta}(p - q \cos \theta)$ $Y = \frac{1}{\sin^2 \theta}(-p \cos \theta + q)$
Kovariáns ( $p, q$ )	$p = x$ $q = x \cos \theta + y \sin \theta$	$p = X + Y \cos \theta$ $q = X \cos \theta + Y$	
Valódi trilineáris ( $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ )	$\alpha_0 = \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B$ $\beta_0 = x \sin A - y \cos A$ $\gamma_0 = y$	$\alpha_0 = \frac{1}{a}(bc - bX - cY) \sin A$ $\beta_0 = X \sin A$ $\gamma_0 = Y \sin A$	$\alpha_0 = \frac{S}{a} - \frac{1}{\sin A}(p \cos C + q \cos B)$ $\beta_0 = \frac{1}{\sin A}(p - q \cos A)$ $\gamma_0 = \frac{1}{\sin A}(-p \cos A + q)$

Koordináta-típusok	Derékszögű ( $x, y$ )	Kontravariáns ( $X, Y$ )	Kovariáns ( $p, q$ )
Általános trilineáris ( $\alpha : \beta : \gamma$ )	$\alpha = \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B$ $\beta = x \sin A - y \cos A$ $\gamma = y$	$\alpha = \frac{1}{a}(bc - bX - cY)$ $\beta = X$ $\gamma = Y$	$\alpha = \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B$ $\beta = p - q \cos A$ $\gamma = -p \cos A + q$
Baricentri- kus ( $u : v : w$ )	$u = a \left( \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B \right)$ $v = b(x \sin A - y \cos A)$ $w = cy$	$u = bc - bX - cY$ $v = bX$ $w = cY$	$u = a \left( \frac{\sigma}{R} - p \cos C - q \cos B \right)$ $v = b(p - q \cos A)$ $w = c(-p \cos A + q)$
Normált baricentri- kus ( $u_0, v_0, w_0$ )	$u_0 = \frac{a}{S} \left( \frac{bc}{2R} - x \sin B - y \cos B \right)$ $v_0 = \frac{b}{S} (x \sin A - y \cos A)$ $w_0 = \frac{c}{S} y$	$u_0 = \frac{1}{bc} (bc - bX - cY)$ $v_0 = \frac{X}{c}$ $w_0 = \frac{Y}{b}$	$u_0 = 1 - \frac{R}{\sigma} (p \cos C + q \cos B)$ $v_0 = \frac{bR}{a\sigma} (p - q \cos A)$ $w_0 = \frac{cR}{a\sigma} (-p \cos A + q)$

Koordináta-típusok	Valódi trilineáris ( $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ )	Általános trilineáris ( $\alpha : \beta : \gamma$ )	Baricentrikus ( $u : v : w$ )	Normált baricentrius ( $u_0, v_0, w_0$ )
Derékszögű ( $x, y$ )	$x = \frac{1}{\sin A}(\beta_0 + \gamma_0 \cos A)$ $y = \gamma_0$	$x = \frac{bc(\beta + \gamma \cos A)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $y = \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$	$x = \frac{cv + bw \cos A}{u + v + w}$ $y = \frac{bw \sin A}{u + v + w}$	$x = cv_0 + bw_0 \cos A$ $y = bw_0 \sin A$
Kontra-variáns ( $X, Y$ )	$X = \frac{\beta_0}{\sin A}$ $Y = \frac{\gamma_0}{\sin A}$	$X = \frac{bc\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $Y = \frac{bc\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$	$X = \frac{cv}{u + v + w}$ $Y = \frac{bw}{u + v + w}$	$X = cv_0$ $Y = bw_0$
Kovariáns ( $p, q$ )	$p = \frac{1}{\sin A}(\beta_0 + \gamma_0 \cos A)$ $q = \frac{1}{\sin A}(\beta_0 \cos A + \gamma_0)$	$p = \frac{bc(\beta + \gamma \cos A)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $q = \frac{bc(\beta \cos A + \gamma)}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$	$p = \frac{cv + bw \cos A}{u + v + w}$ $q = \frac{cv \cos A + bw}{u + v + w}$	$p = cv_0 + bw_0 \cos A$ $q = cv_0 \cos A + bw_0$
Valódi trilineáris ( $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ )		$\alpha_0 = \frac{S\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $\beta_0 = \frac{S\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $\gamma_0 = \frac{S\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$	$\alpha_0 = \frac{S}{a} \frac{u}{u + v + w}$ $\beta_0 = \frac{S}{b} \frac{v}{u + v + w}$ $\gamma_0 = \frac{S}{c} \frac{w}{u + v + w}$	$\alpha_0 = \frac{S}{a} u_0$ $\beta_0 = \frac{S}{b} v_0$ $\gamma_0 = \frac{S}{c} w_0$

Koordináta-típusok	Valódi trilineáris $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$	Általános trilineáris $(\alpha : \beta : \gamma)$	Baricentrikus $(u : v : w)$	Normált baricentrius $(u_0, v_0, w_0)$
Általános trilineáris $(\alpha : \beta : \gamma)$	$\alpha = k\alpha_0$ $\beta = k\beta_0$ $\gamma = k\gamma_0, k \in \mathbb{R}^*$		$\alpha = \frac{u}{a} \quad \beta = \frac{v}{b}$ $\gamma = \frac{w}{c}$	$\alpha = \frac{u_0}{a} \quad \beta = \frac{v_0}{b}$ $\gamma = \frac{w_0}{c}$
Baricentrikus $(u : v : w)$	$u = a\alpha_0$ $v = b\beta_0$ $w = c\gamma_0$	$u = a\alpha$ $v = b\beta$ $w = c\gamma$		$u = ku_0$ $v = kv_0$ $w = kw_0, k \in \mathbb{R}^*$
Normált baricentrikus $(u_0, v_0, w_0)$	$u_0 = \frac{a\alpha_0}{S}$ $v_0 = \frac{b\beta_0}{S}$ $w_0 = \frac{c\gamma_0}{S}$	$u_0 = \frac{a\alpha}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $v_0 = \frac{b\beta}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$ $w_0 = \frac{c\gamma}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$	$u_0 = \frac{u}{u + v + w}$ $v_0 = \frac{v}{u + v + w}$ $w_0 = \frac{w}{u + v + w}$	



## **Köszönetnyilvánítás**

Köszönetemet fejezem ki mindazoknak, akik észrevételeikkel, ötleteikkel, tanácsaikkal hozzájárultak az értekezés tartalmának jobbá, tökéletesebbé tételéhez. Mindenekelőtt Dr. Kovács Zoltán témavezetőmnek, akinek bátorítása, szakértelme és tanácsai nagyon sokat jelentettek számomra. Továbbá Dr. Vásárhelyi Évának, Dr. Ambrus Andrásnak és Dr. Karl Josef Parisot-nak, akiktől hasznos szakmai és módszertani segítséget kaptam. Valamint a 2002 és 2005 között Budapesten, Révkomáromban és Salzburgban rendezett doktori szemináriumokon résztvevő kollégáknak, akik az általam bemutatott matematikai kutatási eredmények építő jellegű, segítő szándékú bírálói voltak.

Külön köszönet Buzogány Ágotának, a tézisfüzet angol fordítójának és Demeter Csaba informatikusnak, a dolgozat technikai szerkesztésében nyújtott segítségével.

Hálás vagyok a szatmárnémeti „Constantin Brâncuși” Iskolaközpont igazgatóinak, megértésükért és támogatásukért.

Szatmárnémeti, 2010 január