



1949

# AZ ELŐHÍVÁSOS TANULÁS SZEREPE AZ EGYETEMI MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Lampé-Muzsnay Anna  
Témavezető: Prof. Dr. Szabó Csaba

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2024

*Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szak módszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*

*Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.*

*Debrecen, 20. ....*

.....

*a jelölt aláírása*

*Tanúsítom, hogy Lampé-Muzsnay Anna doktorjelölt 2020 - 2024 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szak módszertan) programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan (hatvan százalékos arányban) hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.*

*Az értekezés elfogadását javasolom.*

*Debrecen, 20.. ....*

.....

*a témavezető aláírása*

# AZ ELŐHÍVÁSOS TANULÁS SZEREPE AZ EGYETEMI MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Lampé-Muzsnay Anna okleveles matematika-kémia szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája  
Didaktika (szakmódszertan) programja keretében

Témavezető: Prof. Dr. Szabó Csaba

Az értekezés bírálói:

.....

A bírálóbizottság:

elnök:

tagok:

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

Az értekezés védésének időpontja: 2024. . . . .

## Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	1.
2. Irodalmi áttekintés – az előhívásos tanulás szerepe az egyetemi matematikaoktatásban .....	7.
2.1. Az előhívási hatás .....	8.
2.2. Előhívásos tanulás valós iskolai környezetben.....	16.
2.3. Előhívási hatás és matematikatanulás.....	18.
3. Célkitűzések .....	25.
4. A kísérletekhez felhasznált kutatási módszertan.....	27.
5. Az előhívásos tanulás szerepe az egyetemi számelmélet tanulásában .....	30.
5.1. Kutatási kérdések.....	30.
5.2. Kísérlet – a módszer középtávú hatása számelmélet feladatok tanulása esetén.....	31.
5.2.1. A kutatás célja.....	31.
5.2.2. A kísérlet résztvevői .....	31.
5.2.3. Kísérleti elrendezés .....	32.
5.2.4. Tananyag .....	32.
5.2.5. MÉRŐESZKÖZÖK .....	33.
5.2.6. Eredmények .....	36.
5.2.7. Válaszok a K1 és K2 kutatási kérdésekre, diszkusszió.....	38.
5.3. Kísérlet – a módszer hosszútávú hatása számelmélet feladatok tanulása esetén .....	40.
5.3.1. A kutatás célja.....	40.
5.3.2. A kísérlet résztvevői .....	40.
5.3.3. Kísérleti elrendezés, a módszer leírása, a tananyag .....	41.
5.3.4. MÉRŐESZKÖZÖK .....	41.
5.3.5. Eredmények .....	43.
5.3.6. Válasz a K3 kutatási kérdésre, diszkusszió.....	45.
6. Az előhívásos tanulás szerepe az absztrakt algebra tanulásában .....	47.
6.1. Kutatási kérdések.....	47.
6.2. Kísérlet – a módszer közép- és hosszútávú hatása absztrakt algebra feladatok tanulása esetén .....	48.
6.2.1. A kutatás célja.....	48.
6.2.2. A kísérlet résztvevői, kísérleti elrendezés.....	49.
6.2.3. Tananyag .....	50.
6.2.4. MÉRŐESZKÖZÖK .....	52.
6.2.5. Eredmények .....	56.
6.2.6. Válasz a K4, K5 és K6 kutatási kérdésekre, diszkusszió.....	60.

7. Összegzés, kísérleteink korlátjai, további kutatási lehetőségek.....	63.
8. Összefoglaló .....	67.
9. Summary .....	72.
10. Saját publikációk listája .....	77.
11. Irodalomjegyzék.....	78.
11. Függelék .....	90.
A: Algebra és Számelmélet 1. tantárgy tematikája.....	90.
B: Algebra és Számelmélet 1. félévvégi dolgozat .....	90.
C: Algebra és Számelmélet 1. utóteszt .....	91.
D: Algebra és Számelmélet 2. tantárgy tematikája.....	91.
E: Algebra és Számelmélet 2. félévközi dolgozat .....	92.
F: Algebra és Számelmélet 2. félévvégi dolgozat .....	92.
G: Algebra és Számelmélet 2. utóteszt .....	92.
H: Etikai kódex.....	93.
I: Alkalmazott statisztikai jelölések – jelmagyarázat .....	93.

# 1. Bevezetés

Dolgozatom célja az előhívásos tanulás alkalmazhatóságának és hatékonyságának vizsgálata az egyetemi matematikaoktatásban. Az előhívásos tanulás egy olyan újszerű tanítási-tanulási módszer, amely elősegítheti a diákok közép- és hosszútávú matematika tudásának kialakítását. Disszertációm alapját három publikáció képezi. Mindhárom publikáció az előhívásos tanulás egy formáját és annak hatékonyságát vizsgálja egyetemi matematika kurzusok keretein belül a matematika tanárszakos hallgatók közép- és hosszútávú tudására fókuszálva (Szabó és mtsai, 2023; Muzsnay és mtsai, 2024; Muzsnay és mtsai, bíráló alatt).

Általános tapasztalat, hogy a diákok túlnyomó többsége a megszerzett tudás jelentős részét rövid időn belül elfelejti (Ebbinghaus, 1913; Averell és Heathcote, 2011; Murre és Dros, 2015). Az egyetemi hallgatók meghatározó része olyan tanulási stratégiákat alkalmaz, mint például a vizsga előtti tömbösített tanulás, amelyekkel bár rövidtávú sikereket el lehet érni, tartós tudást annál kevésbé. Ez nagy problémát jelent a matematika tanulása esetén is, ahol az alapvető ismeretek hosszútávú memóriába való rögzítése, onnan történő előhívása kulcsfontosságú (Hopkins és mtsai, 2016). A felsőoktatásban matematikát tanuló hallgatók között kiemelt jelentőséggel bír a matematika tanárszakos hallgatók matematikaoktatása. A matematikatanároknak nap mint nap kell a matematika tudásukat használni, elmagyarázni a tanulóknak a különböző matematikai fogalmakat és eljárásokat (Ma, 2020). A matematika tanárszakos hallgatók oktatásakor éppen ezért célszerű lehet az egyes kurzusokba olyan tanítási-tanulási stratégiákat beépíteni, amelyek elősegítik a megértést és megakadályozzák a felejtést. A hosszútávú tudás kialakításának egy lehetséges eszköze az előhívásos tanulás vagy más néven teszteléses tanulás.

Az előhívásos tanulás elnevezés az előhívást előidéző tanulási módszereket foglalja magában (Karpicke és Grimaldi, 2012). Előhívás alatt a tárolt emlékek memóriából történő visszakeresését, felidézését, valamilyen formában történő felhasználását értjük. Az előhívásos tanulás bármilyen olyan tevékenységre utalhat, amely során a tanuló a memória fejlesztése érdekében mindenfajta külső segédeszköz használata nélkül felidézi az adott információt a memóriájából. Az előhívást elősegíthetjük például tanórai kérdésekkel, kvizekkel, tanulókártyákkal, tesztekkel és vizsgakérdésekkel. Az információ előhívása mentális erőfeszítést igényel. Ezen erőfeszítés révén történik a tanulás. Előhívási hatásnak, vagy más néven tesztelési hatásnak nevezzük azt a jelenséget, amikor a rövidtávú vagy a hosszútávú memóriából történő felidézés megváltoztatja, erősíti az egyén emlékezetét a visszakeresett

információval kapcsolatban (Roediger és Karpicke, 2006). Számos tanulmány kimutatta, hogy a tanulandó anyag memóriából való előhívása a felejtés ellen hat. Az előhívásos tanulással megszerzett tudás ellenállóbb más tananyag zavaró hatásával szemben és maradandóbb tudáshoz vezet (Kliegl és Bauml, 2016; Racsmány és Keresztes, 2015; Szpunar, McDermott, és Roediger, 2008). Emellett segíti a tanulási folyamatot: az előhívásos tanulással a tudás strukturáltabbá válik, fokozza a tudástranszfert, a tudás új kontextusba való átvitelét és a tanult információkhoz gyorsabb hozzáférést biztosít (Jacoby, Wahlheim, és Coane, 2010; Racsmány, Szöllösi, és Bencze, 2018; Zaromb és Roediger, 2010; Chan és mtsai, 2018).

Egészen az 1970-es évekig az a nézet volt általánosan az elfogadott, hogy a memóriánk úgy működik, mint egy raktár (Wingfield, 2016). Az információ bekerül a rövidtávú memóriába, ahonnan egy része átkerül a hosszútávú memóriába (kódolás). Az elmélet szerint a hosszútávú memóriából pedig az információ bármikor előhívható, bármikor „kivehetjük a raktárból” azt, amit egyszer oda „elhelyeztünk”. Ezen elmélet szerint a tanulás célja az információ hosszútávú memóriába való bevitele, a lényegi mozzanat a kódolás. Az előhívás szerepe ebben a felfogásban kizárólag a tanulás eredményességének ellenőrzése, az előhívás nem része a tanulásnak. Nagyon sok tanár ezt a gyakorlatot követi, óráikon célzott előhívásra csak a tanulási folyamat végén kerül sor szóbeli vizsga, felelés vagy írásbeli dolgozat formájában. Ez a felelés, dolgozatírás számít tesztelésnek. Ebből a nézőpontból a tesztelésnek az egyetlen funkciója a diákok ellenőrzése, az osztályzási rendszer fenntartása (Martínez-Sierra és mtsai, 2020).

Bár már több mint száz éve jelentek meg a fenti elképzeléssel szembemenő tanulmányok arról, hogy a tesztelés, azaz a megtanulandó anyag memóriából való előhívása a tanulásnak egy hatékony formája lehet (Abbot, 1909, Gates, 1917), ezek nem váltottak ki nagy hatást. Az előhívásos tanulás az utóbbi húsz évben került a kognitív pszichológia és a kognitív idegtudományok központi kutatási témájává. Az elmúlt két évtizedben számos tanulmány kimutatta, hogy az információ emlékezetből történő aktív felidézésével hosszabbtávú tudásra tehetünk szert, mint az anyag újraolvasásával (Rowland, 2014). Az előhívásos tanulás más, nem előhíváson alapuló tanulási módszerekkel szembeni előnyét több kísérletben kimutatták. Egy kezdeti tanulási fázist követően az előhívásos módon megtanult információra a kísérleti alanyok lényegesen jobban emlékeztek, mint például a másolással (Carpenter, 2015), vagy újraolvasással megtanult információra (Rowland, 2014; Roediger, Putnam, és Smith 2011). Az előhívásos tanulás hatékonyabbnak bizonyult az „önmagunknak magyarázással” (Larsen és mtsai, 2013) vagy az információ új módon történő szervezésével, gondolat-térképekkel

történő tanulással szemben is (Karpicke és Blunt, 2011). Ezek az eredmények mind azt mutatják, hogy az előhívásnak sokkal fontosabb szerepe van a tanulásban, mint azt korábban gondolták.

Az előhívásos vagy más néven teszteléses tanulás több területen bizonyítottan hatékony tanulási módszer (Dunlosky és mtsai, 2013; Adeniji és Baker, 2023; Roediger és Butler, 2011; Rowland, 2014; Racsomány és mtsai, 2018; Donoghue és Hattie, 2021). Az előhívásos tanulás sikeresnek bizonyult szövegek memorizálásánál (Zaromb és Roediger, 2010; Roediger és Karpicke, 2006; Butler, 2010) és idegen szavak tanulásánál (Keresztes és mtsai, 2014). Emellett hatékony tanulási módszer az általános ismereteket tartalmazó tények, vizuális vagy térbeli információkat tartalmazó tananyagok tanulása esetén (Carpenter és Pashler, 2007) és készségek tanulása esetén is (Donoghue és Hattie, 2021; Rowland, 2014).

Az előhívásos tanulással kapcsolatos kísérletek legnagyobb részét laboratóriumban végezték (Butler, Karpicke, és Roediger, 2007). Ezen kísérletek többsége azt vizsgálta, hogy egy adott szövegre melyik tanulási módszerrel emlékeztek legjobban a diákok. Az előhívási hatást vizsgáló kísérletek jóval kisebb részét teszik ki az olyan kutatások, amelyek nem laboratóriumi körülmények között, hanem valódi iskolákban, egyetemeken, valós iskolai körülmények között és hosszabb távon vizsgálták az előhívási hatást (McDaniel és mtsai, 2007; Rawson és mtsai, 2018). Az eddigi eredmények azt mutatják, hogy valós oktatási környezetben is hatékony eszköze lehet a tanulásnak az előhívásos tanulás (Dunlosky és mtsai, 2013; McDermott és mtsai, 2014; Roediger, Putnam és Smith, 2011).

Felmerül a kérdés, hogy az előhívásos tanulás hatékony tanítási-tanulási módszer-e a matematika tanulása esetén. Valós matematikaoktatási környezetben, különösen a felsőfokú matematika tanulásában az előhívásos tanulás egy kevésbé vizsgált kutatási téma. További alkalmazott kutatásra van szükség a tesztelés matematikaoktatásba való beépítésével kapcsolatban (Agarwal és mtsai, 2021). A matematika tanulásán belül az előhívási hatáson alapuló tanulási módszer hatékonyságát több tényező is befolyásolhatja. Ilyen például a kontextus, a téma és az anyag komplexitása, absztraktsági foka, a tanuló felkészültségi szintje. A szakirodalom alapján nem egyértelmű, hogy az előhívási hatás kimutatható-e komplex témakörök esetén (Gog és Sweller, 2015). Deduktív következtetéseket igénylő feladatok esetén szintén eltérő eredmények születtek (Tran, Rohrer és Pashler 2015). Az, hogy a hatás egyéni különbségektől függetlenül kimutatható-e, továbbra is nyitott kérdés (Orr és Foster 2013; Carpenter és mtsai, 2015; Brewer és Unsworth, 2012). A matematika feladatok megoldásához fejlett deduktív gondolkodási és problémamegoldó képesség szükséges, maguk

a feladatok pedig sokszor összetettek. Jogosan merül fel a kérdés tehát, hogy vajon matematikatanulás esetében érdemes-e alkalmazni az előhívásos tanulást és amennyiben igen, milyen formában. Habár a matematika területén csak néhány tanulmány vizsgálta osztálytermi környezetben az előhívási hatást, a legújabb tanulmányok eredményei arra utalnak, hogy az előhívásos tanulás hatékony módja lehet a matematika tanulásnak (Fazio, 2019; Lyle és Crawford, 2011; Lyle és mtsai, 2016, 2020; Szeibert és mtsai, 2022).

Dolgozatom célja az előhívásos tanulás alkalmazhatóságának és hatékonyságának vizsgálata az egyetemi matematikaoktatásban. Dolgozatomban az előhívási hatáson alapuló tanulás egy formáját, annak közép- és hosszútávú hatását követem nyomon matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet kurzusok keretein belül. A módszert a hagyományos oktatással és a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben vizsgálom. A kidolgozott példák mutatása módszer alatt „*egy feladat elvégzésének vagy egy probléma megoldásának lépésről lépésre történő bemutatását*” értjük (Clark, Nguyen és Sweller, 2006, 190. o.).

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

A Bevezetést követően a második fejezetben összegzem a kutatásunk témájához szorosan kapcsolódó szakirodalmat. A szakirodalmi áttekintés több alfejezetre tagolódik. Elsőként áttekintjük az előhívásos tanuláshoz kapcsolódó alapkísérleteket (2.1. fejezet). Itt főként laboratóriumban végzett kísérleteket mutatok be, amelyek megalapozták a későbbi előhívásos tanulás terén végzett kísérleteket. Ezt követően a 2.2. fejezetben olyan kutatásokat ismertetek, amelyek valós iskolai környezetben vizsgálták az előhívásos tanulást. A 2.3. fejezetben olyan kutatásokra fókuszálok, amelyek szorosan kapcsolódnak az előhívásos tanulás matematika tanulásban, tanításban való alkalmazhatóságához. A módszer hatékonyságát számos tényező befolyásolhatja. A matematika feladatok sokszor összetettek, a feladatok megoldásához pedig legtöbb esetben szükséges a következtetési képességek használata. Ezek mind olyan tényezők, amelyek befolyásolhatják a módszer hatékonyságát és amelyekre a fejezet tárgyalásakor kiemelt figyelmet fordítok. Mindezek mellett fontos kérdés, hogy a módszer hatékonysága egyéni különbségektől, felkészültségi szinttől függetlenül megmutatkozik, vagy csak tanulók egy bizonyos csoportjánál figyelhető meg a tesztelési hatás. A 2.3. fejezet tárgyalásakor erre a szempontra is kitérek, emellett röviden ismertetem a matematika területén végzett legfontosabb kutatásokat.

A szakirodalmi áttekintést, és annak kritikus elemzését követően a harmadik fejezetben ismertetem a disszertációm célkitűzéseit, kutatási kérdéseit.

A negyedik fejezetben előrevetítem a kvázi-kísérleteinkhez felhasznált kutatási módszertant, egy általános leírást adok az előhívásos tanulás tantermi környezetben történő közép- és hosszútávú hatásának vizsgálatának megvalósításáról.

Az ötödik és hatodik fejezetekben három különböző, a témához kapcsolódó kísérletünket és azok eredményét mutatom be az egyes kutatási kérdésekre fókuszálva. A három kísérlet bemutatásánál hasonló szerkezeti felépítést alkalmaztam: előbb ismertetem a kutatás célját, a kísérlet résztvevőit, majd bemutatom az alkalmazott módszert, kísérleti elrendezést. Ezt követi a kísérlethez kapcsolódó tananyag, a különböző mérőeszközök és kutatási eredmények ismertetése. Az egyes kísérletek bemutatását az adott kutatási kérdések megválaszolásával és rövid diszkusszióval zárom.

Az ötödik fejezetben két kísérletünket és azok eredményeit mutatom be. A két kísérletben az előhívásos tanulás egy formáját, annak közép- és hosszútávú hatását vizsgálom a hagyományos oktatással szemben matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet 1. kurzus keretein belül. Az 5.1. fejezetben ismertetem a két kísérlethez kapcsolódó kutatási kérdéseinket. A kísérletek részletes leírása az 5.2. és az 5.3. fejezetekben található. Az első kísérletben az előhívásos módszer középtávú hatására koncentráltunk (5.2. fejezet). A kísérletben résztvevő diákok a félév elején írtak egy bemeneti tesztet, mellyel az aktuális matematika tudásukat, kompetenciájukat mértük fel. A kezelés végén, a szemeszter tizenharmadik hetében pedig írtak egy öt feladatból álló dolgozatot. Megállapítottuk, hogy az előhívásos módszerrel tanuló diákok a félévvégi dolgozaton szignifikánsan jobb eredményt értek el, mint a hagyományos módon tanuló társaik. Az előhívási hatás kimutatható volt a hagyományos oktatással szemben középtávon, komplex matematika feladatok tanulása esetében. További eredményünk, hogy az előhívási hatás az egyéni matematikai kompetenciától, előismerettől függetlenül kimutatható volt. A második kísérletben a módszer hosszútávú hatását vizsgálom a hagyományos oktatással szemben (5.3. fejezet). Eredményeink alapján az előhívásos módszerrel tanuló diákok három hónappal a félévvégi dolgozat megírása után szignifikánsan jobb eredményt értek el az utóteszten, mint a hagyományos módon tanuló társaik: az előhívási hatás kimutatható volt hosszútávon, komplex matematika feladatok tanulása esetében a hagyományos oktatással szemben.

A hatodik fejezetben ismertetem a harmadik kísérletünket, amelyben az előhívásos tanulás egy formáját vizsgálom a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet 2. kurzus keretein belül. Az előhívásos tanulás és a kidolgozott példák tanulmányozása két olyan tanulási technika, amely egyaránt hatékony tanulási módszer lehet problémamegoldás területén (Dunlosky és mtsai, 2013; Adeniji és Baker, 2023). Ugyanakkor a két módszer különböző kognitív folyamatokon alapszik. A hatodik fejezetben leírt kísérletben az előhívásos tanulás és a kidolgozott példák tanulmányozása módszer egy adott formájának hatékonyságát hasonlítottuk össze a diákok középtávú és hosszútávú tudására összpontosítva. A 6. fejezetben a kutatási kérdések ismertetését (6.1. fejezet) a kísérlet bemutatása követi (6.2. fejezet). A kísérletben résztvevő diákok tananyaghoz kapcsolódó tudását, problémamegoldó képességét két alkalommal mértük a félév során: a szemeszter hatodik hetében és tizenharmadik hetében egy-egy dolgozat segítségével. Kísérletünkben a két félévközi dolgozat eredményei alapján az előhívási hatás középtávon nem volt kimutatható a kidolgozott példák tanulmányozása módszerrel szemben. Az előhívásos módszerrel és a kidolgozott példák módszerével tanuló diákok problémamegoldó képessége között nem volt szignifikáns eltérés a két dolgozat alapján. Ugyanakkor hosszútávon, öt hónappal a félévvégi dolgozat megírása után az előhívási hatás kimutatható volt a kidolgozott példák tanulmányozása módszerrel szemben. Megállapítottuk, hogy az előhívásos módszerrel tanuló diákok korábbi, a kurzus alatti eredményükhöz viszonyított teljesítménye szignifikánsan jobb volt az utóteszten, mint a kidolgozott példákkal tanuló csoporté. Emellett kimutattuk, hogy a témakört kidolgozott példák módszerével tanuló csoport tanulóinak több mint fele teljes mértékben elfelejtette a tanult matematika anyagot, míg az előhívásos csoportban pedig kevesebb, mint a tanulók negyede nem emlékezett az öt hónappal korábban tanultakra.

A hetedik fejezetben összegzem kutatási eredményeinket, az egyes kísérletek korlátait és felvetek néhány további lehetséges kutatási irányt a témával kapcsolatban.

A dolgozathoz kapcsolódik egy magyar és egy angol nyelvű összefoglaló (8. fejezet és 9. fejezet), amelyekben röviden ismertetem a disszertációm témáját és a kutatási eredményeinket.

## **2. Irodalmi áttekintés – az előhívásos tanulás szerepe az egyetemi matematikaoktatásban**

Ebben a fejezetben a kutatásunk témájához szorosan kapcsolódó szakirodalmat ismertetem. A fejezet több alfejezetre tagolódik. A 2.1. fejezetben definiálom az előhívási hatást, az előhívásos tanulást és bemutatom a témához kapcsolódó legfontosabb alapkísérleteket. Ezek az alapkísérletek elsősorban laboratóriumi kísérletek, amelyek megalapozták a későbbi előhívásos tanulás terén végzett kísérleteket. Nem laboratóriumi körülmények között, valós iskolai helyzetekben számos egyéb hatás befolyásolhatja az előhívásos tanulás hatékonyságát.

A 2.2. fejezetben olyan kutatásokra fókuszálok, amelyek valós iskolai környezetben vizsgálták az előhívásos tanulást. Ebben a fejezetben két fontos metaanalízis eredményeire támaszkodok: Dunlosky és munkatársai (Dunlosky és mtsai, 2013), illetve Agarwal és munkatársainak munkájára (Agarwal és mtsai, 2021).

Végül a 2.3. fejezetben olyan kutatásokat ismertetek, amelyek szorosan kapcsolódnak az előhívásos tanulás matematika tanulásban, tanításban való alkalmazhatóságához. A módszer matematika tanulásban való alkalmazhatóságát, hatékonyságát számos tényező befolyásolhatja. Ilyen tényezők például a feladat összetettsége, a következtetési képesség szükségessége, a diákok matematikai előképzettsége, előzetes tudása. A fejezet tárgyalásakor ezekre a tényezőkre kiemelt figyelmet fordítok. Emellett a 2.3. fejezetben áttekintem a matematika területén végzett legfontosabb kutatásokat.

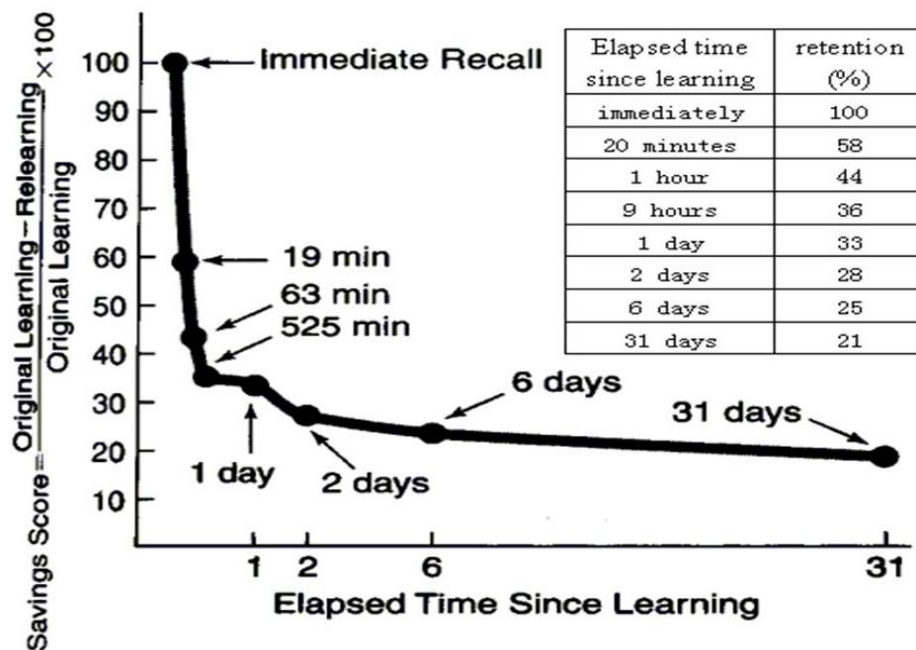
## 2.1. Az előhívási hatás

A kognitív idegtudományok fejlődésével egyre többet tudunk a tanulásról, az agyunk működéséről. A memóriánk működéséről számos elmélet létezik, amelyeket a legfrissebb kognitív kutatási eredmények újra és újra felülírnak, pontosítanak. A ma elfogadott elméletek szerint a memória három fő funkciója a kódolás, a tárolás és az előhívás (McDermott és Roediger, 2023). Kódolásnak nevezzük a memóriába rögzítés folyamatát, azt a folyamatot, amely során az érzékelt információból emléknym keletkezik. Tárolás alatt ezen rögzített információk valamilyen formában való „fejben tartását” értjük, az előhívás pedig az a folyamat, amikor a tárolt emlékeket visszakkeressük, felidézzük és bizonyos formában felhasználjuk (McDermott és Roediger, 2023).

Az emlékek létrejöttének klasszikus modellje (Köhler, 1947; Melton, 1963; Weiner, 1966) a kódolási stratégiákra helyezte a hangsúlyt. A modell szerint a kódolás, információfeldolgozás minősége és mélysége határozza meg, hogy később milyen mértékben emlékszünk az adott információra. Azaz a kulcs mozzanat az emlékek létrehozása, az előhívásnak csak ellenőrző szerepe van a tanulásban. A modell alapján az előhívás csak ellenőrző funkciót tölt be a tanulásban, a tesztek, vizsgák egyedüli célja „leellenőrizni”, hogy sikeres volt-e a tanulás. Úgy gondolom, hogy a magyarországi egyetemi oktatás egyik alapproblémája, hogy az egyetemeken leggyakrabban alkalmazott oktatási módszerek erre a modellre építenek. A legújabb emlékezetkutatási eredmények azt mutatják, hogy az emlékek többszöri előhívásakor az agy bizonyos területeinek neuronális kapcsolataiban változás történik. Feltételezhetően ez a változás járul hozzá az emlék konszolidálásához, stabilizálásához (Zhuang és mtsai., 2021). A következőkben olyan kísérleteket mutatok be, amelyek eredményei alapján a klasszikus modellt el kell vetni, mert az előhívásnak sokkal fontosabb szerepe van a tanulásban, mint azt korábban gondolták.

Mind a tanárok, mind az egyetemi oktatók nap mint nap tapasztalják, hogy a diákok a korábban tanultak meghatározó részét rövid időn belül elfelejtik. Ebbinghaus kimutatta, hogy előhívás hiányában a tanult információ jelentős részét hamar elfelejtjük, majd idővel a felejtés lelassul (lásd: 1. ábra) (Ebbinghaus, 1913). Az 1. ábrán az látható, hogy tanulást követően a megtanult információ hányad részét vagyunk képesek előhívni 19 perccel, 1 órával, 9 órával, 2 nappal, 6 nappal és egy hónappal a tanulást követően, amennyiben az adott időpontig nem hívjuk elő a tanultakat. Láthatjuk, hogy előhívás hiányában a megtanult anyag jelentős részét rövid időn belül elfelejtjük: egy órával a tanulást követően a tanult tények több mint felére

nem emlékszünk, 2 nappal később pedig körülbelül egyharmadát tudjuk felidézni annak az információnak, amit korábban tanultunk.

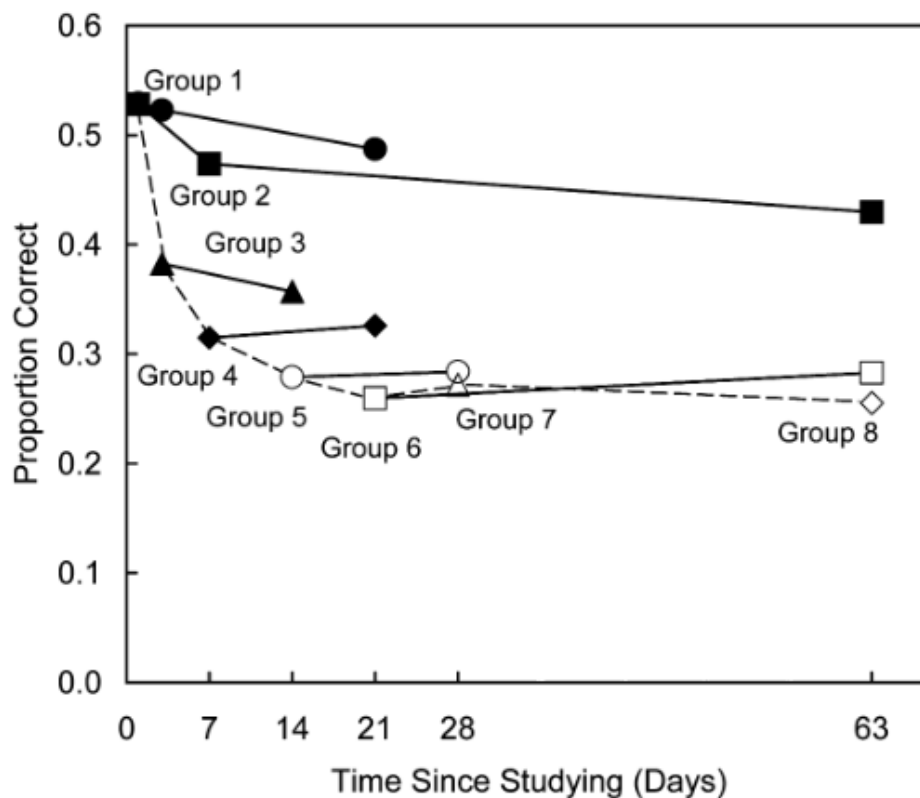


1. Ábra Hermann Ebbinghaus felejtési görbéje.

(Az ábra Yue, 2017 cikkéből származik.)

Mi történik akkor, ha a tanulást követően előhívjuk a tanult információkat? Erre a kérdésre ad választ Spitzer kísérlete. Spitzer 1939-ben elvégzett egy kísérletet, amely megváltoztathatta volna a tanulásról alkotott klasszikus képet. Kutatásában 3605 hatodik osztályosnak kellett megtanulnia tananyagrészeket. A szöveg tanulmányozása után a nyolc csoport mindegyike egy, két vagy három tesztet kapott különböző időközönként a következő 63 napban. Az eredményeket a 2. ábra szemlélteti (Roediger és Karpicke, 2006). Az ábrán a nyolc geometriai alakzat a kísérletben résztvevő nyolc csoportot, azok adott időpontban nyújtott teljesítményét jelöli. Az egyes alakzatok tehát azt mutatják meg, hogy a tanulást követően különböző késleltetésekkel végzett feleletválasztós teszteken az adott csoporton belül milyen volt a helyes válaszok aránya. Például a fekete négyzet a második csoport átlagos teljesítményét mutatja a tanulást követő első, második és harmadik teszten. Ebben a csoportban az első teszt a tanulás napján volt, a második tesztre a tanulás után egy héttel, a harmadik tesztre pedig 63 nappal később került sor. A folytonos vonalak az egyes csoportok ismételt tesztjeinek eredményeit mutatják, a szaggatott vonal pedig a tanulást követő első tesztek eredményeit jelzi. Azt láthatjuk, hogy az előhívás egyfajta gátat szab a felejtésnek: minél hamarabb

történik az első tesztelés – arra ügyelve, hogy az tényleges előhívás legyen, ne legyen túl közel az első tanulási folyamathoz – annál hamarabb állítható meg a felejtés. Spitzer kutatási eredményei azt mutatják, hogy az első tesztelésen nyújtott teljesítmények követik az Ebbinghaus által leírt felejtési görbét. Minél később volt az első teszt, a diákok annál kevésbé tudták előhívni a tanult információt. Spitzer emellett azt találta, hogy az első teszt és a második teszt között szinte semmilyen mértékű felejtés nem volt függetlenül az első és a második teszt között eltelt időtől.



**2. Ábra** Spitzer kísérlete, 1939.

(Az ábra Roediger és Karpicke, 2006 cikkéből származik.)

Spitzer kísérleti eredményei többek között arra hívják fel a figyelmet, hogy a tanultak előhívásával a felejtés mértéke csökken. Előhívási hatásnak, vagy más néven tesztelési hatásnak nevezzük azt a jelenséget, amikor a rövidtávú vagy a hosszútávú memóriából történő felidézés megváltoztatja, erősíti az egyén emlékezetét az adott visszakeresett információval kapcsolatban (Roediger és Butler, 2011; Rowland, 2014; Donoghue és Hattie, 2021). Az előhívásos, vagy más néven teszteléses tanulás elnevezés pedig az előhívást előidéző tanulási módszereket foglalja magában (Karpicke és Grimaldi, 2012).

Spitzer kutatását követően egészen az 1990-es évek végéig, 2000-es évek elejéig nem történt lényegi előrelépés ebben a témakörben. Az első mérföldkövet Roediger és Karpicke 2006-os kutatása jelentette. Az előhívásos tanulás témában az egyik legismertebb alapkísérlet Roediger és Karpicke (Roediger és Karpicke, 2006) kísérlete. Roediger és Karpicke laboratóriumi körülmények között vizsgálta a többszöri olvasás és többszöri tesztelés hatását szövegtanulás esetén. A kísérlet alanyai egyetemista hallgatók voltak. A résztvevők első feladata egy 250 szavas szöveg elolvasása és tartalmának memorizálása volt. Ezután a hallgatókat két csoportra osztották: az egyik csoport tagjainak háromszor újra kellett olvasnia a szöveget, míg a másik csoport tagjait az újraolvasás helyett háromszor tesztelték. Tesztelés alatt itt azt értjük, hogy a csoport tagjainak a szöveggel kapcsolatban egy feladatsort kellett kitölteniük, tehát fel kellett idézniük a szöveg tartalmát. Azaz ennek a csoportnak három alkalommal elő kellett hívnia a tanultakat. Ezek után a két csoport tanulási eredményességét vizsgálták: öt perccel az utolsó tanulási fázis után, valamint egy héttel később is felmérték a szöveggel kapcsolatos tudásukat. Az első tesztelésnél (öt perc elteltével) nem meglepő módon az első, azaz a szöveget újraolvasó csoport jobban teljesített. Viszont később fordult a helyzet. A második tesztelés alkalmával, egy héttel az utolsó tanulási fázist követően az előhívásos csoport lényegesen jobban teljesített, mint az újraolvasós csoport (lásd: 1. táblázat).

### 1. Táblázat

*Roediger és Karpicke, 2006 kísérletének eredménye. (A táblázat Roediger és Karpicke, 2006 alapján készült.)*

	Négyszer olvas	Egyszer olvas, Háromszor tesztelik
5 perc múlva	83%	71%
1 hét múlva	40%	61%

A fent említett kísérlet azt mutatja, hogy a hosszútávú tudás kialakításában kulcsszerepet játszik az előhívás. A tananyag többszöri előhívásával hosszabb távú tudásra teszünk szert, mint annak többszöri újraolvasásával. Mégis, amikor a kísérleti alanyokat megkérdezték arról, hogy mit gondolnak, később, egy héttel a tanulás után mennyire fognak emlékezni az olvasott információkra, pont a valósággal ellentétes válaszok érkeztek. Az újraolvasós technikával tanuló résztvevők nagy magabiztosságot mutattak: azt gondolták, hogy egy héttel később is jól fognak emlékezni a szövegre. A tesztelős csoport résztvevői pedig rosszabbra jósolták saját jövőbeli teljesítményüket, mint az újraolvasós csoport.

Az újraolvasás olyan tanulási stratégia, amelyet a diákok gyakran alkalmaznak, talán pont azért, mert rövidtávon hasznos tanulási technika (Rawson és Kintsch, 2005). Egy tanulási módszer rövidtávú sikeressége viszont nem jelenti annak hosszútávú eredményességét (Bjork, 1994, 1999). Az adott pillanatban stabilnak látszó előhívás – amelyet például az újraolvasás eredményez rögtön a tanulás után – könnyen megtevesztheti mind a tanulót, mind a tanárt. Minél könnyebben, stabilabban tudunk előhívni adott pillanatban egy adott információt, annál inkább feltételezzük, hogy azt majd a jövőben is jól fogjuk tudni. Ezt nevezi az angol szakirodalom „foresight bias” -nek (Koriat és Bjork, 2005). Azonban ahogyan azt láttuk Roediger és Karpicke kísérletében is, az adott pillanatban könnyű, stabil előhívás nem jelenti azt, hogy a tanult anyagra hosszútávon is jól fogunk emlékezni. Általában azokat az információkat, amiket nehezen, de elő tudunk hívni, azokat tudjuk később is előhívni, amiket pedig nagyon könnyen, fluensen a rövidtávú memóriánkból nyerünk ki, azok az információk pedig nem maradnak meg hosszútávon (Bjork, 1994, 1999).

Roediger és Karpicke kísérletéhez hasonló kísérletet végzett el Smith és Karpicke. Smith és Karpicke (2013) négy kísérletet átölelő kutatásukban azt vizsgálták, hogy vajon függ-e az előhívásos tanulás hatékonysága az előhívás, a tesztek módjától. Kísérletükben hasonlóan Roediger és Karpicke (2006) kísérletéhez a résztvevőknek kezdetben egy szöveget kellett elolvasniuk. Az egyszeri olvasást követően volt olyan csoport, amelyik újraolvashatta a szöveget, őket tekinthetjük a „hagyományos” módon tanuló csoportnak. A többi három csoportot pedig három különböző módon tesztelték a szöveggel kapcsolatban. Az első csoport feleletválasztós kérdéseket kapott, a második rövid kifejtős kérdéseket, a harmadik csoportot pedig vegyesen tesztelték rövid kifejtős és feleletválasztós kérdésekkel. A négy kísérletben azt vizsgálták, hogy vajon melyik módszer a leghatékonyabb amennyiben a cél az, hogy a résztvevők egy héttel a tanulás után minél több információra emlékezzenek a szöveggel kapcsolatban. A tanulási folyamat után egy héttel mindegyik csoport tudását tesztelték kétféle kérdést alkalmazva. Az utóteszt tartalmazott olyan kérdéseket, amikre a választ a szövegben egy-az-egyben, szó szerint meg lehetett találni és olyan kérdéseket is, ahol a résztvevőknek a szövegben olvasottak alapján következtetéseket kellett levonniuk. Eredményeik egyértelműen azt mutatják, hogy az előhívásos tanulás hatékonyabb az újraolvasásnál egy héttel a tanulást követően: minden tesztelés csoport jobban szerepelt az újraolvasós csoporthoz képest. A tesztelés módjában lényeges különbséget nem találtak, mindegyik tesztelés csoport hasonlóan jól teljesített az utóteszten. További lényeges eredményük, hogy az előhívásos csoportok nem csak az egyszerű, szó szerinti tudást mérő, hanem a következtetéseket igénylő tesztkérdéseken

is jobban teljesítettek. Az előhívás nem csak a tanultak felidézését, hanem azok alkalmazását is hatékonyabbá tette.

A 2000-es évek eleje óta számos tanulmány kimutatta, hogy a tanulandó anyag memóriából való előhívása a felejtés ellen hat: az előhívásos tanulással megszerzett tudás ellenállóbb más tananyag zavaró hatásával szemben és maradandóbb tudáshoz vezet (Kliegl és Bauml, 2016; Racsmány és Keresztes, 2015; Szpunar, McDermott, és Roediger, 2008). Emellett segíti a tanulási folyamatot: az előhívásos tanulással a tudás strukturáltabbá válik, fokozza a tudástranzfert, a tudás új kontextusba való átvitelét, és gyorsabb hozzáférést eredményez a tanult információkhoz (Jacoby, Wahlheim, és Coane, 2010; Racsmány, Szöllösi, és Bencze, 2018; Zaromb és Roediger, 2010; Chan és mtsai, 2018).

A tesztelésnek közvetlen és közvetett hatásai is lehetnek a tanulásra (Karpicke, 2017). Az előhívás közvetlen hatásai akkor jelentkeznek, amikor a diákok tanulnak egy bizonyos anyagrészt, majd azt megpróbálják előhívni anélkül, hogy újratanulnák a tananyagot és az előhívás eredményességéről bármiféle külső visszajelzést kapnának. Az előhívás tanulásra gyakorolt közvetlen hatásán tehát az újratanulás és visszajelzés nélküli előhívásos tanulásból származó tanulási előnyt értjük, amikor a memóriából való előhívás javítja a későbbi emlékezetet (Karpicke, 2017). Érdekes eredmény, hogy az információ emlékezetből való előhívására tett kísérletek javíthatják a későbbi tudást még akkor is, amikor az előhívás sikertelen, vagy esetleg nincs visszajelzés az előhívás sikerességével kapcsolatban (Grimaldi és Karpicke, 2012; Arnold és McDermott, 2013; Izawa, 1966; Wissman és Rawson, 2018). A tesztelésnek közvetett hatásai is lehetnek a tanulásra. Egy teszt írása befolyásolhatja magát a tanulási folyamatot, a tanulás szervezését. Amikor a diákok tesztet írnak vagy saját magukat tesztelik, a teszt eredménye egyfajta visszajelzést ad arról, hogy a diákok mit tudnak és mit nem. Ez az információ irányíthatja a jövőbeli tanulásukat. Hasonlóképpen, a tesztek eredményei hasznos információt nyújthatnak a tanárnak is. Az eredmények ismeretében a tanár csoportra, vagy akár egyénre szabottan tervezheti a tanítási folyamatot (Black és Wiliam, 2009). A tesztek a tanulók motivációját is befolyásolhatják. A közelgő tesztek ismerete gyakran arra készíti a tanulókat, hogy nagyobb erőfeszítést tegyenek a tanulás irányába (Karpicke, 2017). Ezeket a hatásokat mind a tesztelés közvetett hatásai közé soroljuk.

Arra, hogy az előhívás miként fokozhatja az emlékek megőrzését, még mindig nincs egyhangú magyarázat (Racsmány és mtsai, 2018). Racsmány és munkatársai arra lettek

figyelmesek, hogy az előhíváson alapuló tanulás hasonló a készségtanuláshoz. Mindkét tanulás esetén jellemző a figyelmi folyamatok csökkenő bevonódása, a gyorsabb feldolgozás, a más tananyag zavaró hatásaival szembeni ellenállás és az alacsonyabb felejtési arány. Elméletük szerint az előhívással a tanultak „automatizálódnak”. Elméletük tesztelésére egy idegen szó tanulásos környezetben Racsmány és munkatársai az előhívás sikeressége (teljesítmény) mellett azt vizsgálták, hogy a teszteléssel tanuló kísérleti alanyok milyen gyorsan tudják előhívni a tanult információt az újratanulós (újraolvasós) csoporttal szemben. A kísérlet eredményei megerősítették azt az elképzelést, miszerint az előhívással a tanultak automatizálódása a tesztelési hatás egy magyarázó összetevője.

A jelenség neuropszichológiai hátterét vizsgálta Keresztes, Kaiser, Kovács és Racsmány funkcionális mágneses rezonanciavizsgálat (fMRI) segítségével (Keresztes, Kaiser, Kovács és Racsmány 2014). Első lépésként lokalizálták azt a hálózatot, amely azért felelős, hogy kontroláltan, a figyelmet fókuszálva megtartsa bizonyos információkat. Ezek után azt vizsgálták, hogy hogyan változik a különböző gyakorlási stratégiák hatására ennek az agyi hálózatnak az aktivitása a gyakorlást követően 30 perccel és egy héttel. Kísérletükben német diákoknak tanítottak páros asszociációs technikával szuahéli szavakat, összesen 60 szópárt. A 60 szópár bemutatását követően a résztvevők hat tanulási cikluson keresztül tanulták meg a 60 szópárt; minden ciklus tartalmazott:

- egy ismétlő tesztet, ahol a szópárok felét (30 szuahéli szó német megfelelőjét) kikérdezték,
- egy újratanulási blokkot, ahol a szópárok másik felét újraolvashatták és
- egy „visszajelző” blokkot, ahol a résztvevők újra láthatták a 60 szópárt.

Az, hogy mely 30 szópárt tanulták teszteléssel, melyet pedig újratanulással, az résztvevőnként változott. Ezek a visszacsatolási blokkok a tesztelés hatásának fokozására szolgáltak (Roediger és Butler 2011). Minden tanulási ciklusban az újratestelési és az újratanulási blokkok sorrendje véletlenszerű volt, és minden ciklus egy visszajelző blokkal zárult. A tanulási fázist követően a résztvevőket két csoportra bontották. Az első csoportot a tanulási fázis után öt perccel tesztelték és a tesztet követően, fél órával a tanulás után vizsgálták az alanyok agyi aktivitását. A másik csoportot egy héttel a tanulási fázist követően tesztelték és vizsgálták meg az agyi aktivitásukat a teszt megírása után. Rövidtávon az újratanulás segítségével elsajátított információk sokkal nagyobb aktivitást produkáltak a meghatározott agyi területen, azonban ez az aktivitás lényegesen csökkent egy héttel a tanulást követően (ezzel párhuzamosan a felidézési teljesítmény is csökkent). Az előhívással

tanult szavak esetében közvetlenül a tanulás után ugyan kisebb aktivitást regisztráltak, viszont ez az aktivitás egy hét múlva sem csökkent és ugyanaz a hálózat volt aktív 30 perccel később és egy héttel később is. Amennyiben egy feladatot először hajtunk végre, akkor egy nagy, kiterjedt agyi hálózat aktivitását lehet látni. A feladat begyakorlásával, automatizálódásával egyre kisebb lesz az aktiválódott hálózat (Cole és Schneider, 2007). Keresztes és munkatársai kísérleti eredményeik alapján azt feltételezik, hogy a teszteléssel egyfajta automatizálódás történik idegrendszeri szinten. Ezt a feltételezést erősíti meg Pajkossy és munkatársainak egy hasonló kísérlete, amelyben a résztvevők pupillaváltozását vizsgálták különböző gyakorlási stratégiák mellett: újratanulásnál és tesztelésnél (Pajkossy és mtsai, 2019). A pupillareakció, pupillaváltozás (tágulás, szűkülés) szintén erős mutatója annak, ha egy feladatot készségszerűen oldunk meg. Kimutatták, hogy mind öt perccel, mind egy héttel a gyakorlást követően azoknál a szavaknál, amit a résztvevők újratanulással tanultak meg, azt nehezebben, nagyobb erőfeszítés árán tudták az alanyok felidézni (pupillatágulás), míg a teszteléssel tanultakat kisebb pupillaváltozás kísérte.

## 2.2. Előhívásos tanulás valós iskolai környezetben

Az előhívásos tanulással kapcsolatos kísérletek legnagyobb részét laboratóriumi körülmények között végezték elsősorban verbális anyagoknál: szövegtanulások környezetben, idegen szavak tanulásánál (Butler és mtsai, 2007; Lyle és mtsai, 2020). Valós iskolai környezetben kevesebb tanulmány vizsgálta az előhívási hatáson alapuló tanulást.

Dunlosky és munkatársai valós iskolai körülmények között végeztek kísérleteket, az iskolákban leggyakrabban alkalmazott tanulási módszereket hasonlították össze 2013-as metaanalízisükben (Dunlosky és mtsai, 2013). Több mint ezer tanulmányt dolgoztak fel, melyben a következő tíz tanulási formát elemezték: kidolgozós-kikérdezős módszer, önkifejtős, összegző, kiemelés és aláhúzás, kulcsszómemorizáló, képzeleti stratégia szövegfeldolgozásnál, újraolvasás, tesztelés, szétszított gyakorlás, közbeiktatott tanulás-gyakorlás. Azt vizsgálták, hogy ezek közül melyik az a tanulási forma, amely hosszútávú, stabil, más kontextusban is alkalmazható tudást eredményez. Metaanalízisük minden korosztályt lefedett az óvodás kortól az idősebb korosztályig:

- óvodás és iskolaelőkészítő gyerekek (Fritz és mtsai, 2007);
- alsó tagozatos általános iskolás tanulók (Metcalfé és Kornell, 2007; Metcalfé és Kornell, 2009; Rohrer, Taylor, és Sholar, 2010; Bouwmeester és Verkoeijen, 2011);
- felső tagozatos általános iskolás tanulók (Carpenter 2009; Fritz és mtsai, 2007; McDaniel és mtsai, 2007; Metcalfé és Kornell, 2007);
- gimnazisták (Metcalfé és Kornell 2007; Carpenter, 2009; Fritz és mtsai, 2007; McDaniel és mtsai, 2013; Dirkx és mtsai, 2014);
- egyetemisták (Kromann és mtsai, 2009; Butler, 2010; Little és mtsai, 2011; Schmidmaier és mtsai, 2011), és a
- középkorú és annál idősebb korosztály is reprezentálva volt (Bishara és Jacoby, 2008; Logan és Balota, 2008; Sumowski és mtsai, 2010; Tse és mtsai, 2010; Maddox és mtsai, 2011).

Elemzésük alapján az előhívásos tanulás az egyik leghatékonyabb tanulási forma: függetlenül a tanuló életkorától, felkészültségi szintjétől, tananyagtól, kontextustól megmutatkozott a tesztelés pozitív hatása. Agarwall és munkatársai ötven, korosztályban változatos – általános iskolás korú diákoktól egyetemista hallgatókon keresztül minden korosztály képviselve volt a tanulmányban – kísérletet felölelő metaanalízise szintén abba az irányba mutat, hogy az előhívási hatáson alapuló tanulás hatékonyabb a tradicionális oktatási formáknál (Agarwal és

mtsai, 2021). Fontos azonban megjegyezni, hogy metaanalízisükben csak két kísérlet kapcsolódott matematika tananyaghoz. Ezek az eredmények azt mutatják, hogy az előhívásos tanulás nem csak laboratóriumi körülmények között mutatkozik hatékony tanulási formának, hanem érdemes lehet beépíteni a közoktatásba és az egyetemi oktatásba is.

### **2.3. Előhívási hatás és matematikatanulás**

Valós matematikaoktatási környezetben, különösen a felsőfokú matematika tanulásában kevésbé vizsgált kutatási téma az előhívásos tanulás. A nemzetközi szakirodalom nem eléggé kiterjedt, további alkalmazott kutatásra van szükség a tesztelés matematikaoktatásba való beemelésével kapcsolatban (Agarwal és mtsai, 2021). Mivel több tényező is befolyásolhatja a módszer hatékonyságát, például a kontextus, a téma és az anyag komplexitása, absztraktsági foka, a tanuló előzetes tudása, jogosan merül fel a kérdés, hogy a tesztelés hatékony eszköz-e az egyetemi szintű matematika tanulásában. Vannak olyan kísérletek, ahol a tesztelési hatás bizonyítása vagy nem sikerült, vagy ellentmondásos eredményeket hozott.

Nem egyértelmű, hogy a hatás egyéni különbségektől függetlenül kimutatható-e. Az egyetemre a hallgatók általában különböző matematikai előképzettséggel érkeznek, ezért ez egy fontos kérdés a módszer matematika kurzusokba való beépítésénél. Orr és Foster (2013) egy olyan biológia kurzus keretében végezték vizsgálatukat, amelyben a hallgatók minden órán szabadon dönthettek arról, hogy részt kívánnak-e venni egy, a tananyaghoz kapcsolódó tudást mérő tesztben. Mindamelllett, hogy azok, akik szisztematikusan részt vettek a teszteken jobban teljesítettek a záróvizsgán, mint azok, akik nem, megállapították, hogy mind az átlag feletti, az átlagos és az átlag alatti képességekkel rendelkező hallgatóknál megfigyelhető volt a hatás. Carpenter és munkatársainak (Carpenter és mtsai, 2015) szintén egy biológiai kurzuson végzett kísérletében csak az átlag feletti készségekkel rendelkező hallgatóknál volt hatékony az előhívási hatáson alapuló tanulás, és az átlagos, átlag alatti képességekkel rendelkezők esetében nem volt kimutatható a hatás. Ezzel gyökeresen ellenkezően Brewer és Unsworth (Brewer és Unsworth, 2012) kísérletében az alacsonyabb általános fluid intelligenciával rendelkező tanulók többet profitáltak az előhívásos tanulásból, mint a magasabb általános fluid intelligenciával rendelkezők, az előhívási hatást egyáltalán nem lehetett megfigyelni a legmagasabb fluid intelligenciájú tanulók esetében. Általános fluid intelligencia alatt az újszerű problémák megoldásának képességét értjük, olyan alapvető következtetési folyamatokat és egyéb mentális tevékenységeket foglal magában, amelyek csak minimálisan függenek az előzetes tanulástól.

A szakirodalom alapján nem egyértelmű, hogy az előhívási hatás kimutatható-e komplex feladatok, témakörök esetén. Gog és Sweller (Gog és Sweller, 2015) amellett érvelnek, hogy az előhívási hatáson alapuló tanulás nem hatékony tanulási módszer komplex anyagok tanulása esetében. Szerintük a tesztelési hatás csökken vagy eltűnik a tananyag

komplexitásának növekedésével. Komplex anyag alatt azt értik, hogy *"magas az elemek közti interakció, a komplex anyag különböző információs elemeket tartalmaz, amelyek kapcsolatban állnak egymással, és ezért egyszerre kell feldolgozni őket a munkamemóriában"* (Gog és Sweller, 2015, 248. o.). Hasonlóképpen, Leahy és munkatársai (2015) arra a következtetésre jutottak hogy *"A tesztelési hatás nem biztos, hogy magas elemszámú interaktivitású anyagok esetében kimutatható"* (Gog és Sweller, 2015, 11.o)". Van Gog és Kester (2012) természettudományok területén végzett kutatásai is ebbe az irányba mutatnak. Másrészt számos kutatás létezik, ahol a tesztelési hatás kimutatható volt komplex anyagok tanulása alkalmával is, például McDaniel és munkatársai (2009), Chan, (2010), Butler (2010), és Karpicke és Aue (2015) kísérleteiben. Rawson szerint több empirikus és elméleti munkára van szükség a komplex anyagok előhívásos módon történő tanulásával kapcsolatban (Rawson, 2015). Ahhoz, hogy az oktatásba megfelelő módon emeljük be a tesztelést, mint tanulási formát, és hogy kiderítsük mikor és miért nem mutatható ki a tesztelési hatás, több kutatásra van szükség.

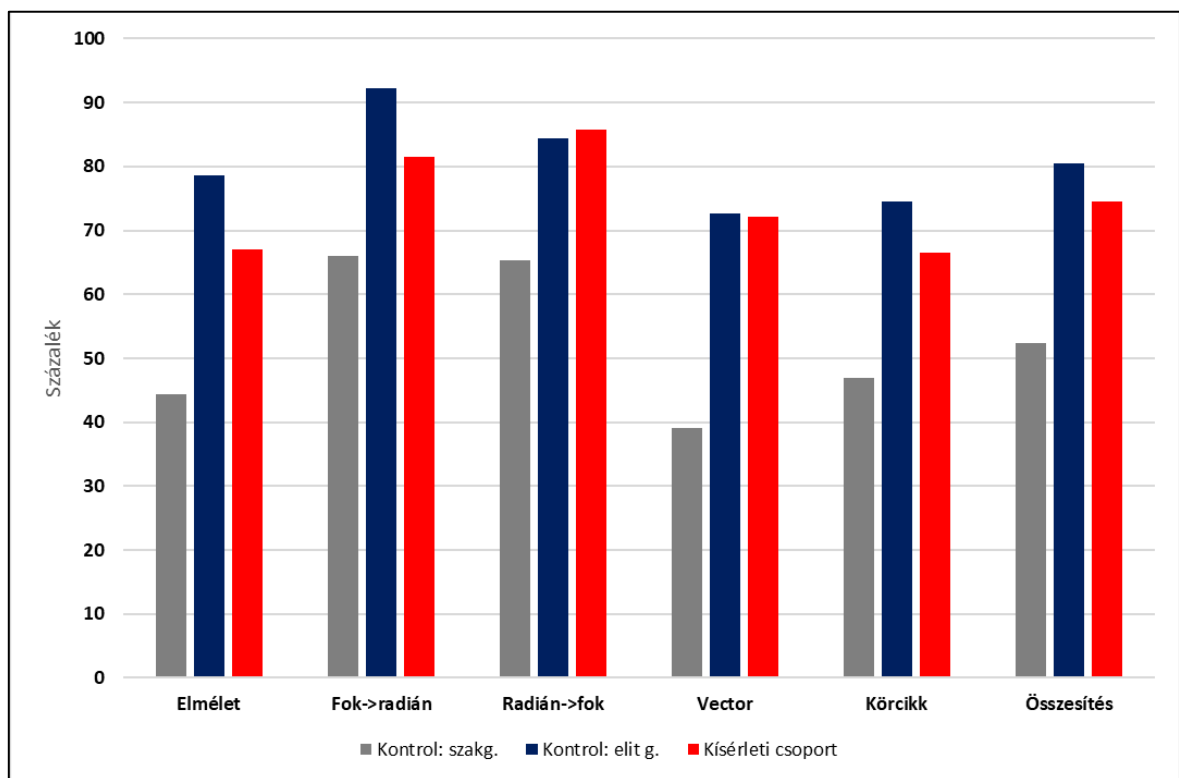
Végül, de nem utolsó sorban felmerül a kérdés, hogy vajon kimutatható-e az előhívási hatás deduktív következtetéseket igénylő feladatok esetén. Tran és munkatársainak (Tran, Rohrer és Pashler 2015) munkája alapján az olyan feladatoknál, ahol deduktív következtetésre van szükség, a tesztelési hatás eltűnik szövegtanulási környezetben. Ezzel szemben egy Tran-ékéhoz hasonló kísérletben a deduktív következtetést igénylő feladatok esetén is kimutatható volt a tesztelési hatás (Eglington és Kang, 2018). Hasonlóan Smith és Karpicke (Smith és Karpicke, 2013) szövegtanulási környezetben azt mutatták ki, hogy az előhívásos tanulás a szövegben szereplő összefüggések észrevételét igénylő feladatok esetén is hatásosabb, mint az újraolvasás. Eglington és Kang 2018-as kísérletükben arra hívják fel a figyelmet, hogy a gyakorlás, tesztelés formája döntő fontosságú: a tesztelési hatás kimutatható deduktív következtetést igénylő feladatok esetén is amennyiben a tesztelés megfelelő módon történik (Eglington és Kang, 2018). Kísérletükben a résztvevők négy különböző, hét-kilenc összefüggő mondatból álló szöveget tanulmányoztak: kettőt előhívással, a másik két szöveget pedig újraolvasással. Két nappal később tesztelték őket. Abban az esetben, amikor a mondatokat egyenként mutatták be a gyakorlás során, mint Tran és munkatársai, a tesztelési hatás nem volt kimutatható a következtető gondolkodást igénylő teszten. Amikor a tanulás/gyakorlás során a mondatokat egyidejűleg mutatták be, az előhívás gyakorlása jobban segítette a későbbi deduktív következtetést, mint az újraolvasás. Eredményeik azt mutatják, hogy megfelelő formában az előhívás javíthatja a deduktív következtetést.

A matematika feladatok megoldásához fejlett deduktív és algoritmikus gondolkodási képesség és problémamegoldó képesség szükséges, maguk a feladatok pedig sokszor összetettek, egyszerre több elemet, köztük lévő kapcsolatot kell vizsgálni, kiválasztani a megfelelő megoldási útvonalat. A matematika feladatok megoldásánál lépten-nyomon alkalmazunk következtetési gondolkodást: ismert információkból következtetünk további információra, megoldási stratégiára, nem beszélve az érvelési, bizonyítási folyamatokról, amiknek alapvető eleme a logikus következtetés. Feladatmegoldás során a deduktív gondolkodás mellett fontos szerepet játszik az algoritmikus gondolkodás. Ki kell választani az alkalmazandó módszert, eljárást a sokféle eljárás közül. Ezek után meg kell vizsgálni, hogy amennyiben az adott módszert alkalmazzuk, akkor milyen újabb információhoz juthatunk, kell-e adott esetben alakítani, módosítani a választott módszert. A matematika feladatok megoldásánál szükség van egyfajta logikus, szervezett gondolkodásmódra, a feladatot a rendelkezésre álló eszközök segítségével (rendezett) lépések sorozatára le kell tudni bontani és az adott lépéseket végrehajtani (Lockwood és mtsai, 2016).

Felmerül a kérdés, hogy vajon matematikatanulás esetében érdemes-e alkalmazni az előhívási hatáson alapuló tanulást és amennyiben igen, milyen formában. Habár a matematika területén csak néhány tanulmány vizsgálta osztálytermi környezetben a tesztelési hatást, a legújabb tanulmányok azt sugallják, hogy az előhívásos tanulás megfelelő formája hatékony módja lehet a matematika tanulásnak (Fazio, 2019; Lyle és Crawford, 2011; Lyle és mtsai, 2016, 2020; Szeibert és mtsai, 2022).

Egy korábbi esettanulmányunkban azt vizsgáltuk, hogy az előhívási hatáson alapuló tanulás, mint egyfajta formatív értékelési rendszer hogyan építhető be a középiskolai matematika órákba és milyen a módszer középtávú hatása (Szeibert és mtsai, 2022). A kísérlet résztvevői kilencedik osztályos tanulók voltak. A kísérleti csoportot (N=9) egy szakgimnázium 9. osztályos tanulói alkották. Ebbe a szakgimnáziumba sok hátrányos helyzetű tanuló járt. A kísérleti csoport minden óra végén írt egy rövid, öt perces dolgozatot az adott órai tananyaggal kapcsolatban. Minden óra végi teszt egy elméleti kérdést (definíció, fogalom, tétel) és egy gyakorlati feladatot tartalmazott, amikre a diákok 0, 1 vagy 2 pontot kaphattak. A kijavított tesztek a diákok a következő órán visszakapták. Ezek a kis tesztek egyrészt a folyamatos előhívást szolgálták, másrészt a kísérleti csoport tanára figyelemmel kísérhette a diákok aktuális teljesítményét. Az óra végi teszt, mint egyfajta formatív értékelés került bevezetésre. Az óra végi tesztek hatását két kontrollcsoport segítségével vizsgáltuk. A kontrollcsoportok egyike a kísérleti csoport szakgimnáziumának egy másik, hasonló

képességű csoportja volt (N=23), a másik kontrollcsoportot pedig egy elit gimnázium két osztálya képezte (N=34). Az elit gimnázium a kísérlet évében Magyarországon a 14. helyen szerepelt a középiskolai rangsorban, a budapesti gimnáziumok között az ötödik helyen szerepelt, míg a szakgimnázium Magyarország 506., Budapest 125. középiskolájaként szerepelt az érettségi vizsgák és kompetenciamérések alapján. A nyolcadik osztályos felvételi vizsgán szerzett pontszámok alapján a kísérleti csoport pontszáma volt a legalacsonyabb az összes vizsgált csoport közül. Mindegyik csoport ugyanazt a geometria anyagrészt sajátította el, a témazáró dolgozatok hasonlóak voltak. A szakgimnáziumi kísérleti csoport és a gimnáziumi kontrollcsoportok témazárója teljesen megegyezett. A témazáró öt feladatból állt, az első feladat elméleti kérdéseket tartalmazott, a többi négy feladatmegoldás volt. A kvantitatív eredményeket a 3. ábra szemlélteti. Az ábrán az egyes oszlopok az egyes csoportok (szakgimnáziumi kontrollcsoport, gimnáziumi kontrollcsoport, kísérleti csoport) feladatonkénti teljesítményét és átlagos összteljesítményét jelölik.



**3. ábra** Témazáró dolgozat eredmények összehasonlítása.  
(Az ábra Szeibert Janka doktori értekezéséből (Szeibert, 2023) származik.)

Összehasonlítottuk az egyes csoportok témazáró dolgozatainak összpontszámát, majd az összehasonlítást elvégeztük feladatonként is egytényezős varianciaanalízissel (ANOVA) független mintákra, Sidak páronkénti összehasonlítással. Az összehasonlítás nem mutatott szignifikáns különbséget a kísérleti csoportban elért pontszámok és az elit gimnázium tanulóinak pontszámai között, a kísérleti csoport és a gimnáziumi kontrollcsoport pontszámai statisztikailag megegyeztek és mindkettő csoport szignifikánsan jobban szerepelt, mint a szakgimnáziumi kontrollcsoport. A kvantitatív elemzés mellett kvalitatív elemzést is végeztünk, amelynek eredményei megerősítették a kvantitatív vizsgálat eredményeit.

Az előhívási hatást vizsgálta Lyle és Crawford (2011) egy pszichológusoknak szóló statisztika kurzuson. A hallgatóknak minden előadás végén egy kis kérdéssorozatra kellett válaszolniuk, hogy az aznap tanult információkat felidézzék. Ez a módszer szignifikánsan és jelentősen növelte a vizsgaedményeket.

Lyle és munkatársai (2020) szintén valós oktatási környezetben vizsgálták az előhívásos tanulást. Egy mérnökhallgatóknak szóló bevezető kalkulus kurzusban vizsgálták a különböző mennyiségű és különböző időközönként elosztatott előhívási gyakorlatok középtávú, valamint hosszútávú tudásra gyakorolt hatását az előhívási gyakorlatok mennyiségének (alaphelyzet vagy megnövelt) és a gyakorlatok között eltelt idő (alaphelyzet vagy megnövelt) független manipulálásával. Kísérletükben tehát négy különböző tanulási módot hasonlítottak össze: az egyik csoport hagyományos módon tanulta a bevezető kalkulust (alapszintű gyakorlás és időköz). Ehhez az alapszinthez képest az egyik feltételben megnövelték a gyakorlás távolságát, de a mennyiségét nem változtatták. Egy másik feltételben a két gyakorlás közti távolságot nem változtatták, a gyakorlás mennyiségét viszont megnövelték. Egy harmadik feltételben pedig mind a gyakorlás távolságát, mind a gyakorlás mennyiségét megnövelték az alapszinthez képest. Az előhívási gyakorlatok kvízkérdések megválaszolását jelentették. A hallgatók tudását két oktatási szempontból releváns időpontban mérték: a szemeszteren belül, a bevezető kalkulus kurzus végén és négy héttel később, a következő félév kezdetén. A félévvégi teszteredményeket szignifikánsan növelte a több előhívási gyakorlat és a gyakorlás időben való elosztása, bár a vizsgálati eredmények arra utalnak, hogy a gyakorlás mennyiségének hatása kevésbé volt erős, mint az elosztásé. Négy héttel a kurzust követően a „hosszútávú tudást” kizárólag az előhívási gyakorlatok időben való elosztása befolyásolta: az utóteszten szignifikánsan jobban szerepeltek azok a hallgatók, akiknél az előhívási gyakorlatok időben elosztatva voltak, mint akiknél tömbösítve. Az előhívási gyakorlatok számának növelése nem eredményezett jobb hosszútávú tudást. Hopkins és munkatársai egy,

az előzőhöz hasonló kutatásukban a középtávú és a hosszútávú tudást kevésbé közvetlenül mérték. Ebben a tanulmányban a kutatók lényegében ugyanarra a következtetésre jutottak, mint a fent említett kísérletben.

May tanulmánya (May, 2021) az időben elosztott előhívásos tanulást vizsgálta egy másodéves matematikatanároknak szóló matematika kurzuson. A kurzus témája analitikus geometria, függvények, polinomosztás, gyöktényező kiemelhetősége, euklideszi geometria és mátrixok voltak. Megállapította, hogy a beavatkozás javította a tudást azokban a tudás- és érvelési kategóriákban, amelyek viszonylag hasonlóak voltak az órán bemutatottakhoz. Azoknál a feladatoknál, ahol az óraihoz hasonló érvelést lehetett alkalmazni, vagy amelyek jól megalapozott procedurális tudást igényeltek, ott kimutatható volt a teszthatás. Azokban a kategóriákban, ahol a fogalmi és procedurális tudás rugalmas és kreatív felhasználására volt szükség, a tanulók teljesítménye kevésbé volt kiemelkedő. Ez azt mutatja, hogy a kísérletben alkalmazott előhívás hatékony volt a közeli transzfer segítségével, viszont a távoli transzfer esetében kevésbé volt hatékony.

Yeo és Fazio (2019) kutatásukban matematikai problémamegoldás (Poisson-eloszlás) témakörében vizsgálták az előhívás gyakorlásának hatékonyságát a kidolgozott példák tanulmányozásával szemben. Az előhívási hatáson alapuló tanulás és a kidolgozott példák tanulmányozása két olyan tanulási technika, amely egyaránt hatékony tanulási módszer lehet problémamegoldás területén (Dunlosky és mtsai, 2013; Adeniji és Baker, 2023). Ugyanakkor a két módszer különböző kognitív folyamatokon alapszik. Egyes kutatók azt találták, hogy a matematikai és a természettudományos problémamegoldás esetében az előhívásos módon történő feladatmegoldás helyett a kidolgozott példák használata célszerűbb (Atkinson és mtsai, 2000; Renkl, 2014; Gog és Rummel, 2010; Gog és mtsai, 2015). A kidolgozott példák alatt *„egy feladat elvégzésének vagy egy probléma megoldásának lépésről lépésre történő bemutatását”* értjük (Clark, Nguyen, és Sweller, 2006, 190. o.). A problémamegoldás szempontjából a gondosan kiválasztott kidolgozott példák tanulmányozása gyakran hatékonyabb tanulási mód lehet, mint a további problémák megoldása. Ezt az „előnyt” gyakran nevezik kidolgozott példa hatásnak (angolul: worked example effect). A kidolgozott példák használatának hatékonyságát általában a kognitív terhelés elméletével magyarázzák. Segít csökkenteni a kognitív terhelést, más szóval felszabadítja a munkamemória erőforrásait, így a tanuló nagyobb figyelmet tud fordítani a sémák kiépítésére és automatizálására (Kalyuga, Renkl és Paas, 2010; Sweller, 1988, 2010). Jellemzően a kezdő tanulók esetében kedvező a módszer, és a szakértelem növekedésével egyre kevésbé hatékony (Kalyuga, Renkl

és Paas, 2010). Kérdés tehát, hogy melyik a hatékonyabb módszer közép- és hosszútávon matematikai problémamegoldás terén: az előhívásos tanulás vagy a kidolgozott példák bemutatása. Yeo és Fazio (2019) munkája az egyik legjelentősebb kutatás a témában. Kísérletük egy tanulási és egy tesztfázist tartalmazott. A tanulási és a tesztfázis öt perc vagy egy hét különbséggel történtek. Az egy alkalomból álló tanulási fázisban a résztvevők egy része a tananyagot előhívásos módon, feladatoknak a mindenféle segédeszköz nélküli megoldásával gyakorolta, míg a másik részük a kidolgozott példák (újra)tanulása révén tanulta. Az előzetes ismeretekben nem volt különbség a két csoport között. Megállapították, hogy az optimális tanulási stratégia függ néhány dologtól. Nevezetesen a tanulási céltől, a tudás fajtájától (stabil tények vagy rugalmas eljárások) és attól, hogy mennyivel a tanulási fázis után kell mozgósítani a tudást. Amikor a tanulási cél az volt, hogy egy kidolgozott példa szövegében szereplő tényekre emlékezzenek a résztvevők, az ismételt tesztelés jobb teljesítményt eredményezett, mint az ismételt tanulás egy héttel a beavatkozás után. Ugyanakkor amikor a cél egy újszerű matematikai eljárás megtanulása volt, az optimális tanulási stratégia az utóteszt időpontjától függött. Öt perccel a tanulási fázis után az ismételt tanulás (kidolgozott példák módszere) hatékonyabb volt, mint az ismételt tesztelés. Az egy héttel későbbi tesztelésnél azonban az ismételt tesztelés ugyanolyan hatékony volt, mint az ismételt tanulás – a tanulási fázisban mutatott példáktól eltérő feladatokban. A tanulási fázisban mutatott példákkal azonos feladatok esetén az ismételt tesztelés hatékonyabb volt, mint a kidolgozott példák módszere. Kutatási eredményeik arra utalnak, hogy a tanulástól számított megfelelő idő elteltével a tesztelési hatás rugalmas eljárások tanulása esetén is kimutatható. Bár Yeo és Fazio munkája fontos kiindulási pont a disszertációmban bemutatott kutatásokat tekintve, kísérletük nem mondható valódi oktatási környezetnek abban az értelemben, hogy nem osztálytermi keretek között vizsgálták a két módszert. Így amikor azt szeretnénk eldönteni, hogy a előhívási hatáson alapuló tanulás, vagy a kidolgozott példák mutatása hatékonyabb módja a matematikatanulásnak közép- illetve hosszútávon, nem támaszkodhatunk közvetlenül az ő kísérleti eredményükre.

### 3. Célkitűzések

Az előző fejezetben bemutatott előhívással kapcsolatos kutatási eredmények motiválták az ötödik és hatodik fejezetekben leírt kvázi-kísérleteinket. A szakirodalmi összefoglalóban bemutatott munkák azt sugallják, hogy megfelelő körülmények között akár a felsőbb matematika tanulása esetén is kimutatható a tesztelési hatás. A szakirodalmi áttekintésben igyekeztem olyan kutatásokat bemutatni, amelyek nemcsak laboratóriumi körülmények között vizsgálták az előhívási hatást, hanem valós oktatási környezetben, kifejezetten a matematika tantárgyon belül. Ugyanakkor az ezekben a tanulmányokban tárgyalt tananyagok elsajátítása nem igényel olyan mértékű absztrakciós képességet, mint a matematika (tanár) szakos hallgatók algebra és számelmélet kurzusainak megértése. Az absztrakciós szint alatt az információegységek közötti kapcsolat mértékét értjük; arra utal, hogy egy tudásegység milyen mértékben kapcsolódik egy adott kontextushoz (Hiebert és Lefevre, 1986). Más szóval, az absztrakciós szint növekszik, ahogy az ismeretek eltávolodnak egy adott kontextustól. Ahogyan azt Bass megfogalmazta: *"A matematikai absztrakció ereje az általánosságában rejlik, így képes sok különböző matematikai kontextust fogalmilag egyesíteni"* (Wasserman, 2018, 127.o.). Az egyetemi algebra és számelmélet kurzusok óriási szerepet játszanak a hallgatók absztrakciós képességének fejlesztésében, a matematika és a természettudományok különböző részein belüli kapcsolatok kialakításában, valamint a fogalmak mélyebb megértésében, például a formális számítások, az algebrai struktúrák bemutatása és viselkedésük megértése terén. Számos tanulmány azonban kimutatta, hogy a tanulóknak nehézséget okoz az absztrakt algebra elsajátítása (Veith és mtsai, 2022; Agustyaningrun és mtsai, 2021; Wasserman, 2018). Még ha a diákok át is mennek a vizsgán, később nehezen emlékeznek a tanultakra. Felmerül a kérdés, hogy a folyamatos előhívás segíti-e megértést és a hosszútávú tudás kialakítását az absztrakt matematika terén. Nagy előrelépés lenne az egyetemi matematikaoktatás számára, ha kiderülne, hogy az előhívásos tanulás egy hatékony módja a matematika tanulásának absztraktabb témakörök, fogalmak tanulása és komplex feladatok megoldása esetén is.

A dolgozatomban bemutatott kutatások célja annak vizsgálata, hogy absztraktabb környezetben, komplex matematika feladatok esetén kimutatható-e az előhívási hatás közép- illetve hosszútávon a hagyományos tanulással illetve a kidolgozott példák módszerével szemben. A módszert matematika tanárszakos hallgatók körében vizsgáltam. Mivel autentikus matematikaoktatási kontextusban nehéz elkülöníteni és nem is feltétlenül célunk

megkülönböztetni a tesztelés közvetett és közvetlen hatásait, ebben az értekezésben nem különítettük el a kettőt, hanem a közvetlen és közvetett hatásokat együtt mértük.

A disszertációmban az alábbi kutatási kérdésekre keresem a választ:

K1: Kimutatható-e az előhívási hatás középtávon – a félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása esetén a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K2: Kimutatható-e az előhívási hatás egyéni különbségektől függetlenül komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása esetében elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K3: Kimutatható-e az előhívási hatás hosszútávon – három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K4: Kimutatható-e az előhívási hatás középtávon – a félévközi és félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex absztrakt matematika feladatok (algebra feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K5: Kimutatható-e az előhívási hatás hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – komplex absztrakt matematika feladatok (algebra feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatók körében?

K6: Milyen mértékben felejtik el a matematika tanárszakos hallgatók hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – az absztrakt algebrát (polinomok témakört), amennyiben előhívásos, vagy a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel tanulnak?

## 4. A kísérletekhez felhasznált kutatási módszertan

Ebben a fejezetben bemutatom az ötödik és hatodik fejezetben leírt kísérleteinkben alkalmazott módszereket. A bemutatott kísérletek mind kvázi-kísérletek, a minták kijelölése nem véletlenszerűen történt. A kísérletekben az ELTE 2017-es évfolyamának matematika tanárszakos hallgatói vettek részt. A minta kijelölésében nagy szerepet játszott a minta elérhetősége. A fejezet célja tisztázni azt, hogy kísérleteinkben mit értünk előhívásos, hagyományos és kidolgozott példák módszerével történő tanulás alatt.

A bemutatott kísérletek egyetemi algebra és számelmélet kurzusok keretein belül vizsgálják a három módszer közép- és hosszútávú hatását tanyaghoz kapcsolódó komplex matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása esetén. Az egyes kísérletekben 13 héten keresztül a résztvevők egy előadásra jártak, míg a gyakorlatokon gyakorlati csoportokba voltak osztva. A hallgatók gyakorlati csoportokba való osztása Neptun-véletlen történt. Ez azt jelentette, hogy az egyes gyakorlatvezetők gyakorlati csoportjaiba a hallgatók a Neptun elektronikus tanulmányi rendszerén keresztül a létszámkorláttól eltekintve szabadon jelentkezhettek. A gyakorlati csoportok kialakítására nem volt más lehetőségünk. A kísérleti és kontrollcsoportokat – azt, hogy adott gyakorlati csoport milyen módszerrel tanuljon az egyes gyakorlatokon – azt követően jelöltük ki, hogy a hallgatók felvették az adott gyakorlatvezető gyakorlati csoportjába a kurzust. Az első két kísérletben a hat gyakorlati csoport közül hármat „hagyományos” módon tanuló csoportnak, hármat pedig „előhívásos módszerrel” tanulóknak jelöltük ki. A kísérleti elrendezésnél ügyeltünk arra, hogy mindkét csoportba (hagyományos módszerrel tanulók csoportja és előhívásos módszerrel tanulók csoportja) azonos tanítási tapasztalattal rendelkező, azonos beosztású gyakorlatvezetők kerüljenek: egy-egy demonstrátor, egy-egy doktorandusz hallgató és egy-egy tapasztaltabb oktató. A harmadik kvázi-kísérletben a hat gyakorlati csoport közül hármat „előhívásos” módon tanuló csoportnak, hármat pedig „kidolgozott példák módszerével” tanulóknak jelöltük ki. A két típusú csoportot azonos tanítási tapasztalattal rendelkező, azonos beosztású gyakorlatvezetők tanították: egy-egy doktorandusz, egy-egy adjunktus és egy-egy tapasztaltabb oktató.

A gyakorlatokon a diákok feladatokat oldottak meg az előző heti előadás elméleti anyagára építve egyénileg, közösen, illetve tanári segítséggel. Minden csoport ugyanazokat a feladatokat oldotta meg és a gyakorlatok felépítése is hasonló volt, csak a gyakorlati órák első és utolsó 10 percében volt különbség az egyes csoportok között.

A **hagyományos módon** tanuló csoportokban a diákok az óra elején egy rövid tesztet írtak az előző heti előadásban elhangzott elméletéhez kapcsolódóan, ahogyan az ezen a tárgyon hagyományosan szokás. Ezt követte a házi feladat megbeszélése és a fő rész, a problémamegoldás a gyakorlatvezetők segítségével.

Az **előhívásos módszerrel** tanuló diákok gyakorlata a házi feladat megbeszélésével kezdődött, ezt követte a problémamegoldás a gyakorlatvezetők segítségével, az óra utolsó 10 percében pedig írtak egy rövid, két feladatból álló dolgozatot az aznapi gyakorlat anyagához kapcsolódóan. Az eddigi ismeretek alapján ahhoz, hogy létrejöjjön az előhívási hatás, figyelembe kell vennünk a következőket:

- az első előhívásnak 24 órán belül létre kell jönnie,
- a másolás nem előhívás, és
- a diákoknak fel kell idézniük a tanultakat.

Az előhívásos tanulás matematika kurzusokba való beépítésénél az előhívás formáját is át kell gondolni, ezen felül – egy praktikus szempont – ügyelnünk kell arra, hogy lehetőleg ne jelentsen a tanárnak sok többletmunkát a módszer tanórába való beépítése. Mindezen szempontokat figyelembe véve döntöttünk az óra végi kisdolgozatok mellett. Az óra végi tesztek alkalmával – hasonlóan Lyle és Crawford (2011) vizsgálatához – a diákoknak a gyakorlat során megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat kellett megoldaniuk. Az óra végi teszt két feladatból állt, és a kísérleti csoport tagjainak egyénileg, segítség nélkül kellett megoldaniuk, elő kellett hívnuk az aznap tanultakat. Az óra végi teszteken igyekeztünk a diákok számára megfelelő nehézségű kérdéseket feltenni: se nem túl könnyű, se nem túl nehéz feladatokat. Ezeket a tesztek a gyakorlatvezetők kijavították és lepontozták. Mindez viszonylag egyszerű módon történt, megnézték, hogy jó vagy nem jó az adott megoldás. A feladatokkal a diákok 1-1 pontot szerezhettek, amennyiben helyes megoldást adtak le, így egy-egy teszt alkalmával 2 pontot kaphattak. Amennyiben kisebb hibát ejtettek a megoldás során, fél pontot adtunk az adott feladatra. Az óravégi feladatok megoldásai nem hangoztak el az előhívásos csoportokban, hacsak azt a diákok explicit nem kérték. Meg kell jegyezzem, hogy ez csak nagyon ritkán fordult elő.

Azért, hogy a hagyományos módon tanuló csoportokban és az előhívásos csoportokban a kistesztek megírásánál a hallgatók aktívan bevonódjanak és érdekeltek legyenek abban, hogy ezeket a tesztek legjobb tudásuk szerint töltsék ki, a félév során 50 százalékot kellett teljesíteniük a kistesztekben. Azaz az összesen elérhető pontszám felét meg kellett szerezniük

annak érdekében, hogy a kurzus minimum feltételeit teljesítsék. Ez az 50 százalék talán elsőre soknak tűnik, de valójában nem volt nehéz teljesíteni, az összes hallgatónak sikerült elérnie ezt az alsó korlátot.

**A kidolgozott példák (mutatása) módszerével** tanuló gyakorlati csoportokban a gyakorlat a házi feladat megbeszélésével kezdődött, ez után következett a feladatmegoldás a gyakorlatvezetők segítségével, az óra utolsó 10 percében pedig az előhívásos csoport óravégi dolgozatának a két feladata került bemutatásra. A gyakorlatvezető ismertette a két feladat mintamegoldását, ami lehetőséget nyújtott a tanulóknak arra, hogy a feladatmegoldási sémákra összpontosítsanak.

Az egyes módszerek középtávú hatását félévközi dolgozatok segítségével mértük fel, a hosszútávú hatást pedig utótesztek segítségével követtük nyomon.

## **5. Az előhívásos tanulás szerepe az egyetemi számelmélet tanulásában**

Ebben a fejezetben az előhívásos tanulás egy formáját, annak közép- és hosszútávú hatását vizsgálom a hagyományos oktatással szemben matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet 1. kurzus keretein belül. A fejezetben bemutatott kutatások alapját két publikáció képezi (Szabó és mtsai, 2023; Muzsnay és mtsai, 2024). Az első publikáció a 4. fejezetben bemutatott előhívásos módszer középtávú, félévközi hatását vizsgálja számelmélet tanulása esetén, a második publikáció pedig a módszer hosszútávú, szemeszteren átívelő hatására koncentrálna.

### **5.1. Kutatási kérdések**

Ebben a fejezetben az alábbi kutatási kérdésekre keresem a választ:

K1: Kimutatható-e az előhívási hatás középtávon – a félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása esetén a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K2: Kimutatható-e az előhívási hatás egyéni különbségektől függetlenül komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása esetében elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K3: Kimutatható-e az előhívási hatás hosszútávon – három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – komplex matematika feladatok (számelmélet feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

## **5.2. Kísérlet – a módszer középtávú hatása számelmélet feladatok tanulása esetén**

### **5.2.1. A kutatás célja**

Ebben a kutatásban az volt a célunk, hogy megvizsgáljuk, hogy az előhívásos tanulást érdemes-e beépíteni az egyetemi matematikaoktatásba, továbbá célunk volt elemezni annak hatékonyságát a hagyományos oktatással szemben.

Mindezek mellett azt is megvizsgáltuk, hogy az előhívásos tanulás hatékonysága függ-e az egyének matematikai kompetenciájától, előismereteitől. Az egyetemi matematikaoktatás esetében, ahol a beérkező hallgatók közötti különbségek általában óriásiak, ez különösen fontos szempont. Kutatásunk tényleges oktatási környezetben vizsgálta az előhívásos tanulást egy matematika tanárszakos hallgatóknak szóló első féléves kötelező kurzus keretein belül, az Algebra és Számelmélet 1. című kurzuson. A kurzushoz tartozó gyakorlatot a hallgatók egy része hagyományos módszerrel, másik része pedig előhívásos módon, a tananyag egy alkalommal, közvetlenül a tanulás után történő felidézésével tanulta. Ez a kísérlet a két csoport hallgatóinak teljesítményét hasonlította össze figyelembe véve az egyéni kompetenciakülönbségek hatásait. Az egyéni matematikai kompetenciákban, előismeretekben mutatkozó különbségek vizsgálatához a hallgatókat nem az egész kurzus során nyújtott összteljesítményük alapján csoportosítottuk, ahogy Carpenter és munkatársai (2015) tették, hanem a kurzus elején megírt szintfelmérő teszt alapján.

### **5.2.2. A kísérlet résztvevői**

A kísérletben az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika tanárszakos hallgatói, összesen 114 hallgató vett részt, akik a 2017/18-as tanév őszi félévében felvették az Algebra és Számelmélet 1. című kötelező tantárgyat. Az Algebra és Számelmélet 1. tantárgy teljesítése nagy kihívást szokott jelenteni a hallgatóknak, a hallgatók 35-50% -ának csak többszöri tárgyfelvétel után sikerül teljesíteni a kurzust. Annak érdekében, hogy minél tisztább képet kapjunk az előhívásos módszer hatékonyságát illetően, az adatok elemzése során kihagytuk azokat a hallgatókat, akik korábban már felvették az adott tantárgyat. Azokat a hallgatókat, akik a félév során leadták a kurzust, illetve akik nem írták meg a félév kezdetekor a bemeneti tesztet, szintén kihagytuk. Az adattisztítást követően összesen 72 hallgató, közülük 26 férfi és 46 nő adatait használtuk fel. Életkoruk 18 és 23 év között volt.

### 5.2.3. Kísérleti elrendezés

Az Algebra és Számelmélet 1. kurzus heti egy 60 perces előadásból és egy 90 perces gyakorlatból állt 13 héten keresztül. Az előadásokon az összes hallgató együtt vett részt, míg a gyakorlatokon a hallgatók csoportokra voltak bontva. Összesen hat, 17-19 fős gyakorlati csoport volt, melyek közül három csoport előhívásos módszerrel tanult a gyakorlaton (kísérleti csoport), három pedig hagyományos módon (kontrollcsoport) (ld.: 4. fejezet). Így a 72 értékelendő hallgatóból 37 került a kísérleti csoportba, 35 pedig a kontrollcsoportba. A tanári hatást igyekeztünk a lehető legjobban kiküszöbölni: mind a kísérleti, mind a kontrollcsoportban egy-egy tapasztaltabb tanár, egy-egy doktorandusz hallgató és egy-egy demonstrátor tartotta a gyakorlatokat. A gyakorlati csoportok tanárai minden héten tartottak egy rövid megbeszélést, ahol a kurzussal kapcsolatos főbb kérdéseket vitatták meg.

A diákok tudását két alkalommal rögzítettük: a félév elején az összes kísérletben résztvevő hallgató írt egy bemeneti tesztet és a félév végén, a szemeszter tizenharmadik hetében pedig írtak egy öt feladatból álló dolgozatot a számelmélet tananyaghoz kapcsolódóan.

### 5.2.4. Tananyag

A vizsgálatban az Algebra és Számelmélet 1. kurzus előadás és gyakorlat szokásos tananyagát használtuk, amely Niven, Zuckerman, Montgomery 9 (1991) *An Introduction to the Theory of Numbers* (5 ed.) tankönyvére épül. A tananyag legfontosabb témakörei a következők voltak:

- Oszthatóság, a legnagyobb közös osztó, az euklideszi algoritmus, prímszámok, a számelmélet alaptétele.
- Speciális számelméleti függvények, additív és multiplikatív számelméleti függvények. Multiplikatív függvények osztóösszege. A Möbius-függvény. Tökéletes számok.
- Kongruenciák. Az Euler-Fermat-tétel. Lineáris kongruenciák és diofantikus egyenletek. Lineáris kongruencia rendszerek. Alkalmazások a számelméletben.
- Magasabb fokú kongruenciák. Redukció prímszámokra, illetve prímmodulusra. A megoldások száma, a fokszám redukciója prímszám modulusok esetén. Wilson tétele. Binomiális kongruenciák, rend, primitív gyök, index.

A részletes tematika a függelékben található.

### 5.2.5. Mérőeszközök

A hallgatók a szemeszter elején egy szintfelmérő dolgozatot írtak, az ELTE kritériumdolgozatát. A szintfelmérő dolgozat eredményei a későbbiekben egyfajta viszonyítási alapként szolgáltak. Az adott hallgató ezen a dolgozaton nyújtott teljesítményét tekintettük bemeneti matematika tudásnak, bemeneti matematikai kompetenciának.

A szemeszter tizenharmadik hete egy félévvégi dolgozattal zárult. A dolgozat öt összetett számelmélet feladatot tartalmazott. A dolgozat írása során a hallgatók semmilyen segédeszközt nem használhattak. A dolgozat értékelése a következőképpen történt: hibátlan megoldásért feladatonként 6-6 pontot szerezhettek a diákok. Részmegoldásokra szintén lehetett pontot szerezni. Az adott csoport dolgozatait a gyakorlatvezetők javították ki az előadó által írt részletes pontozási útmutató szerint, ami tartalmazta a részpontoszámokat, a leggyakoribb hibák értékelését és a javítással kapcsolatos általános irányelveket. Végül az előadó az összes dolgozat javítását felülvizsgálta. Az alábbiakban bemutatom a dolgozat feladatait, és azokat röviden elemzem.

1. Feladat: Határozd meg az alábbi kongruencia-rendszer összes 100-nál kisebb pozitív megoldását!

$$10x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{9}.$$

Ez a feladat egy tipikusan olyan feladat, amely főként algoritmikus gondolkodást igényel. Ez alatt azt értjük, hogy az ilyen típusú feladat mindig megoldható ugyanazzal a módszerrel. Ráadásul mind az eljárás, mind a számítások meglehetősen egyszerűek. A feladat akár csak középiskolai ismeretekkel is megoldható, azonban mégis összetett. Bár az általános módszer nagymértékben gyakorolható, minden egyes lépésnél szükség van egy trükkre, és ez a trükk a feladatban megjelenő számoktól függ.

2. Feladat: Határozd meg a  $73737311^{99993330002}$  szám 73-mal vett maradékát VAGY a  $2017^{1111^{1212}}$  szám 43-mal vett maradékát!

A második feladat szintén megoldható procedurálisan, de egy lépéssel bonyolultabb az előzőnél. A feladat középiskolai tudással nem megoldható, a megoldásához szükség van az új egyetemi tudás alkalmazására, alkalmazni kell az Euler-Fermat tételt. Az előző feladathoz hasonlóan itt is elsajátítható az általános módszer, amellyel a feladatot meg lehet oldani, azonban mindig szükség van egy trükkre, ami a feladatban megjelenő számoktól függ. Ez

nagyban növeli a feladat bonyolultságát. A banki kriptográfia is többek között erre a módszerre épül: a számítógépünk ezzel a módszerrel generál egy kódot, és így a kódot nem lehet feltörni.

3. Feladat: Tudjuk, hogy a 11 primitív gyök modulo 29. Igaz-e, hogy  $11^5$  és  $11^7$  is primitív gyökök modulo 29?

A harmadik probléma a tanulmányok során megszerzett összes lehetséges absztrakt készséget igényli. A benne használt fogalom meglehetősen nehéz, és erősen kapcsolódik a multiplikatív rend fogalmához az absztrakt algebrából, ami messze a legnehezebb fogalom az anyagban. E fogalom ismerete többféleképpen is ellenőrizhető, és mindegyik mód kihívást jelent. A félév során ez volt az utolsó téma, amelyet a dolgozat előtt a diákok tanultak, ezért fennállt az esélye annak, hogy a hallgatóknak nem volt elég idejük a fogalom elsajátítására. Emellett meg kell említenünk, hogy erről a fogalomról a hallgatók csak előadás alkalmával hallhattak, a problémamegoldó szemináriumok során nem került elő.

4. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása az egész számok között:

$$10!x^{10} + 12y^{20} + 110z^{1211} = 44z^{2017} + 6.$$

A negyedik feladat a legösszetettebb. A megoldás több különböző típusú stratégia alkalmazását és különböző fogalmak, tételek megértését, alkalmazását igényli egyszerre. A megoldás kulcsa a megfelelő prím modulus megtalálása: egy olyan szám keresése, melyre véve az egyenlet jobb és baloldalát, ellentmondásra jutunk. Bár a tanított anyag és a feladat formája sugallja, hogy milyen stratégiákat érdemes alkalmazni, milyen modulusokkal érdemes próbálkozni, egyáltalán nem egyértelmű. Ha a hallgató a modulus rosszul választja meg, akkor utána előlről kell kezdenie a feladat megoldását.

5. Feladat: Mely pozitív  $n$  egészekre igaz az, hogy

$$\sigma(3n) = \sigma(n) + 24?$$

Az ötödik feladat mindig nagy kihívást jelent a hallgatóknak. A feladat megoldása könnyen érthető, de elég nehéz megtalálni. A megoldáshoz látni kell az anyag globális szerkezetét, és a szerkezet alapján következtetéseket kell levonni az elemek tulajdonságaira. A tulajdonságok

alján felmerülő elemeket aztán meg kell vizsgálni, le kell ellenőrizni, hogy mely elemekre igaz az eredeti egyenlet, egyáltalán létezik-e megfelelő elem vagy sem.

A hallgatók a szemeszter eleji szintfelmérő és az év végi dolgozat mellett minden gyakorlaton írtak kis dolgozatokat. A kísérleti csoport az óra végén, az aznapi óra anyagához kapcsolódóan kapott gyakorlati kérdéseket, feladatokat, míg a kontrollcsoport az óra elején, az előző heti előadás anyagához kapcsolódóan kapott kérdéseket. Az óra eleji tesztkérdésekre a 2. táblázat, az óra végiekre pedig a 3. táblázat mutat példákat.

## 2. Táblázat

*Példák az óra eleji tesztkérdésekre.*

1. példa	1. Defináljuk a fölbonthatatlan szám fogalmát! 2. Mondjuk ki a számelmélet alaptételét!
2. példa	1. Írjuk föl $a$ és $b$ kitüntetett közös osztójának 3 tulajdonságát! 2. Mondjuk ki a maradékos osztás tételét!
3. példa	1. Mondjuk ki a 3-mal való oszthatóság szabályát! 2. Mondjuk ki a Mersenne-prímekekről szóló tételt!
4. példa	1. Mondjuk ki az $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ megoldásairól szóló tételt! 2. Defináljuk a teljes maradékrendszer fogalmát!
5. példa	1. Mondjuk ki a primitív gyök 3 tulajdonságát! 2. Milyen módszerrel állna neki az $x^{11} \equiv 3 \pmod{73}$ kongruencia megoldásának?

## 3. Táblázat

*Példák az óra végi tesztkérdésekre.*

1. példa	1. Mutassunk példát olyan $a, b, c$ egész számokra, amelyekre teljesül, hogy $a bc$ és $a \nmid b$ és $a \nmid c$ ! 2. Igaz-e, hogy az $\overline{aabbcc}$ szám mindig osztható 33-mal? És 11-gyel?
2. példa	1. Igazoljuk, hogy a $\frac{7n+10}{5n+3}$ tört semmilyen egész számra nem egyszerűsíthető! 2. Vizsgáljuk meg, milyen maradékot adhat egy negyedik hatvány 4-gyel osztva, és igazoljuk, hogy az $x^4 + y^4 = 100000003$ egyenletnek nincs megoldása az egész számok között!
3. példa	1. Határozzuk meg $2017^{1849^{2002}}$ utolsó két számjegyét! 2. Van-e megoldása az $3x^{16} - 4y^4 + 34z^{2017} = 34172$ egyenletnek az egész számok körében?
4. példa	1. Bizonyítsuk be, hogy $\sigma(n) \leq n^2$ ! 2. Oldjuk meg a $4x \equiv 8 \pmod{7}$ és az $x \equiv 4 \pmod{10}$ kongruencia rendszert!
5. példa	1. Mennyi a 6 rendje modulo 31? 2. Igaz-e, hogy $3^{333} \equiv 1 \pmod{103}$ ?

## 5.2.6. Eredmények

Ebben a kutatásban 72 hallgató teszteredményeit elemeztük. A 72 hallgató közül 37 fő tartozott a kísérleti csoportba, 35 fő a kontrollcsoportba. Az adatelemzést az SPSS szoftver segítségével végeztük. A statisztikai jelölésekhez tartozó jelmagyarázat a Függelékben található.

A bemeneti szintfelmérő dolgozaton elérhető maximális pontszám 100 pont volt. Az átlagpontszáma a kísérleti csoportnak  $M = 57,2$ ;  $SD = 19,5$ ; a kontrollcsoportnak  $M = 60,5$ ;  $SD = 20,1$  volt. A zárhelyin elérhető maximális pontszám 30 pont volt. Az átlagpontszám a kísérleti csoportnál  $M = 17,2$ ;  $SD = 5,7$ ; a kontrollcsoportnál  $M = 14,3$ ;  $SD = 5,9$  volt. A két csoport bemeneti teszten és utóteszten nyújtott átlagos teljesítményét a 4. táblázat szemlélteti.

### 4. Táblázat

*A kísérleti csoport és a kontrollcsoport bemeneti teszten és a zárhelyi dolgozaton nyújtott átlagos teljesítménye.*

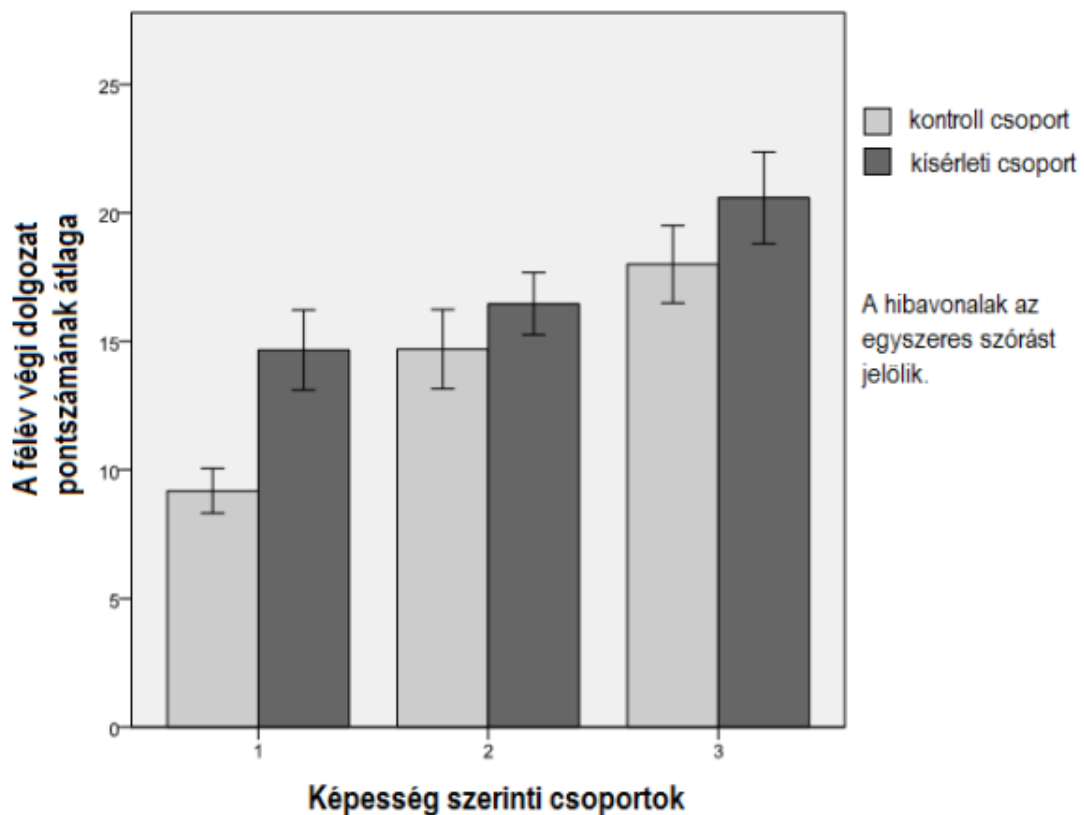
	Bemeneti teszt	Zárhelyi dolgozat
Kísérleti csoport (előhívásos módszer)	57,2 %	57,4 %
Kontrollcsoport (hagyományos módszer)	60,5 %	47,6 %

Ki akartuk zárni az előzetes tudásbeli különbségeknek a félévvégi dolgozatra gyakorolt hatását, ezért az adatokat ANCOVA (Cohen, 1988) segítségével elemeztük. Első lépésként ellenőriztük az ANCOVA alkalmazhatóságának feltételeit. A függő változó normális eloszlást mutatott, teljesült az alminták szóráshomogenitása és az illesztett egyenesek meredekségének párhuzamossága (a regressziós meredekség homogenitása). Az elemzést követően azt találtuk, hogy a kísérleti csoportokban lévő diákok szignifikánsan több pontot szereztek a félévvégi dolgozaton, mint a kontrollcsoportokban lévők ( $F(1,69) = 9,19$ ;  $p < 0,001$ ;  $\eta_p^2 = 0,118$ ) amellet, hogy a szintfelmérő tesztben szignifikánsan kevesebb pontot ért el a kísérleti csoport, mint a kontrollcsoport ( $F(1,69) = 32,79$ ;  $p < 0,001$ ;  $\eta_p^2 = 0,322$ ).

Az egyéni különbségek vizsgálatához a szintfelmérő teszt alapján a diákokat gyenge, közepes és jó képességű csoportokra osztottuk. A közepes képességűek csoportjába az átlag  $\pm 1/2$  szórás tartományban teljesítő diákok kerültek. A gyenge képességűek közé az ennél kevesebb, a jó képességűek közé az ennél több pontot elérő diákokat soroltuk. Azért ezt a felosztást alkalmaztuk, mert pszichológiai kísérletekben ezt a felosztást szokás alkalmazni. Ez a fajta

felosztás normális eloszlás mellett a mintát általában három egyforma méretű csoportra osztja. A három csoporton belül (átlag alatti, átlagos, átlag feletti) a hagyományos módszerrel tanuló diákok (kontroll csoport) és az előhívásos módszerrel tanuló diákok (kísérleti csoport) félévvégi dolgozaton elért átlagos összpontszáma a 4. ábrán látható. A világosszürke oszlopok a kontrollcsoporthoz, a sötétszürkék pedig a kísérleti csoporthoz tartoznak.

Az adatokat  $2 \times 3$  (kísérleti-kontroll, gyenge-jó-közepes) ANCOVA segítségével elemeztük. (Az ANCOVA alkalmazhatóságának feltételeit ellenőriztük.) A kísérleti csoport szignifikánsan jobban teljesített, mint a kontrollcsoport ( $F(1,66) = 7,52$ ;  $p < 0,001$ ;  $\eta_p^2 = 0,102$ ); a gyenge-jó-közepes csoportok közötti eltérés szignifikáns volt ( $F(2,66) = 13,02$ ;  $p < 0,001$ ;  $\eta_p^2 = 0,283$ ). A Sidak-féle többszörös összehasonlítás alapján mindhárom csoport teljesítménye szignifikánsan különbözött egymástól. Emellett az interakció nem volt szignifikáns, a diákok egyéni képességüktől függetlenül egyformán nagyobb pontszámot értek el a kísérleti csoportokban, mint a kontrollcsoportokban ( $F(2,66) = 0,86$ ;  $p > 0,05$ ;  $\eta_p^2 = 0,026$ ). Azaz a tesztelési hatás az egyéni képességtől függetlenül kimutatható volt.



**4. Ábra** A gyenge (1), közepes (2) és jó (3) képességű diákok teljesítménye a kísérleti csoportban és a kontrollcsoportban. (Az ábrát az SPSS program segítségével nyertük.)

### 5.2.7. Válaszok a K1 és K2 kutatási kérdésekre, diszkusszió

Az 5.2. fejezetben a K1 és K2 kutatási kérdésekre fókuszáltam. A fejezetben bemutatott kísérlet célja ezen kutatási kérdések megválaszolása volt.

Ahogy Agarwal és munkatársai kiemelték: a nemzetközi szakirodalom nem eléggé kiterjedt, további alkalmazott kutatásra van szükség a tesztelés matematikaoktatásba való beemelésével kapcsolatban (Agarwal és mtsai, 2021). Ebben a fejezetben egyrészt azt vizsgáltuk, hogy kimutatható-e az előhívási hatás a hagyományos oktatással szemben komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása esetén elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében. A kísérletet egy tényleges oktatási környezetben – egyetemi számelmélet kurzuson – végeztük el komplex, magas szintű matematika tananyag felhasználásával. A szakirodalomban találunk példát olyan kísérletekre, ahol komplex, deduktív következtetéseket igénylő feladatok tanulása esetében az előhívási hatást nem sikerült kimutatni (Tran és mtsai, 2015; Leahy és mtsai, 2015). Ezzel szemben a saját eredményeink azt mutatják, hogy az előhívásos tanulás jelentős előnnyel rendelkezik a hagyományos tanuláshoz képest komplex matematikai problémák megoldása esetén is. Kísérletünkben a kísérleti csoport és a kontrollcsoport tanulási folyamata szinkronban volt egymással: a két csoport ugyanazokkal a fogalmakkal, ugyanazokkal a tételekkel és pontosan ugyanazokkal a feladatokkal ismerkedett meg a félév során. A diákok a félév elején írtak egy szintfelmérő dolgozatot, amely a diákok aktuális matematika tudásának, kompetenciájának felmérésére szolgált. Ezt a dolgozatot tekintettük bemeneti tesztnek. A hallgatók a kezelés végén – a szemeszter tizenharmadik hetében – pedig írtak egy öt feladtból álló dolgozatot. Ezen a dolgozaton a kísérleti csoport szignifikánsan jobban szerepelt amellet, hogy a félév elején ez a csoport rosszabb eredményt ért el a bemeneti teszten. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok a félévvégi dolgozaton jobb eredményt értek el, mint a hagyományos módon tanuló társaik, azaz kimutatható volt az előhívási hatás középtávon komplex matematika feladatok – számelmélet feladatok – megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében.

A kutatásban azt is megvizsgáltuk, hogy vajon az előhívási hatás egyéni különbségektől függetlenül kimutatható-e komplex matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása esetében. A szakirodalom látszólag ellentmondásos ebben a témában. Carpenter és munkatársai (2016) a tesztelési hatást csak átlagon felüli tanulóknál figyelték meg, míg Orr és Foster (2013) átlag alatti, átlagos és átlagon felüli tanulóknál egyaránt azonosították. Véleményünk szerint a két kísérlet eredményei közötti jelentős különbséget az okozhatja,

hogy míg Carpenter és munkatársai (2016) csak a kurzus befejezése után csoportosította a résztvevőket a diákok teljesítménye alapján, addig Orr és Foster (2013) a kísérlet elején, az első három teszt eredménye alapján hasonlította össze őket. A saját vizsgálatunkban a kurzus megkezdése előtt – ahogyan azt korábban is említettük – a diákok egy szintfelmérő dolgozatot írtak az aktuális matematika tudásuk, kompetenciájuk felmérése érdekében. A szintfelmérő teszt eredményei alapján a diákokat átlag alatti, átlagos és átlagon felüli képességű csoportokra osztottuk. Eredményeink megerősítik Orr és Foster (2013) eredményeit; az előhívási hatás mindhárom kategórián belül, az egyéni matematikai kompetenciától függetlenül kimutatható volt elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében.

A különböző matematikai képességekkel rendelkező tanulók esetében alkalmazandó előhívásos tanulás legjobb módjának megtalálása nyitott és érdekes kérdés. Gyanítjuk, hogy a matematikai képességek és az óravégi teszt megtervezése – a kérdések nehézsége és formája – valamilyen módon összefügg a tanulók előrehaladásának ütemével. Kutatásunk során azt találtuk, hogy az általunk alkalmazott előhívásos tanulás hatékony módja lehet a magasabb matematika tanulásának, a problémamegoldási képesség fejlesztésének, amelyet a tanárok viszonylag könnyen beépíthetnek az óra menetébe. Eredményeink azt mutatják, hogy a módszer mind átlag alatti, átlagos és átlag feletti matematikai kompetenciával, tudással rendelkező diákok számára hasznos lehet.

## **5.3. Kísérlet – a módszer hosszútávú hatása számelmélet feladatok tanulása esetén**

### **5.3.1. A kutatás célja**

Általános tapasztalat, hogy az egyetemi hallgatók jelentős része olyan tanulási stratégiákat alkalmaz, amelyek nem alkalmasak a hosszútávú tudás kialakítására. Ahogyan azt a bevezetőben említettük, hatékony tanulási technikák alkalmazása nélkül a diákok elfelejtik a megtanult anyag jelentős részét a vizsgát követő néhány napon belül. Matematika tanulása, tanítása esetén, ahol a korábban tanultakra nagy mértékben építünk, a hosszútávú tudás kialakítása kulcsfontosságú (Hopkins és mtsai, 2016). Hipotézisünk szerint a hosszútávú tudás kialakításának egy lehetséges eszköze az előhívásos tanulás.

Az előző kísérletben az előhívásos tanulás egyetemi matematika kurzusba való beépíthetőségét, annak középtávú, szemeszteren belüli hatásait vizsgáltuk. Ebben a kutatásban az volt a célunk, hogy megvizsgáljuk az előhívásos tanulás egy formájának szemeszteren átívelő, hosszútávú hatását komplex matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben. A hosszútávú tudást egy utóteszt segítségével, három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően mértük fel. Kísérletünk bizonyos szempontból az előző, az 5.2. fejezetben bemutatott kísérlet folytatása. Az ebben a fejezetben bemutatott kísérlet résztvevőinek halmaza az 5.2. fejezetben leírt kísérlet résztvevőinek egy részhalmazát képezi, a résztvevők elsőéves matematika tanárszakos hallgatók voltak. A bemutatott kísérlet tényleges oktatási környezetben vizsgálja az előző fejezetben leírt előhívásos módszer hosszútávú hatásait a hagyományos oktatással szemben az elsőéves számelmélet tananyag felhasználásával.

### **5.3.2. A kísérlet résztvevői**

A kísérletben az Eötvös Loránd Tudományegyetem azon matematika tanárszakos hallgatói vettek részt, akik a 2017/18-as tanév őszi félévében felvették és elvégezték az Algebra és Számelmélet 1. című kötelező tantárgyat. Összesen 114 hallgató vett részt a kurzuson. Életkoruk 18 és 23 év között volt. A 114 hallgató közül összesen 79-en végezték el a kurzust, közülük 68 tanuló írta meg a hosszútávú tudás mérésére szolgáló utótesztet. A 68 hallgatóból 49-en írták meg a 2017/18-as tanév kezdetekor, az egyetemre való beérkezésükkor a bementei tesztet. Az adatok elemzésekor kizártuk azt a 3 hallgatót, akik nem vették komolyan az

utótesztet, üresen adták be az utódolgozatukat. Kizártunk továbbá 4 kiváló hallgatót, akik mind a bemeneti teszten, mind az utóteszten és a félév során a félévvégi dolgozaton is 90% feletti eredményt értek el. Az ő tesztpontszámuk figyelembevétele a statisztikában hamis eredményt adott volna. Ők a tesztelés hatásától függetlenül is jól teljesítettek. Ebben a kísérletben a fennmaradó 42 hallgató teszteredményeit elemeztük. A 42 értékelendő hallgatóból 21 hallgató tanulta előhívásos módszerrel az Algebra és Számelmélet 1. tárgyat, 21 hallgató pedig hagyományosan. Ebben a kutatásban az ő eredményeiket vizsgáltuk.

### **5.3.3. Kísérleti elrendezés, a módszer leírása, a tananyag**

Ahogy az korábban említettem, jelen kísérlet bizonyos szempontból az előző, az 5.2. fejezetben bemutatott kísérlet folytatása. Az ebben a kísérletben alkalmazott kísérleti elrendezés, módszer és tananyag megegyezik az 5.2.3. és az 5.2.4. fejezetekben bemutatottakkal, így a kísérlet leírásának ezen részét itt nem részletezem. Lényegi különbség azonban az előző kísérlethez képest, hogy itt a 72 hallgató helyett 42 tanuló eredményeit értékeltük. A 42 értékelendő hallgatóból 21 hallgató tanulta előhívásos módszerrel az Algebra és Számelmélet 1. tárgyat, 21 hallgató pedig hagyományosan. A diákok tananyaghoz kapcsolódó hosszútávú tudását, problémamegoldó képességét egy „meglepetés utóteszt” segítségével mértük fel három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozat megírását követően. Meglepetés teszt alatt itt azt értjük, hogy bár a diákok számítottak arra, hogy dolgozatot fognak írni, azt nem tudták, hogy a dolgozat során az előző félév anyagához kapcsolódóan kapnak kérdéseket, ezt a diákoknak nem jelentettük be előre. A bejelentett tesztek befolyásolhatják a diákok motivációját, teszten nyújtott teljesítményét, mivel a közelgő teszt ismerete gyakran arra készteti a diákokat, hogy arra készüljenek, tanuljanak (Roediger és Karpicke, 2006). Ezt a helyzetet elkerülendő döntöttünk a „meglepetés teszt” mellett. Az utóteszt megírásába minden résztvevő beleegyezett. Az utóteszten nyújtott gyenge teljesítmény semmilyen negatív következménnyel nem járt.

### **5.3.4. Mérőeszközök**

A hallgatók hosszútávú számelmélet tudásának, problémamegoldó képességének mérése érdekében a diákok két alkalommal írtak tesztet: a félév elején, az Algebra és Számelmélet 1. kurzus kezdete előtt és a következő félévben a kurzus befejezte után, három hónappal a kurzushoz kapcsolódó zárthelyi dolgozat megírását követően.

Ahogy az 5.2.5. fejezetben említettük, a hallgatók a szemeszter elején egy szintfelmérő dolgozatot írtak, az ELTE kritériumdolgozatát. Ez a szintfelmérő bemeneti tesztként, egyfajta viszonyítási pontként szolgált. Az adott hallgató ezen a dolgozaton nyújtott teljesítményét tekintettük bemeneti matematika tudásnak, bemeneti matematikai kompetenciának.

A kurzust sikeresen elvégző hallgatók három hónappal a kurzushoz tartozó félévvégi zárthelyi dolgozat megírása után egy utótesztet írtak. A dolgozat négy összetett számelmélet feladatból állt, amelyet a hallgatóknak 20 perc alatt kellett megoldaniuk. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszközt nem lehetett használni. Ezek a feladatok nagyban hasonlítottak a félévvégi zárthelyi dolgozatban kért feladatokra és az értékelésük is hasonlóképpen történt. Hibátlan megoldásért feladatonként 6-6 pontot szerezhettek a diákok. Részmegoldásokra szintén lehetett pontot szerezni. A dolgozatokat a gyakorlatvezetők javították ki az előadó által írt részletes pontozási útmutató szerint, ami tartalmazta a részpontoszámokat, a leggyakoribb hibák értékelését és a javítással kapcsolatos általános irányelveket. Végül az előadó az összes dolgozat javítását felülvizsgálta. Az alábbiakban bemutatom a dolgozat feladatait, és azokat röviden elemzem.

1. Feladat: Határozzuk meg a  $2346235^{226688442}$  szám 23-mal vett maradékát.

A feladat ésszerű megoldásához szükség van a kurzuson tanult egyik fontosabb tétel alkalmazására, az Euler-Fermat tétel használatára. A kurzuson tanult feladatmegoldási algoritmus szerint az alapot, azaz a 2346235-öt modulo 23, a kitevőt pedig modulo  $\varphi(23)$  kell venni. Mivel a 23 prímszám,  $\varphi(23) = 22$ . Első ránézésre talán úgy tűnik, hogy számológép használata nélkül csak viszonylag lassan tudjuk megtalálni a maradékokat. Mivel az utóteszt megírására a diákoknak csak 20 percük volt, nem volt idejük a maradékos osztás használatára. Azonban ha figyelmesen megnézzük a feladatban szereplő számokat azt látjuk, hogy erre valójában nincs is szükség, hiszen 23-mal illetve 22-vel osztható számpárokat tudunk képezni az alapan illetve a kitevőben található számjegyekből, tehát a maradékos osztás gyorsan elvégezhető.

2. Feladat: Határozzuk meg a  $3x^{16} - 4y^{48} + 17z^{2012} = 34172$  egyenlet összes megoldását az egész számok körében.

Ez a feladat a négy feladat közül a legösszetettebb. A megoldás több különböző típusú stratégia alkalmazását és különböző fogalmak, tételek megértését, alkalmazását igényli egyszerre. A diákok számos „trükköt” tanultak az Algebra és Számelmélet 1. kurzuson magasabb fokú diofantikus egyenletek kezelésére. Ebben az esetben a kulcs lépés a megfelelő prím modulus megtalálása. A megfelelő  $p$  prímszámra modulo  $p$  véve az egyenletet, ellentmondásra jutunk. Ez a probléma rutinfeladat, ha már kellő alkalommal találkoztunk ilyen típusú feladatokkal, azonban ebben a környezetben ez egy meglehetősen trükkös feladatnak számít.

3. Feladat: Mely  $a, b$  számjegyekre lesz a  $\overline{a97531ba}$  szám osztható 55-tel?

Ennek a feladatnak a megoldásához tudni kell, hogy egy szám pontosan akkor osztható 55-tel, ha 5-tel és 11-gyel is osztható, és ismerni kell az 5-tel és a 11-gyel való oszthatóság szabályait. Mivel a szám osztható 5-tel,  $a = 0$  vagy  $a = 5$ . Tudjuk, hogy a  $\overline{a97531ba}$  szám 11-gyel is osztható, így a számjegyek váltakozó összegét véve  $b$  megadható. Bár ez középiskolai tudás, meglepő módon elég kevés hallgató szerepelt jól ezen a feladaton, sokan alacsony pontszámot kaptak erre a feladatra.

4. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert:

$$2x \equiv 8 \pmod{14}$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}.$$

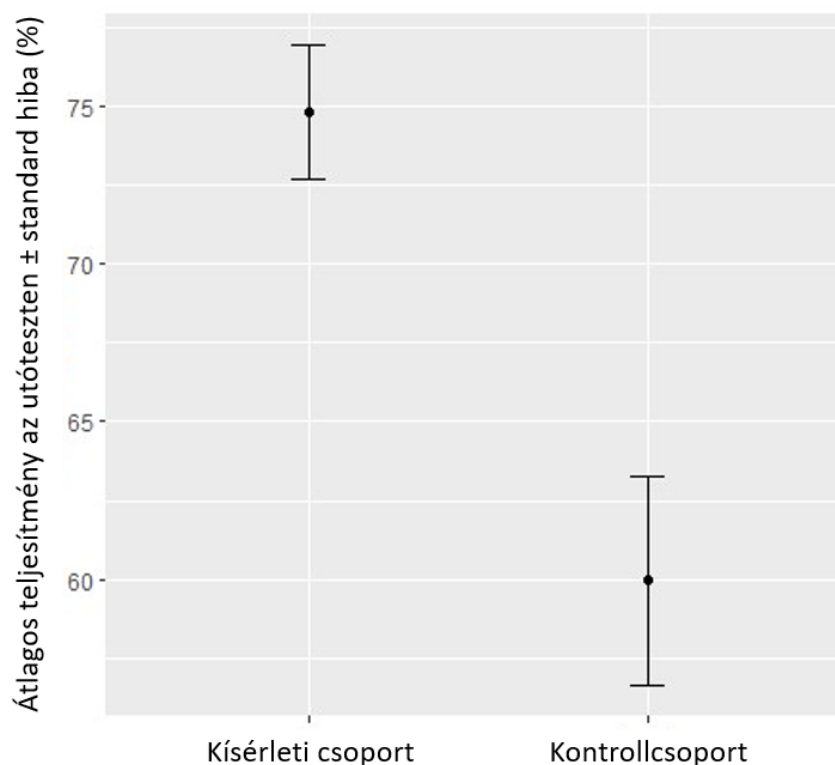
Bár ez a feladat mindig megoldható ugyanazzal a módszerrel, a standard megoldás viszonylag időigényes. Tekintettel arra, hogy a diákoknak csak 20 percük volt a négy feladat elvégzésére, érdemes volt egy gyorsabb, trükkösebb eljárásához folyamodni. Egy lehetséges „gyorsabb” út, ha első lépésként a  $2x \equiv 8 \pmod{14}$ -et redukáljuk  $x \equiv 4 \pmod{7}$ -re. Ezek után megfigyelhetjük, hogy a 18 megfelel a feladat feltételeinek, majd a kínai maradéktételre hivatkozva láthatjuk, hogy a 18 az egyetlen megoldás modulo 77.

### 5.3.5. Eredmények

Ebben a kutatásban 42 hallgató teszteredményeit elemeztük. A 42 hallgató közül 21 fő tartozott a kísérleti csoportba és ugyancsak 21 fő a kontrollcsoportba. Az adatelemzést az R 4.2.3 szoftver segítségével végeztük. A statisztikai jelölésekhez tartozó jelmagyarázat a Függelékben található.

A bemeneti szintfelmérő dolgozaton elérhető maximális pontszám 100 pont volt. A bemeneti teszt eredményeinek elemzésekor azt találtuk, hogy a reziduálisok normális eloszlást mutattak, azonban a két csoport varianciája különbözött (az átlagpontszáma a kísérleti csoportnak  $M = 58,9$ ;  $SD = 21,1$ ; a kontrollcsoportnak  $M = 69,2$ ;  $SD = 11,0$  volt), így Welch-próbát alkalmaztunk. A teszt azt mutatta, hogy a két csoport között nem volt különbség a bemeneti teszten, az Algebra és Számelmélet 1. kurzus kezdetén ( $t(31,5) = 1,99$ ;  $p = 0,11$ ;  $d = 0,60$ ).

Ezek után megvizsgáltuk az utóteszt eredményeit. Az utóteszten elérhető maximális pontszám 24 pont volt. A pontszámokat átszámítottuk százalékba. A reziduálisok normális eloszlást mutattak, azonban a varianciák az F-teszt alapján különböztek a két csoportban ( $p = 0,008$ ), ezért a Welch-próbát alkalmaztuk. Az utóteszten a két csoport teljesítménye között szignifikáns különbség volt ( $t(43,4) = 3,15$ ;  $p < 0,001$ ;  $d = 0,88$ ). A kísérleti csoport átlagosan 75 százalékot ért el, míg a kontrollcsoport 60 százalékot. A két csoport utóteszten elért átlagos teljesítménye százalékba átszámítva az 5. ábrán látható. Az 5. táblázatban a két csoport bemeneti teszten és az utóteszten nyújtott átlagos teljesítménye található.



**5. Ábra** A kísérleti és a kontrollcsoport utóteszten nyújtott teljesítménye.  
(Az ábrát az R 4.2.3 program segítségével nyertük.)

## 5. Táblázat

*A kísérleti csoportnak és a kontrollcsoportnak a bemeneti teszten és az utóteszten nyújtott átlagos teljesítménye.*

	Bemeneti teszt	Utóteszt
Kísérleti csoport (előhívásos módszer)	58,9 %	75,0 %
Kontrollcsoport (hagyományos módszer)	69,2 %	60,0 %

### 5.3.6. Válasz a K3 kutatási kérdésre, diszkusszió

Az 5.3. fejezetben a K3 kutatási kérdésre fókuszáltam. A fejezetben bemutatott kísérlet célja ezen kutatási kérdés megválaszolása.

Az előző kísérletben kimutattuk, hogy az előhívásos módszer beépíthető az egyetemi matematikaoktatásba és a módszer középtávon hatékonyabbnak bizonyult a hagyományos oktatással szemben komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása esetében. Ebben a kísérletben azt vizsgáltuk, hogy vajon hosszútávon is kimutatható-e az előhívásos módszer jótékony hatása. A kísérletet egy tényleges oktatási környezetben – egyetemi számelmélet kurzuson – végeztük el komplex, magas szintű matematika tananyag felhasználásával. Kísérletünkben a kísérleti csoport és a kontrollcsoport ugyanarra az előadásra járt, ugyanazokkal a fogalmakkal, ugyanazokkal a tételekkel és pontosan ugyanazokkal a feladatokkal ismerkedett meg a félév során. A két csoport azonban különböző kezelést kapott 13 héten át a gyakorlati órákon: míg a kontrollcsoport a gyakorlati órák elején írt egy rövid tesztet az előző heti elméleti anyaghoz kapcsolódóan, ahogyan az ezen a tárgyon hagyományosan szokás, a kísérleti csoportnál a teszt az óra végén volt, az aznapi gyakorlat anyagához kapcsolódóan. Az óra végi tesztek célja az aznap tanultak előhívása volt. Az óra végi előhívások alkalmával – hasonlóan Lyle és Crawford (2011) vizsgálatához – a diákoknak a gyakorlat során megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat kellett megoldaniuk. Az óra végi teszt két feladatból állt, amiket a kísérleti csoport tagjainak egyénileg, segítség nélkül kellett megoldaniuk. A két csoport a félév elején írt egy bemeneti tesztet, amely a hallgatók aktuális matematika tudását, kompetenciáját célozta felmérni. A kezelés végét követően három hónappal a hallgatók szintén írtak egy tesztet. Ez az utóteszt a félévvégi zárthelyi dolgozat időpontjához képest három hónappal később volt. Az utódolgozat négy feladatból állt. A dolgozat feladatai hasonlítottak a félévvégi zárthelyi dolgozat feladataira. A bemeneti teszt eredményei alapján a kísérleti és a kontrollcsoport nem különbözött egymástól, azonban az utóteszten a kísérleti csoport szignifikánsan jobban

szerepelt a kontrollcsoportnál. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozat megírása után jobb eredményt értek el az utóteszten, mint a hagyományos módon tanuló társaik, azaz kimutatható volt az előhívási hatás hosszútávon, komplex számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben. Ez az eredmény arra hívja fel a figyelmet, hogy a hosszabb távú tudás kialakítása érdekében az előhívásos tanulást érdemes lehet beépíteni az egyetemi matematikakurzusokba. Eredményeink azt sugallják, hogy az előhívásos módszer hosszútávú hatással van a tanulásra és az összetett matematikai problémák megoldására a magasabb szintű matematika terén is.

## **6. Az előhívásos tanulás szerepe az absztrakt algebra tanulásában**

Ebben a fejezetben a 4. fejezetben bemutatott előhívásos tanulási módszert, annak közép- és hosszútávú hatását vizsgálom a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet 2. kurzus keretein belül. A fejezetben bemutatott kutatások alapját a (Muzsnay és mtsai, bírálókat alatt) publikáció képezi. A kutatás az előhívásos módszer középtávú, félévközi és hosszútávú, egy teljes szemeszteren átívelő hatását vizsgálja az absztrakt algebra tanulása esetén.

### **6.1. Kutatási kérdések**

Ebben a fejezetben az alábbi kutatási kérdésekre keresem a választ:

K4: Kimutatható-e az előhívási hatás középtávon – a félévközi és félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex absztrakt matematika feladatok (algebra feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében?

K5: Kimutatható-e az előhívási hatás hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – komplex absztrakt matematika feladatok (algebra feladatok) megoldási eljárásának tanulása során a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatók körében?

K6: Milyen mértékben felejtik el a matematika tanárszakos hallgatók hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – az absztrakt algebrát (polinomok témakört) amennyiben előhívásos, vagy a „kidolgozott példák mutatása” módszerrel tanulnak?

## **6.2. Kísérlet – a módszer közép- és hosszútávú hatása absztrakt algebra feladatok tanulása esetén**

### **6.2.1. A kutatás célja**

Ebben a kutatásban azt vizsgáltuk, hogy egy, az előző fejezetben (5. fejezet) bemutatott számelmélet tananyagnál absztraktabb környezetben is kimutatható-e az előhívásos módszer hatása. Ahogyan azt korábban említettem, vannak olyan kísérletek, ahol a tesztelési hatás bizonyítása vagy nem sikerült, vagy ellentmondásos eredményeket hozott. Bár az előző fejezetben bemutatott kísérleteink eredményei abba az irányba mutatnak, hogy az előhívási hatáson alapuló tanulást absztraktabb matematika tananyag tanulása, komplex feladatok megoldása esetén is érdemes alkalmazni, a szakirodalom alapján nem egyértelmű, hogy az előhívási hatás általánosan kimutatható-e komplex témakörök (Gog és Sweller, 2015) és deduktív következtetéseket igénylő feladatok esetén (Tran, Rohrer és Pashler 2015). Az ebben a fejezetben tárgyalt kísérletben szereplő matematika feladatok megoldásához kifejezetten fejlett deduktív gondolkodási és problémamegoldó képesség szükséges, a mérésül szolgáló feladatok pedig igen összetettek. Jelen kutatás tényleges oktatási környezetben vizsgálja az előhívásos tanulást egy matematika tanárszakos hallgatóknak szóló második féléves kötelező kurzus keretein belül, az Algebra és Számelmélet 2. című kurzuson. A kurzus gyakorlati részét a hallgatók egy része a kidolgozott példák módszerével, másik része pedig előhívásos módszerrel, a tananyag egy alkalommal, közvetlenül a tanulás után történő felidézésével tanulta (lásd 4. fejezet). Az ebben a fejezetben bemutatott kísérlet a két csoport hallgatóinak teljesítményét hasonlítja össze, a leendő matematikatanárok tudására és problémamegoldó készségére koncentrálunk. Az egyetemi algebra és számelmélet kurzusok óriási szerepet játszanak a hallgatók absztrakciós képességének fejlesztésében, a matematika és a természettudományok különböző részein belüli kapcsolatok kialakításában, valamint a fogalmak mélyebb megértésében, például a formális számítások, az algebrai struktúrák bemutatása és viselkedésük megértése terén. Úgy gondoljuk, hogy az algebra magasabb szintű megértése elengedhetetlen a matematikatanárok számára. Számos tanulmány azonban kimutatta, hogy a tanulóknak nehézséget okoz az absztrakt algebra elsajátítása (Veith és mtsai, 2022; Agustyaningrun és mtsai, 2021; Wasserman, 2018). Még ha a diákok át is mennek a vizsgán, később nehezen emlékeznek a tanultakra. Ebben a kutatásban célunk volt megvizsgálni, hogy a 4. fejezetben bemutatott előhívásos módszer segít-e a megértést és a hosszútávú tudás kialakítását az absztrakt matematika terén. Kérdés, hogy vajon kimutatható-

e az előhívási hatás középtávon, illetve hosszútávon komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása esetén a kidolgozott példák módszerével szemben.

### **6.2.2. A kísérlet résztvevői, kísérleti elrendezés**

A fejezetben bemutatott kísérlet két részből áll. Az első részben a módszer középtávú hatását vizsgáljuk egy egyetemi absztrakt algebra kurzuson, míg a második részben a módszer hosszútávú hatásra összpontosítunk.

A kísérlet első részét a 2017/2018-as tanév tavaszi félévében végeztük, a kísérlet résztvevői az Eötvös Loránd Tudományegyetem azon matematika tanárszakos hallgatói voltak, akik felvették az Algebra és Számelmélet 2. című kötelező tantárgyat. Tehát a résztvevők olyan hallgatók voltak, akik már egy félévet eltöltöttek az egyetemen. Összesen 76 hallgató vett részt a vizsgálatban.

Az Algebra és Számelmélet 2. kurzus heti egy 90 perces előadásból és egy 90 perces gyakorlatból állt 13 héten keresztül. Az előadásokon az összes hallgató együtt vett részt, míg a gyakorlatokon a hallgatók csoportokra voltak bontva. Minden hallgató ugyanazokkal a fogalmakkal, tételekkel ismerkedett meg és ugyanazokat a problématípusokat oldotta meg a gyakorlati foglalkozások alkalmával. Az egyes gyakorlati csoportok létszáma körülbelül 15 fő volt. A hat gyakorlati csoport közül hármat a kísérleti, hármat pedig a kontrollcsoportba osztottunk be. Így a 76 értékelendő hallgatóból 39 került a kísérleti csoportba, 37 pedig a kontrollcsoportba. A kísérleti csoport előhívásos módon tanult a gyakorlatokon, a kontrollcsoport pedig a kidolgozott példák módszerével (ld.: 4. fejezet). A tanári hatást igyekeztünk a lehető legjobban kiküszöbölni: mind a kísérleti, mind a kontrollcsoportban egy-egy tapasztaltabb tanár, egy-egy doktorandusz hallgató és egy-egy demonstrátor tartotta a gyakorlatokat. Emellett a gyakorlati csoportok tanárai rendszeresen konzultáltak egymással, megvitatták a kurzussal kapcsolatos főbb kérdéseket.

A kísérlet második részét a 2018/2019-es tanév őszi félévében végeztük. A kísérlet résztvevői az Eötvös Loránd Tudományegyetem azon matematika tanárszakos hallgatói voltak, akik felvették az Algebra és Számelmélet 3. című kötelező tantárgyat és részt vettek a kísérlet első felében. A tanárképzésben az Algebra és Számelmélet 3. kurzus tanterv szerint a harmadik vagy az ötödik félévben vehető fel. A kísérlet résztvevői azok a tanárszakos hallgatók voltak, akik az Algebra és Számelmélet 3. kurzust a harmadik félévben, a 2017/18-as tanév második félévében vették fel, és részt vettek a vizsgálat első részében. Ez összesen 33 hallgatót

jelentett. Azok, akik nem végezték el az Algebra és Számelmélet 2-t, vagy elvégezték, viszont az Algebra és Számelmélet 3. idején más órájuk volt, nem vettek részt a kísérlet ezen részében. A 33 kísérletben résztvevő hallgató közül 13 hallgató tanulta korábban az Algebra és Számelmélet 2. tárgyat előhívásos módszerrel, őket tekintjük a kísérleti csoportnak. A többi 20 hallgató a kidolgozott példák bemutatása módszerrel tanulta korábban az Algebra és Számelmélet 2. tárgyat, őket nevezzük kontrollcsoportnak. A kísérletnek ebben a szakaszában a két módszer hosszútávú hatását vizsgáltuk. A hosszútávú hatást utóteszt segítségével mértük fel, öt hónappal később, mint ahogy a hallgatók az Algebra és Számelmélet 2. tananyaghoz kapcsolódó félévvégi dolgozatot megírták. A diákokat tájékoztattuk arról, hogy tesztet fognak írni az addig tanultakból, azonban arra számítottak, hogy csak az Algebra és Számelmélet 3. tananyagához kapcsolódóan kérdezzük őket, az Algebra és Számelmélet 2-ben tanultakról nem. Az utótesztet a diákoknak előzetesen explicit nem jelentettük be, nem szeretttük volna, hogy a közlő teszt ismerete befolyásolja a diákok utóteszten nyújtott teljesítményét (Roediger és Karpicke, 2006). Az utóteszten az Algebra és Számelmélet 2. tananyaghoz kapcsolódó tudást, problémamegoldó képességet mértük fel. Minden résztvevő beleegyezett az utóteszt megírásába és a teszten nyújtott gyenge teljesítmény semmilyen negatív következménnyel nem járt.

### 6.2.3. Tananyag

Az Algebra és számelmélet 2. tantárgy által lefedett témakörök leírása a függelékben található. A kísérletben vizsgált témakörök a kurzuson bemutatott témák egy részhalmazát foglalták magukban. Nevezetesen az alábbi témakörökre fókuszáltunk:

- Polinomok. Kommutatív, egységelemes gyűrű fölötti polinom mint formális kifejezés. Polinomok egyenlősége, együtthatói, főegyütthatója, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Nem nullapolinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. A polinomok gyűrűje, nullosztómentesség.
- A polinomfüggvény fogalma, polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. A gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele. Végtelen nullosztómentes gyűrű fölött a polinomfüggvények és a polinomok kapcsolata kölcsönösen egyértelmű, de véges gyűrű fölött nem. Az algebra alaptétele (bizonyítás nélkül): komplex számtest fölött minden nem konstans polinomnak van gyöke. Gyök multiplicitása. Egy  $n$ -edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitásokkal számolva pontosan  $n$  komplex gyöke van. A többszörös gyökök és a formális derivált

kapcsolata tetszőleges test fölött. A racionális gyökteszt. A Lagrange- és a Newton-interpoláció.

- A gyökök és együtthatók összefüggése. Fok, homogén polinom, lexikografikus rendezés. A szimmetrikus polinomok alaptétele, egyértelműség. Hatványösszegek.
- A polinomok számelmélete. Számelméleti fogalmak gyűrűben: oszthatóság, egység, asszociált, irreducibilis (más néven felbonthatatlan), prímtulajdonságú elem, kitüntetett közös osztó és többszörös, ezek egyértelműsége, képletük alaptételes gyűrűben. A polinomgyűrű egységei. Minden olyan polinommal lehet maradékosan osztani, amelynek a főegyütthatója egység. A maradékos osztás egyértelmű. Az euklideszi algoritmus, az irreducibilis és prím elemek kapcsolata. A számelmélet alaptétele érvényes tetszőleges test fölötti polinomok gyűrűjében, az egész számok számelméletének mintájára.
- Test fölött az irreducibilis polinomok azok a nem konstans polinomok, melyek nem bonthatók alacsonyabb fokúak szorzatára. Minden elsőfokú polinom irreducibilis; a másod- és harmadfokúak pontosan akkor irreducibilisek, ha nincs az alaptestben gyökük. Ha egy legalább másodfokú polinomnak van az alaptestben gyöke, akkor nem irreducibilis (de ha nincs gyöke, lehet reducibilis). Az irreducibilis polinomok a komplex számtest fölött az elsőfokúak. Egy valós együtthatós polinomnak minden komplex szám ugyanannyiszoros gyöke, mint a konjugáltja. Minden páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke. A valós számtest fölötti irreducibilis polinomok leírása.
- A Schönemann-Eisenstein-kritérium a racionális számok teste fölötti irreducibilitásra. Következmény: a racionális számtest fölött akárhányadfokú irreducibilis polinom létezik. Polinomok  $\mathbb{Z}$  felett és  $\mathbb{Z}_p$  felett. A körosztási polinom; rekurzív képlete, kiszámítása. A körosztási polinom irreducibilis. További módszerek az irreducibilitás eldöntésére. Gauss-lemma, az irreducibilis polinomok jellemzése az egész együtthatós polinomok gyűrűjében, itt is érvényes a számelmélet alaptétele. Általánosítás: alaptételes gyűrű fölötti polinomgyűrű is alaptételes. Alaptétel a többhatározatlanú polinomok között

#### 6.2.4. MÉRŐESZKÖZÖK

A kísérlet első felében a hallgatók két dolgozatot írtak: egyet a szemeszter hatodik hetében és egyet a szemeszter tizenharmadik hetében. Ebben a kísérletben a diákok polinomokkal kapcsolatos ismereteire koncentráltunk. Az első teszt – amelyet a diákok a hatodik héten írtak – hét feladatból állt. A hét feladatból három feladat kapcsolódott a polinomok témaköréhez (Függelék). A második tesztben – amelyet a szemeszter tizenharmadik hetében írtak – öt feladatot kérdeztünk a diákoktól és mind az öt kérdés a polinomokra vonatkozott (Függelék).

A kísérlet második részében arra voltunk kíváncsiak, hogy a tanulók milyen hosszútávú ismeretekkel rendelkeznek a polinomokkal kapcsolatban. A hosszútávú tudás mérése érdekében a diákok öt hónappal a második tesztet, azaz a félévvégi dolgozatot követően egy utótesztet írtak, amely három feladatból állt (Függelék). Az utóteszten a félévközi dolgozatok feladataihoz hasonló feladatokat kérdeztünk.

A dolgozat értékelése a következőképpen történt: mind az évközi, mind az utóteszteken hibátlan megoldásért feladatonként 6-6 pontot szerezhettek a diákok. Részmegoldásokra szintén lehetett pontot szerezni. Az adott csoport dolgozatait a gyakorlatvezetők javították ki az előadó által írt részletes pontozási útmutató szerint, ami tartalmazta a részpontoszámokat, a leggyakoribb hibák értékelését és a javítással kapcsolatos általános irányelveket. Végül az előadó az összes dolgozat javítását felülvizsgálta. A dolgozat írása során a hallgatók semmilyen segédeszközt nem használhattak.

Az alábbiakban bemutatok néhányat az Algebra és Számelmélet 2. kurzus során bemutatott legfontosabb polinomokkal kapcsolatos problémák közül. Ezen feladatok mindegyike komplexnek tekinthető. Van Gog és Sweller definíciója alapján egy feladatot akkor tekintünk "komplexnek", ha *"magas az elemek közti interakció; a komplex anyag különböző információs elemeket tartalmaz, amelyek kapcsolatban állnak egymással, és ezért egyszerre kell feldolgozni őket a munkamemóriában"* (Gog és Sweller, 2015, 248. o.). A dolgozatokban és az utódolgozatban található feladatok jelentős része magasabb fokú polinomok különböző algebrai struktúrák (például  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{C}$ ) fölötti felbontására vagy redukálhatóságára kérdez rá. Az évközi dolgozatok és az utóteszt az alábbiakhoz hasonló feladatokat tartalmazott. Ha megnézzük ezeket a feladatokat, látható, hogy bár a szövegezésük hasonló, mindegyik probléma más-más megközelítést igényel, és több irányból is meg lehet támadni az egyes feladatokat. Több tanult eljárás és „trükk” közül ki kell választani a feladat szempontjából relevánsakat és azokat megfelelő módon kell kombinálni. Egy kezdeti trükk kiválasztása és

alkalmazása után szinte minden esetben kapunk egy alacsonyabb fokú polinomot, amit további polinomok szorzatára bonthatunk, és így tovább.

1. Feladat: Bontsuk föl  $\mathbb{Z}_2$  fölött az  $x^{16} + x^{12} + x^8 + 1$  polinomot irreducibilis polinomok szorzatára!

A feladat megoldásával kapcsolatban egy kulcs észrevétel, hogy  $\mathbb{Z}_2$  fölött teljesül a „középiskolás álma”, azaz  $\mathbb{Z}_2$  fölött  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ . Ezt az észrevételt egymás után többször alkalmazva át tudjuk írni a polinomot az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x^{16} + x^{12} + x^8 + 1 &= (x^8 + x^6)^2 + (x^4 + 1)^2 = (x^8 + x^6 + x^4 + 1)^2 = \\ &= [(x^4 + x^3)^2 + (x^2 + 1)^2]^2 = [(x^4 + x^3 + x^2 + 1)^2]^2 = (x^4 + x^3 + x^2 + 1)^4 \end{aligned}$$

Azaz  $x^{16} + x^{12} + x^8 + 1 = (x^4 + x^3 + x^2 + 1)^4$ . Sajnos a diákok jelentős része ennél a lépésnél megáll, nem vizsgálja tovább az  $x^4 + x^3 + x^2 + 1$  polinomot. Ugyanakkor ezen a ponton még nem vagyunk készen a feladat megoldásával, meg kell vizsgálnunk a kapott negyedfokú polinomot. Egy további fontos észrevétel, hogy az 1 gyöke a negyedfokú polinomnak. Az, hogy ezt az észrevételt a diákok megtegyék, az egy reális elvárás volt. A gyakorlatokon többször előfordult olyan gondolatmenet, ami lehetővé tette, hogy az észrevételt a diákok a dolgozaton alkalmazzák. Egyrészt, a gyakorlatokon volt róla szó, hogy  $\mathbb{Z}_2$  felett a lehetséges gyökök 0 és 1, így egyszerűen behelyettesítve mindkét elemet a polinomba leellenőrizhetik, hogy az gyök-e. Másrészt különösen  $\mathbb{Z}_2$  felett visszatérő gondolatmenet volt, hogy az 1 minden olyan polinom gyöke, amelynek páros számú tagja van.

Azaz:

$$x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)$$

Végezetül: egy harmadfokú polinom pontosan akkor felbontható  $\mathbb{Z}_2$  felett, ha van gyöke. Sem a 0, sem az 1 nem gyöke az  $x^3 + x + 1$  polinomnak, azaz a polinom  $\mathbb{Z}_2$  felett irreducibilis. Így a következőt kaptuk:

$$x^{16} + x^{12} + x^8 + 1 = (x + 1)^4(x^3 + x + 1)^4.$$

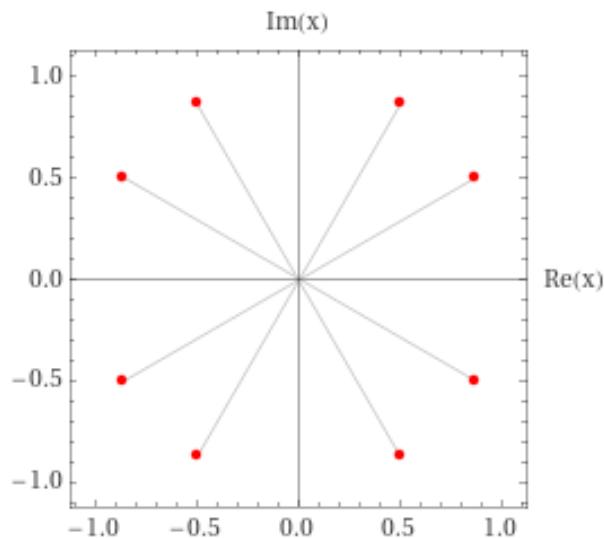
2. Feladat: Bontsuk föl a valós test fölött az  $x^8 + x^4 + 1$  polinomot irreducibilisek szorzatára!

Ennek a feladatnak a megoldásához sok diák úgy kezdett neki, hogy bevezetett egy új ismeretlent:  $y = x^4$ , majd vizsgálta az  $y^2 + y + 1$  polinom gyökeit. Ezek után megkereste a negyedik gyökeit a kapott két komplex gyöknek, majd ezen a ponton általában megálltak a hallgatók:

$$x = \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}.$$

Az a kevés hallgató, aki folytatta a feladat megoldását, az vagy észrevette, hogy pont a harmadik egységgyököknek az algebrai alakjait kaptuk meg, vagy megpróbálta kiszámítani az  $(a + bi)^4$ -t.

Egy másik lehetséges megoldási út, ha észrevesszük (vagy emlékszünk rá), hogy az  $x^8 + x^4 + 1$  polinom tagjai egy mértani sorozat tagjai, azaz  $x^8 + x^4 + 1 = (x^{12} - 1)/(x^4 - 1)$ . Innentől pedig a hányados megfigyelésével és annak algebrai jelentését figyelembe véve láthatjuk, hogy az  $x^8 + x^4 + 1$  polinom gyökei a tizenkettedik egységgyökök, kivéve azokat, amelyek az  $x^4 - 1$  gyökei.



**6. Ábra** Az  $x^8 + x^4 + 1 = (x^{12} - 1)/(x^4 - 1)$  polinom gyökei  
(Az ábra a Wolfram Alpha segítségével készült.)

A nyolc gyök tehát az első, második, negyedik, ötödik, hetedik, nyolcadik, tizedik és tizenegyedik a tizenkettedik egységgyökök közül. A gyökök rendjeit vagy az ábráról leolvassa, vagy alkalmazva a hatvány rendjére vonatkozó formulát  $\omega(\varepsilon^i) = \frac{12}{(12,i)}$  azt kapjuk, hogy a gyökök rendjei: 12; 6; 3; 12; 12; 3; 6; 12.

A probléma megoldásának egy másik, valamivel egyszerűbb módja egy picivel több tudást igényel. Ha a polinomot körosztási polinomok szorzatára bontjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$x^8 + x^4 + 1 = \frac{x^{12} - 1}{x^4 - 1} = \frac{\phi_{12} \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1}{\phi_4 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1} = \phi_{12} \cdot \phi_6 \cdot \phi_3$$

Azaz:

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

3. Feladat: Adjuk meg az  $x^7 - 3x^6 + 125x - 375$  polinom gyöktényezős alakját a komplex számtest fölött!

A polinom minden együtthatója egész szám, így eszünkbe juthat a racionális gyökteszt alkalmazása. Ennek segítségével láthatjuk, hogy a 3 gyöke a polinomnak. Kiemelve az  $x - 3$  gyöktényezőt kapjuk, hogy  $(x^7 - 3x^6 + 125x - 375) = (x - 3)(x^6 + 125)$ . Ezt az alakot akár polinomosztás, akár a Horner-elrendezés segítségével megkaphatjuk. Következő lépésként véve a  $-125$  szám hatodik egységgyökeit, megkapjuk az eredeti polinom további hat gyökét, könnyen vehetjük annak gyöktényezős alakját.

4. Feladat: Számoljuk ki a  $\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_9$  polinomot, ahol  $\phi_n$  az  $n$ -edik körosztási polinomot jelöli!

Egy lehetséges megoldása a feladatnak, hogy kiszámoljuk a  $\phi_{36}, \phi_{18}, \phi_9$  polinomokat, majd összeszorozzuk őket.

$$\phi_9(x) = \frac{x^9 - 1}{x^3 - 1} = x^6 + x^3 + 1$$

$$\phi_{18}(x) = \phi_9(-x) = x^6 - x^3 + 1$$

$$\phi_{36}(x) = \phi_{18}(x^2) = x^{12} - x^6 + 1$$

Ezeknek a polinomoknak az összeszorozása se nem könnyű, se nem nehéz feladat. A szorzás elvégzésének egy elegáns módja a következő összefüggés alkalmazása:

$$(x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) = x^{4n} + x^{2n} + 1.$$

Kétszer alkalmazva a fenti összefüggést azt kapjuk, hogy:

$$\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_9 = x^{24} + x^{12} + 1$$

Egy másik, gyorsabb megoldása a feladatnak arra az összefüggésre épít, hogy  $\phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{d|n, d < n} \phi_d(x)}$ . Átírva az eredeti kifejezést megkapjuk, hogy

$$\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_9 = \frac{\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_9 \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1}{\phi_{12} \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_2 \cdot \phi_1} = \frac{x^{36} - 1}{x^{12} - 1} = x^{24} + x^{12} + 1.$$

A félévközi dolgozatok és az utóteszt mellett a kísérleti csoport minden gyakorlat végén írt egy rövid dolgozatot az adott napon tanult anyaghoz kapcsolódóan. A 6. táblázatban néhány óra végi dolgozat alkalmával feltett kérdésre mutatok példát. A tesztek alkalmával olyan kérdéseket igyekeztünk feltenni, amelyek nem voltak sem túl könnyűek, sem túl nehezek a diákok számára. A feladatok megoldása ugyanazokat az ismereteket és gondolati sémákat követelte meg, mint a félévközi dolgozatok és az utóteszt feladatai, de nem voltak azonosak azokkal.

## 6. Táblázat

*Példák az óra végi tesztkérdésekre.*

1. példa	Fejazzük ki az $a^2bc + ab^2c + abc^2$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok segítségével!
2. példa	Számítsuk ki a $\phi_{68}(x)$ körosztási polinomot!
3. példa	Bontsuk szorzattá az $x^5 - 1$ polinomot $\mathbb{Z}_{11}$ fölött!
4. példa	Igaz-e, hogy a $6x^7 + 52x^5 - 39x^3 + 52$ polinom $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis?
5. példa	Adjuk meg az $x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$ polinom komplex számtest feletti gyökeit és azok rendjeit!
6. példa	$\mathbb{Z}_3$ felett felbontható-e a $2x^3 + x^2 - x + 1$ polinom?

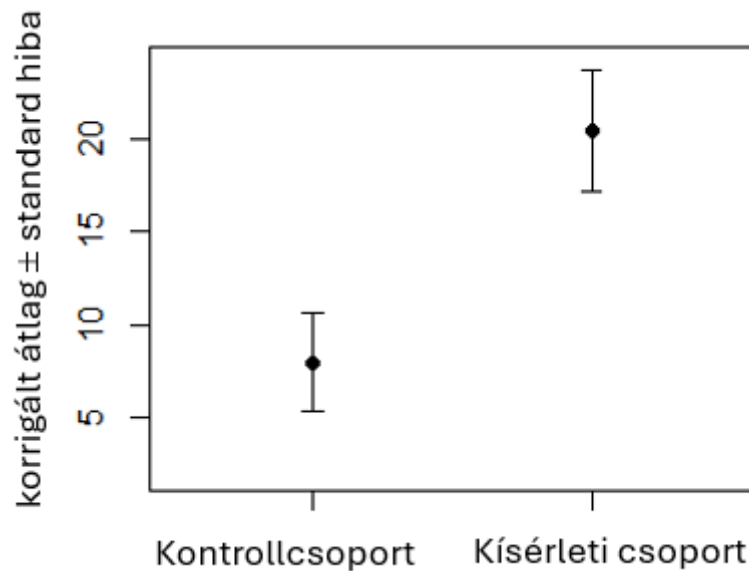
### 6.2.5. Eredmények

A tanulók teljesítményének és fejlődésének mérésére kvantitatív kutatási módszereket alkalmaztunk. A K4 és K5 kutatási kérdések megválaszolásához az adatelemzést az R 4.2.3 szoftverrel végeztük (R Core Team, 2023). A statisztikai jelölésekhez tartozó jelmagyarázat a Függelékben található.

A kísérlet első részében a K4 kutatási kérdésre koncentráltunk. Az előhívási hatáson alapuló módszer középtávú hatását vizsgáltuk a kidolgozott példák módszerével szemben összetett absztrakt algebrai feladatok tanulása és megoldása során. A hallgatók a félév hatodik és tizenharmadik hetében írtak egy-egy tesztet. Összesen 76 hallgató írta meg mindkét tesztet, 39 fő a kísérleti, tesztelős csoportból és 37 fő a kontrollcsoportból. A dolgozatpontszámok közötti összefüggések vizsgálatához minden pontszámot átszámítottunk százalékba. A teszteredmények eloszlásának normalitását ellenőriztük mindkét csoport mindkét félévközi teszten nyújtott teljesítménye esetében. A két csoportban a varianciák nem tértek el sem az első zárthelyi dolgozat  $F(1,38) = 0,67; p = 0,21$ ), sem a második zárthelyi dolgozat esetében  $F = (1,38); p = 0.057$ ). Páros és független mintás t-próbákat használtunk a két teszt pontszámainak összehasonlítására az egyes csoportokon – kísérleti és kontroll – belül és a csoportok között. A két dolgozat eredménye között nem volt különbség sem a csoportok között, sem a csoportokon belül (az első dolgozaton:  $t(74) = 1,19; p = 0,21$  a második dolgozaton:  $t(74) = 1,25; p = 0,24$ ). Ez azt jelenti, hogy sem az első, sem a második dolgozatnál nem volt szignifikáns különbség a kísérleti csoport és a kontrollcsoport pontszámai között. Szintén nem volt különbség az első és a második dolgozat eredményei között egyik csoport esetében sem. Más szóval sem a csoporton belül, sem a két csoport között nem volt különbség a tudásszintben középtávon.

A kísérlet második részében a K5 és K6 kutatási kérdéseket vizsgáltuk. A K5 kutatási kérdés megválaszolása érdekében megvizsgáltuk a diákok által öt hónappal az év végi dolgozat után írt utóteszt eredményeit és összehasonlítottuk a korábbi eredményeikkel. Ehhez az elemzéshez kiválasztottuk az első és második félévközi dolgozat két-két feladatát, amelyek hasonlóak voltak az utótesztben feltett kérdésekhez. A diákok ezen a két-két feladaton a félévközi dolgozatokban elért pontszámait összeadtuk és az így kapott pontszám szolgált egyfajta viszonyítási pontként, bemeneti adatként. A vizsgálatban az a 33 hallgató vett részt, aki részt vett a kísérlet első részében, teljesítette az Algebra és Számelmélet 2. tárgyat és megírta mindhárom tesztet: a két félévközi dolgozatot és az utótesztet. A 33 hallgató közül 13 hallgató tartozott a kísérleti csoportba és 20 hallgató a kontrollcsoportba. Mind a bemeneti teszt, mind az utóteszt pontszámok normális eloszlást mutattak mindkét csoportban, ezért Pearson-korrelációt alkalmaztunk a bemeneti tesztpontszámok és az utóteszt pontszámok közötti kapcsolat vizsgálatához. Az elő- és utóteszt pontszámok mérsékelten korreláltak ( $r(31) = 0,47; p = 0,006$ ). ANCOVA tesztet alkalmaztunk, hogy meghatározzuk a két kezelés, az előhívásos és a kidolgozott példák bemutatása módszerek hosszútávú hatását. Első lépésként

ellenőriztük az ANCOVA alkalmazhatóságának feltételeit, a DHARMA csomag (Hartig, 2022) segítségével validáltuk a modellünket. A függő változó normális eloszlást mutatott, teljesült az alminták szóráshomogenitása és az illesztett egyenesek meredekségének párhuzamossága. Összehasonlítottuk a két csoport utóteszten elért eredményét a bemeneti pontszámokra kontrollálva. Szignifikáns különbség mutatkozott a két csoport között ( $F(1,30) = 8,9$ ;  $p = 0,006$ ). Posthoc elemzést végeztünk az emmeans csomag (Lenth, 2024) segítségével, páronkénti összehasonlítással Bonferroni-igazítást alkalmaztunk. A kísérleti csoport szignifikánsan magasabb pontszámot ért el ( $20,4 \pm 3,3$  a korrigált átlag $\pm$ standard hiba) a poszt-tesztben, mint a kontrollcsoport ( $7,9 \pm 2,6$  a korrigált átlag $\pm$ standard hiba; igazított  $p = 0,0057$ ). A két csoport utóteszten elért átlagos teljesítménye a 7. ábrán látható.



**7. Ábra** Utóteszt eredmények (korrigált átlag $\pm$ standard hiba) a kontroll és a kísérleti csoportban. A két pont a korrigált átlagot jelöli, a vonalak pedig a standard hibát. (Az ábrát az R 4.2.3 program segítségével nyertük.)

A K6 kutatási kérdés megválaszolása érdekében szintén az utóteszt eredményeit vizsgáltuk. Azt mértük, hogy a diákok milyen arányban felejtették el az Algebra és Számelmélet 2. kurzuson tanult polinomok témakört. A vizsgálatban az a 33 hallgató vett részt, aki részt vett a kísérlet első részében, teljesítette az Algebra és Számelmélet 2. tárgyat és megírta mindhárom tesztet: a két félévközi dolgozatot és az utótesztet. A 33 hallgató közül 13 hallgató tartozott a kísérleti csoportba és 20 hallgató kontrollcsoportba.

Az utóteszt során a tanulóknak három polinomokkal kapcsolatos feladatot kellett megoldaniuk. Az utóteszt három feladata hasonlított azokra, amelyeket a diákoktól a

félévközi dolgozatokon kérdeztünk. Az utóteszt feladatait párba állítottuk a korábbi dolgozatok megfelelő feladataival. Mindegyik feladatpár tartalmazott egy-egy kulcs gondolatot, módszert, trükköt, ami a feladat megoldásához szükséges volt. Az első feladatpárban két magasabb fokú polinom szerepelt, amelyeket a tanulóknak  $\mathbb{Z}_2$  felett kellett felbontaniuk. A trükk az volt, hogy  $\mathbb{Z}_2$  felett egy kéttagú összeg négyzete egyenlő a tagok négyzetének összegével. A második feladatpár a korábban bemutatott 2. feladat volt, a valós test fölött kellett felbontani az  $x^8 + x^4 + 1$  polinomot irreducibilisek szorzatára. A harmadik feladatpár egy egész együtthatós polinom komplex számtest feletti felbontását kérte. Itt a megoldáshoz alkalmazni kellett a racionális gyöktesztet.

Az utóteszt pontozásánál azt vizsgáltuk, hogy a hallgató tud-e érdemi lépést tenni a feladat megoldásának irányába. Azok, akiknek sikerült érdemben elkezdniük a feladatot, megtalálniuk a probléma egy kulcsgondolatát, legalább 1 pontot kaptak. Például amikor egy egész együtthatós polinom felbonthatóságánál a hallgató leírta, hogy gyökteszttel érdemes kezdeni, akkor azt láttuk, hogy a hallgató már valamire emlékszik, kapott pontot a feladatra. Véletlenszerű számolásokra nem adtunk pontot. Azok, akiknek nem sikerült elkezdniük a feladatot, 0 pontot kaptak. A "felejtést" itt úgy definiáljuk, mint az utóteszten való 0 pont elérését. Tehát nem azt vizsgáltuk, hogy ki az, aki valamire emlékszik, hanem ki az, aki „semmire” sem, ki az, aki nem tud elindulni egyik feladat megoldásánál sem.

A 7. táblázatban bemutatjuk a "felejtés arányát" a két csoportban. A felejtési arány alatt azt a hányadost értjük, amelyet úgy kapunk, hogy vesszük azon tanulók számát, akik 0 pontot szereztek az utóteszten, és ezt osztjuk a tanulók számával. A kísérleti csoportban (N=13) a tanulók 23,08%-a felejtette el a tananyagot. A kontrollcsoportban (N=20) a tanulók 55,00%-a ért el 0 pontot az utóteszten.

## 7. Táblázat

*A felejtési arány a kísérleti és a kontrollcsoportban az utóteszt eredményei alapján.*

	Létszám (fő)	Felejtés aránya
Kísérleti csoport (előhívásos módszer)	13	0,2308
Kontrollcsoport (kidolgozott példák módszere)	20	0,5500

### 6.2.6. Válasz a K4, K5 és K6 kutatási kérdésekre, diszkusszió

Az előhívási hatáson alapuló tanulás és a kidolgozott példák tanulmányozása két olyan tanulási technika, amely egyaránt hatékony tanulási módszer lehet problémamegoldás területén (Dunlosky és mtsai, 2013; Adeniji és Baker, 2023). Ugyanakkor a két módszer különböző kognitív folyamatokon alapszik. Ebben a kutatásban a két módszer egy-egy formájának hatékonyságát hasonlítottuk össze absztrakt algebra kurzuson, a diákok középtávú, szemeszteren belüli és a hosszútávú, szemeszteren átívelő tudására összpontosítva.

A hatodik fejezetben bemutatott kutatás tényleges oktatási környezetben vizsgálta az előhívásos tanulást egy matematika tanárszakos hallgatóknak szóló második féléves kötelező kurzus keretein belül, az Algebra és Számelmélet 2. című kurzuson. A kísérlet résztvevői az Eötvös Loránd Tudományegyetem azon matematika tanárszakos hallgatói voltak, akik a 2017/18-as tanév tavaszi félévében felvették az Algebra és Számelmélet 2. című kötelező tantárgyat. A félév során hallgatókat két csoportra osztottuk. A kurzus gyakorlati részét a hallgatók egy része a kidolgozott példák módszerével, másik része pedig előhívásos módon, a tananyag egy alkalommal, közvetlenül a tanulás után történő felidézésével tanulta. A két csoport gyakorlati óráinak felépítése az óra utolsó 5-10 percében különbözött. A kísérleti csoport előhívásos módszerrel tanult: a gyakorlat utolsó néhány percében egy rövid, két feladatból álló dolgozatot írt az aznapi óra anyagához kapcsolódóan. Az óra végi dolgozatok alkalmával a diákoknak a gyakorlat során megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat kellett megoldaniuk. A kontrollcsoport kidolgozott példák segítségével tanult, ebben a csoportban az óra utolsó pár percében az óravégi dolgozatának a két feladata került bemutatásra. A gyakorlatvezető ismertette a két feladat mintamegoldását lépésről lépésre, ami lehetőséget nyújtott a tanulóknak arra, hogy a feladatmegoldási sémákra összpontosítsanak.

A félév során a diákok tananyaghoz kapcsolódó tudását, problémamegoldó képességét két alkalommal mértük: a szemeszter hatodik hetében és tizenharmadik hetében egy-egy dolgozat segítségével. Ezek a dolgozatok a kurzus anyagához kapcsolódó összetett, deduktív következtetési képességet igénylő feladatokat tartalmaztak. A két dolgozat eredményei alapján középtávon nem volt különbség a két csoport tudása és problémamegoldó képessége között – az első és a második dolgozaton a kísérleti csoport ugyanúgy teljesített, mint a kontrollcsoport. Azaz az előhívási hatás nem volt kimutatható középtávon – a félévközi és félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex absztrakt matematika feladatok tanulása során a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben.

A kísérlet második felében az előhívásos módszer és a kidolgozott példák módszerének a hosszútávú tudásra gyakorolt hatására koncentráltunk. A diákok Algebra és Számelmélet 2. tananyaghoz kapcsolódó tudását, problémamegoldó képességét egy utóteszt segítségével mértük, a tesztet előzetesen nem jelentettük be. Az utótesztet a diákok öt hónappal a tananyaghoz kapcsolódó félévvégi dolgozat után írták. A kísérlet eredményei azt mutatják, hogy az előhívásos módszer hosszútávú tudásra gyakorolt hatása kedvezőbb, mint a kidolgozott példákkal való tanulása. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok korábbi, a kurzus alatti eredményükhöz képesti teljesítménye szignifikánsan jobb volt, mint a másik csoporté. Azaz az előhívási hatás kimutatható volt hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozat megírása után – komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben.

Mindezek mellett megvizsgáltuk, hogy milyen mértékben felejtik el a tanulók hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – a polinomok témakört amennyiben előhívásos, vagy a kidolgozott példák mutatása módszerrel tanulnak. A felejtés aránya több mint kétszerese volt a kidolgozott példákkal dolgozó csoportban, mint az előhívásos csoportban. Az utóteszt eredményei alapján a kontrollcsoport tanulóinak több mint fele teljes mértékben elfelejtette a polinomok témakört. Ugyanakkor a kísérleti csoportban a tanulóknak jóval kisebb része, 23,08%-a felejtette el az anyagot.

Számos tanulmány kimutatta, hogy az oktatási változtatások végrehajtása, különösen egyetemi szinten nehéz lehet (Brownell és Tanner, 2012). A hagyományos előadásmódról a hallgatóközpontúbb oktatásra való áttérés kihívást jelenthet, mivel az oktatási innovációk sok esetben hosszútávú időbefektetést és néha pénzbefektetést is igényelnek (Hayward és mtsai, 2015). Az ebben az értekezésben vizsgált előhívásos módszer – a diákok minden óra végén írnak egy rövid tesztet az adott napon tanult anyaghoz kapcsolódóan minden fajta segédeszköz használata nélkül – nem igényel különösebb anyagi forrásokat, speciális eszközöket, kevés időt vesz igénybe és egyszerű módszer, így könnyen bevezethető a tantermi gyakorlatokba. A kvízek, tesztek már ma is általánosan használt értékelési eszközök a felsőfokú matematikaoktatásban. A tesztekre ugyanakkor érdemes nem csak mint értékelési eszközre, hanem mint a tanulást elősegítő eszközre tekinteni. A teszteknek a diákok tanulására gyakorolt hatása függ attól, hogy a tanárok és a diákok hogyan alkalmazzák őket (Feudel és Unger, 2022). A mi kutatási eredményeink azt mutatják, hogy az óra végi rövid tesztek, melyek segítségével a diákok előhívják az aznap tanultakat, jelentős hosszútávú hatást gyakorolhatnak a matematika tudásra absztrakt tananyag és komplex matematika feladatok

megoldása, tanulása esetén is. Az óra végi előhívás többet jelent, mintha az óra utolsó pár percében megmutatnánk néhány további példát. Az óra végi tesztek könnyen beilleszthetők az egyetemi előadásokba és a gyakorlatokba is. Fontosnak tartom, hogy az oktatók ne úgy tekintsenek az óra végi tesztekre, mint "elveszett időre", hanem mint egy tanítási-tanulási eszközre, ami a hosszútávú tudást nagymértékben elősegíti és a felejtés mértékét csökkenti.

## 7. Összegzés, kísérleteink korlátjai, további kutatási lehetőségek

Az ötödik és hatodik fejezetekben bemutatott kutatások az előhívásos tanulás egy fajtájának közép- és hosszútávú hatásait vizsgálta számelmélet és absztrakt algebra kurzusok keretein belül. Célom volt megvizsgálni, hogy absztraktabb környezetben, komplex matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása esetén kimutatható-e az előhívási hatás közép- és hosszútávon a hagyományos tanulással illetve a kidolgozott példák módszerével szemben.

Az ötödik fejezetben bemutatott kísérletekben kimutattuk, hogy mind középtávon – a félévvégi dolgozaton – mind hosszútávon – az utóteszten, amelyet a diákok három hónappal a félévvégi dolgozat után írtak – az előhívásos módszerrel tanuló diákok jobb eredményt értek el, mint a hagyományos módszerrel tanuló társaik. Azaz kimutatható volt az előhívási hatás középtávon és hosszútávon komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben. Továbbá eredményeink azt mutatják, hogy a tesztelési hatás az egyéni matematikai kompetenciától, előképzettségtől függetlenül kimutatható volt.

A hatodik fejezetben bemutatott kísérletben célunk volt megvizsgálni, hogy absztraktabb környezetben, absztrakt algebra feladatok megoldási eljárásának tanulásánál is kimutatható-e az előhívásos módszer hatása. Ebben a kísérletben az előhívásos módszert a kidolgozott példák módszerével szemben vizsgáltuk: a diákok egy része előhívásos módon tanult a gyakorlatokon (kísérleti csoport), másik részük pedig a kidolgozott példák módszerével (kontrollcsoport). A két módszer középtávú hatását két, a félév során írt dolgozat segítségével mértük, a hosszútávú hatást pedig egy utótesztrel, amelyet a diákok öt hónappal a félévvégi dolgozatot követően írtak meg. A két félév során írt dolgozat eredményei alapján középtávon nem volt különbség a két csoport tudása és problémamegoldó képessége között. Az első és a második dolgozaton a kísérleti csoport ugyanúgy teljesített, mint a kontrollcsoport. Azaz az előhívási hatás nem volt kimutatható középtávon – a félévközi és félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a kidolgozott példák mutatója módszerrel szemben. Ugyanakkor a kísérlet eredményei azt mutatják, hogy az előhívásos módszer hosszútávú tudásra gyakorolt hatása kedvezőbb, mint a kidolgozott példákkal való tanulás hatása. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok korábbi, a kurzus alatti eredményükhöz képesti teljesítménye az utóteszten szignifikánsan jobb volt,

mint a kontrollcsoporté. Azaz az előhívási hatás kimutatható volt hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozat megírása után – komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben. Emellett a felejtés aránya több mint kétszerese volt a kontrollcsoportban, mint a kísérleti csoportban. Az utóteszt eredményei alapján a kontrollcsoport tanulóinak több mint fele teljes mértékben elfelejtette a polinomok témakört. Ezzel szemben a kísérleti csoportban a tanulóknak jóval kisebb része, 23,08%-a felejtette el az anyagot.

Az egyetemi hallgatók hosszútávú tudásának nyomonkövetése valódi oktatási környezetben nagy kihívást jelenthet. A diákokat elérni és meggyőzni egy teszt megírásáról azután, hogy már nem tanítjuk őket nehéz, szinte lehetetlen feladat. Úgy gondoljuk, hogy az ötödik és hatodik fejezetekben bemutatott vizsgálatainknak az az erőssége, hogy egy tanulási módszer hosszútávú hatását tudtuk mérni valós oktatási környezetben.

Bár a bemutatott kutatások eredményei alapján úgy tűnik, hogy a kísérletekben alkalmazott előhívási gyakorlat, módszer hatékony módja a hosszútávú tudás kialakításának az egyetemi matematikában, további kutatásokra van szükség ezen a területen ahhoz, hogy messzemenő következtetéseket vonhassunk le. Fontos lenne a módszer tesztelése különböző iskolai környezetben: különböző diákokkal, különböző egyetemeken és más matematika kurzusokon is.

Vizsgálataink egyik korlátja, hogy nem tudjuk megkülönböztetni a tesztelési hatást a "figyelmi hatástól". Nem tudjuk, hogy a tesztelés csoport tudva azt, hogy az óra végén tesztelni fogják őket a gyakorlatokon történetekre a szokásosnál nagyobb figyelmet fordított-e. A gyakorlatot vezető oktatók arról számoltak be, hogy bár a figyelemhatás lehet az első néhány órán jelen volt, azonban két-három hét elteltével a diákok hozzászórtak az óra végi tesztekhez. A gyakorlatvezetők úgy vélik, hogy az órák a megszokott módon zajlottak és a figyelemhatás nem volt jelen.

Kutatásunkban nem vizsgáltuk, hogy milyen más lehetséges egyéni tényezők befolyásolhatják az előhívásos tanulás hatását a matematikai tudáson, kompetencián túl. Elképzelhető, hogy az előhívásos tanulás hatása függ például az egyén induktív és deduktív érvelése során használt képességétől, különösen új anyagokkal kapcsolatban (Kyllonen és Kell, 2017).

Egy további korlátja a kísérletünknek, hogy a tanári hatást bár igyekeztünk csökkenteni – a tanárokat tanítási tapasztalatuk alapján "párokba" rendeztük és mind a kísérleti, mind a kontrollcsoportban egy-egy tapasztaltabb tanár, egy-egy doktorandusz hallgató és egy-egy

demonstrátor tartotta a gyakorlatokat, valamint a gyakorlati csoportok tanárai minden héten tartottak egy rövid megbeszélést, ahol a kurzussal kapcsolatos főbb kérdéseket megvitatták –, teljes mértékben nem tudtuk kiküszöbölni.

Kísérleteinkben az előhívásos csoport diákjainak a félév végére el kellett érniük a maximális pontszám legalább 50 százalékát az óra végi teszteken ahhoz, hogy a kurzust sikeresen teljesítsék. Ez egy szükséges feltétele volt a kurzus teljesítésének. Az 50 százalék elérése nem volt túl nehéz feladat, mégis, ez hatással lehetett a hallgatók stressz-szintjére, ami befolyásolhatta a teljesítményüket. Az 50 százalékos korlátot annak érdekében vezettük be, hogy a diákok legjobb tudásuk szerint oldják meg az óra végi feladatokat. Saját tapasztalataink alapján Magyarországon a hallgatók hajlamosak nem komolyan venni egy feladatot amennyiben az nem kötelező, vagy nem származik hátrány annak nem teljesítéséből. Ez motiválta az óra végi tesztek értékelését. Másrészt minimalizálni akartuk az óra végi tesztekől származó stressz faktort, így született a döntés az 50 százalékos korlát mellett, amit a diákok minimális erőfeszítéssel teljesítettek. Érdeemes lenne megvizsgálni, hogy a módszer hatékonysága függ-e attól, hogy milyen pontozási rendszert használunk, vagy esetleg egyáltalán nem használunk.

Végül, de nem utolsósorban, nem mondhatjuk, hogy az alkalmazott előhívásos módszernek a tanulásra és hosszútávú tudásra gyakorolt kedvező hatása kizárólag magának az előhívásnak köszönhető. Az előhívásos tanulásnak számos közvetett hatása van, amint azt McDaniel és munkatársai (2015) kimutatták. Az óra végi tesztek például meglehetősen világos képet adhatnak a tanulóknak arról, hogy mit tudnak előhívni és alkalmazni a matematikai problémamegoldás során, és milyen fogalmakat, eljárásokat és készségeket kell még elsajátítaniuk. Egy másik közvetett hatás lehet, hogy a tesztek elvégzése önmagában is segíthet a tanulóknak a tesztelési készségek fejlesztésében, ami javíthatja a vizsgákon nyújtott teljesítményt (Adesope és mtsai, 2017). Elképzelhető az is, hogy a módszer eredményessége összefügg a tanulók aktív bevonásával és azon keresztül fejtette ki a leírt hatást, és az előhívásnak kisebb szerepe volt a módszer sikerességében. Ezt azonban nem tartjuk valószínűnek. Egyrészt a tanárok visszajelzései alapján a figyelmi hatáshoz hasonlóan ez a jelenség – a diákok aktív bevonódása – csak a félév elején volt érzékelhető. Amennyiben az óravégi tesztek aktívabb részvételt eredményeztek, azt tekinthetjük a tesztelés közvetett hatásának. Ahogyan azt korábban említettem, ebben az értekezésben nem volt célunk a tesztelés közvetlen és közvetett hatásait elkülöníteni egymástól.

A fent említett korlátok számos lehetőséget nyújtanak a további kutatások irányába. A dolgozatban bemutatott kísérletekben az óra végi teszteket az oktatók javították. Fontosnak tartjuk annak vizsgálatát, hogy miként lehet minimalizálni a tanárok feladatait a tesztelési módszer hatékonyságának megőrzése mellett. A jövőbeni kutatások megvizsgálhatnák, hogy a tanulóknak adott visszajelzések a módszer kulcsfontosságú eleme-e, vagy sem. Amennyiben ez kulcsfontosságú elem, akkor a visszajelzés melyik formája segíti leginkább a tartós matematikai tudás megszerzését? A tanártól, a tanulótól vagy egy géptől kell-e érkeznie? Az óra végi teszt formájának megváltoztatása a nyílt kérdésekről feleletválasztós, rövid válaszos vagy igaz-hamis kérdésekre történő átállítása szintén csökkentheti a tanárok munkáját. Meg kell azonban vizsgálnunk, hogy az ilyen típusú kérdésekkel hosszútávon meg tudjuk-e tartani ugyanazt a teljesítményt a komplex tananyagot illetően. Úgy gondoljuk, hogy az igaz-hamis kérdések vagy a feleletválasztós kérdések nem nyújtanak ugyanazt az eredményességet, mint amit a nyitott kérdések alkalmazása. Elképzelhető, hogy amennyiben egy kérdés összetettebb érvelést is igényel, azonban a végső válasz csak egy kiválasztási folyamatot, például bekarikázást, párosítást, áthúzást, aláhúzást, a tanuló egyszerűsít, és nem gondolkodik el mélyebben az adott kérdésen. Továbbá felmerülhet az a kérdés is, hogy ugyanolyan hatékonyság érhető-e el, ha a tanulók nem az óra végén, a tanteremben – nem ellenőrzött körülmények között –, hanem otthon írják meg a teszteket.

A jövőbeni kutatások egy másik lehetséges iránya a tesztelés közvetlen és közvetett hatásainak elkülönítése hasonló kontextusban. Érdekes lenne olyan kutatást tervezni, amellyel ki tudjuk szűrni például a figyelmi hatást vagy az aktív bevonódás hatását.

Emellett gyümölcsöző lehet annak mélyebb feltárása is, hogy van-e összefüggés az anyag absztrakciós szintje és a módszer hatékonysága között. Egy korábbi kutatásunkban középiskolai matematika órákon alkalmaztuk és vizsgáltuk az óra végi tesztek hatását (Szeibert és mtsai, 2022). A módszer hatékonysága rövid időn belül megmutatkozott. Az eddigi kísérleti eredményeink alapján úgy véljük, hogy az alkalmazott előhívásos módszer absztrakt környezetben is hatékony módja a tanulásnak, azonban minél absztraktabb a tananyag, annál később jelentkezik a tesztelés hatása.

Végül, de nem utolsó sorban érdekes lenne megvizsgálni, hogy az időben szétszlatott előhívás, illetve kumulatív előhívási gyakorlatok alkalmazása milyen hatással van a tanulók hosszútávú tudására az összetett absztrakt matematikai problémák tanulása és megoldása során.

## 8. Összefoglaló

A disszertáció az előhívásos tanulás egyetemi matematikaoktatásban való alkalmazhatóságát, annak hatékonyságát vizsgálja. A témaválasztásban jelentős szerepet játszott az az általános tapasztalat, miszerint a diákok túlnyomó többsége a megszerzett tudás jelentős részét rövid időn belül elfelejti. Az egyetemi hallgatók meghatározó része olyan tanulási stratégiákat alkalmaz, mint például a vizsga előtti tömbösített tanulás, amelyekkel bár rövidtávú sikereket el lehet érni, tartós tudást annál kevésbé. Ez nagy problémát jelent a matematika tanulása esetén is, ahol az alapvető ismeretek hosszútávú memóriába való rögzítése, onnan történő előhívása kulcsfontosságú (Hopkins és mtsai, 2016). A felsőoktatásban matematikát tanuló hallgatók közül kiemelt jelentőséggel bír a matematika tanárszakos hallgatók matematikaoktatása. A matematikatanároknak nap mint nap kell a matematika tudásukat használni, elmagyarázni a tanulóknak a különböző matematikai fogalmakat és eljárásokat (Ma, 2020). A matematika tanárszakos hallgatók oktatásakor éppen ezért célszerű lehet az egyes kurzusokba olyan tanítási-tanulási stratégiákat beépíteni, amelyek elősegítik a megértést és megakadályozzák a felejtést. A hosszútávú tudás kialakításának egy lehetséges eszköze az előhívásos tanulás vagy más néven teszteléses tanulás. Az előhívásos tanulás elnevezés az előhívást előidéző tanulási módszereket foglalja magában (Karpicke és Grimaldi, 2012). Előhívás alatt a tárolt emlékek memóriából történő visszakeresését, felidézését, valamilyen formában történő felhasználását értjük.

A dolgozatban az előhívásos tanulás egy formáját, annak közép- és hosszútávú hatását vizsgálom a hagyományos oktatással és a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatóknak szóló Algebra és Számelmélet kurzusok keretein belül. A kidolgozott példák mutatása módszer alatt „*egy feladat elvégzésének vagy egy probléma megoldásának lépésről lépésre történő bemutatását*” értjük (Clark, Nguyen, és Sweller, 2006, 190. o.). Az egyetemi algebra és számelmélet kurzusok óriási szerepet játszanak a hallgatók absztrakciós képességének fejlesztésében, a matematika és a természettudományok különböző részein belüli kapcsolatok kialakításában, valamint a fogalmak mélyebb megértésében. Számos tanulmány kimutatta, hogy a tanulóknak nehézséget okoz az absztrakt algebra elsajátítása (Veith és mtsai, 2022; Agustyaningrun és mtsai, 2021; Wasserman, 2018). Még ha a diákok át is mennek a vizsgán, később nehezen emlékeznek a tanultakra. Felmerül a kérdés, hogy a folyamatos előhívás segíti-e megértést és a hosszútávú tudás kialakítását az absztrakt matematika terén. Ahogyan Agarwal és munkatársai kiemelték: a nemzetközi szakirodalom

nem eléggé kiterjedt, további alkalmazott kutatásra van szükség a tesztelés matematikaoktatásba való beemelésével kapcsolatban (Agarwal és mtsai, 2021).

Dolgozatom három, az előhívásos tanulással kapcsolatos publikáción alapszik, az ezekben leírt eredményeket fejtem ki részletesen (Szabó és mtsai, 2023; Muzsnay és mtsai, 2024; Muzsnay és mtsai, bíráló alatt).

Az első kutatásban egyrészt azt vizsgáltuk, hogy kimutatható-e az előhívási hatás a hagyományos oktatással szemben komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása során elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében. A kísérletet egy tényleges oktatási környezetben – egyetemi számelmélet kurzuson – végeztük el komplex, magas szintű matematika tananyag felhasználásával. A kísérlet résztvevői a kurzusra beiratkozó tanárszakos hallgatók voltak.

A szakirodalom alapján nem egyértelmű, hogy egyetemi matematika tanulása esetén kimutatható-e az előhívási hatás. Komplex anyagoknál, feladatoknál és következtetési képességet igénylő feladatoknál volt amikor kimutatható volt az előhívási hatás (Eglinton és Kang, 2018; Smith és Karpicke, 2013) és vannak olyan kísérletek is, ahol nem volt kimutatható (Tran és mtsai, 2015; Leahy és mtsai, 2015). A saját eredményeink azt mutatják, hogy az előhívásos tanulás jelentős előnnyel rendelkezik a komplex, matematikai problémák megoldása esetén is.

Kísérletünkben a kísérleti csoport és a kontrollcsoport tanulási folyamata szinkronban volt egymással: a két csoport ugyanazokkal a fogalmakkal, ugyanazokkal a tételekkel és pontosan ugyanazokkal a feladatokkal ismerkedett meg a félév során. A két csoport viszont különböző kezelést kapott 13 héten át a gyakorlati órákon: a kontrollcsoport a gyakorlati órák elején írt egy rövid tesztet az előző heti elmélet anyaghoz kapcsolódóan, ahogyan az ezen a tárgyon hagyományosan szokás. A kísérleti csoportnál a teszt az óra végén volt, az aznapi gyakorlat anyagához kapcsolódóan. Az óra végi tesztek alkalmával a diákoknak a gyakorlat során megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat kellett megoldaniuk, fel kellett idézniük az aznap tanultakat. Az óra végi teszt két feladatból állt, amit a kísérleti csoport tagjainak egyénileg, segítség nélkül kellett megoldaniuk.

A kísérlet résztvevői a félév elején írtak egy tesztet, amely az aktuális matematikai tudásukat, kompetenciájukat célozta felmérni. Ez a teszt egyfajta viszonyítási pontként, bementi tesztként szolgált a kísérletben. A kezelés végén – a szemeszter 13. hetében – pedig írtak egy öt feladatból álló dolgozatot. Ezen a dolgozaton a kísérleti csoport szignifikánsan jobban

szerepelt annak ellenére, hogy a félév elején ez a csoport rosszabb eredményt ért el a bemeneti teszten. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok a félévvégi dolgozaton jobb eredményt értek el, mint a hagyományos módon tanuló társaik, azaz kimutatható volt az előhívási hatás középtávon komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben. A kutatásban továbbá megvizsgáltuk, hogy vajon az előhívási hatás egyéni különbségektől függetlenül kimutatható-e komplex matematika feladatok esetében. A szintfelmérő bemeneti teszt alapján a diákokat átlag alatti, átlagos és átlagon felüli képességű csoportokra osztottuk. A tesztelési hatás mindegyik csoportban megfigyelhető volt, egyéni matematikai kompetenciától függetlenül kimutatható volt.

A második kutatásban azt vizsgáltuk, hogy vajon hosszútávon is megmutatkozik-e az első kísérletben leírt előhívásos módszer pozitív hatása. A kísérletet egyetemi számelmélet kurzuson végeztük. Kísérletünkben a kísérleti csoport és a kontrollcsoport ugyanarra az előadásra járt, ugyanazokkal a fogalmakkal, ugyanazokkal a tételekkel és pontosan ugyanazokkal a feladatokkal ismerkedett meg a félév során. A két csoport azonban különböző kezelést kapott 13 héten keresztül a gyakorlatok alatt: a kontrollcsoport a gyakorlati órák elején írt egy rövid tesztet az előző heti elméleti anyaghoz kapcsolódóan, a kísérleti csoportot pedig az aznapi óra végén tesztelték az aznapi gyakorlat anyagához kapcsolódóan.

A kísérlet résztvevői a kurzus kezdete előtt, a szemeszter elején írtak egy szintfelmérő dolgozatot, amely felmérte a diákok bemeneti matematika tudását, kompetenciáját. A kezelés végét követően három hónappal a hallgatók szintén írtak egy dolgozatot. Ez az utóteszt négy feladatból állt. A dolgozat feladatai hasonlítottak a félévvégi zárthelyi dolgozat feladataira. A bemeneti teszt eredményei alapján a kísérleti és a kontrollcsoport nem különbözött egymástól, azonban az utóteszten a kísérleti csoport szignifikánsan jobban szerepelt a kontrollcsoportnál. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok három hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozat megírása után jobb eredményt értek el az utóteszten, mint a hagyományos módon tanuló társaik. Kimutatható volt az előhívási hatás hosszútávon komplex matematika feladatok, számelmélet feladatok megoldási eljárásának tanulása során a hagyományos oktatással szemben elsőéves matematika tanárszakos hallgatók körében.

Végül a harmadik kutatásban az előhívásos tanulás egy formájának hatékonyságát hasonlítottuk össze a kidolgozott példák alkalmazásának egy módjával absztrakt algebra kurzuson. A kísérletben a középtávú, szemeszteren belüli és hosszútávú, szemeszteren átívelő tudást vizsgáltuk. A kísérlet résztvevői az Algebra és Számelmélet 2. című kötelező tantárgyat

felvevő matematika tanárszakos hallgatók voltak. A félév során a hallgatókat két csoportra osztottuk. A kurzus gyakorlati részét a hallgatók egy része a kidolgozott példák módszerével, másik része pedig előhívásos módon, a tananyag egy alkalommal, közvetlenül a tanulás után történő felidézésével tanulta. A két csoport gyakorlati óráinak felépítése az óra utolsó 5-10 percében különbözött. A kísérleti, előhívásos csoport a gyakorlat utolsó néhány percében egy rövid, két feladatból álló dolgozatot írt az aznapi óra anyagához kapcsolódóan. Az óra végi dolgozatok alkalmával a diákoknak a gyakorlat során megoldott feladatokhoz hasonló feladatokat kellett megoldaniuk. A kontrollcsoportban az óra utolsó pár percében a kísérleti csoport óravégi dolgozatának a két feladata került bemutatásra. A gyakorlatvezető ismertette a két feladat mintamegoldását lépésről lépésre, ami lehetőséget nyújtott a tanulóknak arra, hogy a feladatmegoldási sémákra összpontosítsanak.

A félév során a diákok tananyaghoz kapcsolódó tudását, problémamegoldó képességét két alkalommal mértük: a szemeszter hatodik hetében és tizenharmadik hetében egy-egy dolgozat segítségével. Ezek a dolgozatok a kurzus anyagához kapcsolódó összetett, deduktív következtetési képességet igénylő feladatokat tartalmaztak. A két dolgozat eredményei alapján középtávon nem volt különbség a két csoport tudása és problémamegoldó képessége között – az első és a második dolgozaton a kísérleti csoport ugyanúgy teljesített, mint a kontrollcsoport. Azaz az előhívási hatás nem volt kimutatható középtávon – a félévközi és félévvégi zárthelyi dolgozaton – komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatók körében.

A kísérlet második felében az előhívásos módszer és a kidolgozott példák módszerének a hosszútávú tudásra gyakorolt hatására koncentráltunk. A diákok Algebra és Számelmélet 2. tananyaghoz kapcsolódó tudását, problémamegoldó képességét egy utóteszt segítségével mértük, a tesztet előzetesen nem jelentettük be. Az utótesztet a diákok öt hónappal a tananyaghoz kapcsolódó félévvégi dolgozat után írták. A kísérlet eredményei azt mutatják, hogy az előhívásos módszer alkalmazása hosszútávon célszerűbb, mint a kidolgozott példákkal való tanulás. Az előhívásos módszerrel tanuló diákok korábbi, a kurzus alatti eredményükhöz képesti teljesítménye szignifikánsan jobb volt, mint a kidolgozott példákkal tanuló csoporté. Azaz az előhívási hatás kimutatható volt hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – komplex absztrakt matematika feladatok megoldási eljárásának tanulása során a kidolgozott példák mutatása módszerrel szemben matematika tanárszakos hallgatók körében.

Megvizsgáltuk továbbá, hogy milyen mértékben felejtik el a tanulók hosszútávon – öt hónappal a félévvégi zárthelyi dolgozatot követően – az absztrakt algebrát, egészen pontosan a polinomok témakört amennyiben előhívásos, vagy a kidolgozott példák mutatása módszerrel tanulnak. A felejtés aránya több mint kétszerese volt a kontrollcsoportban, mint a kísérleti csoportban. Az utóteszt eredményei alapján a kontrollcsoport tanulóinak több mint fele teljes mértékben elfelejtette a tanult matematika anyagot. Ezzel szemben a kísérleti csoportban a tanulóknak jóval kisebb része, kevesebb, mint negyede felejtette el az anyagot.

Kutatásunk során azt találtuk, hogy az általunk alkalmazott előhívásos módszer hatékony módja lehet a magasabb matematika tanulásának, problémamegoldási képesség fejlesztésének és a hosszútávú tudás kialakításának, amelyet a tanárok viszonylag könnyen beépíthetnek az óra menetébe. Eredményeink azt mutatják, hogy a módszer mind átlag alatti, átlagos és átlag feletti matematikai kompetenciával, tudással rendelkező diákok számára hasznos lehet. Eredményeink alapján azt gondolom, hogy a módszer egyetemi matematika kurzusokba való beépítése megfontolandó.

## 9. Summary

The dissertation examines the potential benefits of retrieval practice in learning mathematics at the university level, focusing on the knowledge of pre-service mathematics teacher students. One of the main reasons I chose this topic was the general experience that most of the students forget a significant part of the acquired knowledge within a short period. A considerable part of university students do not achieve long-term knowledge, which can be a result of the learning strategies they use. This is a major problem in the case of learning and teaching mathematics, where the retention of foundational knowledge is crucial (Hopkins et al., 2016). Since mathematics teachers must explain their understanding of mathematical concepts and procedures to students during instruction, mathematics teachers need to have a well-connected deep understanding of fundamental mathematics (Ma, 2020). Advanced mathematics, like number theory and abstract algebra, serves to deepen and confirm more rigorously the specific mathematical ideas secondary teachers will teach (Wasserman, 2018). Pre-service mathematics teachers, therefore, have to be taught in a way that promotes the understanding and the long-term retention of mathematical concepts and the relationship between them. In other words, in university mathematics courses the learning strategies applied should prevent forgetting and enhance understanding and the creation of long-term knowledge. A possible tool to increase further retention is retrieval practice, the strategic use of retrieval to enhance memory. Retrieval practice, also known as testing, is a learning technique that involves recalling to-be-remembered information from memory. It can refer to any activity – such as questions during class, quizzes, flashcards, brain dump, and examination questions – that requires retrieving information from memory without the help of any external sources. Retrieval practice has been shown to enhance long-term retention when compared to other methods of learning (Roediger & Karpicke, 2006; Karpicke & Blunt, 2011). This retrieval-based benefit on long-term retention is commonly denoted as the testing effect (Dunlosky et al., 2013; Rowland, 2014).

In the dissertation, the effectiveness of a specific type of retrieval practice was compared to traditional learning and studying worked examples in Number Theory and Algebra courses concentrating on the medium and long-term knowledge of pre-service mathematics teachers. By worked examples we mean a „*step-by-step demonstration of how to perform a task or how to solve a problem*” (Clark, Nguyen, Sweller, 2006, p. 190). Number Theory and Algebra courses play a huge role in improving students’ abstraction ability, making connections within

different parts of mathematics and science, and developing a deeper understanding of concepts, such as formal calculations, introducing algebraic structures, and understanding their behaviors. We believe that understanding algebra at a higher level is essential for mathematics teachers. However, many studies showed that students have difficulties learning abstract algebra (Veith et al., 2022; Agustyaningrum et al., 2021; Wasserman, 2018). Even if students pass their algebra exam, they have trouble remembering the learning material later. The question arises as to whether continuous testing helps construct applicable long-term knowledge in abstract mathematics. As Agarwal et al. pointed out, more applied research is needed in mathematics learning (Agarwal et al., 2021).

My thesis is based on three publications we wrote on retrieval practice (Szabó et al., 2023; Muzsnay et al., 2024; Muzsnay et al., under review). In the dissertation, I present the findings of the three research in detail.

In the first study, we investigated whether the testing effect can be detected when learning complex mathematics – number theory – tasks, compared to traditional learning. The experiment was carried out in an actual educational setting – a number theory course – using complex, high-level mathematics curricula. The participants of the experiment were pre-service teacher students enrolled in the course.

Although retrieval practice has been shown to increase retention in several learning environments, the effect of testing is not clear in learning higher mathematics. The effect of retrieval practice when learning complex material or tasks requiring deductive reasoning is not evident. Numerous studies report that in the case of learning flexible procedures, retrieval practice is no more effective than repeated studying (Leahy, Hanham, & Sweller, 2015; Van Gog et al., 2015; van Gog & Kester, 2012; van Gog & Sweller, 2015). Moreover, it can even be suboptimal: some researchers found that in the case of math and science problem-solving, using worked examples instead of problem-solving tasks was more beneficial (Atkinson, Derry, Renkl, & Wortham, 2000; Renkl, 2014; van Gog & Rummel, 2010). However, some studies have shown the effectiveness of retrieval practice when learning complex materials, solving complex tasks, and tasks requiring deductive reasoning (Eglington & Kang, 2018; Smith & Karpicke, 2013). Our results show that retrieval practice is beneficial for solving complex mathematical problems.

In our experiment, the experimental group and the control group were introduced to the same concepts, the same theories, and exactly the same tasks during the semester. The two groups, however, received different treatment in the practical classes for 13 weeks: the control group wrote a short test at the beginning of the practical sessions related to the previous week's lecture, as is traditional in this course. For the experimental group, the test was given at the end of the lesson, related to the material of the practical session of the day. During the end-of-class tests, students had to solve problems similar to the ones they had solved during the practice session. This way they had to recall what they had learned that day. The end-of-class tests consisted of two tasks that the members of the experimental group had to solve individually, without assistance, without any external help.

All the participants wrote a test at the beginning of the semester to assess their current mathematical knowledge and competence. This test served as an input test. Also, students wrote a final test at the end of the treatment, in the 13<sup>th</sup> week of the semester, which consisted of five tasks. On this test, the experimental group performed significantly better, even though at the beginning of the semester, this group scored lower on the input test. The students who were taught using end-of-class tests scored better on the final test than their classmates who were taught using the traditional method. The testing effect could be detected as opposed to traditional learning in the medium term in learning complex mathematics tasks in the topic of number theory. In addition, the study investigated whether the testing effect could be detected independently of individual differences. In order to examine this question, we divided the students into groups of below-average, average, and above-average mathematical competence based on the input test they wrote at the beginning of the semester. The testing effect was observed in all groups and was detectable regardless of individual mathematical competence.

In the second study, we investigated whether the positive effects of the testing method described in the first study would be seen in the long term. The experiment was conducted in a first-year number theory course. In our experiment, the experimental group and the control group attended the same lecture and were introduced to the same concepts, the same theorems, and the same problems during the semester. However, the two groups received different treatment during the 13 weeks of the exercises: the control group wrote a short test at the beginning of the practice sessions related to the previous week's lecture material, while the experimental group was tested on the material of the given day at the end of the practice sessions.

All the participants wrote an input test at the beginning of the semester. This way their current mathematical knowledge and competence were measured. Three months after the end of the treatment – after their final test –, the students also wrote a test. This post-test consisted of four tasks. The tasks of the post-test were similar to those of the final. The input test results did not show any difference between the experimental and control groups, but the experimental group performed significantly better than the control group in the post-test. The students who studied using end-of-class tests performed better on the post-test three months after the final test than those who studied using the traditional methods. It means that the testing effect could be detected as opposed to traditional learning in the long term in learning complex mathematics tasks in the topic of number theory.

Finally, in the third study, the effectiveness of worked examples and a specific type of retrieval practice were compared in an abstract algebra course concentrating on medium and long-term knowledge. Retrieval practice and worked examples are both recommended as effective methods for improving learning (Dunlosky et al., 2013; Adeniji & Baker, 2023). However, they lean on different underlying cognitive processes. To see which method is preferable for the mid-term and the long-term, we experimented with second-semester pre-service mathematics teachers in the frame of the “Algebra and Number Theory 2” course. During the semester we divided the class into two groups. One of the groups studied the material using retrieval practice while the other one learned with worked examples. These groups did the same exercises during the practice sessions. However, there was a difference between the structure of the two types of groups’ practice sessions in the last 5-10 minutes of each session. At the end of the practice sessions, students from the retrieval practice group wrote a test on the material learned on the given day without any aid, or any external help. They got two open-ended questions related to the topic of the given lesson. This way, they had to retrieve immediately what they had just learned. The same two problems were shown to the worked example group at the end of the class. However, in this group, the teacher solved these problems, not the students – the solutions to the end-of-class test problems were presented step-by-step by the teacher. This way, students could concentrate on the solution pathway.

Students’ topic-related problem-solving skills were measured two times during the semester: they wrote a midterm and a final test on the 6<sup>th</sup> and the 13<sup>th</sup> week of the semester. This way we measured their medium-term knowledge. These tests included complex tasks requiring deductive reasoning skills related to the course material. Based on the results of the two tests,

there was no difference in the knowledge and problem-solving ability of the two groups over the semester, in the medium term. The experimental group performed as well as the control group on the first and second tests. In other words, the testing effect could not be detected in the medium term - in the mid-term and final exams - when learning complex abstract mathematics problems compared to studying with worked examples.

In the second part of the experiment, we explored the long-term effect of testing versus worked examples in learning abstract algebra by a post-test students wrote five months after their final test. Participants were those pre-service teachers who participated in the first part of the experiment, passed the course Algebra and Number Theory 2, and wrote all three tests: the midterm, the final, and the post-test. We measured the long-term effects of the two methods by a post-test. The post-test consisted of problems related to polynomials, a topic they studied in the course Algebra and Number Theory 2. Based on our results, testing was more beneficial in the long term than studying with worked examples. The improvement of those students who learned algebra with testing was significantly greater than that of the other group.

We also measured the forgetting rate of the two groups. The forgetting rate was more than twice as high in the worked example group than in the testing group. More than half of the students in the control group – the group who learned with worked examples – forgot the topic of polynomials. At the same time, in the experimental group, less than a quarter of the students forgot the material. The forgetting rate was more than twice as high in the worked example group than in the testing group.

All in all, in our research, we found that the retrieval practice we used can be an effective way of teaching higher mathematics, developing problem-solving skills, and building long-term knowledge that teachers can incorporate into their lessons relatively easily. Our results show that the method can be beneficial for students with below-average, average, and above-average mathematical competence and knowledge. Based on our results, I believe we should consider integrating the method into university mathematics courses.

## 10. Saját publikációk listája

Bereczky-Zámbó, Cs., Szabó, Cs., Muzsnay, A., Szeibert, J. (2022). Passing the exam and not mastering the material in geometry. *Annales Mathematicae et Informaticae*. [10.33039/ami.2022.12.009](https://doi.org/10.33039/ami.2022.12.009)

Muzsnay, A., Szabó, Cs. (2017) Dressed Up Problems – The danger of picking the inappropriate dress, *Teaching Mathematics and Computer Science*, (2017 / 15 / 1-2 (6) 10.5485/TMCS.2017.0433 - p. 77-94.)

Muzsnay, A., Zámbó, Cs., Szeibert, J., Bernáth, L., Szilágyi, B., Szabó, Cs. How do testing and test-potentiated learning affect medium- and long-term knowledge in abstract algebra? Beküldve a “*European Journal of Psychology of Education*” című újságba

Muzsnay, A., Szabó, Cs., Szeibert, J. (2024). Retrieval practice – a tool to be able to retain higher mathematics even 3 months after the exam. *Annales Mathematicae et Informaticae*. [10.33039/ami.2024.05.002](https://doi.org/10.33039/ami.2024.05.002)

Szabó, C., Bereczky-Zámbó, C., Muzsnay, A., Szeibert, J., & Bernáth, L. (2023). Investigating the efficacy of retrieval practice in university mathematics. *Revista De Educación*, 401(1). <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2023-401-584>

Szabó, C., Bereczky-Zámbó, C., Muzsnay, A., & Szeibert, J. (2020). Students’ non-development in high school geometry. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 52, 309–319. <https://doi.org/10.33039/ami.2020.12.004>

Szeibert, J., Muzsnay, A., Szabó, C., & Bereczky-Zámbó, C. (2022). A Case Study of Using Test-Enhanced Learning as a Formative Assessment in High School Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 623–643. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10264-8>

## 11. Irodalomjegyzék

Abbott, E. E. (1909). On the analysis of the factor of recall in the learning process. *The Psychological Monographs*, 11(1), 159–177. <https://doi.org/10.1037/h0093018>

Adesope, O., Trevisan, D. A., & Sundararajan, N. (2017). Rethinking the Use of Tests: A Meta-Analysis of Practice Testing. *Review of Educational Research*, 87(3), 659–701. <https://doi.org/10.3102/0034654316689306>

Adeniji, S. M., & Baker, P. (2023). Effects of worked example on students' learning outcomes in complex algebraic problems. *International Journal of Instruction*, 16(2), 229–246. <https://doi.org/10.29333/iji.2023.16214a>

Agarwal, P. K., Nunes, L. D., & Blunt, J. R. (2021). Retrieval Practice Consistently Benefits Student Learning: a Systematic Review of Applied Research in Schools and Classrooms. *Educational Psychology Review*, 33(4), 1409–1453. <https://doi.org/10.1007/s10648-021-09595-9>

Agustyaningrun, N., Sari, R. N., Abadi, A. M., & Mahmudi, A. (2021). Dominant Factors that Cause Students' Difficulties in Learning Abstract Algebra: A Case Study at a University in Indonesia. *International Journal of Instruction*, 14(1), 847–866. <https://doi.org/10.29333/iji.2021.14151a>

Arnold, K. M., & McDermott, K. B. (2013). Test-potentiated learning: Distinguishing between direct and indirect effects of tests. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 39(3), 940–945. <https://doi.org/10.1037/a0029199>

Atkinson, R. D., Derry, S. J., Renkl, A., & Wortham, D. (2000). Learning from Examples: Instructional Principles from the Worked Examples Research. *Review of Educational Research*, 70(2), 181–214. <https://doi.org/10.3102/00346543070002181>

Averell, L., & Heathcote, A. (2011). The form of the forgetting curve and the fate of memories. *Journal of Mathematical Psychology*, 55(1), 25–35. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2010.08.009>

Bass, H. (2018). Understanding School Mathematics in Terms of Linear Measure and Discrete Real Additive Groups. In: Wasserman, N. (eds) Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_7)

Bishara, A. J., & Jacoby, L. L. (2008). Aging, spaced retrieval, and inflexible memory performance. *Psychonomic Bulletin & Review*, 15(1), 52–57. <https://doi.org/10.3758/PBR.15.1.52>

Bjork, R. A. (1994). Memory and metamemory considerations in the training of human beings. In J. Metcalfe & A. P. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 185–205). The MIT Press.

Bjork, R. A. (1999). Assessing our own competence: Heuristics and illusions. In D. Gopher & A. Koriat (Eds.), *Attention and performance XVII: Cognitive regulation of performance: Interaction of theory and application* (pp. 435–459). The MIT Press.

Bouwmeester, S., & Verkoeijen, P. P. (2011). Why do some children benefit more from testing than others? Gist trace processing to explain the testing effect. *PsycEXTRA Dataset*. <https://doi.org/10.1037/e520602012-168>

Brewer, G. A., & Unsworth, N. (2012). Individual differences in the effects of retrieval from long-term memory. *Journal of Memory and Language*, 66, 407–415. <https://doi.org/10.1016/j.jml.2011.12.009>

Butler, A. C., Karpicke, J. D., & Roediger, H. L. (2007). The effect of type and timing of feedback on learning from multiple-choice tests. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 13(4), 273–281. <https://doi.org/10.1037/1076-898X.13.4.273>

Butler, A. J. (2010). Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 36(5), 1118–1133. <https://doi.org/10.1037/a0019902>

Brownell, S. E., & Tanner, K. D. (2012). Barriers to Faculty Pedagogical Change: Lack of Training, Time, Incentives, and . . . Tensions with Professional Identity? *CBE- Life Sciences Education*, 11(4), 339–346. <https://doi.org/10.1187/cbe.12-09-0163>

Carpenter, S. K., Lund, T. J. S., Coffman, C. R., Armstrong, P. I., Lamm, M. H., & Reason, R. D. (2015). A classroom study on the relationship between student achievement and Retrieval-Enhanced learning. *Educational Psychology Review*, 28(2), 353–375. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9311-9>

Carpenter, S., Pashler, H., Rohrer, D., & Cepeda N.,J. (2007). Enhancing learning and retarding forgetting: Choices and consequences. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14(2), 187–193. <https://doi.org/10.3758/bf03194050>

Carpenter, S. K. (2009). Cue strength as a moderator of the testing effect: The benefits of elaborative retrieval. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 35(6), 1563-1569. <https://doi.org/10.1037/a0017021>

Chan, J. C. (2010). Long-term effects of testing on the recall of nontested materials. *Memory*, 18(1), 49–57. <https://doi.org/10.1080/09658210903405737>

Chan, J. Y., Meissner, C. A., & Davis, S. L. (2018). Retrieval potentiates new learning: A theoretical and meta-analytic review. *Psychological Bulletin*, 144(11), 1111–1146. <https://doi.org/10.1037/bul0000166>

Clark, R. C., Nguyen, F., & Sweller, J. (2006). Efficiency in learning: Evidence-based guidelines to manage cognitive load. San Francisco: Pfeiffer.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. Second Edition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cole, M. W., & Schneider, W. (2007). The cognitive control network: Integrated cortical regions with dissociable functions. *NeuroImage*, 37(1), 343–360. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2007.03.071>

Dirkx, K. J., Kester, L., & Kirschner, P. A. (2014). The testing effect for learning principles and procedures from texts. *The Journal of Educational Research*, 107(5), 357-364. <https://doi.org/10.1080/00220671.2013.823370>

Donoghue, G. M., & Hattie, J. A. C. (2021). A meta-analysis of ten learning techniques. *Frontiers in Education*, 6, 581216. <https://doi.org/10.3389/educ.2021.581216>

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J., & Willingham, D. T. (2013). Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques. *Psychological Science in the Public Interest*, 14(1), 4–58. <https://doi.org/10.1177/1529100612453266>

Ebbinghaus, H. (1913). Memory: A contribution to experimental psychology. In *Teachers College Press eBooks*. <https://doi.org/10.1037/10011-000>

Eglington, L. G., & Kang, S. H. K. (2018). Retrieval practice benefits deductive inference. *Educational Psychology Review*, 30(1), 215–228. <https://doi.org/10.1007/s10648-016-9386-y>

Even, R. (2011). The relevance of advanced mathematics studies to expertise in secondary school mathematics teaching: practitioners' views. *ZDM Mathematics Education* 43, 941–950. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0346-1>

Fazio, L. K. (2019). Retrieval practice opportunities in middle school mathematics teachers' oral questions. *British Journal of Educational Psychology*, 89(4), 653–669. <https://doi.org/10.1111/bjep.12250>

Feudel, F., Unger, A. (2022). Students' Strategic Usage of Formative Quizzes in an Undergraduate Course in Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00194-9>

Fritz, C. O., Morris, P. E., Nolan, D., & Singleton, J. (2007). Expanding retrieval practice: an effective aid to preschool children's learning. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 60(7), 991 – 1004. <https://doi.org/10.1080/17470210600823595>

Gates, A. I. (1917). Recitation as a factor in memorizing. *Archives of Psychology*, 6(40).

Grimaldi, P. J., & Karpicke, J. D. (2012). When and why do retrieval attempts enhance subsequent encoding? *Memory & Cognition*, 40(4), 505–513. <https://doi.org/10.3758/s13421-011-0174-0>

Hartig, F. (2022). DHARMA: Residual Diagnostics for Hierarchical (Multi-Level / Mixed) Regression Models. R package version 0.4.6, <https://CRAN.R-project.org/package=DHARMA>

Hayward, C. N., Kogan, M., & Laursen, S. L. (2015). Facilitating instructor adoption of Inquiry-Based learning in college mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(1), 59–82. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0021-y>

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: *J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associate

Hopkins, R. F., Lyle, K. B., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. (2016). Spaced retrieval practice increases college students' short-and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review*, 28(4), 853–873. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9349-8>

Izawa, C. (1966). Reinforcement-test sequences in paired-associate learning. *Psychological Reports*, 18(3), 879–919. <https://doi.org/10.2466/pr0.1966.18.3.879>

Jacoby, L. L., Wahlheim, C. N., & Coane, J. H. (2010). Test-enhanced learning of natural concepts: Effects on recognition memory, classification, and metacognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 36(6), 1441–1451. <https://doi.org/10.1037/a0020636>

Karpicke, J. D. (2017). Retrieval-Based Learning: A Decade of Progress. In *Elsevier eBooks* (pp. 487–514). <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-809324-5.21055-9>

Karpicke, J. D., & Aue, W., R. (2015). The testing effect is alive and well with complex materials. *Educational Psychology Review*, 27, 317–326. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9309-3>

Karpicke, J. D., & Blunt, J. R. (2011). Retrieval practice produces more learning than elaborative studying with concept mapping. *Science (New York, N.Y.)*, 331(6018), 772–775. <https://doi.org/10.1126/science.1199327>

Karpicke, J. D., & Grimaldi, P. J. (2012). Retrieval-Based Learning: A perspective for Enhancing Meaningful learning. *Educational Psychology Review*, 24(3), 401–418. <https://doi.org/10.1007/s10648-012-9202-2>

Kalyuga, S., Renkl, A., & Paas, F. (2010). Facilitating flexible problem solving: A cognitive load perspective. *Educational Psychology Review*, 22, 175–186. <http://dx.doi.org/10.1007/s10648-010-9132-9>

Keresztes, A., Kaiser, D., Kovács, G., & Racsmany, M. (2014). Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas. *Cerebral Cortex*, 24(11), 3025–3035. <https://doi.org/10.1093/cercor/bht158>

Kliegl, O., & Bäuml, K. T. (2016). Retrieval practice can insulate items against intralist interference: Evidence from the list-length effect, output interference, and retrieval-induced forgetting. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 42(2), 202–214. <https://doi.org/10.1037/xlm0000172>

Koriat, A., & Bjork, R. A. (2005). Illusions of Competence in Monitoring One's Knowledge During Study. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 31(2), 187–194. <https://doi.org/10.1037/0278-7393.31.2.187>

Köhler, W. (1947). *Gestalt psychology: An introduction to new concepts in modern psychology*. New York: Liveright.

Kromann, C. B., Jensen, M. L., & Ringsted, C. (2009). The effect of testing on skills learning. *Medical Education*, 43(1), 21–27. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2923.2008.03245.x>

Kyllonen, P., Kell, H. (2017). What Is Fluid Intelligence? Can It Be Improved? In: Rosén, M., Yang Hansen, K., Wolff, U. (eds) *Cognitive Abilities and Educational Outcomes. Methodology of Educational Measurement and Assessment*. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-43473-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-43473-5_2)

Larsen, D. P., Butler, A. C., & Roediger, H. L., 3rd (2013). Comparative effects of test-enhanced learning and self-explanation on long-term retention. *Medical education*, 47(7), 674–682. <https://doi.org/10.1111/medu.12141>

Leahy, W., Hanham, J., & Sweller, J. (2015). High Element Interactivity Information During Problem Solving may Lead to Failure to Obtain the Testing Effect. *Educational Psychology Review*, 27(2), 291–304. <http://www.jstor.org/stable/43548475>

Lenth, R. (2024). Emmeans: Estimated Marginal Means, aka Least-Squares Means. R package version 1.10.0, <https://CRAN.R-project.org/package=emmeans>

Little, J. L., Storm, B. C., & Bjork, E. L. (2011). The costs and benefits of testing text materials. *Memory*, 19(4), 346-359. <https://doi.org/10.1080/09658211.2011.569725>

Lockwood, E., Delarquette, A. F., Asay, A., & Thomas, M. (2016). Algorithmic thinking: An initial characterization of computational thinking in mathematics. In *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 1588–1595). Tucson: AZ: The University of Arizona.

Logan, J. M., & Balota, D. A. (2008). Expanded vs. equal interval spaced retrieval practice: Exploring different schedules of spacing and retention interval in younger and older adults. *Aging, Neuropsychology, and Cognition*, 15(3), 257-280. <https://doi.org/10.1080/13825580701322171>

Lyle, K. B., & Crawford, N. (2011). Retrieving Essential Material at the End of Lectures Improves Performance on Statistics Exams. *Teaching of Psychology*, 38(2), 94–97. <https://doi.org/10.1177/0098628311401587>

Lyle, K. B., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. (2016). Spaced retrieval practice increases college students' short- and long-term retention of Mathematics Knowledge. *Educational Psychology Review*, 28(4), 853–873. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9349-8>

Lyle, K. B., Bego, C. R., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. (2020). How the amount and spacing of retrieval practice affect the short- and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review*, 32, 277–295. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09489-x>

Ma, L. (2020). Knowing and Teaching Elementary Mathematics. In: *Routledge eBooks*. <https://doi.org/10.4324/9781003009443>

Maddox, G., Balota, D., Coane, J., & Duchek, J. (2011). The Role of Forgetting Rate in Producing a Benefit of Expanded Over Equal Spaced Retrieval in Young and Older Adults. *Psychology and Aging* 26(3):661-70. <https://doi.org/10.1037/a0022942>

Martínez-Sierra, G., García-García, J., Valle-Zequeida, M., & Dolores-Flores, C. (2020). High school mathematics teachers' beliefs about assessment in mathematics and the connections to their mathematical beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 485–507. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09967-2>

May, B. M. (2021). Effects of spaced, repeated retrieval practice and test-potentiated learning on mathematical knowledge and reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(1), 92–107. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1961034>

McDaniel, M. A., Anderson, J. L., Derbish, M. H., & Morrisette, N. (2007). Testing the testing effect in the classroom. *European Journal of Cognitive Psychology*, 19(4-5), 494–513. <https://doi.org/10.1080/09541440701326154>

McDaniel, M. A., Howard, D. L., & Einstein, G. O. (2009). The Read-Recite-Review Study Strategy. *Psychological Science*, 20(4), 516–522. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2009.02325.x>

McDaniel, M. A., Thomas, R. C., Agarwal, P. K., McDermott, K. B., & Roediger, H. L. (2013). Quizzing in middle-school science: Successful transfer performance on classroom exams. *Applied Cognitive Psychology*, 27(3), 360–372. <https://doi.org/10.1002/acp.2914>

McDaniel, M. A., Bugg, J. M., Liu, Y., & Brick, J. (2015). When does the test-study-test sequence optimize learning and retention? *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 21(4), 370–382. <https://doi.org/10.1037/xap0000063>

McDermott, K. B., Agarwal, P. K., D'Antonio, L., Roediger, H. L., III., & McDaniel, M. A. (2014). Both multiple-choice and short-answer quizzes enhance later exam performance in middle and high school classes. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 20(1), 3–21. <https://doi.org/10.1037/xap0000004>

McDermott, K. B. & Roediger, H. L. (2023). *Memory (Encoding, storage, retrieval)*. (n.d.). Noba. <https://noba.to/bdc4uger>

Melton, A.W. (1963). Implications of short-term memory for a general theory of memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 2, 1-21.

Metcalf, J., & Kornell, N. (2007). Principles of Cognitive Science in Education: The Effects of Generation, Errors, and Feedback. *Psychonomic Bulletin and Review*, 14, 225-229. <https://doi.org/10.3758/bf03194056>

Metcalf, J., & Kornell, N. (2009). Delayed versus immediate feedback in children's and adults' vocabulary learning. *Memory & Cognition*, 37(8), 1077-1087. <https://doi.org/10.3758/mc.37.8.1077>

Murre, J. M. J., & Dros, J. (2015). Replication and Analysis of Ebbinghaus' Forgetting Curve. *PLoS ONE*, 10(7), e0120644. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0120644>

Muzsnay, A., Zámbo, Cs., Szeibert, J., Bernáth, L., Szilágyi, B., Szabó, Cs. How do testing and test-potentiated learning affect medium- and long-term knowledge in abstract algebra? Beküldve a "European Journal of Psychology of Education" című újságba

Muzsnay, A., Szabó, Cs., Szeibert, J. (2024) Retrieval practice – a tool to be able to retain higher mathematics even 3 months after the exam. *Annales Mathematicae et Informaticae*. [10.33039/ami.2024.05.002](https://doi.org/10.33039/ami.2024.05.002)

Orr, R., & Foster, S. (2017). Increasing student success using online quizzing in introductory (majors) biology. *CBE Life Sciences Education*, 12(3), 509–514. <https://doi.org/10.1187/cbe.12-10-0183>

Pajkossy, P., Szöllösi, Á., & Racsmány, M. (2019). Retrieval practice decreases processing load of recall: Evidence revealed by pupillometry. *International journal of psychophysiology: official journal of the International Organization of Psychophysiology*, 143, 88–95. <https://doi.org/10.1016/j.ijpsycho.2019.07.002>

Racsmány, M., & Keresztes, A. (2015). Initial retrieval shields against retrieval-induced forgetting. *Frontiers in Psychology*, 6, 657. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00657>

Racsmány, M., Szöllösi, Á., & Bencze, D. (2018). Retrieval practice makes procedure from remembering: An automatization account of the testing effect. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*. <https://doi.org/10.1037/xlm0000423>

Rawson, K. A., & Kintsch, W. (2005). Rereading Effects Depend on Time of Test. *Journal of Educational Psychology*, 97(1), 70–80. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.97.1.70>

Rawson, K. A. (2015). The status of the testing effect for complex materials: still a winner. *Educational Psychology Review*, 27(2), 327–331. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9308-4>

Rawson, K. A., Vaughn, K. E., Walsh, M., & Dunlosky, J. (2018). Investigating and explaining the effects of successive relearning on long-term retention. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 24(1), 57-71. <https://doi.org/10.1037/xap0000146>

Renkl, A. (2014). Toward an Instructionally Oriented Theory of Example-Based Learning. *Cognitive Science*, 38(1), 1–37. <https://doi.org/10.1111/cogs.12086>

Roediger, H. L., & Butler, A. C. (2011). The critical role of retrieval practice in long-term retention. *Trends in Cognitive Sciences*, 15(1), 20–27. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.003>.

Roediger, H. L., 3rd, & Karpicke, J. D. (2006). The Power of Testing Memory: Basic Research and Implications for Educational Practice. *Perspectives on psychological science : a journal of the Association for Psychological Science*, 1(3), 181–210. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6916.2006.00012.x>

Roediger, H. L., Putnam, A. L., & Smith, M. (2011). Ten Benefits of Testing and Their Applications to Educational Practice. In *Elsevier eBooks* (pp. 1–36). <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-387691-1.00001-6>

Rohrer, D., Taylor, K., & Sholar, B. (2010). Tests enhance the transfer of learning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 36(1), 233-239. <https://doi.org/10.1037/a0017678>

Rowland, C. (2014). The effect of testing versus restudy on retention: A meta-analytic review of the testing effect. *Psychological Bulletin*, 140(6), 1432–1463. <https://doi.org/10.1037/a0037559>

R Core Team (2023). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org>

Schmidmaier, R., Ebersbach, R., Schiller, M., Hege, I., Holzer, M., & Fischer, M. R. (2011). Using electronic flashcards to promote learning in medical students: Retesting versus restudying. *Medical Education*, 45(11), 1101-1110. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2923.2011.04043.x>

Smith, M. A., & Karpicke, J. D. (2013). Retrieval practice with short-answer, multiple-choice, and hybrid tests. *Memory*, 22(7), 784-802. <https://doi.org/10.1080/09658211.2013.831454>

Spitzer, H. F. (1939). Studies in retention. *Journal of Educational Psychology*, 30(9), 641–656. <https://doi.org/10.1037/h0063404>

Sumowski, J. F., Chiaravalloti, N., & Deluca, J. (2010). Retrieval practice improves memory in multiple sclerosis: clinical application of the testing effect. *Neuropsychology*, 24(2):267-272. <https://doi.org/10.1037/a0017533>

Sweller, J. (1988). Cognitive Load During Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257–285. [https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202\\_4](https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4)

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, 22, 123–138. <http://dx.doi.org/10.1007/s10648-010-9128-5>

Szabó, C., Bereczky-Zámbó, C., Muzsnay, A., Szeibert, J., & Bernáth, L. (2023). Investigating the efficacy of retrieval practice in university mathematics. *Revista De Educación*, 401(1). <https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2023-401-584>

Szeibert, J., Muzsnay, A., Szabó, C., & Bereczky-Zámbó, C. (2022). A Case Study of Using Test-Enhanced Learning as a Formative Assessment in High School Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 623–643. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10264-8>

Szeibert, J. (2023). Középiskolások geometriai megértési szintje és annak fejlesztése a kognitív idegtudományi eredmények alkalmazásával. *Doktori értekezés*

Szpunar, K. K., McDermott, K. B., & Roediger, H. L. (2008). Testing during study insulates against the buildup of proactive interference. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 34(6), 1392–1399. <https://doi.org/10.1037/a0013082>

Tran, R., Rohrer, D., & Pashler, H. (2015). Retrieval practice: The lack of transfer to deductive inferences. *Psychonomic Bulletin & Review*, 22(1), 135–140. <https://doi.org/10.3758/s13423-014-0646-x>

Tse, C., Balota, D. A., & Roediger, H. L. (2010). The benefits and costs of repeated testing on the learning of face–name pairs in healthy older adults. *Psychology and Aging*, 25(4), 833–845. <https://doi.org/10.1037/a0019933>

Van Gog, T., & Kester, L. (2012). A Test of the Testing Effect: Acquiring Problem-Solving Skills From Worked Examples. *Cognitive Science*, 36(8), 1532–1541. <https://doi.org/10.1111/cogs.12002>

Van Gog, T., Kester, L., Dirkx, K., Hoogerheide, V., Boerboom, J., & Verkoeijen, P. P. J. L. (2015). Testing after worked example study does not enhance delayed problem-solving performance compared to restudy. *Educational Psychology Review*. doi:[10.1007/s10648-015-9297-3](https://doi.org/10.1007/s10648-015-9297-3)

Van Gog, T., & Sweller, J. (2015). Not new, but nearly forgotten: The testing effect decreases or even disappears as the complexity of learning materials increases. *Educational Psychology Review*, 27(2), 247–264. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9310-x>

Van Gog, T., & Rummel, N. (2010). Example-Based Learning: Integrating Cognitive and Social-Cognitive Research Perspectives. *Educational Psychology Review*, 22(2), 155–174. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9134-7>

Veith, J. M., Bitzenbauer, P., & Girnat, B. (2022). Exploring Learning Difficulties in Abstract Algebra: The Case of Group Theory. *Education Sciences*, 12(8), 516. <https://doi.org/10.3390/educsci12080516>

Wasserman, N. H. (2018). Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers. In: *Research in mathematics education*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3>

Weiner, B. (1966). Effects of motivation on the availability of memory traces. *Psychological Bulletin*, 65, 24–37.

Wingfield, A. (2016). Evolution of models of working memory and cognitive resources. *Ear And Hearing*, 37(1), 35S-43S. <https://doi.org/10.1097/aud.0000000000000310>

Wissman, K. T., & Rawson, K. A. (2018). Test-potentiated learning: three independent replications, a disconfirmed hypothesis, and an unexpected boundary condition. *Memory (Hove, England)*, 26(4), 406–414. <https://doi.org/10.1080/09658211.2017.1350717>

Wissman, K. T., Zamary, A., & Rawson, K. A. (2018). When does practice testing promote transfer on deductive reasoning tasks? *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, 7(3), 398–411. <https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2018.03.002>

Yeo, D. J., & Fazio, L. K. (2019). The optimal learning strategy depends on learning goals and processes: Retrieval practice versus worked examples. *Journal of Educational Psychology*, 111(1), 73–90. <https://doi.org/10.1037/edu0000268>

Yue, N. (2017). Computer multimedia assisted English vocabulary teaching courseware. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (Ijet)*, 12(12), 67. <https://doi.org/10.3991/ijet.v12i12.7955>

Zaromb, F. M., & Roediger, H. L. (2010). The testing effect in free recall is associated with enhanced organizational processes. *Memory & Cognition*, 38(8), 995–1008. <https://doi.org/10.3758/mc.38.8.995>

Zhuang, L., Wang, J., Xiong, B., Bian, C., Lei, H., Bayley, P. J., & Qin, S. (2021). Rapid neural reorganization during retrieval practice predicts subsequent long-term retention and false memory. *Nature Human Behaviour*, 6(1), 134–145. <https://doi.org/10.1038/s41562-021-01188-4>

# 11. Függelék

## A: Algebra és Számelmélet 1. tantárgy tematikája

- Egész számok oszthatósága, felbonthatatlan és prímszám, összetett szám, a páros számok számelmélete. Maradékos osztás, euklideszi algoritmus, kitüntetett közös osztó és közös többszörös, prímek és felbonthatatlanok kapcsolata. A számelmélet alaptétele, kanonikus alak, ezek következményei.
- Kongruenciák, maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszerek. Számelméleti függvények: osztók száma és összege, Euler-függvény, ezek multiplikatívítása, képleteik. Lineáris kongruenciák, lineáris kongruenciarendszerek, lineáris diofantikus egyenlet. oszthatósági szabályok (2, 4, 8, 5, 25, 3, 9, 11). Euler-Fermat-tétel, Wilson-tétel.
- Elemi algebrai azonosságok: két tag összegének (különbségének) négyzete, köbe. Az  $n$ -edik hatványok különbségének szorzattá alakítása, mértani sorozat. A racionális kitevőjű hatvány fogalma, a hatványozás azonosságai. Mersenne-prímek, Fermat-prímek, tökéletes számok. Végtelen sok  $4k-1$  alakú prím létezése, Dirichlet tétele (bizonyítás nélkül). Hézag-tétel. Pitagoraszai számhármak, Fermat problémakör. Rend, tulajdonságok, hatvány rendje. Mersenne- és Fermat-számok osztói. Nevezetes számelméleti problémák.
- Oszlopvektorok, mátrixok, összeg, szorzat, transzponált, ezek tulajdonságai.
- Ajánlott irodalom:  
Freud Róbert, Gyarmati Edit: *Számelmélet*. Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.  
Freud Róbert: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös kiadó, 2009.

## B: Algebra és Számelmélet 1. félévvégi dolgozat

1. Határozd meg az alábbi kongruencia-rendszer összes 100-nál kisebb pozitív megoldását!

$$10x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{9}.$$

2. Határozd meg a  $73737311^{99993330002}$  szám 73-mal vett maradékát VAGY a  $2017^{1111^{1212}}$  szám 43-mal vett maradékát!
3. Tudjuk, hogy a 11 primitív gyök modulo 29. Igaz-e, hogy  $11^5$  és  $11^7$  is primitív gyökök modulo 29?
4. Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása az egész számok között:

$$10!x^{10} + 12y^{20} + 110z^{1211} = 44z^{2017} + 6.$$

5. Feladat: Mely pozitív  $n$  egészekre igaz az, hogy  $\sigma(3n) = \sigma(n) + 24$ ?

## C: Algebra és Számelmélet 1. utóteszt

1. Határozzuk meg a  $2346235^{226688442}$  szám 23-mal vett maradékát!
2. Határozzuk meg a  $3x^{16} - 4y^{48} + 17z^{2012} = 34172$  egyenlet összes megoldását az egész számok körében!
3. Mely  $a, b$  számjegyekre lesz a  $\overline{a97531ba}$  szám osztható 55-tel?
4. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert:

$$2x \equiv 8 \pmod{14}$$

$$x \equiv 7 \pmod{11}.$$

## D: Algebra és Számelmélet 2. tantárgy tematikája

- Komplex számok: műveletek, nullosztómentesség, konjugált, abszolút érték, négyzetgyökvonás. Trigonometrikus alak, hatványozás és gyökvonás, egységgyökök, primitív egységgyökök. Alkalmazások geometriai feladatok megoldására. A komplex számok testet alkotnak. Példák testekre. Lineáris egyenletrendszer test fölött, Gauss-elimináció (gyakorlaton), mátrix inverzének kiszámítása.
- A test fölötti polinom fogalma. Egyenlőség, főegyüttható, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. A gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele végtelen test fölött. Polinomfüggvény és polinom kapcsolata. Gyök multiplicitása, gyöktényező alak. Lagrange-interpoláció. Egész együtthatós polinom racionális gyökeinek meghatározása. A gyökök és együtthatók összefüggése. Többhatározatlanú polinomok, a szimmetrikus polinomok alaptétele (bizonyítás nélkül), hatványösszegek. A polinomiális tétel.
- A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete, ebben a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis. A negyedfokú egyenlet (csak vázlat). Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek. Abszolútértékes egyenletek. Gyökös egyenletek. Két és három ismeretlenes egyenletrendszerek. Racionális törtfüggvények, parciális törtekre bontás.
- Ajánlott irodalom: Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába*. *TypoTeX kiadó*, 2007. Információk, kiegészítések

## E: Algebra és Számelmélet 2. félévközi dolgozat

- Milyen  $a \in \mathbb{Z}_7$ -re nem lesz megoldása az alábbi  $\mathbb{Z}_7$  fölötti egyenletrendszernek?
$$\begin{aligned}2x + 14y + 8z &= 2 \\ x + 4y + z &= 1 \\ 3x + y + az &= 5\end{aligned}$$
- Mennyi  $\left| \frac{(\sqrt{3}+3i)^{2018}}{(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{2018}} \right|$ ?
- Bontsuk föl az  $x^8 + x^4 + 1$  polinomot a valós test fölött irreducibilisek szorzatára!
- Adjuk meg az  $x^7 + 2x^6 + 125x + 250$  polinom gyöktényezős alakját a komplex számtest fölött.
- Bontsuk föl az  $x^6 - 1$  polinomot gyöktényezős alakra  $\mathbb{Z}_{19}$  fölött!
- Hol helyezkednek el azok a  $z$  complex számok a síkon, amelyekre:
$$|z + 4 - 8i| = |z + 8i|$$
- A gonosz boszorkány azt állította egy egész együtthatós egyenletrendszerrel, hogy  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  és  $\mathbb{C}$  közül pontosan kettő fölött van megoldása.
  - Igazolja, hogy a boszorkány hazudik!
  - Mutasson példát olyan egyenletrendszerre, amelynek a fentiek közül pontosan három fölött van megoldása!

## F: Algebra és Számelmélet 2. félévvégi dolgozat

- Számoljuk ki a  $\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_9$  polinomot, ahol  $\phi_n$  az  $n$ -edik körosztási polinomot jelöli!
- Adjunk meg egy olyan  $\mathbb{Z}$  fölött irreducibilis polinomot, aminek gyöke a  $\sqrt[3]{2} + 1$ ! (Ne felejtse el igazolni, hogy a polinom irreducibilis!)
- Bontsuk föl az  $x^{16} + x^{12} + x^8 + 1$  polinomot  $\mathbb{Z}_2$  fölött irreducibilisek szorzatára!
- A gonosz boszorkány azt állította az  $x^{32} - 6x^{31} + 42x^{30} + 2x^{27} + \dots$  32-edfokú polinomról, hogy a ... helyén olyan további tagok vannak, hogy ennek a polinomnak 32 egész gyöke van. Igazoljuk, hogy a boszorkány hazudik!
- Bontsuk föl az  $x^8 + x^4 + 1$  polinomot a valós test fölött irreducibilisek szorzatára!

## G: Algebra és Számelmélet 2. utóteszt

- Bontsuk föl az  $x^{12} + x^8 + 1$  polinomot  $\mathbb{Z}_2$  felett irreducibilis polinomok szorzatára!
- Igazoljuk, hogy az  $x^8 + x^4 + 1$  polinom minden gyöke egységgyök  $\mathbb{C}$  fölött és határozzuk meg a gyökök rendjét!
- Adjuk meg az összes olyan  $d$  egész számot, amelyre a  $4x^6 + dx + 2$  polinomnak van valós pozitív gyöke!

## H: Etikai kódex

A disszertációban bemutatott mindhárom kísérletet az ELTE etikai kódexének megfelelően végeztük el (<https://www.elte.hu/content/etikai-kodex.t.14995?m=691>), az adatgyűjtés az ELTE Adatvédelmi Iroda szabályainak megfelelően történt (<https://adatvedelem.elte.hu/>).

Az egyes kísérletek résztvevőit kellőképpen tájékoztattuk a kísérlettel, annak körülményeivel kapcsolatban. A tájékoztatást követően a résztvevők a kutatásban való részvételi szándékukat írásos beleegyező nyilatkozattal is megerősítették. Bár az utótesztek időpontját előzetesen nem jelentettük be, mert az befolyásolta volna az utóteszten kapott eredményeket, az utóteszt napján minden résztvevő beleegyezett annak megírásába. Az utóteszten való rossz teljesítmény semmilyen negatív következménnyel nem járt. Az egyes vizsgálatokban végzett valamennyi eljárás megfelelt az etikai normáknak, és az ELTE Pedagógiai és Pszichológiai Kar Kutatási Etikai Bizottsága jóváhagyta azokat (2018/450 ELTE PPK Kutatásetikai Bizottsága).

## I: Alkalmazott statisztikai jelölések – jelmagyarázat

Statisztikai jelölés	Magyarázat
$M$	átlag
$SD$	szórás
$F$	F-próba függvény
$p$	p-érték: a valószínűsége annak, hogy a null-hipotézis nem volt helyes
$\eta_p^2$	Parciális $\eta^2$ : a minta hatásnagyságát méri
$t$	t-próba függvény
$d$	hatásméret
$r$	Pearson-féle r, korrelációs együttható