



A centrálaxonometrikus leképezés és komputergrafikai alkalmazása

PhD értekezés

Dr. Schwarcz Tibor

Debreceni Egyetem

Debrecen, 2006.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematikai és Számítástudományi Doktori Iskola Informatika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2006. szeptember 1.

A jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Dr. Schwarcz Tibor doktorjelölt 2002-2006 között a fent megnevezett Doktori Iskola Informatika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2006. szeptember 1.

A témavezető aláírása

TARTALOMJEGYZÉK

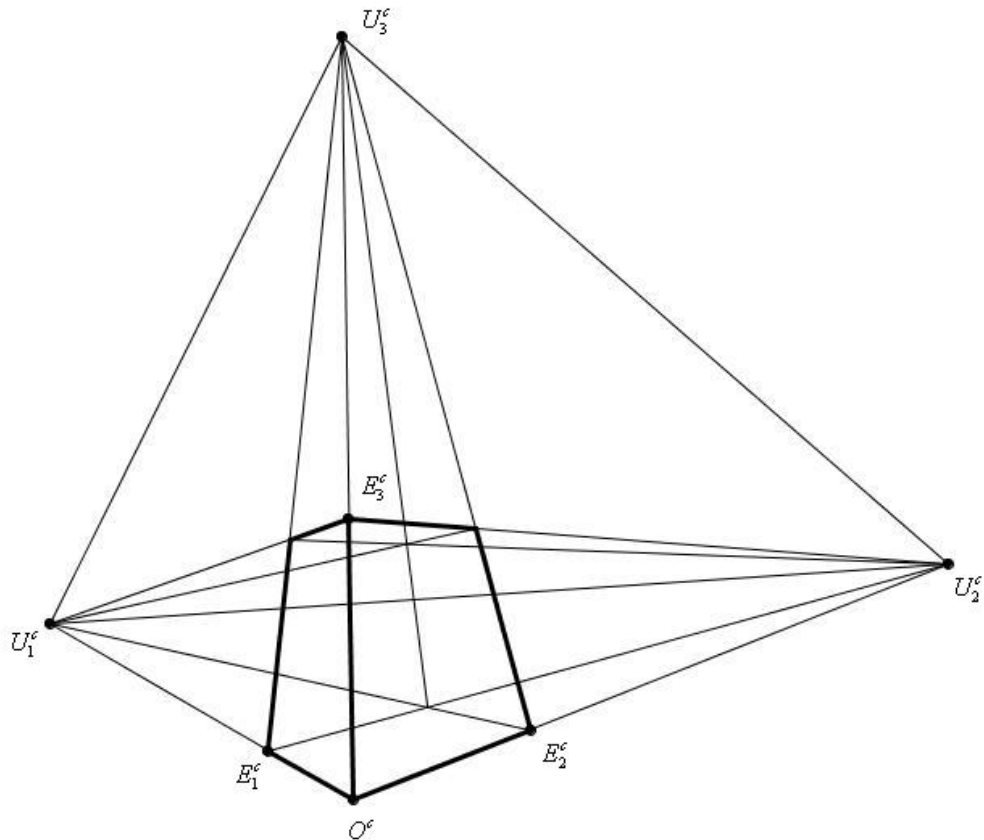
BEVEZETÉS	1
1. A TÉMAKÖR FONTOSABB EREDMÉNYEINEK ÖSSZEFOGLALÁSA	5
2. LEKÉPEZÉSI TRANSZFORMÁCIÓK ELŐÁLLÍTÁSA	12
2.1. VETÍTÉSI IRÁNY MEGHATÁROZÁSA PARALEL AXONOMETRIA ESETÉBEN	12
2.2. KÉPPONT ELŐÁLLÍTÁSA A CENTRÁLAXONOMETRIKUS ALAPALAKZATBÓL PROJEKTÍV ALAPOKON.....	14
2.3. SPECIÁLIS LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ MÁTRIXREPREZENTÁCIÓJÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA A CENTRÁLAXONOMETRIKUS ALAPALAKZATBÓL	17
2.4. LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXREPREZENTÁCIÓJÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA A CENTRÁLAXONOMETRIKUS ALAPALAKZATBÓL	21
2.5. ÁLTALÁNOS SÍKRA TÖRTÉNŐ LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ MÁTRIXREPREZENTÁCIÓJÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA A CENTRÁLAXONOMETRIKUS ALAPALAKZATBÓL. 22	
2.6. CENTRUM MEGHATÁROZÁSA	22
3. CENTRÁLAXONOMETRIÁK OSZTÁLYOZÁSA	25
3.1. VALÓS SAJÁTÉRTÉKEK	25
3.2. KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKEK	26
3.3. CENTRÁLAXONOMETRIA MEGADÁSA	26
4. CENTRÁLAXONOMETRIA ÉS CENTRÁLPROJEKCIÓ KAPCSOLATA	29
4.1. VETÍTÉS AZ $\{x, y\}$ KOORDINÁTASÍKRA.....	34
4.2. VETÍTÉS ÁLTALÁNOS HELYZETŰ KÉPSÍKRA	35
5. CENTRÁLAXONOMETRIAI TÉTELEK BIZONYÍTÁSA	37
5.1. A KÉPSÍK PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA	37
5.2. AZ ORTOGONÁLIS (PARALEL) AXONOMETRIA ALAPTÉTELE.....	39
5.3. STIEFEL-FÉLE KRITÉRIUM.....	40
5.4. SZABÓ KRITÉRIUM.....	41

MELLÉKLETEK	49
I. CENTRÁLAXONOMETRIKUS KÉP PROJEKTÍV ÁBRÁZOLÓGEOMETRIAI ALAPOKON	49
II. KOCKA CENTRÁLAXONOMETRIKUS KÉPE. C++ KÓD	58
III. A KÉPSÍK ELTOLÁSA	72
IV. ORTOGONÁLIS AXONOMETRIA.....	75
V. SZABÓ TÉTEL.....	79
IRODALOMJEGYZÉK.....	96
PUBLIKÁCIÓK ÉS ELŐADÁSOK	98

Bevezetés

Az 1853-ban megfogalmazott Pohlke tétel kimondja, hogy a rajz síkjának bármely O' pontjából kiinduló $\overline{O'E'_x}, \overline{O'E'_y}, \overline{O'E'_z}$ szakasza mindig tekinthető egy $O(E_x E_y E_z)$ derékszögű megfelelő méretű egyenlőszárú koordinátatengelykereszt paralel projekciójának, amennyiben az egyes szakaszok különböző egyenesekre esnek. A tétel alapjául szolgált az úgynevezett axonometrikus ábrázolás precíz matematikai megalapozásának. A tétel ezen formában magasabb dimenzióra nem általánosítható. További megfogalmazásai is ismertek, melyek közül a legáltalánosabb a következő: Egy alakzat axonometrikus képe mindig hasonló az alakzat valamely paralel projekciójához. Érdekességként említjük meg, hogy a tételt a névadója nem tudta bebizonyítani. Ma kb. 30 bizonyítás ismert, ami a tétel rendkívüli fontosságát emeli ki.

A látás geometriájának jobban megfelelő centrálprojekciós (perspektivikus) képek előállítása az ábrázoló geometria szintén nagy fejezete. A 20. század elején kialakult projektív ábrázoló geometria is egy térbeli $O(E_x E_y E_z)$ tengelykeresztből indul ki, annak „projektív képét” megadva adható meg a leképezés. Az 1. ábrán látható konfigurációt *projektív tengelykeresztnek* (centrálaxonometrikus alapalakzatnak) nevezzük, ha az $O^c E_i^c U_i^c$ $i=1,2,3$ közönséges pontok páronként különbözőek és kollineárisak, valamint az U_i^c pontok közül legalább egy közönséges pont. Jelölése $\phi: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$



1. ábra

Magának a leképezésnek a definíciója megtalálható [KRU23] 185. oldalán., vagy [SZA78]-ban. Röviden a lényeg az, hogy a térbeli Descartes-rendszer egy P pontjához tartozó koordináta hasáb leképezettje a kettősviszony invariancia alapján egyértelműen előáll.

Míg az axonometrikus leképezés a valós Euklideszi teret képezi le az euklideszi síkra, addig a projektív ábrázoló geometria vagy másképpen centrálaxonometria a valós projektív teret képezi le annak egy síkjára. Ebben a témakörben a projektív teret illetve síkot az euklideszi tér illetve sík kibővítéseként célszerű kezelni. A centrálaxonometria tehát a paralel axonometria természetes általánosítása képen fogható fel. Megalapozása E. Kruppa nevéhez fűződik [KRU23]. További eredmények kapcsolódnak Stiefel, F. Hohenberg, H. Brunner nevéhez.

Felmerül a kérdés, hogy az axonometrikus kép és a paralel projekció közötti kapcsolathoz hasonlóan milyen kapcsolat van egy alakzat centrális képe és az alakzat centrálaxonometrikus képe között. Elmondható, hogy egy projektív tengelykeresztnek speciális feltételeket kell kielégítenie ahhoz, hogy az alakzat centrálaxonometrikus képe centrális projekció legyen. Ha pl. az iránypontok háromszöge nem hegyesszögű, biztos, hogy az nem lehet derékszögű koordináta-rendszer centrális vetülete. Erre vonatkozóan az első eredmény Kruppától származik, 1923-ból [KRU23]. A későbbiekben, egészen napjainkig több tétel született e témában. Kiemelendő ezek közül Szabó József 1994-ben publikált eredménye [SZA94] (Társszerzők: H. Stachel, H. Vogel).

A problémakört számítógépi grafikai oldalról közelítve fontos aspektus lehet gyakorlati szempontból használható eredmények produkálása. A grafika a lineáris leképezések megvalósítására azok mátrix reprezentációját használja. A háromdimenziós Euklideszi teret kibővítjük végtelen távoli elemekkel. A 3 dimenziós projektív teret a valós 4 dimenziós vektortérbe ágyazzuk be, a projektív tér pontjainak reprezentálása a zérus vektortól különböző 4 dimenziós vektortér vektorainak egy-egy osztályával történik. Egy osztályba tartoznak a lineárisan függő vektorok. Vagy másképp az egymással arányos számnégyesek ugyanazt a pontot reprezentálják. Ezeket a koordinátákat nevezzük a pontok homogén koordinátáinak. Ha a pont negyedik koordinátája nem zérus, akkor a pont \mathbb{E}^3 -nak is pontja, egyébként a pont végtelen távoli pont. A végesben lévő pontok inhomogén koordinátáit megkapjuk, ha a negyedik koordinátával elosztjuk a pont első három koordinátáját: $y_i = \frac{x_i}{x_4}$, ahol $x_4 \neq 0$.

A dolgozatban röviden összefoglalom a centrálaxonometriával kapcsolatos jelentősebb eddigi eredményeket, valamint a lineáris leképezések irányából megközelítve a témát, komputergrafikai alkalmazhatóság szempontjából használható kritériumokat adok arra nézve, egy lineáris leképezés mikor centrálprojekció. Ennek alkalmazásával bizonyítom az [SZA94]-ben publikált tételt.

A leképezések mátrix reprezentációját megadva a komputerrel történő számítások egyszerűen elvégezhetők. Az ismertető módszer alapján egyszerűen állíthatók elő a grafikai irodalmakban szereplő ismert centrálprojekciós leképezések. Ezeket konkrét példákkal illusztrálom. Adott projektív tengelykereszt esetén előállítok egy lineáris leképezést, amely egy speciális térbeli tengelykeresztet a megadottba visz, természetesen a tengelyek iránypontjait is beleértve.

Speciális esetként az axonometrikus leképezések kezelése is megvalósul.

Módszert adok arra nézve, hogy ha egy projektív tengelykereszt által definiált kép centrális kép, a rajz síkjához rögzített koordinátarendszerben mi lesz a centrum előállítása. Ezen utóbbi eredmény hozzájárul ahhoz, hogy centrálaxonometriában is alkalmazhassunk láthatósági eljárásokat.

1. A témakör fontosabb eredményeinek

összefoglalása

Az axonometrikus ábrázolás fejlődése torkollott a centrálaxonometriába. Szabó József kandidátusi értekezésében 1978-ban írta, hogy „*Az axonometrikus ábrázolás fejlődését a [CSET47] munkájában négy szakaszra osztja és ennek 1910-ben kezdődő és napjainkig tartó szakasza a centrál axonometria*” [SZJ78]. A megállapítás ma is áll, ugyanis a 1992-től kezdődően igen jelentős eredmények születtek, az általam ismert legújabb 2004-ben, H. Stachel által [STA2004].

A témában alaplűnek tekinthető Müller, E., és E. Kruppa: „Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd.:E Kruppa: Die linearen Abbildungen, Wien, (1923)” című műve. Innen származik az alábbi két fontos tétel:

T1 *Minden perspektív háromszögpar tekinthető egy olyan ortonormált bázis lineáris (centrálaxonometrikus) képeinek, mely egybevágó egy előre adott ortonormált vektorhármassal.* ([KRU23], 184. o. 1. tétel)

Másképpen fogalmazva mindig létezik adott egységű ortonormált bázis, melynek projektív leképezése az adott centrálaxonometrikus tengelykereszt.

T2 *Minden perspektív háromszögpar tekinthető egy olyan projektív koordinátarendszer lineáris (centrálaxonometrikus) képeinek, mely egybevágó egy előre adott projektív koordinátarendszerrel.* ([KRU23], 184. o. 2. tétel)

Stiefel fontos tételei az alábbiak:

T3 *A centrálaxonometrikus leképezés egyenes és kettősviszony tartó* ([STI71], 134.o)

T4 Egy alakzat centrálaxonometrikus képe mindig projektív az alakzat centrális vetületéhez. ([STI71], 134.o)

T5 Ha az iránypontok nem kollineárisak, akkor az alakzat centrálaxonometrikus képe affin az alakzat egy centrális vetületéhez. ([STI71], 134.o)

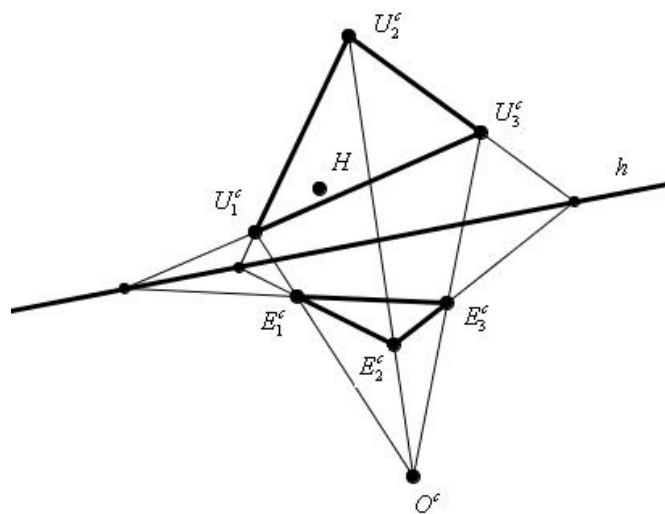
T6 Egy alakzat centrálaxonometrikus képe általában nem egyezik meg az alakzat centrális projekciójával.

A centrálaxonometria és centrálprojekció kapcsolatára vonatkozik Kruppa eredménye 1923-ból. [KRU23].

A tételben szerepel egy korreláció, amely a 2. ábra jelöléseinek megfelelően az alábbi módon definiált:

Jelölje h az iránypontok és az egységpontok háromszögének perspektivitási tengelyét, melyek nyilvánvalóan Desargues-féle háromszögek. Jelölje H a h egyenes harmonikus társát az $U_1^c U_2^c U_3^c$ háromszögre vonatkozóan. A tételben szereplő korrelációt az alábbi elem párok határozzák meg:

$$h \rightarrow H, U_1^c U_2^c \rightarrow U_3^c, U_1^c U_3^c \rightarrow U_2^c, U_2^c U_3^c \rightarrow U_1^c$$



2. ábra

T7 Egy alakzat centrálaxonometrikus képe pontosan akkor centrális projekciója az alakzatnak, ha a 2. ábra jelölései szerint a $h \rightarrow H, U_1^c U_2^c \rightarrow U_3^c, U_1^c U_3^c \rightarrow U_2^c, U_2^c U_3^c \rightarrow U_1^c$ korreláció vezető kúpszelete elsőfajú képzetes kör.

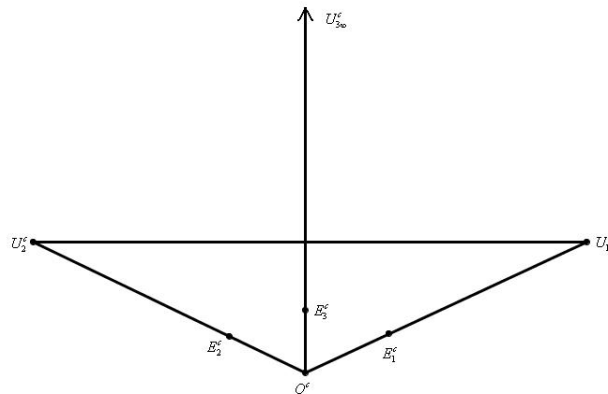
A bizonyítás hosszadalmas, projektív geometriai alapokon nyugszik. Grafikai szempontból történő direkt alkalmazása, azaz olyan projektív tengelykereszt megadása, amely eleget tesz a tétel feltételeinek igen körülményes volna.

A tétel első elemi eszközökkel történő bizonyítását L. Drs [DRS57] 1957-ben, kandidátusi értekezésében publikálta.

Stiefel könyvének 3. kiadásából való a következő eredmény, amely speciális esetre vonatkozóan ad egy analitikus feltételt.

T8 Legyen a projektív tengelykereszt egyik iránypontja U_3^c végtelen távoli pont, és $U_1^c U_2^c$ egyenes merőleges $O^c E_3^c$ -re. A tengelykereszt által definiált centrálaxonometria akkor és csak akkor centrális projekció, ha fennáll:

$$\left(\frac{E_1^c U_1^c}{O^c E_1^c} \right)^2 + \left(\frac{E_2^c U_2^c}{O^c E_2^c} \right)^2 = \left(\frac{U_1^c U_2^c}{O^c E_3^c} \right)^2$$



3. ábra

Az általános esetre Szabó József kandidátusi értekezésében jelent meg egy analitikus kritérium, [SZA78], 149. oldal.

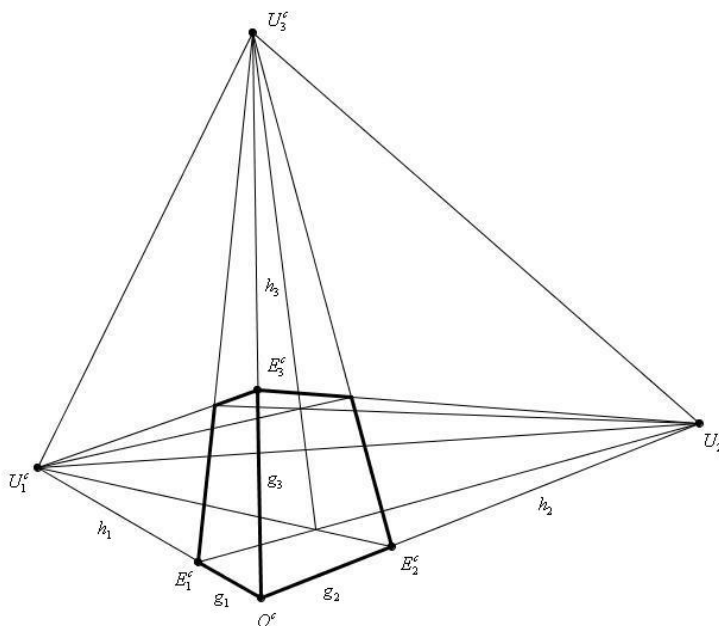
T9: Tekintsük a $\phi: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ centrálaxonometrikus tengelykeresztet. Vezessük be az alábbi jelöléseket: $g_i = O^c E_i^c, h_i = E_i^c U_i^c, i = 1, 2, 3$, valamint α_i jelölje az $U_1^c U_2^c U_3^c$ iránypontok háromszögének megfelelő szögét. A ϕ alapalakzat akkor és csakis akkor tekinthető egy térbeli Descartes-rendszer centrális projekciójának, ha

1. az $U_1^c U_2^c U_3^c$ iránypontok háromszöge hegyesszögű

$$2. \left(\frac{h_1}{g_1} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_3} (\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2) + \left(\frac{h_2}{g_2} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_3} (\sin^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_1) = \left(\frac{h_3}{g_3} \right)^2$$

$$3. \left(\frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{g_2} \right)^2 = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

egyidejűleg fennállnak.



4. ábra

A tétel következménye egy előző tételnek, melynek a bizonyítása igen hosszadalmas.

Szintén Szabó József publikálta a tételnek egy egyszerűbb alakját, [SZJ94]-ben.

T10: *Az előző tétel jelöléseit használva a ϕ alapalakzat akkor és csakis akkor tekinthető egy térbeli Descartes-rendszer centrális projekciójának, ha*

1. *az $U_1^c U_2^c U_3^c$ iránypontok háromszöge hegyesszögű*

$$2. \left(\frac{h_1}{g_1} \right)^2 (\sin^2 \alpha_1 \cos^2 2\alpha_2) + \left(\frac{h_2}{g_2} \right)^2 (\sin^2 \alpha_2 \cos^2 2\alpha_1) = - \left(\frac{h_3}{g_3} \right)^2 \sin^2 \alpha_3$$

$$3. \left(\frac{g_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{g_2} \right)^2 = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

Áttörést jelentett a Stachel, Vogel Szabó szerzőhármás 1995-ös eredménye. Az alábbi tételre többen hivatkoztak, 2004 óta Stachel professzor révén Szabó-tétel néven vált közismertté. Az előző jelöléseket használjuk ismét.

T11: *A ϕ alapalakzat akkor és csakis akkor tekinthető egy térbeli Descartes-rendszer centrális projekciójának, ha*

$$\left(\frac{g_1}{h_1} \right)^2 : \left(\frac{g_2}{h_2} \right)^2 : \left(\frac{g_3}{h_3} \right)^2 = \operatorname{tg} \alpha_1 : \operatorname{tg} \alpha_2 : \operatorname{tg} \alpha_3$$

A fenti eredmény gyakorlati szempontból is használható. Mivel a feltétel baloldala affinitással szemben invariáns, alkalmas affinitással centrálaxonometrikus képből centrális projekciót lehet előállítani. A számítások megtalálhatóak [SZJ94] habilitációs értekezés 29. oldalán és [SZJ95] 10. oldalon.

Hoffman Miklós 1997-ben megmutatta, hogy Stiefel T7 tétele T10 tétel határátmeneteként adódik [HOF97].

Havlicek 1995-ban vizsgálta, hogy egy $\kappa: \mathbb{E}^{n^*} \rightarrow \mathbb{E}^{m^*}, m < n$ lineáris leképezés, ahol $O \rightarrow O^c, E_i \rightarrow E_i^c, U_i \rightarrow U_i^c, j = 1, \dots, n$. mikor tekinthető centrális képnek. $\mathbb{E}^{n^*}, \mathbb{E}^{m^*}$ jelöli a valós euklideszi terek projektív bővítését. Jelölje \mathbf{C} κ lineáris transzformáció egy mátrixreprezentációját, és legyen \mathbf{C} rangja $m+1$. A homogén koordináták értelmezése a bevezetőben leírtak szerint történik. Állítsuk elő $\tilde{\mathbf{C}}$ mátrixot az alábbiak szerint: \mathbf{C} első sorát jelölje \mathbf{c}_{m+1} . \mathbf{C} utolsó sorát és oszlopát elhagyjuk. A $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m$ sorvektorokat rendre helyettesítjük \mathbf{c}_{m+1} -re merőleges komponenseikkel.

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 - \frac{\mathbf{c}_{m+1} \cdot \mathbf{c}_1}{\mathbf{c}_{m+1} \cdot \mathbf{c}_{m+1}} \mathbf{c}_{m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m - \frac{\mathbf{c}_{m+1} \cdot \mathbf{c}_m}{\mathbf{c}_{m+1} \cdot \mathbf{c}_{m+1}} \mathbf{c}_{m+1} \end{pmatrix}$$

A fenti előkészítés után a tétel:

T12: \mathbf{A} \mathbf{C} mátrixú $\kappa: \mathbb{E}^{n^*} \rightarrow \mathbb{E}^{m^*}, m < n$ leképezés pontosan akkor centrálprojekció, ha a $\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}^T$ szorzatmátrix legkisebb sajátértékének multiplicitása legalább $(2m - n + 1)$.

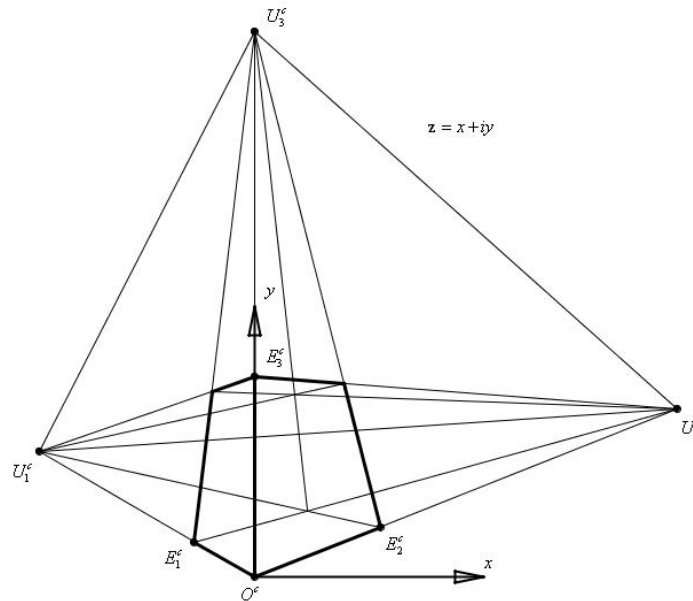
Míg Havlicek bizonyítása $\mathbb{E}^{n^*}, \mathbb{E}^{m^*}$ közti lineáris leképezésként tekintve H. Brauner [BRA86] egy eredményén alapszik, Stachel [STA1995] munkájában közvetlenül \mathbb{E}^n -ben végzi vizsgálatait és egyéb eredmények mellett bizonyítja T11-et, geometriai tartalommal ellátva az egész témakört.

A következő eredmény 2003-ban született, A. Dür [DÜR03] munkája. A 5. ábra jelöléseinek megfelelően helyezzük el a centrálaxonometrikus alapalakzatot egy

\mathbb{C} -vel jelölt komplex számsíkon. Jelölje $\mathbf{e}_i^c \in \mathbb{C}$ az E_i^c egységpontok komplex koordinátáit ($i=1,2,3$), valamint $\rho_i = (O^c E_i^c U_i^c)$, $\rho'_i = 1 - \rho_i$, $i=1,2,3$

T13: Egy centrálaxonometrikus kép pontosan akkor centrálprojekció, ha

$$(\rho'_2 \rho_1 \mathbf{e}_1^c - \rho'_1 \rho_2 \mathbf{e}_2^c)^2 + (\rho'_3 \rho_2 \mathbf{e}_2^c - \rho'_2 \rho_3 \mathbf{e}_3^c)^2 + (\rho'_1 \rho_3 \mathbf{e}_3^c - \rho'_3 \rho_1 \mathbf{e}_1^c)^2 = 0$$



5. ábra

Míg a Szabó tételnél az iránypontok mindegyike közösleges pont, Dür tételében az iránypontok tetszőlegesek lehetnek.

A fenti tételnek adta új bizonyítását és több dimenzióra való általánosítását Stachel [STA04] munkájában.

A témához kapcsolódik még [MOL95] cikk. Ebben a cikkben a szerzők a projektív geometria néhány gyakorlati alkalmazási lehetőségét ismertetik – egyebek mellett-a számítógépi grafikában (CAD rendszerekben) szokásos leképezési modellt írják le. A centrálprojekciót, mint elfajult lineáris transzformációt tekintik.

2. Leképezési transzformációk előállítása.

Általában a grafikai alkalmazások mindegyikében a szokásos leképezési transzformációk valósulnak meg, konkrétan centrális illetve paralel projekció. Ezen transzformációk esetén van nézőpont, illetve leképezési irány. A takarási problémák megoldása szempontjából tehát értelmezhető a „közelebb” fogalom. A leképezések elfajult affin vagy projektív leképezésként való kezelésekor a láthatósági kérdések vizsgálatánál több probléma felmerül, így a vetítés irányának meghatározása. Paralel axonometria esetében a Pohlke-tétel miatt ilyen irány egyértelműen létezik. Centrálaxonometria esetében pedig ismert néhány szükséges és elegendő feltétel arra, hogy a leképezés mikor centrálprojekció, ekkor a centrum létezése nyilvánvaló. Ha a centrálaxonometria nem centrálprojekció, -mint később látni fogjuk-, akkor is tartozik hozzá egy bizonyos értelemben vett centrum. Az alábbiakban a paralel axonometria és a centrál axonometria esetében tisztázzuk a felmerülő problémákat, és meghatározzuk a vetítési irányt, illetve a centrumot.

2.1. *Vetítési irány meghatározása paralel axonometria esetében*

A paralel axonometriát a szokásos módon az axonometrikus tengelykereszt egységpontjai képének a rajz-koordináta-rendszerben történő megadásával valósítjuk meg, feltételezve, hogy a tengelykereszt origójának képe egybeesik a rajz-koordináta-rendszer kezdőpontjával. Ekkor a világ-koordináta-rendszerbeli $P(x, y, z)$ pont $P'(x', y')$ képét az alábbi egyenletek adják:

$$1. \quad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \end{aligned}$$

A Pohlke tétel alapján létezik olyan egységkocka és olyan vetítési irány, hogy a kocka O, E_x, E_y, E_z csúcsainak a képei a rajz koordinátarendszerbeli $O'(0,0), E'_x(a_{11}, a_{21}), E'_y(a_{12}, a_{22}), E'_z(a_{13}, a_{23})$ pontok lesznek. A vetítési irány meghatározása tehát az $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ paraméterek függvényében történik. A keresett irány világ koordinátarendszerbeli előállítását jelölje a $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ vektor. Legyen az origóra illeszkedő vetítősugár egy pontja a $P(v_1, v_2, v_3)$ pont, melynek képe nyilvánvalóan az $O'(0,0)$ pont, ezért (1)-be helyettesítve kapjuk:

$$2. \quad \begin{aligned} 0 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ 0 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{aligned}$$

amiből adódnak \mathbf{v} koordinátái:

$$3. \quad \begin{aligned} v_1 &= v_3 \frac{a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \\ v_2 &= v_3 \frac{a_{21} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{23}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \end{aligned}$$

Mivel az O', E'_x, E'_y pontok nem lehetnek kollineárisak, $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \neq 0$.

A kapott eredmény független a képsík világ koordinátarendszerbeli helyzetétől.

Ha képsíkkul $\mathbb{E}^3 \{x, y\}$ koordinátáskjárt választjuk, a fenti leképezés egy planáris affinitás és egy z tengellyel párhuzamos irányú ortogonális vetítés szorzataként áll

elő. A megfelelő transzformációs mátrixok:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ A keresett vetítési irány a } z \text{ tengely}$$

ősképeivel párhuzamos Jelölje $\tilde{P}(0,0,v_3), v_3 \neq 0$ a z tengely egy pontját. Ekkor a keresett irányt az \overline{OP} adja, ahol:

$$P = \mathbf{A}^{-1} \tilde{P} = \frac{1}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13} \\ -a_{21} & a_{11} & a_{21} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{23} \\ 0 & 0 & a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{v_3}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}} \begin{bmatrix} a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13} \\ a_{21} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{23} \\ 1 \end{bmatrix},$$

egyezően (3.)-mal.

Mivel a O', E'_x, E'_y pontok nem lehetnek kollineárisak, azaz $\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, \mathbf{A}^{-1}

mindig létezik.

2.2. Képpont előállítás a centrálaxonometrikus alapalakzatból projektív alapokon.

Először a klasszikus projektív ábrázoló geometriai módszer szerint járunk el. A képsíkon –egyenlőre- inhomogén koordinátarendszert tekintünk. A $\phi^c : (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ centrálaxonometrikus alapalakzat pontjainak inhomogén koordinátái legyenek az alábbiak:

$$O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_i^c = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, U_i^c = \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3$$

Jelölje a $\phi : (O; E_1, E_2, E_3, U_{1\infty}, U_{2\infty}, U_{3\infty})$ Descartes rendszerbeli $P(p_i)$ pont koordinátahasábjának tengelyekre illeszkedő csúcsait rendre P_1, P_2, P_3 . Ezen pontok centrálaxonometrikus képét pedig jelölje P_1^c, P_2^c, P_3^c . A kettősviszony

invariancia és az illeszkedés tartás miatt ezen pontok rajzkoordinátái könnyen számolhatóak. Ha például P_i^c pont rajzkoordinátáit $\xi_i, \eta_i, i = 1, 2, 3$ jelöli, akkor :

$$P_i = (P_i E_i O U_{i\infty}) = (P_i^c E_i^c O^c U_i^c) = \frac{\xi_i}{x_i} : \frac{\delta_i x_i - \xi_i}{\delta_i x_i - x_i} = \frac{\eta_i}{y_i} : \frac{\delta_i y_i - \eta_i}{\delta_i x_i - y_i}, \text{ amiből } \xi_i, \eta_i \text{ -t}$$

kifejezve:

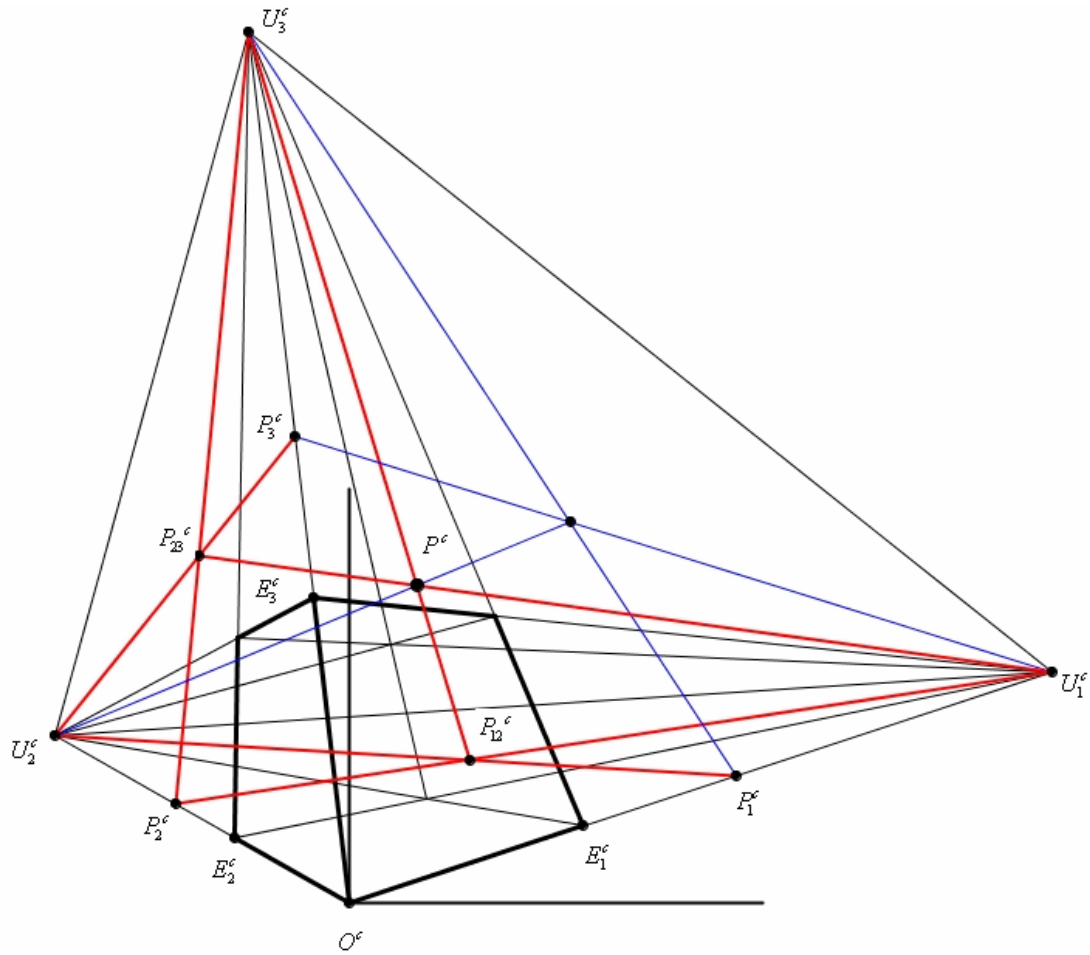
$$\xi_i = \frac{P_i \delta_i x_i}{P_i + \delta_i - 1} \text{ valamint } \eta_i = \frac{P_i \delta_i y_i}{P_i + \delta_i - 1}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Jelölje a $P(p_i)$ ponthoz tartozó koordinátahasáb koordinátasíkokra illeszkedő pontjait P_{12}, P_{23}, P_{31} , és ezen pontok centrálaxonometrikus képét pedig $P_{12}^c, P_{23}^c, P_{31}^c$. Az 6. ábra jelöléseinek megfelelően például a P_{12}^c pont az $P_1^c U_2^c$ és a $P_2^c U_1^c$ egyenesek metszéspontjaként egyszerűen meghatározható. Hasonlóan, a P_{23}^c pont koordinátáinak kiszámítása $P_2^c U_3^c$ és a $P_3^c U_2^c$ egyenesek metszéspontjaként történik. Ezek után a $P(p_i)$ pont rajzkoordinátáit a $P_{12}^c U_3^c$ és a $P_{23}^c U_1^c$ egyenesek metszéspontjaként határozzuk meg. Ha bevezetjük a homogén koordinátákat, azaz harmadik koordinátaként mindenhova 1-et írunk, formálisan a vektoriális szorzat segítségével számíthatjuk a kérdéses egyeneseket és pontokat:

$$\begin{aligned} P_1^c U_2^c &= P_1^c \times U_2^c, P_2^c U_1^c = P_2^c \times U_1^c, P_2^c U_3^c = P_2^c \times U_3^c, P_3^c U_2^c = P_3^c \times U_2^c \\ P_{12}^c &= P_1^c U_2^c \times P_2^c U_1^c, P_{23}^c = P_2^c U_3^c \times P_3^c U_2^c \\ P^c &= P_{12}^c U_3^c \times P_{23}^c U_1^c \end{aligned}$$

A számítások elvégzése a gyakorlatban számítógéppel nyilván egyszerű. A számításokat paraméteres formában Maple-lel is elvégeztem (I. melléklet), az eredmény némi számolással az alábbi homogén alakra hozható:

$$P^c = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1 x_1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{\delta_2 x_2}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{\delta_3 x_3}{\delta_3 - 1} p_3 \\ \frac{\delta_1 y_1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{\delta_2 y_2}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{\delta_3 y_3}{\delta_3 - 1} p_3 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1} p_3 + 1 \end{bmatrix}$$

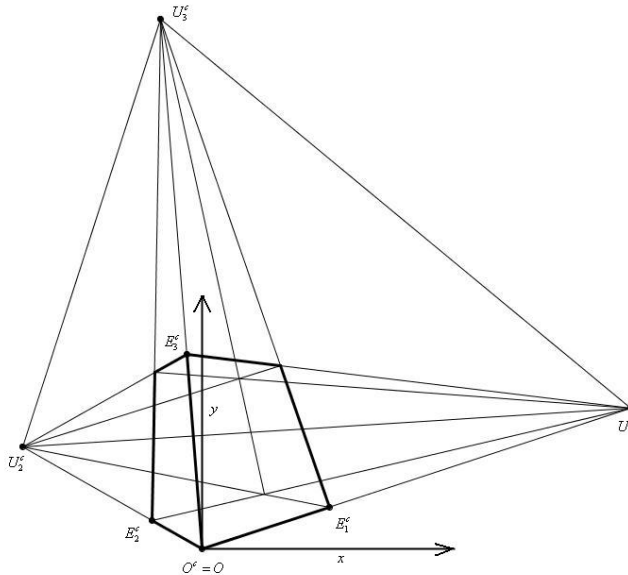


6. ábra

2.3. Speciális lineáris transzformáció mátrixreprezentációjának előállítása a centrálaxonometrikus alapelakzattól

\mathbb{E}^3 projektív bővítésében, homogén koordinátákat használunk, beágyazva \mathbb{P}^3 -at a valós \mathbb{E}^4 euklideszi vektortérbe. A képsík $\mathbb{E}^3 \{x, y\}$ koordinátságja legyen, mely sík projektív koordinátái $(0,0,1,0)$. A $\phi^c : (O^c ; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ centrálaxonometrikus alapelakzatot úgy helyezzük el a képsíkon, hogy $O = O^c = [0,0,0,1]^T$. Az alapelakzat további pontjainak koordinátái az ábrának megfelelően az alábbiak legyenek:

$$E_i^c = c_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \neq 0, \quad U_i^c = d_i \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_i \neq 0, \quad d_i \neq 0, \quad i=1,2,3$$



7. ábra

A $c_i \neq 0, d_i \neq 0$ szorzók a homogén koordinátázás miatt szükségesek. Célunk olyan \mathbf{A} 4x4-es mátrix előállítás, amely a $\phi: (O; E_1, E_2, E_3, U_{1\infty}, U_{2\infty}, U_{3\infty})$ alapalakzathoz a $\phi^c: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ alakzatot rendeli. A képsík speciális választása miatt az \mathbf{A} mátrix harmadik sorának minden eleme zérus, és $O = O^c = [0, 0, 0, 1]^T$ miatt utolsó oszlopa $[0, 0, 0, 1]^T$ lesz. Az \mathbf{A} mátrix rangja természetesen 3.

Legyen

$$\mathbf{E} = [E_1 E_2 E_3 O] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = [U_{1\infty} U_{2\infty} U_{3\infty} O] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{valamint}$$

$$\mathbf{E}^c = [E_1^c E_2^c E_3^c O^c] = \begin{bmatrix} c_1 x_1 & c_2 x_2 & c_3 x_3 & 0 \\ c_1 y_1 & c_2 y_2 & c_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^c = [U_{1\infty}^c U_{2\infty}^c U_{3\infty}^c O^c] = \begin{bmatrix} d_1 \delta_1 x_1 & d_2 \delta_2 x_2 & d_3 \delta_3 x_3 & 0 \\ d_1 \delta_1 y_1 & d_2 \delta_2 y_2 & d_3 \delta_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor fennáll:

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}^c, \quad \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{U}^c \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}^c \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{U}^c, \quad \text{azaz}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 x_1 & c_2 x_2 & c_3 x_3 & 0 \\ c_1 y_1 & c_2 y_2 & c_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \delta_1 x_1 & d_2 \delta_2 x_2 & d_3 \delta_3 x_3 & 0 \\ d_1 \delta_1 y_1 & d_2 \delta_2 y_2 & d_3 \delta_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_1 x_1 & c_2 x_2 & c_3 x_3 & 0 \\ c_1 y_1 & c_2 y_2 & c_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 - 1 & c_2 - 1 & c_3 - 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \delta_1 x_1 & d_2 \delta_2 x_2 & d_3 \delta_3 x_3 & 0 \\ d_1 \delta_1 y_1 & d_2 \delta_2 y_2 & d_3 \delta_3 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix}$$

A megfelelő elemek egyenlősége alapján:

$$\left. \begin{array}{l} c_i x_i = d_i \delta_i x_i \\ c_i y_i = d_i \delta_i y_i \\ c_i - 1 = d_i \end{array} \right\} \Rightarrow c_i = (c_i - 1) \delta_i \Rightarrow c_i = \frac{\delta_i}{\delta_i - 1}, \quad d_i = c_i - 1 = \frac{1}{\delta_i - 1} \quad i = 1, 2, 3.$$

Mivel $E_i^c \neq U_i^c$, $\delta_i \neq 1$. Így a keresett mátrix az alábbi alakban áll elő:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

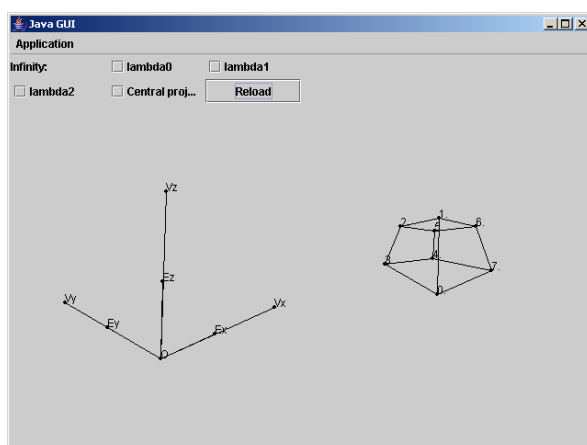
Az U_i^c pontok bármelyikét végtelen távoli pontnak is választhatjuk, ekkor $\delta_i \rightarrow \infty$,

és a megfelelő oszlopvektor határértéke $[x_i, y_i, 01]^T$ alakú lesz. Ha mindhárom

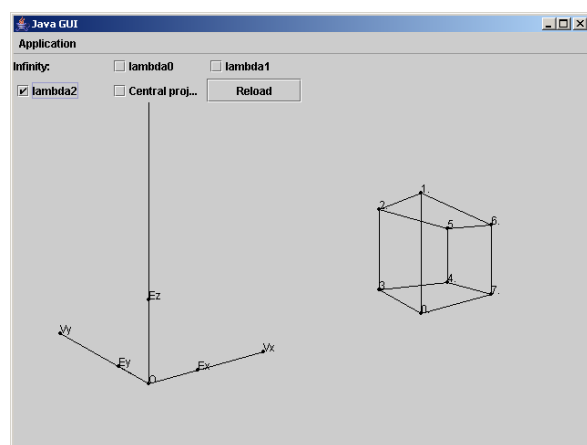
U_i^c végtelen távoli pont, akkor az ismert axonometrikus leképezést kapjuk meg.

Az eredmény illusztrálására készített program egy egységkockát ábrázol, az alábbi

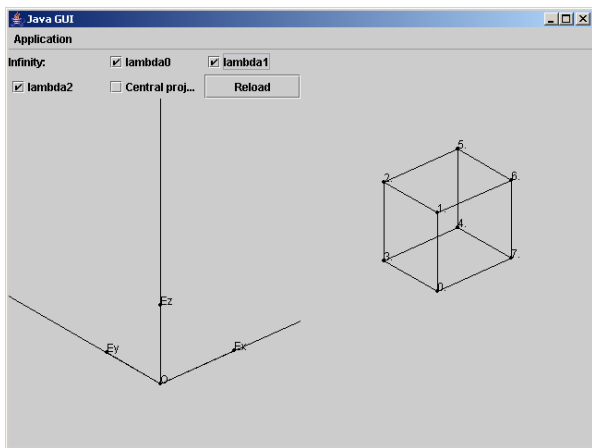
képek a programmal készültek.



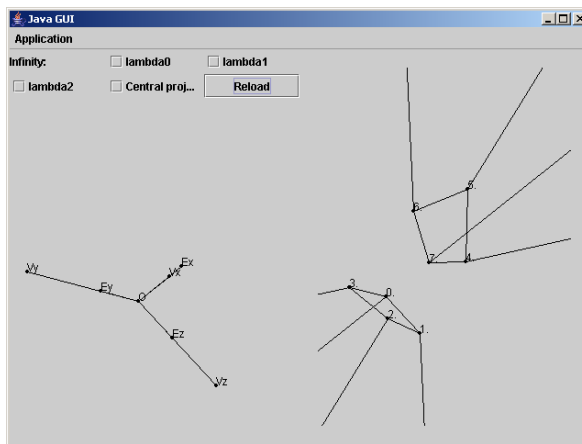
Centrálaxonometrikus kép



U_3^c végtelen távoli pont



Paralel axonometria



A kocka „szétesése”

Az eredményhez más módon is el lehet jutni. Jelölje az \mathbf{F} 4x6-es mátrix a $\phi: (O; E_1, E_2, E_3, U_{1\infty}, U_{2\infty}, U_{3\infty})$ alakzat egység és végtelen távoli pontjainak oszlopvektorba rendezett koordinátáit, $E_1, E_2, E_3, U_{1\infty}, U_{2\infty}, U_{3\infty}$ sorrendben,

\mathbf{F}^c pedig a képekét. Ekkor $\mathbf{F}^c = \mathbf{A}\mathbf{F}$ alapján:

$$\begin{bmatrix} c_1 x_1 & c_2 x_2 & c_3 x_3 & d_1 \delta_1 x_1 & d_2 \delta_2 x_2 & d_3 \delta_3 x_3 \\ c_1 y_1 & c_2 y_2 & c_3 y_3 & d_1 \delta_1 y_1 & d_2 \delta_2 y_2 & d_3 \delta_3 y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} + 1 & a_{42} + 1 & a_{43} + 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

A megfelelő elemek egyenlősége miatt egyszerűen leolvasható:

$$\left. \begin{array}{l} c_i x_i = d_i \delta_i x_i \\ c_i y_i = d_i \delta_i y_i \\ c_i - 1 = d_i \end{array} \right\} \Rightarrow c_i = (c_i - 1) \delta_i \Rightarrow c_i = \frac{\delta_i}{\delta_i - 1}, \quad d_i = c_i - 1 = \frac{1}{\delta_i - 1} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{ami}$$

meggyezik az előző eredménnyel.

2.4. Lineáris leképezés mátrixreprezentációjának

előállítása a centrálaxonometrikus alapalakzatból.

A világ koordinátarendszer és a rajzkoordináta rendszer egymáshoz viszonyított helyzetétől függetlenül is eljárhatunk.

A $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ leképezéshez tartozó $\tilde{\mathbf{A}}$ 4x3-as úgynevezett "redukált" mátrixot állítjuk

elő. Jelölje $\tilde{\mathbf{F}}$ azt a 6x3-as mátrixot, melyet \mathbf{F} harmadik sorának elhagyásával

nyerünk, \mathbf{F}^c -ből elhagyva a harmadik sort kapjuk $\tilde{\mathbf{F}}^c$ -ot. $\tilde{\mathbf{F}}^c = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{F}}$ alapján:

$$\begin{bmatrix} c_1x_1 & c_2x_2 & c_3x_3 & d_1\delta_1x_1 & d_2\delta_2x_2 & d_3\delta_3x_3 \\ c_1y_1 & c_2y_2 & c_3y_3 & d_1\delta_1y_1 & d_2\delta_2y_2 & d_3\delta_3y_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & 0 \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} + 1 & \tilde{a}_{32} + 1 & \tilde{a}_{33} + 1 & \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}$$

A 2.2-beli eredménynek megfelelően:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1}x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1}x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1}y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1}y_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

Stachel [STA04]-ben Dür tételének új bizonyítását adta, mely bizonyításban a fentivel lényegében megegyező eredményt kap, a kép vonatkozásában komplex koordinátákat használva.

2.5. Általános síkra történő lineáris transzformáció mátrixreprezentációjának előállítás a centrálaxonometrikus alapalakzattól.

Az előző megfontolásokat alkalmazzuk. A centrálaxonometrikus alapalakzat fekszen egy az origón áthaladó π síkon, amit $\mathbf{s} [u_1 \ u_2 \ u_3]$ normálvektora jellemez. Ebben a síkban adottak az egységpontok képei, melyeket az $\mathbf{e}_i^c(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ vektorral adunk meg. Természetesen ekkor $(\mathbf{s}, \mathbf{e}_i^c) = 0, i = 1, 2, 3$. A számítások megegyeznek a korábbiakkal, az eredmény:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} z_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} z_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} z_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Rang}(\mathbf{A})=3$, mivel a bal felső 3×3 -as mátrix az $\mathbf{e}_i^c(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, 3$ lineárisan függő vektorrendszer skalárszorosából áll.

2.6. Centrum meghatározása

Világos (T6), hogy egy centrálaxonometrikus kép általában nem centrálprojekció.

A 2.4 belüli $\tilde{\mathbf{A}}$ leképezéshez tartozik egy „eltűnési” sík, azaz olyan Π_v sík, mely pontjainak a képei a Π képsík végtelen távoli pontjai lesznek. Ha $P \in \Pi_v$ és

$P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ 1]^T$, akkor P_∞^c negyedik koordinátája 0, azaz $P_\infty^c = \tilde{\mathbf{A}}P$ alapján

fennáll:

$$\frac{1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1} p_3 + 1 = 0$$

A fenti síkegyenlet tehát az eltűnési sík egyenlete lesz. Megmutatjuk, hogy a Π , síknak létezik egy C pontja, melynek nincs képe Π -n, azaz a $\tilde{\mathbf{A}}C = [0 \ 0 \ 0]^T$.

Másképpen fogalmazva, ha a megfelelő $\mathbb{P}^3 \sim \mathbb{E}^4, \mathbb{P}^2 \sim \mathbb{E}^3$ beágyazó vektortereket tekintjük, a $\tilde{\mathbf{A}}$ mátrixú lineáris leképezés null terét keressük. Ez a null tér 1 dimenziós, ha $\text{rang}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$. Ez most nyilván fennáll, hiszen a

$\phi^c : (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ alapalakzat E_1^c, E_2^c, E_3^c pontjai nem kollineárisak,

azaz

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} \end{bmatrix} \neq 0$$

A $C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ 1]^T$ pont meghatározása ezek után a $\tilde{\mathbf{A}}C = [0 \ 0 \ 0]^T$ inhomogén

lineáris egyenletrendszerrel történik:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 c_1 + \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 c_2 + \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 c_3 &= 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 c_1 + \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 c_2 + \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 c_3 &= 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} c_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1} c_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1} c_3 &= -1 \end{aligned}$$

A megoldás:

$$c_1 = \frac{-(\delta_1 - 1)\delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_2 = \frac{\delta_1(\delta_2 - 1)\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_3 = \frac{-\delta_1\delta_2(\delta_3 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

Megmutatjuk, hogy ha $P \notin \Pi_v, Q \in \overline{PC}$, akkor $P^c = Q^c$, azaz a C ponton áthaladó

Π_v -re nem illeszkedő egyenesek vetítősugárként tekinthetők. Tekintsük a \overline{PC}

egyenesen a $C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ 1]^T, P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ 1]^T$ alappontok által

meghatározott projektív koordinátarendszert. Ekkor $Q = \zeta_1 C + \zeta_2 P$ és Q képe:

$$Q^c = \tilde{\mathbf{A}}Q = \tilde{\mathbf{A}}(\zeta_1 C + \zeta_2 P) = \tilde{\mathbf{A}}(\zeta_2 P) = \zeta_2 \tilde{\mathbf{A}}P = \zeta_2 P^c \approx P^c$$

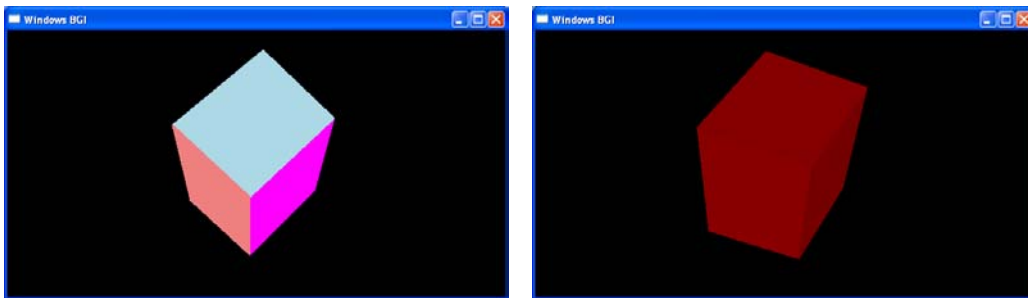
Definíció: A C pontot a centrálaxonometrikus leképezés centrumának tekintjük.

Segítségével a tárgyter algoritmusok implementálása is lehetséges, így

megoldható a hátsó lapok eltávolítása, árnyalás vagy alkalmazható a

festőalgoritmus is. Az alábbi képeket előállító programkódok idevágó részletei a

II. mellékletben találhatóak.



3. Centrálaxonometriák osztályozása

Ebben a fejezetben \mathbb{E}^3 projektív bővítésében, homogén koordinátákat használunk, beágyazva \mathbb{P}^3 -at a valós \mathbb{E}^4 euklideszi vektortérbe. Először $A: \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ centrálaxonometrikus transzformációkat jellemezzük. Teret síkra képezünk le, ezért a beágyazó vektortereket tekintve a képtér dimenziója 3, a leképezést leíró A mátrix 4×4 -es, és $\text{rang}(A) = 3$. Természetesen a képsík \mathbb{E}^4 vektortér egy hipersíkja lesz. A transzformációnak pontosan egy sajátértéke zérus, melyhez tartozó sajátvektor lesz a centrum. A transzformációhoz tartozó karakterisztikus egyenlet a zérus sajátérték miatt $\lambda(\lambda - \lambda_3)(\lambda^2 + b\lambda + c)$ alakú lesz, ahol λ_3 jelöli a biztosan létező valós sajátértéket. Az osztályozás alapját az képezi, hogy karakterisztikus egyenletben a $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ másodfokú rész gyökei valósak avagy nem.

3.1. Valós sajátértékek

Ha a $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ egyenletnek van két valós gyöke, és a sajátvektorok pedig \mathbb{E}^4 egy bázisát alkotják, akkor a transzformáció diagonalizálható, és a sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrixa az alábbi alakú:

$$\hat{A}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0)$$

Geometriai értelmezést a fentieknek a következő módon adhatunk:

A $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok feszítik fel a képsíkot, a zérus sajátértékhez tartozó sajátvektor pedig a 2.6 fejezetben meghatározott centrumba

mutat. A beágyazó Euklideszi térben a képsíkot felfeszítő három sajátvektor egy-egy egydimenziós invariáns alteret jelent, tehát leképezést a képsík pontjaira szűkítve elmondható, hogy 3 fix pontja van (a képsíkot felfeszítő 3 pont).

3.2. Komplex sajátértékek

Ha az $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ gyökei komplex konjugáltak, akkor a mátrix úgynevezett kvázidiagonál (normál) alakra hozható. Ha a két komplex sajátérték $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, akkor:

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 \mathbf{0} \right\rangle$$

Ebben az esetben a komplex sajátértékpárhoz egy kétdimenziós invariáns altér tartozik, mely alteret generáló vektorpár egyszerűen számolható. ([RP]205 old). A képsíkra szorítkozva tehát ebben az esetben egy fix pont létezik, valamint egy invariáns egyenese van a transzformációnak.

3.3. Centrálaxonometria megadása

A fentiekből következik, hogy egy centrálaxonometriát megvalósító lineáris leképezés mátrixa hasonló $\hat{\mathbf{A}}$ -hoz, azaz $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ fennáll, ahol a $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4]$ valós sajátértékek esetén \mathbf{A} sajátvektoraiból álló bázis, a két komplex saját érték esetén pedig az első két oszlopvektor feszíti fel a képsík invariáns egyenesét.

Gyakorlati alkalmazások szempontjából hasznos a fenti összefüggésből adódó $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ kapcsolat, amely lehetővé teszi, hogy meghatározzunk egy

centrálaxonometriát természetes bázisban (világkoordináta rendszer). Először az $\hat{\mathbf{A}}$ transzformációhoz tartozó kitüntetett elemeket keressük meg. A sajátvektorok bázisában a képsík a végtelen távoli sík, vonalkoordinátái: $\hat{U}[0 \ 0 \ 0 \ 1]$, a centrum $\hat{C}[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$. Könnyű látni ezen speciális leképezés centrális jellegét, hiszen a \hat{C} -n áthaladó egyenesek minden pontjának a képe megegyezik (egy homogén szorzót figyelembe véve). A bázis megváltozásával az illeszkedések megmaradnak, tehát már ebből is látható a $\mathbf{A} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ alakú leképezések centrális jellege.

A \mathbf{B} bázis első három oszlopvektora $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ feszíti fel a képsíkot, \mathbf{b}_4 pedig a centrum. Most megmutatjuk a $\mathbf{A} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ alakú transzformáció centrális jellegét. A képsík alakja a világ-koordinátarendszerben $U = \hat{U}\mathbf{B}^{-1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]\mathbf{B}^{-1}$. A centrum : $C = \mathbf{b}_4 = \mathbf{B}\hat{C} = \mathbf{B}[0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$. Legyen $P \neq C$ tetszőleges, ekkor képe $P^c = \mathbf{A}P = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}P$. Megmutatjuk, hogy P^c illeszkedik a képsíkra, azaz fennáll $UP^c = 0$.

$$UP^c = [0 \ 0 \ 0 \ 1]\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}P = [0 \ 0 \ 0 \ 1]\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}P = 0, \text{ hiszen}$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \text{ illetve } [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Most bebizonyítjuk, hogy ha $Q \in PC$, akkor $P^c = Q^c$, azaz a vetítés centrális.

$$Q = \rho_1 P + \rho_2 C, \Rightarrow Q^c = \mathbf{A}(\rho_1 P + \rho_2 C) = \rho_1 P^c + \rho_2 (\mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{B}\hat{C} = \rho_1 P^c + \rho_2 \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\hat{C} \Rightarrow Q^c = \rho_1 P^c, \text{ hiszen } \hat{\mathbf{A}}\hat{C} = \mathbf{0} \text{ a valós illetve a képzetes esetben is.}$$

Fentiekből következik, hogy:

I. Tétel Egy centrálaxonometrikus leképezést a képsík három nem kollineáris pontja, a centrum és egy valós számhármassal egyértelműen meghatároz.

Megjegyzés: A tételben szereplő adatok jelentése értelemszerűen eltér a valós és a komplex esetben.

4. Centrálaxonometria és centrálprojekció

kapcsolata

Megmutatjuk, hogy a centrálaxonometriát biztosító mátrixok közül az egyező sajátértékekkel rendelkezők centrálprojekciót létesítenek.

II. Tétel: Legyen \mathbf{A} egy $\kappa: \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{E}^3$ lineáris transzformáció mátrixa. κ akkor és csak akkor centrális projekció \mathbb{P}^3 -ban, ha

1. $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$
2. \mathbf{A} sajátértékeire fennáll: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_4 = 0$
3. \mathbf{A} sajátvektorai bázist alkotnak \mathbb{E}^4 -ben

Bizonyítás:

A) A feltétel szükséges.

Megmutatjuk, hogy ha \mathbf{A} egy centrális projekció mátrixa, akkor fennállnak a tétel feltételei. Az első feltétel nyilvánvaló, hiszen \mathbb{P}^3 -at \mathbb{P}^2 -re képezzük, ami a beágyazó vektorterekre vonatkozóan egy defektusú lineáris leképezést jelent, azaz $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$. Jelölje $E_4(\mathbf{e}_4)$ a centrális projekció centrumát, és $E_1(\mathbf{e}_1), E_2(\mathbf{e}_2), E_3(\mathbf{e}_3)$ a képsík három nem kollineáris pontját. Mivel E_4 -nek \mathbb{P}^3 -ban nincs képe (centrális projekcióban c centrumnak nincs képe), világos, hogy $\mathbf{A}E_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T = \mathbf{0}$, ha tehát $\mathbf{A}\mathbf{e}_4 = \lambda\mathbf{e}_4 \Rightarrow \mathbf{0} = \lambda\mathbf{e}_4$, azaz $\lambda = 0$ sajátérték, \mathbf{e}_4 pedig a hozzá tartozó sajátvektor. Legyen $P(\mathbf{p})$ a képsík egy pontja. Ekkor \mathbf{p} előáll az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ lineáris kombinációjaként, azaz $P(\mathbf{p}) = e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3$.

Mivel a képsík pontjai fixek, $\mathbf{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$, ahol $\lambda \neq 0$ valamilyen homogén szorzó.

(ha például $p_4 \neq 0$, akkor $\lambda = \frac{a_{4k}p_k}{p_4}$). Vektorokkal:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3) &= \lambda(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3) \Rightarrow \\ \lambda_1 e_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2 e_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3 e_3\mathbf{e}_3 &= \lambda e_1\mathbf{e}_1 + \lambda e_2\mathbf{e}_2 + \lambda e_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ahol $\lambda_i \neq 0, i=1,2,3$ jelöli a homogén szorzókat. Mivel $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ független vektorrendszer, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Mivel az E_1, E_2, E_3, E_4 pontnégyes nem lehet komplanáris, az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ vektorrendszer független, tehát bázisa \mathbb{E}^4 -nek. Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ vektorok sajátvektorok, a megfelelő sajátértékek pedig $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_4 = 0$.

B) A feltétel elégséges

Legyen \mathbf{A} a feltételeket kielégítő mátrix, a sajátvektorokat jelölje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, a megfelelő sajátértékekre pedig $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_4 = 0$ teljesedjen. A feltételből nyilvánvalóan következik, hogy λ csak valós lehet. Megmutatjuk, hogy:

1 Bármely $E_4(\mathbf{e}_4)$ -től különböző pont képe az $E_1(\mathbf{e}_1), E_2(\mathbf{e}_2), E_3(\mathbf{e}_3)$ pontok által felfeszített π síkra esik:

Legyen $P(\mathbf{p})$ tetszőleges $E_4(\mathbf{e}_4)$ -től különböző pont, $\mathbf{p} = e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3 + e_4\mathbf{e}_4$.

Ekkor P képe:

$$P^c = \mathbf{A}P = \mathbf{A}(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3 + e_4\mathbf{e}_4) = \mathbf{A}(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3)$$

Mivel $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ sajátvektorok $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda, \lambda_4 = 0$ sajátértékekkel, ezért:

$$P^c = \lambda(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3) + 0 \cdot e_4\mathbf{e}_4 = \lambda(e_1\mathbf{e}_1 + e_2\mathbf{e}_2 + e_3\mathbf{e}_3) \Rightarrow P^c \in \pi$$

2 A π sík a leképezés fix síkja:

Legyen $P \in \pi$, ekkor P előáll a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ lineáris kombinációjaként, azaz:

$$\mathbf{p} = e_1 \mathbf{e}_1 + e_2 \mathbf{e}_2 + e_3 \mathbf{e}_3. \quad P^c = \mathbf{A}(e_1 \mathbf{e}_1 + e_2 \mathbf{e}_2 + e_3 \mathbf{e}_3) = \lambda(e_1 \mathbf{e}_1 + e_2 \mathbf{e}_2 + e_3 \mathbf{e}_3) \Rightarrow P^c \sim P,$$

($\lambda \neq 0$ homogén szorzó).

3 Az $E_4(\mathbf{e}_4)$ pont centrum:

Megmutatjuk, hogy ha $P \notin \pi \Rightarrow e_4 \neq 0$ tetszőleges E_4 -től különböző pont, akkor

P, P^c, E_4 kollineárisak. Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ bázisbeli előállítást tekintve a P, P^c, E_4

pontok koordinátái:

$$P(e_1, e_2, e_3, e_4), P^c(\lambda e_1, \lambda e_2, \lambda e_3, 0), E_4(0, 0, 0, 1), \text{ azaz } \mathbf{p}^c = \lambda \mathbf{p} + e_4 \mathbf{e}_4.$$

Q.E.D

A fenti tulajdonságú mátrixok úgynevezett egyszerű struktúrájúak.

Karakterisztikus polinomjaik $(x - \lambda)^3 x$ alakúak. Minimál polinomjaik pedig

$(x - \lambda)x$ alakúak. A lineáris transzformációt a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ bázisban írjuk fel,

mátrixa az alábbi alakú:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$$

Mivel a sajátértékek bázistranszformációval szemben invariánsak és a sajátvektorok ismét független rendszert alkotnak, kimondható:

III Tétel: Egy \mathbf{A} mátrixú lineáris transzformáció akkor és csak akkor centrálprojekció, ha $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}$ alakú.

Bizonyítás:

Legyen $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ami egy speciális projektor mátrix. Mivel homogén

koordinátákat használunk, kimondható, hogy egy \mathbf{A} mátrixú lineáris transzformáció akkor és csak akkor centrálprojekció, ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ alakú, azaz van olyan hasonlósági transzformáció, mely \mathbf{A} -t $\tilde{\mathbf{A}}$ -ba viszi.

A következő tétel kimondásához két lineáris algebrai közismert tételre lesz szükség.

T14: Egy mátrix nyoma hasonlósági transzformációval szemben invariáns.

T15: Minden mátrix kielégíti minimálegyenletét. (Cayley-Hamilton tétel élesítése)

A fenti tételek alapján a II. Tétel következményeként kimondható az alábbi tétel:

IV. Tétel: Egy \mathbf{A} mátrixú lineáris transzformáció akkor és csak akkor centrálprojekció, ha

$$(i.) \quad Rang(\mathbf{A}) = 3$$

$$(ii.) \quad \left(\mathbf{A} - \frac{Tr(\mathbf{A})}{3} \mathbf{E} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

ahol $Tr(\mathbf{A}) = \sum_1^4 a_{ii}$, \mathbf{E} pedig az egységmátrix.

Bizonyítás: Centrálprojekció esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen I Tétel szerint ekkor $Tr(\mathbf{A}) = 3\lambda$, és a T15 tétel miatt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{A} = \mathbf{0}$ teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy \mathbf{A} olyan 4×4 -es mátrix, melyre (i) $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3$ és (ii)

$$\left(\mathbf{A} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{A})}{3} \mathbf{E} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad \text{(ii) miatt } \mathbf{A} \text{ minden sajátértéke } 0 \text{ és } \lambda, \text{ ahol } \lambda = \frac{\text{Tr}(\mathbf{A})}{3}.$$

Mivel (i) miatt $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3$, a zérus sajátérték multiplicitása 1, λ -é pedig 3.

Miután \mathbf{A} minimálpolinomjában mindkét tényező első fokú, \mathbf{A} Jordan formája diagonális mátrix, azaz \mathbf{A} hasonló $\tilde{\mathbf{A}}$ -hoz. Q.E.D

A következő tétel centrális projekció mátrixának meghatározásához teremt egyszerű lehetőséget.

V. Tétel: Legyenek \mathbf{A}_1 és \mathbf{A}_2 hasonlóak, úgy hogy teljesedjenek az alábbi feltételek:

$$(i.) \quad \mathbf{A}_1 \text{ és } \mathbf{A}_2 \text{ hasonló } \text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, 0)\text{-hoz}$$

$$(ii.) \quad \text{Van olyan } \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \text{ vektor, melyre } \mathbf{A}_1 \mathbf{c} = \mathbf{A}_2 \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

$$\text{akkor } \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$$

Bizonyítás:

Mivel $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ közös sajátvektor, mely a 0 sajátértékhez tartozik, ezért biztosan van olyan $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}\}$ bázis, melyben mindkét transzformációs mátrix felbomlik egy-egy 3×3 -as és 1×1 -es blokkra, ahol az 1×1 -es blokk tartalmazza a 0 közös sajátértéket. Mivel \mathbf{A}_1 és \mathbf{A}_2 hasonló $\text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$ -hoz, ezért a transzformáció szűkítése a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vektorhármak által felfeszített altérre a $\lambda \mathbf{I}$ skálártranszformáció lesz. Ezért egy tetszőleges $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2 + \gamma \mathbf{b}_3 + \delta \mathbf{c}$ vektor esetén $\mathbf{A}_1 \mathbf{v} = \mathbf{A}_2 \mathbf{v} = \lambda(\alpha \mathbf{b}_1 + \beta \mathbf{b}_2 + \gamma \mathbf{b}_3)$, azaz ugyanarról a transzformációról van szó. Q.E.D.

A tétel szemléletes jelentése a következő: Egy \mathbf{C} pontból 3 pontjával adott síkra történő centrális projekció mátrixát $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ alakban felírhatjuk, és az előállítás független a pontok síkbeli helyzetétől. A következő fejezetekben néhány konkrét centrális vetítés mátrixát állítjuk elő.

4.1. Vetítés az $\{x, y\}$ koordinátasíkra

Legyen a π képsík általános helyzetű, és $P_i \in \pi, i = 1, 2, 3$ három nem kollineáris helyzetű pont a képsíkon. Legyen $C \notin \pi$ a projekció centruma. Jelölje $\mathbf{B} = [P_1 P_2 P_3 C]$ oszlopvektorokból álló mátrixot. A P_1, P_2, P_3, C pontok általános helyzete miatt \mathbf{B} nem szinguláris, van inverze. A II és V. tételek alapján a $\{C, \pi\}$ által definiált centrális projekció mátrixa $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ alakú.

Legyen a centrális projekció képsíkja az $\{x, y\}$ koordinátasík, centruma a z tengely s koordinátájú pontja. Válasszuk például a P_1, P_2, P_3 pontokat az alábbi módon:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ valamint } C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{-1}{s} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{s} & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott \mathbf{A} a grafikai irodalmakban közismert alakja a centrálprojekciónak [JUH95]. Ha a centrumot általános helyzetűnek választjuk, azaz

$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$, akkor a kapott mátrix:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & -c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & 1 \end{bmatrix}$$

, ami megfelel [MO95]-ben közölt eredménynek. Nyilván $c_3 \neq 0$, hiszen a centrum nem illeszkedhet az $\{x, y\}$ koordinátasíkra. Ha $c_4 = 0$, akkor az ugyancsak sok helyen szereplő $\{x, y\}$ síkra történő (c_1, c_2, c_3) irányú paralel projekciót kapjuk [JUH95].

4.2. Vetítés általános helyzetű képsíkra

Legyen a π képsík adott az $U[u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$ vonalkoordinátákkal, a centrum

$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$. Ekkor legalább egy koordináta nem zérus. Felveszünk π -

n három P_1, P_2, P_3 általános helyzetű pontot. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$\bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} -u_2 & -u_3 & -u_4 \\ u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_2 = \begin{bmatrix} u_2 & 0 & 0 \\ -u_1 & -u_3 & -u_4 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}_3 = \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 \\ -u_1 & -u_2 & -u_4 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}}_4 = \begin{bmatrix} u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 \end{bmatrix}$$

Mindegyik mátrix rangja 3, hiszen ha töröljük az i . sorát, diagonál mátrixot kapunk. A konstrukcióból világos, hogy ha $u_i \neq 0$, akkor a keresett P_1, P_2, P_3 pontok $\bar{\mathbf{B}}_i$ oszlopvektorai lesznek. Jelölje \mathbf{B}_i a $\bar{\mathbf{B}}_i$ -nek

$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T$ oszlopvektorral való kiegészítését. A keresett

transzformáció ekkor tehát $\mathbf{A} = \mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{B}_i^{-1}$ alakban áll elő. A 4.1-beli eredmények

speciális esetként adódnak. Konkrétan pl. $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}_1$ -et alkalmazva, általános síkra

általános centrumból az alábbi mátrix vetít:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \text{diag}\{1, 1, 1, 0\} \cdot \mathbf{B}^{-1} =$$

$$\frac{1}{(U, C)} \begin{bmatrix} c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 & -c_1 u_2 & -c_1 u_3 & -c_1 u_4 \\ -c_2 u_1 & c_1 u_1 + c_3 u_3 + c_4 u_4 & -c_2 u_3 & -c_2 u_4 \\ -c_3 u_1 & -c_3 u_2 & c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_4 u_4 & -c_3 u_4 \\ -c_4 u_1 & -c_4 u_2 & -c_4 u_3 & c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \end{bmatrix}$$

5. Centrálaxonometriai tételek bizonyítása

5.1. A képsík párhuzamos eltolása

Nyilvánvaló tény, hogy centrálprojekció esetében a képsíkot párhuzamosan eltolva az eredeti képhez hasonló képet kapunk. Az állítás a centrálaxonometriára is igaz, azzal a megszorítással, hogy az eltolást úgy kell megvalósítanunk, hogy az eredeti centrálaxonometriát definiáló alapvektorokat a leképezés centrumából nagyítjuk, és a skalárokat változatlanul hagyjuk. Ezt a megszorítást figyelembe véve kimondható az alábbi tétel:

VI. Tétel: Ha egy centrálaxonometria alapvektorait a centrumból nagyítjuk, akkor a két centrálaxonometrikus kép hasonló.

Bizonyítás: A III. számú mellékletekben mindkét alapesetre vonatkozóan egyszerű számítással igazolható a tétel. A számításból az is nyilvánvaló, hogy a hasonlóság mértéke az alapvektorokra vonatkozó nagyítás mértékével (ρ) egyezik meg.

Ebben a fejezetben bizonyítunk néhány ismert centrálaxonometriára vonatkozó tételt a $\mathbf{A} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ összefüggésre alapozva. A módszer lényegében azonos lesz.

Az állítások szükségessége a $\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}\{1 \ 1 \ 1 \ 0\}$ mátrixból kiindulva egyszerű számítással igazolható. Konkrétan a III. tételben igazolt állítás alapján a $\tilde{\mathbf{A}} = \text{diag}\{1 \ 1 \ 1 \ 0\}$ mátrixhoz hasonló mátrixot használva számítással igazolhatjuk a különböző tételekben szereplő metrikus összefüggéseket. Nehezebb feladat az állítások elegendőségének bizonyítása.

Mint láttuk, egy általános centrálaxonometria mátrixa hasonló az

$$\hat{\mathbf{A}}_v = \text{diag}\{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad 0\} \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{A}}_k = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 0 \right\rangle \quad \text{mátrixhoz.} \quad \text{Ezen}$$

mátrixokról látjuk be, hogy a metrikus feltételek teljesedése esetén a valós esetben $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, vagy a képzetes esetben $\alpha = \lambda_3$ és $\beta = 0$, azaz a kérdéses leképezés valóban centrálprojekció. Igen leegyszerűsödnek a számítások, hogy ha a képsík áthalad az origón. Ilyen képsík választása nem megy az általánosság rovására, hiszen a VI. tétel alapján párhuzamos síkokra képezve a keletkező képek hasonlóak lesznek. A bizonyítás a következő fontos állításon alapszik: Legyen a centrálaxonometria centruma \mathbf{c} . A képsík pontjaiba mutató valamely $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ független vektorrendszerből kiindulva képezzük a $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}\}$ bázist és tekintsük a $\mathbf{A} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ mátrixhoz tartozó lineáris leképezést, ahol $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}_v$ vagy $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}_k$. Ha meg tudjuk mutatni, hogy bizonyos (az ismert tételekben szereplő) metrikus összefüggések fennállása esetén az $\mathbf{A} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}^{-1}$ mátrixú transzformáció centrális projekció, (azaz $\hat{\mathbf{A}} = \text{diag}\{\lambda \quad \lambda \quad \lambda \quad 0\}$) akkor a képsík pontjaiba mutató, bármely $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ rendszert véve is centrális projekciót kell kapnunk, hiszen a sajátértékek invariánsak.

Az alkalmasan választott (minél egyszerűbb számítást biztosító) transzformációs mátrix alapján meghatározzuk a $\phi: (O; E_1, E_2, E_3, U_{1\infty}, U_{2\infty}, U_{3\infty})$ alapalakzat centrálaxonometrikus képét, felírjuk a megfelelő összefüggést, és ebből vezetjük le, hogy $\hat{\mathbf{A}} = \text{diag}\{\lambda \quad \lambda \quad \lambda \quad 0\}$.

5.2. Az ortogonális (paralel) axonometria alaptétele

Jól ismert, hogy az ortogonális axonometriában a rövidülések négyzetösszege kettő. Egyszerű példaként először ezt igazoljuk. A \mathbf{B}_3 mátrixot használjuk, valamint legyen $u_4 = 0$, azaz feltesszük, hogy a képsík nem párhuzamos a z koordinátatengellyel, és illeszkedik az origóra. Az axonometria most paralel, tehát a C centrum negyedik koordinátája, $c_4 = 0$. A transzformációs mátrix:

$$\mathbf{A}_{ortax} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \begin{bmatrix} u_2^2 + u_3^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 & 0 \\ -u_1u_2 & u_1^2 + u_3^2 & -u_2u_3 & 0 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & u_1^2 + u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Meghatározzuk a tengelykereszt képét $\phi^c : (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c)$ -t, azaz

$$O^c = \mathbf{A}_{ortax} O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1^c = \mathbf{A}_{ortax} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{-u_1u_2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{-u_1u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ 1 \end{bmatrix}, E_2^c = \mathbf{A}_{ortax} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-u_1u_2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{u_1^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{-u_2u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3^c = \mathbf{A}_{ortax} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-u_1u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{-u_2u_3}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A rövidülések négyzetösszege:

$$|O^c E_1^c|^2 + |O^c E_2^c|^2 + |O^c E_3^c|^2 = \frac{u_2^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + \frac{u_1^2 + u_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} + \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 2$$

Q.E.D

Részletesebb számolások a **IV.** mellékletben találhatóak.

5.3. Stiefel-féle kritérium

A T8 tételt bizonyítjuk. A $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ mátrixot választjuk, $u_3 = u_4 = 0$ mellett, azaz a

képsík illeszkedik a z koordinátatengelyre, a leképezés mátrixa $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{u_1 c_1 + u_2 c_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_2 c_2 & -\lambda_1 u_2 c_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 u_1 c_2 & \lambda_1 u_1 c_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 u_1 c_3 & -\lambda_2 u_2 c_3 & \lambda_2 (u_1 c_1 + u_2 c_2) & 0 \\ -\lambda_3 u_1 c_4 & \lambda_3 u_2 c_4 & 0 & \lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2) \end{bmatrix}$$

Meghatározzuk az alpalakzat képét:

$$O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1^c = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 u_2 c_2}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_1 c_4)} \\ -\lambda_1 u_1 c_2 \\ \frac{-\lambda_2 u_1 c_3}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_1 c_4)} \\ \frac{-\lambda_2 u_2 c_3}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_1 c_4)} \\ 1 \end{bmatrix}, E_2^c = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 u_2 c_1}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_2 c_4)} \\ \lambda_1 u_1 c_1 \\ \frac{\lambda_2 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_2 c_4)}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_2 c_4)} \\ -\lambda_2 u_2 c_3 \\ \frac{-\lambda_2 u_2 c_3}{\lambda_3 (u_1 c_1 + u_2 c_2 - u_2 c_4)} \\ 1 \end{bmatrix}, E_3^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U_1^c = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1 u_2 c_2}{\lambda_3 u_1 c_4} \\ \frac{\lambda_1 c_2}{\lambda_3 c_4} \\ \frac{\lambda_2 c_3}{\lambda_3 c_4} \\ 1 \end{bmatrix}, U_2^c = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_3 c_4} \\ -\frac{\lambda_1 u_1 c_1}{\lambda_3 u_2 c_4} \\ \frac{\lambda_2 c_3}{\lambda_3 c_4} \\ 1 \end{bmatrix}, U_3^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_2 (u_1 c_1 + u_2 c_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Először megmutatjuk, hogy a $U_1^c U_2^c \perp O^c U_{3\infty}^c$ összefüggés fennáll, hiszen

$$\left(\overline{U_1^c U_2^c}, \overline{O^c U_{3\infty}^c} \right) = 0.$$

Mivel a $\left(\frac{E_1^c U_1^c}{O^c E_1^c}\right)^2 + \left(\frac{E_2^c U_2^c}{O^c E_2^c}\right)^2 = \left(\frac{U_1^c U_2^c}{O^c E_3^c}\right)^2$ összefüggés baloldalán osztóviszonyok

szerepelnek, a baloldal számításakor e képpontok valamely koordinátáival számolunk:

$$\left(\frac{E_1^c U_1^c}{O^c E_1^c}\right)^2 + \left(\frac{E_2^c U_2^c}{O^c E_2^c}\right)^2 = \frac{(u_1 c_1 + u_2 c_2)(u_1^2 + u_2^2)}{u_1^2 u_2^2 c_4^2}$$

A jobboldalon a szakaszok hosszát ki kell számolnunk, az eredmény:

$$\left(\frac{U_1^c U_2^c}{O^c E_3^c}\right)^2 = \frac{\lambda_1^2 (u_1 c_1 + u_2 c_2)^2 (u_1^2 + u_2^2)}{\lambda_2^2 u_1^2 u_2^2 c_4^2}$$

Egyenlőség a két oldal között akkor és csak akkor állhat fenn, ha $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$. Ha megcseréljük **B** második és harmadik oszlopát, akkor hasonló számolás után $\lambda_1^2 = \lambda_3^2$ adódik. Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, akkor a feltétel teljesedik. Fordítva viszont látható, hogy a feltételből csak $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$ következik, azaz ha eltérő előjelűek a sajátértékek, akkor a centrális vetítés tükrözéssel is párosul.

5.4. Szabó kritérium

A $\mathbf{B} = \mathbf{B}_3$ mátrixot választjuk, $u_4 = 0$ mellett, azaz a képsík illeszkedik az origóra.

A leképezés mátrixa $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}^{-1}$, egyszerűbb alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1(u_2 c_2 + u_3 c_3) & -\lambda_1 u_2 c_1 & -\lambda_1 u_3 c_1 & 0 \\ -\lambda_2 u_1 c_2 & \lambda_2(u_1 c_1 + u_3 c_3) & -\lambda_2 u_3 c_2 & 0 \\ -\frac{u_1}{u_3}(\lambda_1 u_2 c_2 + \lambda_1 u_3 c_3 - \lambda_2 u_2 c_2) & \frac{u_2}{u_3}(\lambda_1 u_1 c_1 - \lambda_2 u_1 c_1 - \lambda_2 u_3 c_3) & \lambda_1 u_1 c_1 + \lambda_2 u_2 c_2 & 0 \\ -\lambda_3 u_1 c_4 & -\lambda_3 u_2 c_4 & -\lambda_3 u_3 c_4 & \lambda_3(u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3) \end{bmatrix}$$

Ismét meghatározzuk a $\phi: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ alapalakzat koordinátáit. A

T11 kritérium baloldala ismét affin invariáns, tehát elegendő a pontok valamely

koordinátája alapján számolni. A V. mellékletben közölt számítások szerint a

Szabó-kritériummal ekvivalens alak: $\frac{u_2^2}{u_3^2} = -\frac{\lambda_1 u_2^2}{\lambda_1 u_2^2 - \lambda_2 u_2^2 - \lambda_2 u_3^2}$. A kifejezést

egyszerűsítve adódik:

$$(u_2^2 + u_3^2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

A $\lambda_1 = \lambda_3$ összefüggés hasonlóan adódik.

6. Összefoglalás

A dolgozatban röviden összefoglalom a centrálaxonometriával kapcsolatos jelentősebb eddigi eredményeket. A centrálaxonometriát klasszikus módon megadó $\phi^c : (O^c ; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ projektív tengelykeresztet a képsíkon az origójával, az egységpontokkal valamint a végtelentávolsági pontok képével inhomogén koordinátákkal az alábbi módon adom meg:

$$O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_i^c = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, U_i^c = \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3$$

Komputergrafikai alkalmazhatóság szempontjából a leképezést analitikusan állítom elő. A számítások eredménye az alábbi lesz:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

Bebizonyítom a leképezés centrális jellegét, azaz meghatározom a C pontot, amely lényegében a lineáris leképezés null tere:

$$c_1 = \frac{-(\delta_1 - 1)\delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_2 = \frac{\delta_1(\delta_2 - 1)\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_3 = \frac{-\delta_1\delta_2(\delta_3 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

A C pontról belátom, hogy a rajta áthaladó egyenesek pontjainak képe megegyezik. Ez alapján nyílik lehetőség arra, hogy a centrálaxonometriában is alkalmazzuk a láthatóságot biztosító eljárásokat. Megmutatom, hogy a leképezéshez tartozik úgynevezett eltűnési sík is, amely sík pontjai a képsík végtelen távoli pontjaiba képeződnek, és egyenlete:

$$\frac{1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1} p_3 + 1 = 0$$

Osztályozom a centrálaxonometriákat és megmutatom, hogy mindegyik az alábbi két mátrix valamelyikéhez hasonló mátrixsal írható le:

$$\hat{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0) \text{ és}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 \mathbf{0} \right\rangle$$

Feltételek arra vonatkozóan, hogy egy centrálaxonometria mikor centrálprojekció és megmutatom, hogy ez akkor és csak akkor áll fenn, ha a transzformáció mátrixa hasonló a $\text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$ mátrixhoz. Bizonyítok több tételt arra vonatkozóan, hogy lineáris leképezés mikor centrálprojekció. Erre alapozva meghatározom egy tetszőleges pontból tetszőleges síkra történő centrálprojekció általános alakját.

A sajátértékekre vonatkozó feltétel alapján bizonyítok néhány tételt a centrálprojekció – centrálaxonometria vonatkozásában, így az ortogonális axonometria alaptételét, a Stiefel kritériumot, a Szabó kritériumot.

A dolgozat mellékletében illusztrációként bemutatok egy C++ kódrészletet, amelyben egy kockát ábrázoltam láthatóság szerint.

A bizonyításokhoz tartozó számításokat Maple-lel végeztem, ezek a számítások szintén a mellékletben találhatóak

7. Summary

In this paper I have given a short summary of the most important results of central-axonometric mapping from the start up till the present day. In order to define such a mapping in a synthetic way one is to give the *central axonometric reference system* by $\phi^c : (O^c ; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ in \mathbb{P}^2 on the image plane. To put into practice this mapping in computer graphics it is necessary to describe it in an analytic way. To characterize the mapping I have used the following coordinates:

$$O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_i^c = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, U_i^c = \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3$$

I prove that the linear mapping which belongs to this reference system will be the following:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1} y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2 - 1} y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3 - 1} y_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1 - 1} & \frac{1}{\delta_2 - 1} & \frac{1}{\delta_3 - 1} & 1 \end{bmatrix}$$

It has been shown that this mapping has a central character, namely the point C with the following coordinates:

$$c_1 = \frac{-(\delta_1 - 1)\delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_2 = \frac{\delta_1(\delta_2 - 1)\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_3 = \frac{-\delta_1\delta_2(\delta_3 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

is the center, which means that the points of the lines fitting on C have the same image. This makes the use of hidden-line, hidden surface methods practicable in computer graphics at the central-axonometric mappings, too. I have shown that the mapping has a disappearing plane, which is the following:

$$\frac{1}{\delta_1 - 1} p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1} p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1} p_3 + 1 = 0$$

The central axonometric mappings have been classified into two classes, which are represented with the following matrices:

$$\hat{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0) \text{ and}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 0 \right\rangle$$

I have given a condition of central projection, and have proved that a central axonometric mapping is a central projection then and only then if the matrix of the mapping is similar to $\text{diag}(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$. Several other statements have also been proved for the central axonometric mappings, and using these I have given the general form of a central projection from an optional center to an optional plane:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \text{diag}\{1, 1, 1, 0\} \cdot \mathbf{B}^{-1} =$$

$$\frac{1}{(U, C)} \begin{bmatrix} c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 & -c_1 u_2 & -c_1 u_3 & -c_1 u_4 \\ -c_2 u_1 & c_1 u_1 + c_3 u_3 + c_4 u_4 & -c_2 u_3 & -c_2 u_4 \\ -c_3 u_1 & -c_3 u_2 & c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_4 u_4 & -c_3 u_4 \\ -c_4 u_1 & -c_4 u_2 & -c_4 u_3 & c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 \end{bmatrix}$$

Based on the new condition of central projection I have proved some already known results, namely the condition of the orthogonal axonometric mapping, the Stiefel-criteria, the Szabó criteria.

For illustration I have attached a C++ program code, in order to demonstrate the efficiency of the method. Some of the computations were made by Maple, which are also attached.

Mellékletek

I. Centrálaxonometrikus kép projektív ábrázológeometriai alapokon

```
> restart;
```

Az egységpontok:

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
Ec := Matrix(3,3,symbol=e);Ec[3,1..3]:=1;Ec;
```

$$Ec := \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} \\ e_{3,1} & e_{3,2} & e_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$Ec_{3,1..3} := 1$$

$$\begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & e_{1,3} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & e_{2,3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A végtelentávoli pontok:

```
>
```

```
delta=Vector(3,symbol=delta);Vc:=Matrix([<delta[1]*Ec[1  
..2,1],1>,<delta[2]*Ec[1..2,2],1>,<delta[3]*Ec[1..2,3],  
1>]);
```

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$$

$$Vc := \begin{bmatrix} \delta_1 e_{1,1} & \delta_2 e_{1,2} & \delta_3 e_{1,3} \\ \delta_1 e_{2,1} & \delta_2 e_{2,2} & \delta_3 e_{2,3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A koordináták és a keresztszorzatok kiszámolása:

```
> PKx:=<(delta[1]*p[1]*Ec[1,1])/(delta[1]-1+p[1]),  
(delta[1]*p[1]*Ec[2,1])/(delta[1]-1+p[1]),1>;
```

$$PKx := \begin{bmatrix} \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \\ \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> PKy := < (delta[2]*p[2]*Ec[1,2]) / (delta[2]-1+p[2]),
(delta[2]*p[2]*Ec[2,2]) / (delta[2]-1+p[2]), 1 >;

$$PKy := \begin{bmatrix} \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \\ \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> PKz := < (delta[3]*p[3]*Ec[1,3]) / (delta[3]-1+p[3]),
(delta[3]*p[3]*Ec[2,3]) / (delta[3]-1+p[3]), 1 >;

$$PKz := \begin{bmatrix} \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \\ \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> PyVx := CrossProduct (PKy, Vc[1..3,1]) ;

$$PyVx := \begin{bmatrix} \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \\ \delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \\ \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \end{bmatrix}$$

> PxVy := CrossProduct (PKx, Vc[1..3,2]) ;

$$PxVy := \begin{bmatrix} \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \\ \delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \\ \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \end{bmatrix}$$

> Pxy := CrossProduct (PxVy, PyVx) ;

Pxy :=

$$\left[\left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \\
& \left[\left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right] \\
& \left[\left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right. \\
& \left. - \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right]
\end{aligned}$$

> **PyVz:=CrossProduct(PKy,Vc[1..3,3]);**

$$PyVz := \begin{bmatrix} \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \\ \delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \\ \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \end{bmatrix}$$

> **PzVy:=CrossProduct(PKz,Vc[1..3,2]);**

$$PzVy := \begin{bmatrix} \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \\ \delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \\ \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \end{bmatrix}$$

> **Pyz:=CrossProduct(PyVz,PzVy);**

Pyz:=

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right] \\
& \left[\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right] \\
& \left[\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$-\left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2}\right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2}\right) \Bigg]$$

>

PxyVz:=CrossProduct(Pxy,Vc[1..3,3]);PyzVx:=CrossProduct(Pyz,Vc[1..3,1]);

PxyVz:=

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right. \\ & - \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) - \left(\right. \\ & \left. \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right) \delta_3 e_{2,3} \Bigg] \\ & \left[\left(\left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right. \right. \\ & \left. - \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right) \delta_3 e_{1,3} \\ & - \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \\ & + \left. \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right] \\ & \left[\left(\left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right. \right. \\ & \left. - \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right) \delta_3 e_{2,3} - \left(\right. \\ & \left. \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right) \delta_3 e_{1,3} \Bigg] \end{aligned}$$

PyzVx:=

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right. \\ & - \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) - \left(\right. \\ & \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \delta_1 e_{2,1} \Big] \\
& \left[\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right. \\
& - \left. \left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right] \delta_1 e_{1,1} \\
& - \left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \\
& + \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \Big] \\
& \left[\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right] \delta_1 e_{2,1} - \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right) \\
& - \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right] \delta_1 e_{1,1} \Big]
\end{aligned}$$

> PK:=CrossProduct (PxyVz , PyzVx) ;

PK:=

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\left(\frac{\delta_1 p_1 e_{2,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \delta_2 e_{2,2} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \right. \right. \\
& - \left. \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_1 e_{2,1} \right) \right) \delta_3 e_{1,3} \\
& - \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_1 p_1 e_{1,1}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_1 e_{2,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_1 e_{1,1}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \\
& + \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\left(\right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\delta_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right) \\
& - \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right] \delta_1 e_{2,1} - \left(\right. \\
& \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\delta_1 p_1 e_{1,1} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} - \frac{\delta_1 p_1 e_{2,1} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_1 - 1 + p_1} \right) \left(\delta_1 e_{1,1} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\left(\frac{\delta_2 p_2 e_{1,2} \delta_3 e_{2,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \frac{\delta_2 p_2 e_{2,2} \delta_3 e_{1,3}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{1,3} \delta_2 e_{2,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \frac{\delta_3 p_3 e_{2,3} \delta_2 e_{1,2}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) - \left(\frac{\delta_2 p_2 e_{2,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} - \delta_3 e_{2,3} \right) \left(\delta_2 e_{1,2} - \frac{\delta_3 p_3 e_{1,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} \right) \right. \\
& \left. - \left(\delta_3 e_{1,3} - \frac{\delta_2 p_2 e_{1,2}}{\delta_2 - 1 + p_2} \right) \left(\frac{\delta_3 p_3 e_{2,3}}{\delta_3 - 1 + p_3} - \delta_2 e_{2,2} \right) \right) \delta_1 e_{2,1} \Big]
\end{aligned}$$

A képpont homogén alakja:

> PK:=simplify(PK/PK[3]);
PK:=

$$\begin{aligned}
& [(e_{1,1} \delta_3 \delta_2 p_1 \delta_1 - p_1 \delta_1 e_{1,1} \delta_2 - e_{1,1} \delta_3 p_1 \delta_1 + \delta_1 p_1 e_{1,1} + e_{1,2} \delta_2 p_2 \delta_1 \delta_3 \\
& - p_2 \delta_2 e_{1,2} \delta_1 - p_2 \delta_2 e_{1,2} \delta_3 + \delta_2 p_2 e_{1,2} + e_{1,3} \delta_3 \delta_1 \delta_2 p_3 - e_{1,3} \delta_3 \delta_1 p_3 \\
& - p_3 \delta_3 e_{1,3} \delta_2 + \delta_3 p_3 e_{1,3}) / (-\delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3 \delta_2 + p_1 \delta_2 \delta_3 + \delta_2 - \delta_2 p_3 - \delta_1 \delta_2 \\
& + \delta_1 \delta_2 p_3 - \delta_2 p_1 - \delta_3 p_2 + \delta_1 \delta_3 p_2 + \delta_3 - \delta_1 \delta_3 - p_1 \delta_3 + p_2 - \delta_1 p_2 - 1 + p_3 + \delta_1 \\
& - \delta_1 p_3 + p_1)] \\
& [(e_{2,1} \delta_3 \delta_2 p_1 \delta_1 - p_1 \delta_1 e_{2,1} \delta_2 - e_{2,1} \delta_3 p_1 \delta_1 + \delta_1 p_1 e_{2,1} + \delta_3 \delta_2 \delta_1 p_2 e_{2,2} \\
& - p_2 \delta_2 e_{2,2} \delta_1 - p_2 \delta_2 e_{2,2} \delta_3 + \delta_2 p_2 e_{2,2} + \delta_3 \delta_1 e_{2,3} \delta_2 p_3 - \delta_3 \delta_1 e_{2,3} p_3 \\
& - p_3 \delta_3 e_{2,3} \delta_2 + \delta_3 p_3 e_{2,3}) / (-\delta_2 \delta_3 + \delta_1 \delta_3 \delta_2 + p_1 \delta_2 \delta_3 + \delta_2 - \delta_2 p_3 - \delta_1 \delta_2 \\
& + \delta_1 \delta_2 p_3 - \delta_2 p_1 - \delta_3 p_2 + \delta_1 \delta_3 p_2 + \delta_3 - \delta_1 \delta_3 - p_1 \delta_3 + p_2 - \delta_1 p_2 - 1 + p_3 + \delta_1 \\
& - \delta_1 p_3 + p_1)] \\
& [1]
\end{aligned}$$

A transzformáció mátrixa:

> A:=Matrix(3,4,[[Ec[1,1]*delta[1]*(delta[2]-1)*(delta[3]-1),
Ec[1,2]*(delta[1]-1)*delta[2]*(delta[3]-1),
Ec[1,3]*(delta[1]-1)*(delta[2]-1)*delta[3]],
[Ec[2,1]*delta[1]*(delta[2]-1)*(delta[3]-1),
Ec[2,2]*(delta[1]-1)*delta[2]*(delta[3]-1),
Ec[2,3]*(delta[1]-1)*(delta[2]-1)*delta[3]],
[(delta[2]-1)*(delta[3]-1), (delta[1]-1)*(delta[3]-1), (delta[1]-1)*(delta[2]-1), (delta[1]-1)*(delta[2]-1)*(delta[3]-1)]]);

$$A := \begin{bmatrix} e_{1,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1), & e_{1,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1), & e_{1,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3, & 0 \\ e_{2,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1), & e_{2,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1), & e_{2,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3, & 0 \\ (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1), & (\delta_1 - 1) (\delta_3 - 1), & (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1), & (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) \end{bmatrix}$$

A képpont előállítására mátrixsal:

> **PM:=A.<p[1],p[2],p[3],1>;**

PM:=

$$\begin{bmatrix} e_{1,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + e_{1,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1) p_2 + e_{1,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3 p_3 \\ e_{2,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + e_{2,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1) p_2 + e_{2,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3 p_3 \\ [(\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + (\delta_1 - 1) (\delta_3 - 1) p_2 + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) p_3 \\ + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1)] \end{bmatrix}$$

> **PM:=PM/PM[3];**

PM:=

$$\begin{bmatrix} (e_{1,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + e_{1,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1) p_2 + e_{1,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3 p_3) / ((\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + (\delta_1 - 1) (\delta_3 - 1) p_2 + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) p_3 + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1)) \\ (e_{2,1} \delta_1 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + e_{2,2} (\delta_1 - 1) \delta_2 (\delta_3 - 1) p_2 + e_{2,3} (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) \delta_3 p_3) / ((\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1) p_1 + (\delta_1 - 1) (\delta_3 - 1) p_2 + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) p_3 + (\delta_1 - 1) (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1)) \\ [1] \end{bmatrix}$$

A két eredmény összevetése:

> **simplify(PM-PK);**

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>

II. Kocka centrálaxonometrikus képe. C++ kód

```
#include <stdlib.h>

#include <stdio.h>

#include <conio.h>

#include <math.h>

#include <dos.h>

#include "graphics.h"

//#include "graphics.h"

typedef double m3x4[4][4];

struct point {

    double x;

    double y;

};

struct point3d {

    double x;

    double y;

    double z;

};

struct alapalakzat {

    double x1,y1,x2,y2,x3,y3,l1,l2,l3;

};
```



```

struct edge {

    int A;

    int B;

};

struct squer {

    int A;

    int B;

    int C;

    int D;

    int COLOR;

};

struct palettetype pal;

int asqure[8];

point3d VertexRot[8];

float s=53;

point3d CC;

alapakzat F;

struct box {

    point min;

    point max;

};

point initpoint(double x,double y){

```

```

    point p;

    p.x=x;p.y=y;

    return p;

} ;

box initbox(double minx,double miny,double maxx,double maxy){

    box abox;

    abox.min=initpoint (minx,miny);

    abox.max=initpoint (maxx,maxy);

    return abox;

}

alapakzat    initalapakzat (double    x1,double    y1,double
x2,double y2,double x3,double y3,double l1,double l2,double l3){

    alapakzat F={x1,y1,x2,y2,x3,y3,l1,l2,l3};

    return(F);

}

point wvtrf(box W, box V , point P){

    point Q;

    Q.x=(P.x-W.min.x) * (V.max.x-V.min.x) / (W.max.x-
W.min.x)+V.min.x;

    Q.y=(P.y-W.min.y) * (V.max.y-V.min.y) / (W.max.y-
W.min.y)+V.min.y;

    return Q;

}

```

```

point3d Vertex[8] = {{-1,-1,1},

                    {1,-1,1},

                    {1,-1,-1},

                    {-1,-1,-1},

                    {-1,1,1},

                    {1,1,1},

                    {1,1,-1},

                    {-1,1,-1} };

edge          E[12]          =
{{0,1},{1,2},{2,3},{3,0},{0,4},{1,5},{2,6},{3,7},{4,5},{5,6},{6,7}
,{7,4}};

squer S[6] = {{ 1,2,6,5,RED},

              {2,3,7,6,YELLOW},

              {3,0,4,7,MAGENTA},

              {0,1,5,4,LIGHTBLUE},

              {0,3,2,1,CYAN},

              {4,5,6,7,LIGHTRED}};

point centproj(float s, point3d P){

    point Q;

    Q.x=P.x*s/(s-P.z);

    Q.y=P.y*s/(s-P.z);

    return Q;

```

```

}

point centrax(m3x4 A, point3d P){

    point3d QH;

    point Q;

    QH.x=A[0][0]*P.x+A[0][1]*P.y+A[0][2]*P.z;

    QH.y=A[1][0]*P.x+A[1][1]*P.y+A[1][2]*P.z;

    QH.z=A[2][0]*P.x+A[2][1]*P.y+A[2][2]*P.z+1;

    Q=initpoint(QH.x/QH.z,QH.y/QH.z);

    return Q;

}

point3d centercentrax(alapalakzat F){

    point3d C;

    double                                deta=(-

F.12*F.x2*F.11*F.y1+F.12*F.x2*F.13*F.y3+F.12*F.y2*F.11*F.x1-
F.12*F.y2*F.13*F.x3+F.13*F.x3*F.11*F.y1-F.13*F.y3*F.11*F.x1);

    C.x=-F.12*F.13*(-F.y2*F.x3*F.11-
F.x2*F.y3+F.x2*F.y3*F.11+F.y2*F.x3)/deta;

    C.y=                                F.11*F.13*(F.x3*F.y1-F.x3*F.12*F.y1-
F.y3*F.x1+F.x1*F.12*F.y3)/deta;

    C.z=-F.11*F.12*(F.x2*F.y1-F.y2*F.x1-
F.13*F.x2*F.y1+F.13*F.y2*F.x1)/deta;

    return(C);

}

void matrixgen(alapalakzat F,m3x4& A){

```

```

        if (F.11!=0){
            A[0][0] = F.x1 * F.11 / (F.11 - 1); A[1][0] =
F.y1 * F.11 / (F.11 - 1); A[2][0] = 1 / (F.11 - 1);}
        else {A[0][0] = F.x1; A[1][0] =
F.y1 ; A[2][0] = 0;}
        if (F.12!=0){
            A[0][1] = F.x2 * F.12 / (F.12 - 1); A[1][1] =
F.y2 * F.12 / (F.12 - 1); A[2][1] = 1 / (F.12 - 1);}
        else {A[0][1] = F.x2; A[1][1] =
F.y2 ; A[2][1] = 0;}
        if (F.13!=0){
            A[0][2] = F.x3 * F.13 / (F.13 - 1); A[1][2] =
F.y3 * F.13 / (F.13 - 1); A[2][2] = 1 / (F.13 - 1);}
        else {A[0][2] = F.x3; A[1][2] =
F.y3; A[2][2] = 0;}
    }

point3d rotate(double alfa,double beta,double gama,point3d P){
    point3d P1,P2;
    P1.x=P.x;
    P1.y=P.y*cos(alfa)-P.z*sin(alfa);
    P1.z=P.y*sin(alfa)+P.z*cos(alfa);

```

```

P2.x=P1.x*cos(beta)+P1.z*sin(beta);

P2.y=P1.y;

P2.z=-P1.x*sin(beta)+P1.z*cos(beta);

P1.x=P2.x*cos(gama)-P2.y*sin(gama);

P1.y=P2.x*sin(gama)+P2.y*cos(gama);

P1.z=P2.z;

return P1;

}

/*int isvisible(int i){

    point3d AB,BC,N,A;

    A=VertexRot[S[i].A];

    AB.x=VertexRot[S[i].B].x-VertexRot[S[i].A].x;

    AB.y=VertexRot[S[i].B].y-VertexRot[S[i].A].y;

    AB.z=VertexRot[S[i].B].z-VertexRot[S[i].A].z;

    BC.x=VertexRot[S[i].C].x-VertexRot[S[i].B].x;

    BC.y=VertexRot[S[i].C].y-VertexRot[S[i].B].y;

    BC.z=VertexRot[S[i].C].z-VertexRot[S[i].B].z;

    N.x=AB.y*BC.z - AB.z*BC.y;

    N.y=-AB.x*BC.z + BC.x*AB.z;

    N.z=AB.x*BC.y - AB.y*BC.x;

    return ((-A.x*N.x-A.y*N.y+(s-A.z)*N.z)>0);
}

```

```

}*/

double vhossz(point3d V)
{
    return (sqrt(V.x*V.x+V.y*V.y+V.z*V.z));
}

int isvisible(int i, point3d Light){

    point3d AB,BC,N,A;

    int szin;

    A=VertexRot[S[i].A];

    AB.x=VertexRot[S[i].B].x-VertexRot[S[i].A].x;
    AB.y=VertexRot[S[i].B].y-VertexRot[S[i].A].y;
    AB.z=VertexRot[S[i].B].z-VertexRot[S[i].A].z;

    BC.x=VertexRot[S[i].C].x-VertexRot[S[i].B].x;
    BC.y=VertexRot[S[i].C].y-VertexRot[S[i].B].y;
    BC.z=VertexRot[S[i].C].z-VertexRot[S[i].B].z;

    N.x=AB.y*BC.z - AB.z*BC.y;
    N.y=-AB.x*BC.z + BC.x*AB.z;
    N.z=AB.x*BC.y - AB.y*BC.x;

    if      (( (CC.x-A.x) *N.x+(CC.y-A.y) *N.y+(CC.z-
A.z) *N.z)<0) szin=0;else

```

```
        szin=      int      (14*      (((Light.x-A.x)*N.x+(Light.y-  
A.y)*N.y+(Light.z-A.z)*N.z)/vhossz(N)/vhossz(Light)))+1;
```

```
        return (szin);
```

```
    }
```

```
void palettadef()
```

```
{
```

```
    int i;
```

```
    for(i=1;i<16;i++) setrgbpalette(i,100+i*4,0,0);
```

```
}
```

```
int main(void)
```

```
{
```

```
    int gd, gm, errorcode, stop=0;
```

```
    /* initialize graphics and local variables */
```

```
    detectgraph(&gd, &gm);
```

```
    gm=VGAMED;
```

```
    initgraph(&gd, &gm, "");
```

```
    /* read result of initialization */
```

```
    errorcode = graphresult();
```



```

if (errorcode != grOk) /* an error occurred */
{
    printf("Graphics          error:          %s\n",
grapherrormsg(errorcode));

    printf("Press any key to halt:");

    getch();

    exit(1); /* terminate with an error code */
}

box W,V;

/* start animation and rotating of cube */

getpalette(&pal);

int i,page=0,szin;

double alfa=0,beta=0,gama=0;

m3x4 A;

point P2d[8],o;

o.x=getmaxx()/2; o.y=getmaxy()/2;

W=initbox(-2,-2,2,2);

V=initbox(o.x-150,o.y+150,o.x+150,o.y-150);

setcolor(YELLOW);

setlinestyle(0,0,2);

double ds=3;

```

```

double dds=0.05;

char ch='2';

F=initalapalakzat(1,-1.5,-1.2,-1,0.8,1,13,14,15);

CC=centercentrax(F);

//point3d Light={0,0,100};//CC;

point3d Light=CC;

//devout(CC.x);

matrixgen(F,A);

while (ch!=27) {

    setactivepage(page);

    cleardevice();

    setcolor(GREEN);

    // rectangle(int( V.min.x),int( V.min.y),int(
V.max.x),int( V.max.y));

    alfa=alfa+0.05 ;beta=beta+0.04;gama=gama+0.03;ds+=dds;

    if (alfa>2*M_PI) alfa=alfa-2*M_PI;

    if (beta>2*M_PI) beta=beta-2*M_PI;

    if (gama>2*M_PI) gama=gama-2*M_PI;

    if (ds>5 || ds<2) dds=-dds;

    W=initbox(-ds,-ds,ds,ds);

    for (i=0 ; i<8 ;++i)

        {

            VertexRot[i]=rotate(alfa,beta,gama,Vertex[i]);

```

```

        P2d[i]=centrax(A,VertexRot[i]);

        P2d[i]=wvtrf(W,V,P2d[i]);

    }

switch(ch){

case '1' :

    palettadef();

    for (i=0 ; i<6 ;++i){

        szin=isvisible(i,Light);

        if (szin>0)

            asqure[0]=int(P2d[S[i].A].x),

            asqure[1]=int(P2d[S[i].A].y),

            asqure[2]=int(P2d[S[i].B].x),

            asqure[3]=int(P2d[S[i].B].y),

            asqure[4]=int(P2d[S[i].C].x),

            asqure[5]=int(P2d[S[i].C].y),

            asqure[6]=int(P2d[S[i].D].x),

            asqure[7]=int(P2d[S[i].D].y),

            setfillstyle(SOLID_FILL,szin),

            setcolor(szin),

            fillpoly(4,asqure);}

        if (stop) getch();break;

case '2' :

```

```

setallpalette(&pal);

setcolor(YELLOW);

for (i=0 ; i<12 ;++i){

line(int(P2d[E[i].A].x),int(P2d[E[i].A].y),int(P2d[E[i].B].x),int(
P2d[E[i].B].y));

}

break;

case '3' :

for (i=0 ; i<6 ;++i){

setallpalette(&pal);

if (isvisible(i,Light))

asqure[0]=int(P2d[S[i].A].x),

asqure[1]=int(P2d[S[i].A].y),

asqure[2]=int(P2d[S[i].B].x),

asqure[3]=int(P2d[S[i].B].y),

asqure[4]=int(P2d[S[i].C].x),

asqure[5]=int(P2d[S[i].C].y),

asqure[6]=int(P2d[S[i].D].x),

asqure[7]=int(P2d[S[i].D].y),

setfillstyle(SOLID_FILL,S[i].COLOR),

setcolor(S[i].COLOR),

```

```
        fillpoly(4,asqure);}

        break;

    case '4' :

        stop=1;

        break;

    case '5' :

        stop=0;

        break;

    }

    setvisualpage(page);

    delay(40);

    page=1-page;

    if (kbhit()) ch=getch();

};

return 0;

}
```

III. A képsík eltolása

Képsík párhuzamos eltolása valós eset

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
L:=Vector(4,symbol=lambda);L[4]:=0;
A centrálaxonometria alaplátrixa
```

```
> AH := DiagonalMatrix(L,4,4);
```

$$AH := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C: centrum

```
> C:=Vector(4,symbol=c);C[4]:=1;
```

Az eredeti és az eltolt képsíkot meghatározó vektorok

```
> B0:=Matrix(3,3,symbol=b);
```

```
>
B1:=Matrix(4,4,[<B0[1..3,1],1>,<B0[1..3,2],1>,<B0[1..3,3],1>,C]);
B2:=Matrix(4,4,[<rho*B0[1..3,1]+(1-rho)*C[1..3],1>,<rho*B0[1..3,2]+(1-rho)*C[1..3],1>,<rho*B0[1..3,3]+(1-rho)*C[1..3],1>,C]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & c_1 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & c_2 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B2 := \begin{bmatrix} \rho b_{1,1} + (1-\rho)c_1 & \rho b_{1,2} + (1-\rho)c_1 & \rho b_{1,3} + (1-\rho)c_1 & c_1 \\ \rho b_{2,1} + (1-\rho)c_2 & \rho b_{2,2} + (1-\rho)c_2 & \rho b_{2,3} + (1-\rho)c_2 & c_2 \\ \rho b_{3,1} + (1-\rho)c_3 & \rho b_{3,2} + (1-\rho)c_3 & \rho b_{3,3} + (1-\rho)c_3 & c_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B1inv:=MatrixInverse(B1);B2inv:=MatrixInverse(B2);
A transzformációs mátrix világkoordinátarendszerben
```

```
> A1:=simplify(B1.AH.B1inv);A2:=simplify(B2.AH.B2inv);  
Egy tetszőleges pont
```

```
> P:=Vector(4,symbol=p);P[4]:=1;
```

A pont képe homogén koordinátákban

```
>
```

```
PK1:=A1.P;PK2:=A2.P;PK1H:=PK1/PK1[4];PK2H:=PK2/PK2[4];
```

A centrumból a pontképébe mutató vektor

```
> CP1:=PK1H-C;CP2:=PK2H-C;
```

```
>
```

```
simplify(CP2[1]/CP1[1]);simplify(CP2[2]/CP1[2]);simplif  
y(CP2[3]/CP1[3]);
```

ρ

ρ

ρ

```
>
```

képsík párhuzamos eltolása valós eset

```
> restart;
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

A centrálaxonometria alapmátrixa

```
> AH := Matrix(4,4,[<alpha,beta,0,0>,<-  
beta,alpha,0,0>,<0,0,lambda[3],0>,<0,0,0,0>]);
```

$$AH := \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C: centrum

```
> C:=Vector(4,symbol=c);C[4]:=1;
```

Az eredeti és az eltolt képsíkot meghatározó vektorok

```
> B0:=Matrix(3,3,symbol=b);
```

```
>
```

```
B1:=Matrix(4,4,[<B0[1..3,1],1>,<B0[1..3,2],1>,<B0[1..3,3],1>,C]);
```

```
B2:=Matrix(4,4,[<rho*B0[1..3,1]+(1-rho)*C[1..3],1>,<rho*B0[1..3,2]+(1-rho)*C[1..3],1>,<rho*B0[1..3,3]+(1-rho)*C[1..3],1>,C]);
```

```
> B1inv:=MatrixInverse(B1);B2inv:=MatrixInverse(B2);
```

A transzformációs mátrix világkoordinátarendszerben

```
> A1:=simplify(B1.AH.B1inv);A2:=simplify(B2.AH.B2inv);
```

Egy tetszőleges pont

```
> P:=Vector(4,symbol=p);P[4]:=1;
```

A pont képe homogén koordinátákban

```
>
```

```
PK1:=A1.P;PK2:=A2.P;PK1H:=PK1/PK1[4];PK2H:=PK2/PK2[4];
```

A centrumból a pontképébe mutató vektor

```
> CP1:=PK1H-C;CP2:=PK2H-C;
```

```
>
```

```
simplify(CP2[1]/CP1[1]);simplify(CP2[2]/CP1[2]);simplify(CP2[3]/CP1[3]);
```

ρ

ρ

ρ

```
>
```


IV. Ortogonális axonometria

Orogonális axonometria rövidülés négyzetösszege=2

```
> restart;  
> with(LinearAlgebra):  
L:=Vector(4,[1,1,1,0]);
```

$$L := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A centrálaxonometria alapmátrixa

```
> AH := DiagonalMatrix(L,4,4);
```

$$AH := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U: képsík az origón át, C:centrum végtelentávoli, OC merőleges a képsíkra->

ortogonális axonometria

```
> U:=Vector(4,symbol=u);U[4]:=0;C:=U;
```

$$U := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$U_4 := 0$$

$$C := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ha $u_3 \neq 0$, azaz a képsík nem párhuzamos z-vel $B=B_3$

```
> B:=Matrix(4,4,[<U[3],0,-U[1],0>,<0,U[3],-
```

`U[2],0>,<0,0,0,U[3]>,C]);`

$$B := \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & u_3 & 0 & u_2 \\ -u_1 & -u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \end{bmatrix}$$

`> Binv:=MatrixInverse(B);`

$$Binv := \begin{bmatrix} \frac{u_3^2 + u_2^2}{(u_3^2 + u_1^2 + u_2^2)u_3} & -\frac{u_2 u_1}{(u_3^2 + u_1^2 + u_2^2)u_3} & -\frac{u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \\ -\frac{u_2 u_1}{(u_3^2 + u_1^2 + u_2^2)u_3} & \frac{u_3^2 + u_1^2}{(u_3^2 + u_1^2 + u_2^2)u_3} & -\frac{u_2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{u_3} \\ \frac{u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix **B** bázisban

`> A:=simplify(B.AH.Binv);`

$$A := \begin{bmatrix} \frac{u_3^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & -\frac{u_2 u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & -\frac{u_1 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \\ -\frac{u_2 u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_3^2 + u_1^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & -\frac{u_2 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \\ -\frac{u_1 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & -\frac{u_2 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix egyszerűbb alakban

`> A:=simplify((U[1]*C[1]+u[2]*C[2]+u[3]*C[3])*A);`

$$A := \begin{bmatrix} u_3^2 + u_2^2 & -u_2 u_1 & -u_1 u_3 & 0 \\ -u_2 u_1 & u_3^2 + u_1^2 & -u_2 u_3 & 0 \\ -u_1 u_3 & -u_2 u_3 & u_1^2 + u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_3^2 + u_1^2 + u_2^2 \end{bmatrix}$$

A térbeli alakzat origója, egységpontjai, végtelentávoli pontjai

>

```
K:=Matrix(4,7,[<0,0,0,1>,<1,0,0,1>,<1,0,0,0>,<0,1,0,1>,<0,1,0,0>,<0,0,1,1>,<0,0,1,0>]);
```

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A centráxonometrikus alap alakzat előállítás

```
> KC:=A.K;
```

$$KC := \begin{bmatrix} 0, & u_3^2 + u_2^2, & u_3^2 + u_2^2, & -u_2 u_1, & -u_2 u_1, & -u_1 u_3, & -u_1 u_3 \\ 0, & -u_2 u_1, & -u_2 u_1, & u_3^2 + u_1^2, & u_3^2 + u_1^2, & -u_2 u_3, & -u_2 u_3 \\ 0, & -u_1 u_3, & -u_1 u_3, & -u_2 u_3, & -u_2 u_3, & u_1^2 + u_2^2, & u_1^2 + u_2^2 \\ u_3^2 + u_1^2 + u_2^2, & u_3^2 + u_1^2 + u_2^2, & 0, & u_3^2 + u_1^2 + u_2^2, & 0, & u_3^2 + u_1^2 + u_2^2, & 0 \end{bmatrix}$$

Inhomogenizálás

```
> OC :=simplify(KC[1..4,1]/KC[4,1]);
```

$$OC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> E1C:=simplify(KC[1..4,2]/KC[4,2]);
```

$$E1C := \begin{bmatrix} \frac{u_3^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ -\frac{u_2 u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ -\frac{u_1 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> E2C:=simplify(KC[1..4,4]/KC[4,4]);
```

$$E2C := \begin{bmatrix} \frac{u_2 u_1}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{u_3^2 + u_1^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{u_2 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> `E3C:=simplify(KC[1..4,6]/KC[4,6]);`

$$E3C := \begin{bmatrix} \frac{u_1 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{u_2 u_3}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A rövidülések négyzetösszege

> `qx:=simplify(VectorNorm(OC-E1C,2,conjugate=false)^2);`

`qy:=simplify(VectorNorm(OC-E2C,2,conjugate=false)^2);`

`qz:=simplify(VectorNorm(OC-E3C,2,conjugate=false)^2);`

$$qx := \frac{u_3^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2}$$

$$qy := \frac{u_3^2 + u_1^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2}$$

$$qz := \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_3^2 + u_1^2 + u_2^2}$$

> `simplify(qx+qy+qz);`

2

>

V. Szabó tétel

Szabó tétel bizonyítása valós sajátértékek

```
> restart;  
> with(LinearAlgebra):  
L:=Vector(4,symbol=lambda);L[4]:=0;
```

$$L := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$L_4 := 0$$

A centrálaxonometria alaplátrixa

```
> AH := DiagonalMatrix(L,4,4);
```

$$AH := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U: képsík az origón át, C:centrum

```
> U:=Vector(4,symbol=u);C:=Vector(4,symbol=c);
```

$$U := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

ha $u_3 \neq 0$, azaz a képsík nem párhuzamos z-vel $B=B_3$, origón

át: $U[4]=0$

```
> B:=Matrix(4,4,[<U[3],0,-U[1],0>,<0,U[3],-
```

U[2],0>,<0,0,0,U[3]>,C]);

$$B := \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & u_3 & 0 & c_2 \\ -u_1 & -u_2 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & u_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

> Binv:=MatrixInverse(B);

$$Binv := \begin{bmatrix} \frac{c_3 u_3 + u_2 c_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_1 u_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ -\frac{c_2 u_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & \frac{c_3 u_3 + u_1 c_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ -\frac{c_4 u_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_4 u_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_4}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ \frac{u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} & \frac{u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} & \frac{u_3}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix B bázisban

> A:=simplify(B.AH.Binv);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{\lambda_1 c_1 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_1 c_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{\lambda_2 c_2 u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, \frac{\lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_2 c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2)}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1)}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3}, \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{\lambda_3 c_4 u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{\lambda_3 c_4 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_3 c_4}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, \lambda_3 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix egyszerűbb alakban

> A:=simplify((U[1]*C[1]+u[2]*C[2]+u[3]*C[3])*A);

$$A := \begin{bmatrix} \lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), -\lambda_1 c_1 u_2, -u_3 \lambda_1 c_1, 0 \\ [-\lambda_2 c_2 u_1, \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1), -u_3 \lambda_2 c_2, 0] \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2)}{u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1)}{u_3}, \\ u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2, 0 \\ [-\lambda_3 c_4 u_1, -\lambda_3 c_4 u_2, -u_3 \lambda_3 c_4, (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3] \end{array} \right]$$

A térbeli alakzat origója, egységpontjai, végtelentávoli pontjai

>

K:=Matrix(4,7,[<0,0,0,1>,<1,0,0,1>,<1,0,0,0>,<0,1,0,1>,<0,1,0,0>,<0,0,1,1>,<0,0,1,0>]);

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A centráaxonometrikus alap alakzat előállítás

> **KC:=A.K**

KC:=

$$\begin{bmatrix} 0, \lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), \lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), -\lambda_1 c_1 u_2, -\lambda_1 c_1 u_2, -u_3 \lambda_1 c_1, -u_3 \lambda_1 c_1 \\ 0, -\lambda_2 c_2 u_1, -\lambda_2 c_2 u_1, \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1), \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1), -u_3 \lambda_2 c_2, -u_3 \lambda_2 c_2 \\ \left[0, -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2)}{u_3}, -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2)}{u_3}, \right. \\ \left. \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1)}{u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1)}{u_3}, \right. \\ \left. u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2, u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2 \right] \\ [(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3, -\lambda_3 c_4 u_1 + (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3, -\lambda_3 c_4 u_1, \\ -\lambda_3 c_4 u_2 + (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3, -\lambda_3 c_4 u_2, -u_3 \lambda_3 c_4 + (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3, \\ -u_3 \lambda_3 c_4] \end{bmatrix}$$

> **OC :=simplify(KC[1..4,1]/KC[4,1]);**

$$OC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> **E1C:=simplify(KC[1..4,2]/KC[4,2]);**

$$EIC := \left[\begin{array}{c} \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{\lambda_3 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ - \frac{\lambda_2 c_2 u_1}{\lambda_3 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2)}{\lambda_3 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} \\ 1 \end{array} \right]$$

> U1C:=simplify(KC[1..4,3]/KC[4,3]);

$$U1C := \left[\begin{array}{c} - \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{\lambda_3 c_4 u_1} \\ \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_3 c_4} \\ \frac{\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_2 c_2}{\lambda_3 c_4 u_3} \\ 1 \end{array} \right]$$

> E2C:=simplify(KC[1..4,4]/KC[4,4]);

$$E2C := \left[\begin{array}{c} \frac{\lambda_1 c_1 u_2}{\lambda_3 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ - \frac{\lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{\lambda_3 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1)}{\lambda_3 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} \\ 1 \end{array} \right]$$

> U2C:=simplify(KC[1..4,5]/KC[4,5]);

$$U2C := \left[\begin{array}{c} \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_3 c_4} \\ - \frac{\lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{\lambda_3 c_4 u_2} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_3 u_3 - \lambda_2 u_1 c_1}{\lambda_3 c_4 u_3} \\ 1 \end{array} \right]$$

> E3C:=simplify(KC[1..4,6]/KC[4,6]);

$$E3C := \begin{bmatrix} \frac{u_3 \lambda_1 c_1}{\lambda_3 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_3 \lambda_2 c_2}{\lambda_3 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2}{\lambda_3 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U3C:=simplify(KC[1..4,7]/KC[4,7]);

$$U3C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_3 c_4} \\ \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_3 c_4} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_2 c_2}{u_3 \lambda_3 c_4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Szabó tétel bal oldala, x koordinátákra

> e2f2x:=simplify((OC[1]-E2C[1])/(E2C[1]-U2C[1]));

$$e2f2x := -\frac{c_4 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}$$

> e3f3x:=simplify((OC[1]-E3C[1])/(E3C[1]-U3C[1]));

$$e3f3x := -\frac{c_4 u_3}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}$$

> bo:=simplify((e2f2x/e3f3x)^2);

$$bo := \frac{u_2^2}{u_3^2}$$

A tétel jobboldala

> tg2:=simplify(Transpose(U2C-U3C).(U2C-U1C));

$$tg2 := -\lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) (-\lambda_2 u_3^3 c_3 - \lambda_2 u_3^2 u_1 c_1 - \lambda_2 u_3^2 u_2 c_2 + u_2^2 u_1 \lambda_1 c_1 - u_2^2 \lambda_2 c_3 u_3 - u_2^2 \lambda_2 u_1 c_1 + u_2^2 \lambda_1 c_3 u_3 + u_2^3 \lambda_1 c_2 - u_2^3 \lambda_2 c_2) / (\lambda_3^2 c_4^2 u_2^2 u_3^2)$$

> tg3:=simplify(Transpose(U3C-U2C).(U3C-U1C));

$$tg3 := \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)^2 \lambda_2}{u_3^2 \lambda_3^2 c_4^2}$$

> `jo:=simplify(tg3/tg2);`

$$jo := -\frac{u_2^2 \lambda_1}{-\lambda_2 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_2}$$

> `eq:=simplify(bo-jo);`

$$eq := \frac{u_2^2 (-\lambda_2 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_2 + \lambda_1 u_3^2)}{u_3^2 (-\lambda_2 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_2)}$$

> `factor(-lambda[2]*u[3]^2+u[2]^2*lambda[1]-
u[2]^2*lambda[2]+lambda[1]*u[3]^2)=0;`

$$(u_2^2 + u_3^2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

Amiből $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Oszlopcsere B-ben, majd az előzőeknek megfelelően

> `B:=Matrix(4,4,[<U[3],0,-
U[1],0>,<0,0,0,U[3]>,<0,U[3],-U[2],0>,C]);`

$$B := \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & u_3 & c_2 \\ -u_1 & 0 & -u_2 & c_3 \\ 0 & u_3 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

> `Binvs:=MatrixInverse(B);`

$$B_{inv} := \begin{bmatrix} \frac{c_3 u_3 + u_2 c_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_1 u_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ -\frac{c_4 u_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_4 u_2}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_4}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ -\frac{c_2 u_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & \frac{c_3 u_3 + u_1 c_1}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} & -\frac{c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \\ \frac{u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} & \frac{u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} & \frac{u_3}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2} \end{bmatrix}$$

> **A:=simplify(B.AH.Binv) ;**

A :=

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{\lambda_1 c_1 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_1 c_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{\lambda_3 c_2 u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, \frac{\lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_3 c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2)}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1)}{(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3}, \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, 0 \\ -\frac{\lambda_2 c_4 u_1}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{\lambda_2 c_4 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, -\frac{u_3 \lambda_2 c_4}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}, \lambda_2 \end{bmatrix}$$

> **A:=simplify((U[1]*C[1]+u[2]*C[2]+u[3]*C[3])*A) ;**

A :=

$$\begin{bmatrix} [\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), -\lambda_1 c_1 u_2, -u_3 \lambda_1 c_1, 0] \\ [-\lambda_3 c_2 u_1, \lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1), -u_3 \lambda_3 c_2, 0] \\ \left[-\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2)}{u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1)}{u_3}, \right. \\ \left. u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2, 0 \right] \\ [-\lambda_2 c_4 u_1, -\lambda_2 c_4 u_2, -u_3 \lambda_2 c_4, \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)] \end{bmatrix}$$

> **KC:=A.K ;**

KC :=

$$\begin{bmatrix} [0, \lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), \lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2), -\lambda_1 c_1 u_2, -\lambda_1 c_1 u_2, -u_3 \lambda_1 c_1, -u_3 \lambda_1 c_1] \\ [0, -\lambda_3 c_2 u_1, -\lambda_3 c_2 u_1, \lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1), \lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1), -u_3 \lambda_3 c_2, -u_3 \lambda_3 c_2] \end{bmatrix}$$

$$\left[0, -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2)}{u_3}, -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2)}{u_3}, \right. \\ \left. \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1)}{u_3}, \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1)}{u_3}, \right. \\ \left. u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2, u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2 \right] \\ [\lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2), -\lambda_2 c_4 u_1 + \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2), -\lambda_2 c_4 u_1, \\ -\lambda_2 c_4 u_2 + \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2), -\lambda_2 c_4 u_2, -u_3 \lambda_2 c_4 + \lambda_2 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \\ , -u_3 \lambda_2 c_4]$$

> OC :=simplify(KC[1..4,1]/KC[4,1]);

$$OC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E1C:=simplify(KC[1..4,2]/KC[4,2]);

$$E1C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{\lambda_2 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{\lambda_3 c_2 u_1}{\lambda_2 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ -\frac{u_1 (\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2)}{\lambda_2 (-c_4 u_1 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U1C:=simplify(KC[1..4,3]/KC[4,3]);

$$U1C := \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_2 c_2)}{\lambda_2 c_4 u_1} \\ \frac{\lambda_3 c_2}{\lambda_2 c_4} \\ \frac{\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 u_2 c_2 - u_2 \lambda_3 c_2}{\lambda_2 c_4 u_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E2C:=simplify(KC[1..4,4]/KC[4,4]);

$$E2C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_1 u_2}{\lambda_2 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{\lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{\lambda_2 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_2 (u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1)}{\lambda_2 (-c_4 u_2 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) u_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U2C:=simplify(KC[1..4,5]/KC[4,5]);

$$U2C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_4} \\ \frac{\lambda_3 (c_3 u_3 + u_1 c_1)}{\lambda_2 c_4 u_2} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 - \lambda_3 c_3 u_3 - \lambda_3 u_1 c_1}{\lambda_2 c_4 u_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E3C:=simplify(KC[1..4,6]/KC[4,6]);

$$E3C := \begin{bmatrix} \frac{u_3 \lambda_1 c_1}{\lambda_2 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_3 \lambda_3 c_2}{\lambda_2 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2}{\lambda_2 (-u_3 c_4 + c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U3C:=simplify(KC[1..4,7]/KC[4,7]);

$$U3C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_4} \\ \frac{\lambda_3 c_2}{\lambda_2 c_4} \\ \frac{u_1 \lambda_1 c_1 + u_2 \lambda_3 c_2}{u_3 \lambda_2 c_4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> e2f2x:=simplify((OC[1]-E2C[1])/(E2C[1]-U2C[1]));

$$e2f2x := -\frac{c_4 u_2}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}$$

> e3f3x:=simplify((OC[1]-E3C[1])/(E3C[1]-U3C[1]));

$$e3f3x := -\frac{c_4 u_3}{c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2}$$

> **bo:=simplify((e2f2x/e3f3x)^2);**

$$bo := \frac{u_2^2}{u_3^2}$$

> **tg2:=simplify(Transpose(U2C-U3C).(U2C-U1C));**

$$tg2 := -(c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2) \lambda_3 (-\lambda_3 u_3^3 c_3 - \lambda_3 u_3^2 u_1 c_1 - \lambda_3 u_3^2 u_2 c_2 + u_2^2 u_1 \lambda_1 c_1 - u_2^2 \lambda_3 c_3 u_3 - u_2^2 \lambda_3 u_1 c_1 + u_2^2 \lambda_1 c_3 u_3 + u_2^3 \lambda_1 c_2 - u_2^3 \lambda_3 c_2) / (\lambda_2^2 c_4^2 u_2^2 u_3^2)$$

> **tg3:=simplify(Transpose(U3C-U2C).(U3C-U1C));**

$$tg3 := \frac{\lambda_1 (c_3 u_3 + u_1 c_1 + u_2 c_2)^2 \lambda_3}{u_3^2 \lambda_2^2 c_4^2}$$

> **jo:=simplify(tg3/tg2);**

$$jo := -\frac{u_2^2 \lambda_1}{-\lambda_3 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_3}$$

> **eq:=simplify(bo-jo);**

$$eq := \frac{u_2^2 (-\lambda_3 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_3 + \lambda_1 u_3^2)}{u_3^2 (-\lambda_3 u_3^2 + u_2^2 \lambda_1 - u_2^2 \lambda_3)}$$

> **factor(-lambda[3]*u[3]^2+u[2]^2*lambda[1]-u[2]^2*lambda[3]+lambda[1]*u[3]^2)=0;**

$$(u_2^2 + u_3^2)(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$$

Szabó tétel bizonyítása ha a transzformáció mátrixa kvázidiagonális

(két komplex-konjugált sajátérték)

```
> restart;
```

```
> with(LinearAlgebra):  
L:=Vector(4,symbol=lambda);L[4]:=0;
```

$$L := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

$$L_4 := 0$$

A centrálaxonometria alapmátrixa

```
> AH := Matrix(4,4,[<L[1],beta,0,0>,<-  
beta,L[1],0,0>,<0,0,L[3],0>,<0,0,0,0>]);Eigenvectors(AH  
);
```

$$AH := \begin{bmatrix} \lambda_1 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \beta I \\ \lambda_1 - \beta I \\ \lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & -I & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

U: képsík az origón át, C:centrum

```
>
```

```
U:=Vector(4,symbol=u);C:=Vector(4,symbol=c);U[1]:=1;C[4  
]:=1;
```

$$U := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

$$U_1 := 1$$

$$C_4 := 1$$

ha $u_1 < 0$, azaz a képsík nem párhuzamos x -vel $B=B1$, origón

át: $U[4]=0$

> B:=Matrix(4,4, [<-U[2],1,0,0>,<-U[3],0,1,0>,<0,0,0,1>,C]);

$$B := \begin{bmatrix} -u_2 & -u_3 & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> Binv:=MatrixInverse(B);

$$Binv := \begin{bmatrix} -\frac{c_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & \frac{c_3 u_3 + c_1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & -\frac{u_3 c_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & 0 \\ -\frac{c_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & -\frac{c_3 u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & \frac{c_2 u_2 + c_1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & 0 \\ -\frac{1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & -\frac{u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & -\frac{u_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & 1 \\ \frac{1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & \frac{u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & \frac{u_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1} & 0 \end{bmatrix}$$

A transzformációs mátrix **B** bázisban

> A:=simplify(B.AH.Binv);

$A :=$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, -\frac{u_2 \lambda_1 c_1 + u_3^2 \beta c_3 + u_3 \beta c_1 + c_3 u_2^2 \beta}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, \\ \frac{u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda_1 c_2 + \beta c_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, \frac{\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, -\frac{\lambda_1 u_3 c_2 + \beta c_2 u_2 + \beta c_1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta c_2 + \lambda_1 c_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, \frac{\beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, -\frac{\beta u_3 c_2 - \lambda_1 c_2 u_2 - \lambda_1 c_1}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, 0 \\ -\frac{\lambda_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, -\frac{\lambda_3 u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, -\frac{\lambda_3 u_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}, \lambda_3 \end{bmatrix}$$

A **transzformációs mátrix egyszerűbb alakban**

> **A:=simplify((U[1]*C[1]+u[2]*C[2]+u[3]*C[3])*A);**

A:=

$$\begin{aligned} & [\lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3, -u_2 \lambda_1 c_1 - u_3^2 \beta c_3 - u_3 \beta c_1 - c_3 u_2^2 \beta, \\ & u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1, 0] \\ & [-\lambda_1 c_2 + \beta c_3, \lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2, -\lambda_1 u_3 c_2 - \beta c_2 u_2 - \beta c_1, 0] \\ & [-\beta c_2 - \lambda_1 c_3, \beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2, -\beta u_3 c_2 + \lambda_1 c_2 u_2 + \lambda_1 c_1, 0] \\ & [-\lambda_3, -\lambda_3 u_2, -\lambda_3 u_3, (c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1) \lambda_3] \end{aligned}$$

A **térbeli alakzat origója, egységpontjai,**
végteleltávoli pontjai

>

K:=Matrix(4,7,[<0,0,0,1>,<1,0,0,1>,<1,0,0,0>,<0,1,0,1>,<0,1,0,0>,<0,0,1,1>,<0,0,1,0>]);

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A centráxonometrikus alap alakzat előállítás

> **KC:=A.K**

KC:=

$$\begin{aligned} & [0, \lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3, \lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3, \\ & -u_2 \lambda_1 c_1 - u_3^2 \beta c_3 - u_3 \beta c_1 - c_3 u_2^2 \beta, -u_2 \lambda_1 c_1 - u_3^2 \beta c_3 - u_3 \beta c_1 - c_3 u_2^2 \beta, \\ & u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1, u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1] \\ & [0, -\lambda_1 c_2 + \beta c_3, -\lambda_1 c_2 + \beta c_3, \lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2, \lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2, \\ & -\lambda_1 u_3 c_2 - \beta c_2 u_2 - \beta c_1, -\lambda_1 u_3 c_2 - \beta c_2 u_2 - \beta c_1] \\ & [0, -\beta c_2 - \lambda_1 c_3, -\beta c_2 - \lambda_1 c_3, \beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2, \beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta u_3 c_2 + \lambda_1 c_2 u_2 + \lambda_1 c_1, -\beta u_3 c_2 + \lambda_1 c_2 u_2 + \lambda_1 c_1] \\
& [(c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1) \lambda_3, -\lambda_3 + (c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1) \lambda_3, -\lambda_3, \\
& -\lambda_3 u_2 + (c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1) \lambda_3, -\lambda_3 u_2, -\lambda_3 u_3 + (c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1) \lambda_3, -\lambda_3 u_3]
\end{aligned}$$

> OC := simplify(KC[1..4,1]/KC[4,1]);

$$OC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E1C := simplify(KC[1..4,2]/KC[4,2]);

$$E1C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3}{\lambda_3 (-1 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ \frac{-\lambda_1 c_2 + \beta c_3}{\lambda_3 (-1 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ \frac{\beta c_2 + \lambda_1 c_3}{-\lambda_3 (-1 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U1C := simplify(KC[1..4,3]/KC[4,3]);

$$U1C := \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 c_2 u_2 + \beta u_3 c_2 - \beta c_3 u_2 + \lambda_1 c_3 u_3}{\lambda_3} \\ \frac{-\lambda_1 c_2 + \beta c_3}{\lambda_3} \\ \frac{\beta c_2 + \lambda_1 c_3}{\lambda_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E2C := simplify(KC[1..4,4]/KC[4,4]);

$$E2C := \begin{bmatrix} \frac{u_2 \lambda_1 c_1 + u_3^2 \beta c_3 + u_3 \beta c_1 + c_3 u_2^2 \beta}{\lambda_3 (-u_2 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ \frac{\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2}{\lambda_3 (-u_2 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ \frac{\beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2}{\lambda_3 (-u_2 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U2C := simplify(KC[1..4,5]/KC[4,5]);

$$U2C := \begin{bmatrix} \frac{u_2 \lambda_1 c_1 + u_3^2 \beta c_3 + u_3 \beta c_1 + c_3 u_2^2 \beta}{\lambda_3 u_2} \\ - \frac{\lambda_1 c_3 u_3 + \lambda_1 c_1 + \beta c_3 u_2}{\lambda_3 u_2} \\ - \frac{\beta c_3 u_3 + \beta c_1 - \lambda_1 c_3 u_2}{\lambda_3 u_2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> E3C:=simplify(KC[1..4,6]/KC[4,6]);

$$E3C := \begin{bmatrix} \frac{u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1}{\lambda_3 (-u_3 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ - \frac{\lambda_1 u_3 c_2 + \beta c_2 u_2 + \beta c_1}{\lambda_3 (-u_3 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ - \frac{\beta u_3 c_2 - \lambda_1 c_2 u_2 - \lambda_1 c_1}{\lambda_3 (-u_3 + c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1)} \\ 1 \end{bmatrix}$$

> U3C:=simplify(KC[1..4,7]/KC[4,7]);

$$U3C := \begin{bmatrix} - \frac{u_3^2 c_2 \beta + u_2^2 \beta c_2 + u_2 \beta c_1 - u_3 \lambda_1 c_1}{\lambda_3 u_3} \\ \frac{\lambda_1 u_3 c_2 + \beta c_2 u_2 + \beta c_1}{\lambda_3 u_3} \\ \frac{\beta u_3 c_2 - \lambda_1 c_2 u_2 - \lambda_1 c_1}{\lambda_3 u_3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Szabó tétel bal oldala, x koordinátákra

> e2f2x:=simplify((OC[1]-E2C[1])/(E2C[1]-U2C[1]));

$$e2f2x := - \frac{u_2}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}$$

> e3f3x:=simplify((OC[1]-E3C[1])/(E3C[1]-U3C[1]));

$$e3f3x := - \frac{u_3}{c_3 u_3 + c_2 u_2 + c_1}$$

> bo:=simplify((e2f2x/e3f3x)^2);

$$bo := \frac{u_2^2}{u_3^2}$$

A tétel jobboldala

> **tg2:=simplify(Transpose(U2C-U3C).(U2C-U1C));**

$$\begin{aligned}
 \text{tg2} := & (2\beta\lambda_1c_2u_2^2u_3^3c_3 + u_3^3\beta^2c_1^2 + u_3\beta^2c_1^2 + 2u_3^2\beta^2c_3u_2^2c_1 + 2u_3^3\beta^2c_1u_2c_2 \\
 & + 2u_3\beta^2c_1u_2^3c_2 + 2\beta u_2\lambda_1c_1u_3^3c_3 + 2\beta u_2^3\lambda_1c_1u_3c_3 + 2\beta\lambda_1c_2u_2^4u_3c_3 \\
 & + \beta u_2\lambda_1c_1^2u_3^2 + 2\beta u_2^4\lambda_1c_1c_2 + \beta\lambda_1c_2^2u_2^3u_3^2 + \beta u_2\lambda_1c_3^2u_3^4 \\
 & + \beta u_2^3\lambda_1c_3^2u_3^2 + 2c_2u_2u_3\lambda_1^2c_1 + 2c_3u_3^2u_2\beta^2c_2 + 2c_2u_2u_3\beta^2c_1 + u_3\lambda_1^2c_1^2c_2 \\
 & + c_3^2u_3^3\lambda_1^2 + 2\beta u_2^2\lambda_1c_1u_3^2c_2 + c_3^2u_3^3\beta^2 + 2u_3^4\beta^2c_3u_2c_2 + u_3^5\beta^2c_3^2 \\
 & + 2c_3u_3^2c_2u_2\lambda_1^2 + 2u_3^4\beta^2c_3c_1 + u_3^3\beta^2c_3^2u_2^2 + u_3\beta^2c_1^2u_2^2 + u_2^2\beta^2u_3^3c_2^2 \\
 & + u_2^4\beta^2u_3c_2^2 + \beta u_2^3\lambda_1c_1^2 + \beta\lambda_1c_2^2u_2^5 + 2c_3u_3^2\lambda_1^2c_1 + c_2^2u_2^2u_3\lambda_1^2 \\
 & + 2c_3u_3^2\beta^2c_1 + c_2^2u_2^2\beta^2u_3 + 2u_3^2\beta^2c_3u_2^3c_2) / (\lambda_3^2u_2^2u_3)
 \end{aligned}$$

> **tg3:=simplify(Transpose(U3C-U2C).(U3C-U1C));**

$$\begin{aligned}
 \text{tg3} := & (-2\beta u_3^4\lambda_1c_1c_3 - 2\beta u_3^3\lambda_1c_1u_2c_2 + u_2^3\beta^2c_1^2 + c_2^2u_2^3\beta^2 + u_2\beta^2c_1^2 \\
 & + c_2^2u_2^3\lambda_1^2 + u_2\lambda_1^2c_1^2 + u_2^3\beta^2c_2^2u_3^2 + 2u_2^4\beta^2c_2c_1 + u_2\beta^2c_1^2u_3^2 \\
 & + u_3^4\beta^2c_3^2u_2 + u_3^2\beta^2c_3^2u_2^3 - \beta u_3^3\lambda_1c_1^2 - \beta\lambda_1c_3^2u_3^5 + c_3^2u_3^2\beta^2u_2 \\
 & + 2c_2u_2^2\beta^2c_1 + c_3^2u_3^2u_2\lambda_1^2 + 2c_2u_2^2\lambda_1^2c_1 - 2\beta u_3\lambda_1c_1u_2^3c_2 \\
 & - 2\beta u_3^4c_2u_2\lambda_1c_3 - 2\beta u_3^2c_2u_2^3\lambda_1c_3 - \beta u_3c_2^2u_2^4\lambda_1 - \beta\lambda_1c_3^2u_3^3u_2^2 \\
 & + 2c_3u_3u_2^2\beta^2c_2 + 2c_3u_3u_2\beta^2c_1 + 2c_3u_3\lambda_1^2c_2u_2^2 + 2c_3u_3u_2\lambda_1^2c_1 \\
 & + u_2^5\beta^2c_2^2 + 2u_2^2\beta^2c_2u_3^2c_1 - 2\beta u_3^2\lambda_1c_1c_3u_2^2 - \beta u_3\lambda_1c_1^2u_2^2 \\
 & + 2u_2^4\beta^2c_2u_3c_3 + 2u_2^3\beta^2c_1u_3c_3 - \beta u_3^3c_2^2u_2^2\lambda_1 + 2u_2\beta^2c_1u_3^3c_3 \\
 & + 2u_2^2\beta^2c_2u_3^3c_3) / (\lambda_3^2u_3^2u_2)
 \end{aligned}$$

> **jo:=simplify(tg3/tg2);**

$$\text{jo} := \frac{u_2(u_2^3\beta^2 + u_2\beta^2 + u_2\lambda_1^2 - \beta u_3^3\lambda_1 - \beta u_3\lambda_1u_2^2 + u_2\beta^2u_3^2)}{(u_3\beta^2u_2^2 + u_3^3\beta^2 + u_3\beta^2 + \beta u_2^3\lambda_1 + u_3\lambda_1^2 + \beta u_2\lambda_1u_3^2)u_3}$$

> **eq:=factor(simplify(bo-jo));**

$$eq := \frac{u_2 \beta \lambda_1 (u_2^2 + u_3^2)^2}{u_3^2 (u_3 \beta^2 u_2^2 + u_3^3 \beta^2 + u_3 \beta^2 + \beta u_2^3 \lambda_1 + u_3 \lambda_1^2 + \beta u_2 \lambda_1 u_3^2)}$$

Amibøl $\beta = 0$

Irodalomjegyzék

- [BRA86] Brauner H: Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen. Beitr.
Algebra u. Geometrie 21, 5-26, 1986
- [CSET47] Н. Ф. Четверухин, Вопросы современной начатательной
геометрии, Москва, Сб. Статей, 334. о., 1947
- [DRS57] Drs L., V základni vete centralni axonometrie. Časopis pro pestovanim-
tematiky, roc. 82, 1957. 165-173
- [DÜR03] L- Dür: An algebraic Equation for Central Projection. J. Geometry
Graphics 7, 137-143, 2003
- [HAV96] H. Havlicsek: On the Matrices of Central linear Mappings. Math.
Bohem, 121,151-156 1996
- [HOF97] Hoffman Miklós: On the Theorems of Central Axonometry, Journal for
Geometry and Graphics, Volume 1, (1997) No2 , 151-155
- [JUH95] Juhász Imre: Számítógépi geometria és grafika, Miskolci Egyetemi
Kiadó, Miskolc, 1993., 1995
- [KRU10] Kruppa, E.:Zur achsonometrischen Methode der darstellenden
Geometrie,
Sb. Akad Wiss. Wien (math.-nat. Kl.) **119** (1910), 487-506
- [KRU23] Müller, E.,und E. Kruppa: Vorlesungen über darstellende Geometrie, I.
Bd.:
E Kruppa: Die linearen Abbildungen, Wien, (1923), S.183.
- [MOL95] Pál Ledneczky and Emil Molnár: Projective geometry in engineering,
Periodika Polytechnika Ser. Mech. Eng., Vol 39. No. 1, 43-60, 1995

- [RP74] Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, 1974
- [STA95] H. Stachel: Zur Kennzeichnung der Zentralprojectionen nach H. Havlicek, Technical Report Nr. 19., 1995
- [STA04] H. Stachel: On Arne Dür's Equation Concerning Central Axonometries, J. Geometry Graphics 8, 215-224, 2004
- [STI38] Stiefel, E.: Zum satz von Pohlke. Comment. Math.Helv. **10**(1938), 208-225
- [STI71] Stiefel, E, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I. Bd. , 3 Aufl. Basel, Stuttgart, (1971)
- [SZJ78] Szabó József: Az Eckhart-féle összemetszési eljárás egy általánosítása és annak komputergrafikai alkalmazása, kandidátusi értekezés, 1978
- [SZJ94] J. Szabó, H.Stachel, H. Vogel: Ein Satz über die Zentralaxonometrie. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **203**, 3-11 (1994)
- [SZJ95] Szabó József: Eine analitische Bedingung dafür, daß eine Zentralaxonometrie Zentralprojection ist. Publ. Math., 1995

Publikációk és előadások

Publikációk

1. A ciklografikus leképezés két általánosításáról
1979, KLTE (egyetemi elsődíjas pályamunka)
2. Másodrendű felületek ábrázolása és síkmetszése számítástechnikai eszközökkel.
TDK-dolgozat, 1979 KLTE
3. Másodrendű felületek ábrázolása és síkmetszése számítástechnikai eszközökkel.
XV. OTDK nivódíjas pályamunkái III. kötet 520. old ,1982.
4. Másodrendű felületek ábrázolása és áthatása számítástechnikai eszközökkel.
Doktori értekezés, KLTE, 1984., 64 oldal
5. Description of second order surfaces by devives of computer geometry.
Rostocker Informatik-Berichte, Heft 2 ,105-109, 1985.
6. A ciklografikus leképezés két általánosításáról.
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 11/c, 57-75, 1988
7. Visibility of convex polyhedras
Bull. Appl. Math. 50, No.576, 237-243 (1988)
[ZB:659.52001]
8. Hidden line problem in the case of a body consisting of two convex polihedra
Rostocker Informatik-Berichte, Heft 8 , 84-87, 1989.
9. Desription and plane section of certain rotation surfaces
Studientexte Computergeometrie, Heft 109/90 Teil3, 166-174, 1990
10. Forgásfelületek ábrázolása
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 12/d, 85-91, 1990.
11. Desription of special SNAKE surfaces.
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 12/d, 91-97, 1990.
12. Desription of special SNAKE surfaces.
Konstruktive Geometrie Vortragssammlung, 143-148, 1990
13. A visibility algorithm for a collection of convex polyhedra.
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 13/d, 109-112, 1992
[ZB:881.68119]
14. Centralaxonomic Mapping in Computer-graphics.
Geometria i grafika in inzynierska z. 1, Gliwice, 37-44, 1996
15. Hidden Surface and Shading Problem for special Bodies.
7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry Prceedings, 192-194, 1996
[19990500033 CompuTec]
16. A komputergrafikai tantárgyak oktatási koncepciói és tantárgyi tematikái a KLTE-n. (Grundprinzip für Unterricht und Themenkreise der Computergraphik an der KLTE) (Szabó J, Schwarcz T. Hoffmann M., Ledeczky G., Sulyok P., Várady L.) Proc. Informatika a Felsőoktatásban '96
□
Networkshop '96; Debrecen, 1996. ISBN 963 0470 27 6. II. kötet 662-664. old.

17. Bitmap transformation based on projective invariants
Geometria i grafika in inzynierska z. 2, Gliwice, 15-23, 1998
(Tornai Róbert társszerzővel)
 18. Bitmap Transformations
4rd International Conference on Applied Informatics. Eger-Noszvaj
(Hungary), 169-178., 1999
(Tornai Róbert társszerzővel)
- Hermite curves with given curvature –Kéziratban, 2005
 - Degenerated linear transformations and central projection- Előkészületben, 2006

Szakmaspecifikus alkotások

- 2d-s modellezést lehetővé tévő rajzoló szoftver fejlesztése. 1999
- Dinamikus modellezést lehetővé tévő 2d-s rajzoló szoftver fejlesztése. 2004
- Általános lekérdezőmodul fejlesztése Firebird adatbázis-motorhoz 2005

Előadások

1. Description of second order surfaces by devives of computer geometry, DIGRA 84, 1984, Rostock
2. HiddenLine Problem in the case of a body consisting of two convex polyhedral, DIGRA 88 , 1988
3. Description and plane section of certain rotation surfaces, TU Dresden, Computergeometrie, 1990, Gausig
4. Desription of special SNAKE surfaces, Konstruktive geometrie, 1990, Debrecen
5. About the STEINER-Relationship. 7. ungarish-österreiches Geometrie-Symposium, 1992,Seggauberg
6. Eine Verallgemeinerung der Zyklographhie, Welttagung über Geometrie, 1995, Seggauberg
7. Hidden Surface and shading Problem for special Bodies, 7. ICECGDG, 1996 Cracow
8. Bitmap Transformations based on projective invarants, Geometria I Komputer, 1997, Wisla
9. Efficiency Conideration for Ray Tracing, 3. ICAI, 1997, Eger
10. Projective Geometrie sotfwer. SDG, 2000,Drezda
11. Bitmap Transformations, 4. ICAI, 1999, Eger
12. Imaginary Elements in Projective Geometry, TU München, 2000, München
13. Imaginary Elements in Projective Geometry, 5. ICAI, 2001, Eger

14. 3D reconstruction of coronary ,Vienna University of Technology,Department of Geometry, 2002 május
15. Central axonometric mapping in computergraphics. Geometria I Komputer, 2003, Wisla
16. Central axonometric mapping in computergraphics.SDG, 2003, Drezda
17. Central axonometric mapping in computergraphics. 6. ICAI, 2004, Eger
18. Central axonometric mapping, Konstruktív Geometria, 2005, Balatonföldvár
19. Centrálaxonometrikus leképezés komputergrafikai alkalmazása, 2005, Gyires Béla Informatikai Napok

A centrálaxonometrikus leképezés és komputergrafikai alkalmazása

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika és Számítástudományok tudományágban

Írta: Dr. Schwarcz Tibor

okleveles matematika-ábrázológeometria szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok

Doktori Iskolája (Informatika programja) keretében.

Témavezető: Dr. Szabó József

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Maksa Gyula
tartalék elnök:	Dr. Lajkó Károly
tagok:	Dr. Hoffman Miklós
	Dr. Kozma László
tartalék tagok:	Dr. Szilvási Márta
	Dr. Bácsó Sándor

A doktori szigorlat időpontja: 2006.01.12

Az értekezés bírálói:

Dr. Nagy Péter
Dr. Molnár Emil
tartalék bíráló: Dr. Temesvári Ágota

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. Arató Mátyás
tartalék elnök:	Dr. Sztrik János
tagok:	Dr. Fazekas Gábor
	Dr. Várterész Magdolna
	Dr. Juhász Imre
	Szilvási Márta
tartalék tagok:	Dr. Kuki Attila
	Dr. Kovács Emőd

Az értekezés védésének időpontja: 2006.