

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Kvantummechanikai potenciálproblémák szuperszimmetriája

Soltész Tibor

Témavezető: Dr. Lévai Géza



DEBRECENI EGYETEM

Fizikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2026

1. Bevezető

A kvantumfizikai jelenségek leírásában igen hasznosnak bizonyultak a különféle potenciálokra alkalmazott modellek. Az ilyen célú feladatokat legtöbbször numerikus módszerek segítségével oldják meg, de egyes modellproblémák esetében lehetséges az egzakt analitikus megoldás is. Ez utóbbi esetek vizsgálata több szempontból is nagy jelentőséggel bír. Az egzakt megoldások matematikai formalizmusa lehetővé teszi a potenciálproblémák osztályozását, illetve az egymáshoz képesti viszonyuk feltárását. Emellett gyakran kapcsolódnak valamilyen szimmetriához, ami általában jellegzetes módon mutatkozik meg az energiaspektrum szerkezetében. Technikai szempontból az egzaktul megoldható problémák nagyban segítik a numerikus módszerek fejlesztését, mivel alkalmasak azok tesztelésére, illetve kiegészítésére. Mindezek alapján érthető, hogy az egzaktul megoldható potenciálfeladatok keresése és vizsgálata a kvantummechanika egy évszázados története során végig aktív kutatási téma volt és még ma is hoz új eredményeket.

A doktori értekezés témája és feladata az egydimenziós, időtől független Schrödinger-egyenlet egzakt megoldásainak kutatása. Ehhez néhány bevált módszer alkalmazása adott segítséget. Ilyen az a *transzformációs eljárás*, amellyel a Schrödinger-egyenlet a matematikai fizika valamely másodrendű differenciálegyenletébe alakítható megfelelő változó- és egyéb T_1, T_2, T_3, T_4 transzformációkkal. Ez egyben az így előállított egzaktul megoldható potenciálok osztályozását is lehetővé teszi a felhasznált differenciálegyenletek, illetve a dolgozatban alkalmazott $\chi(r), \chi(x)$ transzformációs függvény alapján.

Négy transzformációnk lehetnek r és $\chi(r)$ különböző választásaival:

Transzformációk	T_1	T_2	T_3	T_4
$\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r), r \in [0, \infty[$ $\gamma \in \mathbf{Z}^+$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$
$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r)$	konvergens	divergens	divergens	konvergens
Spektrum és megváltozása ε :faktorizációs energia	az alapállapotenergia eltűnik $\varepsilon = E_0^-$	új alapállapot energia, $\gamma > 0$ $\varepsilon < E_0^-$	nincs változás $\varepsilon < E_0^-$	nincs változás $\varepsilon < E_0^-$
Szingularitás megváltozása	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$

A legismertebb esetben a *Natanzon osztályú* potenciálok kaphatók meg a *hipergeometrikus* és a *konfluens hipergeometrikus* függvény transzformációiból:[43],[44]. A kötött állapotok ilyenkor klasszikus ortogonális polinomokkal, konkrétan *Jacobi-* illetve *általánosított Laguerre-polinomokkal* fejezhetők ki:[2]. Így állíthatók elő a dolgozatban taglalt legismertebb néhány egzaktul megoldható potenciál (*Radiális harmonikus oszcillátor, Pöschl-Teller -potenciál, Scarf-potenciálok*) kötöttállapot hullámfüggvényei és energiaszintjei is:[2].

Egy további módszer a *Szuperszimmetrikus Kvantummechanika* módszereinek alkalmazása, amivel új, egzaktul megoldható potenciálok nyerhetők egy ismert, megoldható potenciálból kiindulva. Oly módon, hogy a két potenciál energiaspektruma lényegében azonos. Ez utóbbi eredmény annak köszönhető, hogy a két potenciált tartalmazó *Hamilton-operátort* egy hasonló *mátrix alakú Hamilton-operátorban* egyesítő *Szuperszimmetrikus Hamilton-operátor* egy *szuperalgebrát* alkot vele felcserélhető mátrix alakú, úgynevezett *töltésoperátorokkal*, lásd (1),(2),(3) egyenletek bevezetését.

A kutatási témámban a vizsgálatok a *Natanzon osztályú potenciálok* körére [15,16], illetve azon kívülre terjedtek ki. Ez utóbbi esetben elsősorban a *Heun-féle differenciálegyenlet* variánsaira alkalmaztuk a fentebb leírt transzformációs eljárást. E differenciálegyenletek megoldásai sokkal kevésbé ismertek, mint a (*konfluens*) *hipergeometrikus függvények*: [3], ami azt is jelentette, hogy új technikai részletek alkalmazására kellett sort keríteni annak érdekében, hogy korábban nem vizsgált egzaktul megoldható potenciálproblémák legyenek azonosíthatóak:[3].

A *Heun-féle differenciálegyenlet* különféle alakjai speciális esetként tartalmazzák a (*konfluens*) *hipergeometrikus differenciálegyenletet*:[66], ami lehetővé tette egyes *Natanzon osztályú potenciálok* általánosítását is.

Különös figyelemmel fordultunk a *Heun-féle differenciálegyenletek polinom típusú megoldásai* felé:[3], mert ezek egyes speciális esetei visszaadták a *Natanzon osztályú potenciálok*:[62]polinom alakú megoldásait. Az ismert példák: az úgynevezett *Kivételes Jacobi-*, illetve *Kivételes Laguerre-polinomok* differenciálegyenlete megkapható a *Heun-féle differenciálegyenletek* speciális eseteként. Ez utóbbi polinomok abban térnek el a klasszikus ortogonális polinomoktól, hogy egyes zérushelyeik az ortogonálitási tartományon kívülre esnek, ezért a legalacsonyabb fokszámuk, nódusuk nem nulla. Mindezek ellenére más szempontból ugyanúgy viselkednek, mint a klasszikus ortogonális polinomok. Az említett kivételes polinomok megjelennek olyan potenciálok megoldásaiként, amelyek egyes *Natanzon osztályú potenciálok* általánosításaiként állnak elő:[68], például a dolgozatomban érintett *Racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor*,[1]illetve a közös PI potenciálosztályba tartozó Scarf II, II és az általánosított Pöschl-Teller potenciálok racionális kiterjesztései [2].

További lehetőségként vizsgáltuk a *Heun-féle differenciálegyenletből* [42,43,44] származtatható potenciálok és a *Natanzon osztályú* potenciálok:[62,68] összekötését a *Szuperszimmetrikus Kvantummechanika* módszereivel. Erre egy megjelent publikációnkból hozható példa az említett *Racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor* előállítható a radiális harmonikus oszcillátor *szuperszimmetrikus transzformáltjaként*: [1,2], csakúgy, mint ahogy a fentebb említett PI osztályú potenciálokból származtatható a racionális kiterjesztésük [2].

A kutatás célja volt új egzaktul megoldható potenciálok keresése a *Natanzon potenciálosztályon* belül, illetve azon túl, továbbá a kapcsolatuk feltárása ismert potenciálokkal: [1,2].

Emellett vizsgáljuk a racionálisan kiterjesztett potenciálok megoldásait szolgáltató X_1 -típusú kivételes Laguerre, illetve Jacobi polinomok származtatását. Bemutatjuk, hogy ezek előállnak a konfluens Heun, illetve a Heun differenciálegyenlet polinom típusú megoldásaiként [3].

2. Eredmények: 5 tézispont

1. Szuperszimmetrikus transzformációk vizsgálatával a *radiális harmonikus oszcillátor* szuperszimmetrikus partnerpotenciáljait állítottam elő *sértetlen* és *spontán sértett* szuperszimmetria esetén. Ezekhez a (T_1, T_2, T_3, T_4) transzformációkhoz a megfelelő Schrödinger egyenlet olyan megoldásait tekintettem, amelyek az origóban, illetve aszimptotikusan regulárisak, illetve irregulárisak. Meghatároztam az e határfeltételeknek eleget tevő próbafüggvények alkalmazásából adódó partnerpotenciálokat. Ezzel új, egységes keretbe foglaltam a korábbi eredményeket. Kimutattam, hogy a partnerpotenciálok a $j=k=0$, illetve a $j=k=1$ esetekben kielégítik az alakinvariancia követelményét, vagyis a matematikai alakjuk azonos, csak az egyik (l) paraméterben, illetve egy konstans energiaeltolásban különböznek [1].
2. Kimutattam, hogy a próbafüggvényben a $j=0, k=1$ választással élve a T_3 és T_4 típusú transzformációkkal összekapcsolhatók a *radiális harmonikus oszcillátor*, illetve annak a *racionális kiterjesztéseiként* adódó potenciálok [1].
3. Ugyanezt a módszert egy másik potenciálosztályra alkalmazva származtattam a megfelelő partnerpotenciálokat és megadtam a kötöttállapotú hullámfüggvényeiket és az energiaspektrumot. A formalizmussal egyszerre három potenciál (*általánosított Pöschl-Teller, Scarf I., Scarf II.*) egységes szuperszimmetrikus tárgyalását valósítottam meg. Az egységes, absztrakt tárgyalást folytattam addig a pontig, amikor a konkrét határfeltételeket kell kiróni a megoldásokra, amelyek a három potenciál eltérő értelmezési tartománya (a valós féltengely, véges tartomány, illetve a teljes valós tengely) miatt maguk is eltérők. Ebben az esetben a megoldások *Jacobi-polinomokkal* kerültek felírásra [2], szemben a korábban tárgyalt potenciálokkal megoldásaival, amelyek az általánosított *Laguerre-polinomokkal* fejezhetők ki.
4. Kimutattam, hogy a próbafüggvényben a $j=0, k=1$ választással élve az általánosított Pöschl-Teller és a Scarf I potenciálok esetében T_3 és T_4 típusú transzformációk kötik össze a potenciálokat a racionális kiterjesztéseikkel, míg az inverz transzformációk a $j=1, k=0$ választás mellett adódnak. Bebizonyítottam, hogy a próbafüggvényben a $j=k=0$, illetve a $j=k=1$ választást tekintve a T_1 és T_2 transzformációk alkalmazása igazolja e potenciálok, illetve a racionálisan kiterjesztett változataik alakinvarianciáját. Rámutattam, hogy a valós Scarf II. potenciál esetén e transzformációk csak a $j=k=0$ paraméterválasztás esetén értelmezhetők [2].

5. Kimutattam, hogy a fenti vizsgálatokban szereplő X_1 – típusú kivételes ortogonális Laguerre, illetve Jacobi polinomok megkaphatók a konfluens Heun, illetve a Heun-féle differenciálegyenlet polinom típusú megoldásaiként. [3]
-

3. Az értekezés témakörében megjelent közlemények

1. Lévai G.; Soltész T. Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension.
Eur.J.Phys. **2020**,41,025403.
2. Soltész T.;Pethő L.F.;Lévai G. Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class.
Symmetry **2024**, 16, 174.
3. Lévai G.;Soltész T. Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations.
Mathematics **2025**, 1, 0.

4. Hivatkozások

- 1. Lévai G.; Soltész T. Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension. *Eur.J.Phys.* **2020**,41,025403. (23)(37)
- 2. Soltész T.;Pethő L.F.;Lévai G. Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class. *Symmetry* **2024**, 16,174. doi:10.3390/sym16020174 (44)
- 3. Lévai G.;Soltész T.Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations. *Mathematics* **2025**,1,0.
- 4. F.Ravndal. Elementary Supersymmetry **1990** 300-302 p.,University of Oslo, Norway
- 5. F.Cooper, A.Khare, U.Sukhatme: Supersymmetry in Quantum Mechanics, 2001.Singapore:World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd
- 6. Quesne C. Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry. *J.Phys. A Math.Theor.* **2008**,41,392001.(15)(16)(19)
- 7. A.P. Prudnikov,Y.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- 8. Abramowitz M.;Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions*;Dover;New York, NY USA,1970. (17)(3)(2)
- 9. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. An extension of Bochner's problem:Exceptionalinvariant subspaces. *J.Approx.Theor.***2010**,162,987 (16)
- 10. Witten E **1981** *Nucl.Phys. B* 188 513 (1)(7)
- 11. Cooper F., Khare A. and Sukhatme U. **1995** *Phys. Rep.* 251 267 (2)(7)(8)
- 12. Infeld L. and Hull T D **1951** *Rev.Mod.Phys.* 23 21(5)(11)(1)
- 13. Shrödinger E. **1940** *Proc. R. Irish Acad.* A 46 9 and 183(6)(12)(6)
- 14. Shrödinger E. **1941/1942** *Proc. R. Irish Acad.* A 47 53-54.(7)(13)
- 15. Natanzon G.A. **1971** *Vest. Leningrad Univ.* 10 22 (8)
- 16. Natanzon G.A. **1979** *Teor. Mat. Fiz.* 38 146-153 (8)(1)(4)
- 17. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R.**2010** *J.Phys.A:Math.Theor.*43 434016 (26)
- 18. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2012** *Contemp.Math.* 563 51.(27)
- 19. Cordero P and Salamó S **1991** *J.Phys. A : Math Gen.* 24 5299-5305. (9)(2)
- 20. Függe S 1971 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin: Springer) (10)(5)

- 21. Batic D, Williams R and Nowakowski M **2013** *J.Phys. A:Math.Theor.* 46 245204 (11)(29)
- 22. Ishkhanyan T A and Ishkhanyan A M **2017** Solutions of the bi-confluent Heun equation in terms of the Hermite functions *Ann. Phys.* 383 79-91 (12)(28)
- 23. Gómez-Ullate D.; Kamran N.; Milson R. **2009** *J. Math. Anal. Appl.* 359, 352 (13)(14)(17)
- 24. Gómez-Ullate D.; Kamran N.; Milson R. **2010** *J. Approx Theory* 162 987 (14)(15)(35)
- 25. Bagchi B, Quesne C and Roychoudhury R **2009** *Pramana J. Phys.* **73** 337 (16)(17)(43)
- 26. Midya B and Roy B **2013** *J. Phys. A: Math.Theor.* 46 175 201 (18)(18)
- 27. Bender C M et al **2018** *PT Symmetry in Quantum and Classical Mechanics* (London: World Scientific Publishing Europe Ltd.) (19)
- 28. Frank W M, Land D J and Spector R M **1971** *Rev. Mod. Phys.* 43 36 (20)
- 29. Sukumar C V **1985** *J. Phys. A: Math. Gen.* 18 2937 (21)(26)
- 30. Ancarani L U and Braye D **1992** *Phys. Rev. A* 46 206 (22)
- 31. Lévai G, Baye D and Sparenberg J-M **1997** *Lect. Notes Phys.* 488 363 (23)(29)
- 32. Odake S and Sasaki R **2009** *Phys. Lett. B* 679 414 (24)(20)
- 33. Odake S and Sasaki R **2010** *Phys. Lett. B* 684 173 (25)(47)
- 34. Lévai G and Roy P **1999** *Phys. Lett. A* 264 117 (28)
- 35. Bhattacharjie A; Sudarshan E.C.G. A class of solvable potentials. *Nuovo Cim.* **1962**, 25, 864-879. (4)(3)
- 36. Lévai G. A search for shape-invariant solvable potentials. *J. Phys. A Math. Gen.* **1989**, 22, 689-702. (5)(12)
- 37. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B* **1981**, 188, 513 (6)
- 38. Junker G. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*; Springer: Berlin 1996 (8)(3)
- 39. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *C. R. Acad.Sci.* **1882**, 94, 1456 (9)(9)
- 40. Gendenshtein L. E. Derivation of exact of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. *JETP Lett.* **1983**, 38, 356-359. (4)(10)(11)
- 41. Ronveaux A. (Ed.) *Heun's Differential Equations*; Oxford University Press: Oxford, UK, 1995 (22)
- 42. Takemura K. Heun's equation, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial. *J.Phys.A Math Theor.* **2012**, 45, 085211. (20)(42)
- 43. Lévai G. Potentials from the Polynomial Solutions of the Confluent Heun Equation *Symmetry* **2023**, 15, 461 (21)(34)
- 44. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the general Heun functions. *Ann.Phys.* **2018**, 388 456-471. (22)(26)

- 45. Cooper F.;Ginocchio J. N.; Khare A. Relationship between supersymmetry and solvable potentials. *Phys. Rev. D* **1987**,36,2458 (24)
- 46. Odake S ; Sasaki R.Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states. *J. Phys.A* **2013**,46,245201 (25)
- 47. Sukumar C. V. Supersymmetric quantum mechanics of one dimensional system.*J.Phys. A Math. Gen.* **1985**,18,2917 (27)
- 48. Ancarani L.U.;Baye D. Iterative supersymmetric construction of phase-equivalent potentials. *Phys.Rev. A* **1992**, 46,206. (28)
- 49. Baye D.;Sparenberg J-M. Supersymmetric transformations of real potentials ont he line.*J.Pys. A Math.Gen.* **1995**,28,5079. (30)
- 50. Bender C. M.;Tateo R.;Dorey P.E.;Dunning T.C.;Lévai G.;Kuzhel S.;Hook D. W. *PT Symmetry in Quantum and Classical Physics*;WSPU Ltd.:London, UK, **2019** (35)(15)
- 51. Acar Y. C. ;Acevedo L;Kuru S. *Phys.Scr.* **2023**,98,125229. (37)
- 52. Yadav R. K.;Kumari N.;Khare A.;Mandal B.P. Group theoretic approach to rationally extended shape invariant potentials. *Ann.Phys.* **2015**,359, 46-54. (38)
- 53. Lévai G. A class of exactly solvable potentials related to the Jacobi polynomials. *J. Phys. A Math Gen.* **1991**,24,131. (39)
- 54. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials I. One-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.* **1984**,152,203. (40)
- 55. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials II. The three-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.***1985**,159,467.(41)
- 56. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2010** *J. Phys.A Math.Theor.*,43,434016. (48)(21)
- 57. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. *Contemp.Math.* 2012,563,51.(49)
- 58. Milson R. Liouville transformation and exactly solvable Schrödinger equations. *Int. J. Theor.Phys.***1998**, 37,1735.(44)
- 59. Natanzon G. Overlapping of Lévai's and Milson's *e*-tangent-polynomial potentials. along symmetric curves. *Axioms* **2023**,12,584.(45)
- 60. Miller W.J.*Lie Theory of Special Functions*: New York,NY,USA,1968(10)
- 61. Lévai G. *PT* symmetry in Natanzon-class potentials.*Int.J.Theor Phys.***2015**,54,2724 (13)
- 62. Ishkhnyan A. M.;Dorey P.E.;Krainov V.Discretization of Natanzon potentials.*Eur.Phys.J.Plus* **2016**,141,342. (14)
- 63. Bochner S.Über Sturm-Liouvillesche Poly nomsysteme.*Math. Z.* **1929**,29,730 (16)
- 64. Heun K. Zur Theorie der Riemann's sehen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. *Math.Annalen* **1889**,33,51.(23)
- 65. Manning M.F.Exact solutions of the Schrödinger equation.*Phys.Rev.***1935**,48,161 (25)

- 66. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the confluent Heun functions. *Theor.Math.Phys.* **2016**,188,980. (27)
- 67. Ushveridze A.G. *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*;Institute of physics Publishing: Bristol,UK,1994. (31)
- 68. Natanzon G. X_1 -Jacobi differential polynomials systems and related double-step shape-invariant Liouville potentials solved by exceptional orthogonal polynomials. *Axioms* **2025**,14,218. (45)
- 69. Lévai G. PT Symmetry in Natanzon-class Potentials. *Int.J.Theor.Phys.* **2015**,54,2724.
- 70. Quesne C.Extending Romanowski Polynomials in quantum mechanics. *J.Math.Phys.* **2013**,54,122103. (33)
- 71. Raposo A.P.;Weber H.J.;Alvarez-Castillo D.E.Kirchbach M.Romanowski polynomials in selected physics models. *Cent.Eur.J.Phys.* **2007**,5,253. (34)
- 72. Marx György *Kvantummechanika* Műszaki Bp.1964.89.o.
- 73.Dutt R.;Khare A.;Varshni Y.P.New class of conditionally exactly solvable potential. *J.Phys.A Math.Theor.* **2012**,45,444020

(1-73): dolgozatban szereplő hivatkozások

2020-as, 2024-es, 2025-ös közlemények hivatkozásai

5.



**DEBRECENI
EGYETEM**

**DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR**
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/83/2026.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Soltész Tibor
Doktori Iskola: Fizikai Tudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10104336

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. Lévai, G., **Soltész, T.**: Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations.
Mathematics. 13 (12), 1-21, 2025. EISSN: 2227-7390.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/math13121963>
IF: 2.2 (2024)
2. **Soltész, T.**, Pethő, L. F., Lévai, G.: Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class.
Symmetry. 16 (2), 1-25, 2024. EISSN: 2073-8994.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym16020174>
IF: 2.2
3. Lévai, G., **Soltész, T.**: Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension.
Eur. J. Phys. 41 (2), 1-15, 2020. ISSN: 0143-0807.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ab5f90>
IF: 0.781

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 5,181

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
5,181**

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2026.02.25.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Supersymmetry of quantum mechanical potential problems

by Tibor Soltész

Supervisor: Dr.Géza Lévai



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Physics

Debrecen, 2026

1. Introduction

Models applied to various potentials have proven to be very useful in describing quantum physical phenomena. Such tasks are most often solved using numerical methods, but in the case of some model problems, an exact analytical solution is also possible. The investigation of the latter cases is of great importance in several respects. The mathematical formalism of exact solutions allows for the classification of potential problems and the exploration of their relationship to each other. In addition, they are often related to some kind of symmetry, which usually manifests itself in a characteristic way in the structure of the energy spectrum. From a technical point of view, exactly solvable problems greatly help the development of numerical methods, as they are suitable for testing and supplementing them. Based on all this, it is understandable that the search for and investigation of exactly solvable potential problems has been an active research topic throughout the century-long history of quantum mechanics and still produces new results today.

The topic and task of the doctoral dissertation is the research of exact solutions to the one-dimensional, time-independent Schrödinger equation. The application of some proven methods has helped in this. Such is the transformation procedure by which the Schrödinger equation can be transformed into a second-order differential equation of mathematical physics with appropriate variable and other T_1, T_2, T_3, T_4 transformations. This also allows the classification of the exactly solvable potentials thus produced based on the differential equations used and the $\chi(r), \chi(x)$ transformation function used in the thesis.

We can have four transformations with different choices of r and $\chi(r)$:

Transformations	T_1	T_2	T_3	T_4
$\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r), r \in [0, \infty[$ $\gamma \in \mathbf{Z}^+$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$
$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r)$	convergent	divergens	divergent	convergent
Spectrum and its change ε :factorization energy	the ground state energy vanishes $\varepsilon = E_0^-$	new ground state energy, $\gamma > 0$ $\varepsilon < E_0^-$	no change $\varepsilon < E_0^-$	no change $\varepsilon < E_0^-$
Change of singularity	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$

In the most well-known case, Natanzon class potentials are obtained from the transformations of the hypergeometric and confluent hypergeometric functions [43],[44]. The bound states can then be expressed with classical orthogonal polynomials, specifically Jacobi or generalized Laguerre polynomials [2]. In this way, the bound state wave functions and energy levels of some of the best-known exactly solvable potentials discussed in the thesis (Radial harmonic oscillator, Pöschl-Teller potential, Scarf potentials) can also be obtained. [2]

Another method is to apply the methods of Supersymmetric Quantum Mechanics, with which new, exactly solvable potentials can be obtained starting from a known, solvable potential. In such a way that the energy spectrum of the two potentials is essentially the same. This latter result is due to the fact that the Supersymmetric Hamiltonian operator, which combines the Hamiltonian operators containing the two potentials into a similar matrix-shaped Hamiltonian operator, forms a superalgebra with interchangeable matrix-shaped, so-called charge operators, see the introduction of equations (1), (2), (3).

In my research topic, the investigations extended to the range of potentials of the Natanzon class and beyond: [15,16]. In the latter case, we applied the transformation procedure described above primarily to the variants of the Heun differential equation. The solutions of these differential equations are much less known than the (confluent) hypergeometric functions: [3], which also meant that new technical details had to be applied in order to identify previously uninvestigated exactly solvable potential problems: [3].

The various forms of the Heun differential equation include the (confluent) hypergeometric differential equation as a special case:[66] , which also allowed the generalization of some Natanzon class potentials.

We paid special attention to the polynomial-type solutions of the Heun differential equations, because some of these special cases returned the polynomial-type solutions of the Natanzon class potentials [3]. The well-known examples: the differential equation of the so-called Exceptional Jacobi and Exceptional Laguerre polynomials can be obtained as special cases of the Heun differential equations. The latter polynomials differ from the classical orthogonal polynomials in that some of their zeros fall outside the orthogonality domain, therefore their lowest degree, their node, is not zero. Despite all this, they behave in the same way as the classical orthogonal polynomials in other respects. The mentioned exceptional polynomials appear as solutions of potentials that arise as generalizations of certain Natanzon class potentials [62,68], for example the Rationally extended harmonic oscillator concerned in my thesis,[1] as well as the rationally extended Scarf I, II and generalized Pöschl-Teller potentials belonging to the common PI potential class [2].

As a further possibility, we investigated the connection of the potentials derived from the Heun differential equation [42,43,44] and the Natanzon class potentials [62,68] using the methods of Supersymmetric Quantum Mechanics. An example of this can be found in one of our published publications: the aforementioned Rationally extended harmonic oscillator can be obtained as a supersymmetric transform of the radial harmonic oscillator: [1], just as their rational extensions can be derived from the aforementioned PI class potentials [1,2].

The aim of the research was to search for new exactly solvable potentials within and beyond the Natanzon potential class, and to explore their connection with known potentials: [1,2].

We also investigate the derivation of the exceptional Laguerre and Jacobi polynomials of X_1 type that provide solutions to rationally extended potentials. We show that these arise as polynomial-type solutions to the confluent Heun and Heun differential equations [3].

2. Results:5 thesis points

1. By investigating supersymmetric transformations, I have constructed the supersymmetric partner potentials of the radial harmonic oscillator in the case of intact and spontaneously broken supersymmetry. For these transformations (T_1, T_2, T_3, T_4) , I have considered solutions of the corresponding Schrödinger equation that are regular or irregular at the origin and asymptotically. I have determined the partner potentials resulting from the application of test functions satisfying these boundary conditions. In this way, I have included the previous results in a new, unified framework. I have shown that the partner potentials satisfy the requirement of shape invariance in the cases $j=k=0$ and $j=k=1$, i.e. their mathematical form is the same, differing only in one parameter (l) and a constant energy shift [1].
2. I showed that by choosing $j=0, k=1$ in the test function, the radial harmonic oscillator and its rational extensions can be connected to the T_3 and T_4 type transformations [1].
3. Applying the same method to another class of potentials, I derived the corresponding partner potentials and gave their bound-state wave functions and energy spectra. With the formalism, I implemented a unified supersymmetric discussion of three potentials (generalized Pöschl-Teller, Scarf I., Scarf II.) at the same time. I continued the unified, abstract discussion until the point when the concrete boundary conditions have to be imposed on the solutions, which themselves are different due to the different interpretation ranges of the three potentials (the real semi-axis, finite range, and the full real axis). In this case, the solutions are written in terms of Jacobi polynomials [2], in contrast to the previously discussed potential solutions, which can be expressed in terms of generalized Laguerre polynomials.

4. I have shown that, using the choice of $j=0, k=1$ in the test function, in the case of the generalized Pöschl-Teller and Scarf I potentials, transformations of the type T_3 and T_4 connect the potentials with their rational extensions, while the inverse transformations arise with the choice of $j=1, k=0$. I have proven that, considering the choice of $j=k=0$ and $j=k=1$ in the test function, the application of the transformations T_1 and T_2 proves the shape invariance of these potentials and their rationally extended versions. I have pointed out that in the case of the real Scarf II potential, these transformations can only be interpreted in the case of the parameter choice $j=k=0$, [2].

5. I have shown that the exceptional orthogonal Laguerre and Jacobi polynomials of X_1 -type included in the above studies can be obtained as polynomial-type solutions of the confluent Heun and Heun differential equations. [3]

3. Publication related to the thesis

4. Lévai G.; Soltész T. Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension.
Eur.J.Phys. **2020**,41,025403.
5. Soltész T.;Pethő L.F.;Lévai G. Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class.
Symmetry **2024**, 16, 174.
6. Lévai G.;Soltész T. Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations.
Mathematics **2025**, 1, 0.

4. References

- 1. Lévai G.; Soltész T. Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension. *Eur.J.Phys.* **2020**,41,025403. (23)(37)
- 2. Soltész T.;Pethő L.F.;Lévai G. Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class. *Symmetry* **2024**, 16,174. doi:10.3390/sym16020174 (44)
- 3. Lévai G.;Soltész T.Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations. *Mathematics* **2025**,1,0.
- 4. F.Ravndal. Elementary Supersymmetry **1990** 300-302 p.,University of Oslo, Norway
- 5. F.Cooper, A.Khare, U.Sukhatme: Supersymmetry in Quantum Mechanics, 2001.Singapore:World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd
- 6. Quesne C. Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry. *J.Phys. A Math.Theor.* **2008**,41,392001.(15)(16)(19)
- 7. A.P. Prudnikov,Y.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- 8. Abramowitz M.;Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions*;Dover;New York, NY USA,1970. (17)(3)(2)
- 9. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. An extension of Bochner's problem:Exceptionalinvariant subspaces. *J.Approx.Theor.***2010**,162,987 (16)
- 10. Witten E **1981** *Nucl.Phys. B* 188 513 (1)(7)
- 11. Cooper F., Khare A. and Sukhatme U. **1995** *Phys. Rep.* 251 267 (2)(7)(8)
- 12. Infeld L. and Hull T D **1951** *Rev.Mod.Phys.* 23 21(5)(11)(1)
- 13. Shrödinger E. **1940** *Proc. R. Irish Acad.* A 46 9 and 183(6)(12)(6)
- 14. Shrödinger E. **1941/1942** *Proc. R. Irish Acad.* A 47 53-54.(7)(13)
- 15. Natanzon G.A. **1971** *Vest. Leningrad Univ.* 10 22 (8)
- 16. Natanzon G.A. **1979** *Teor. Mat. Fiz.* 38 146-153 (8)(1)(4)
- 17. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R.**2010** *J.Phys.A:Math.Theor.*43 434016 (26)
- 18. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2012** *Contemp.Math.* 563 51.(27)
- 19. Cordero P and Salamó S **1991** *J.Phys. A : Math Gen.* 24 5299-5305. (9)(2)
- 20. Függe S 1971 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin: Springer) (10)(5)
- 21. Batic D,Williams R and Nowakowski M **2013** *J.Phys. A:Math.Theor.*46 245204 (11)(29)

- 22. Ishkhanyan T A and Ishkhanyan A M **2017** Solutions of the bi-confluent Heun equation in terms of the Hermite functions *Ann. Phys.* 383 79-91 (12)(28)
- 23. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2009** *J. Math. Anal. Appl.* 359, 352 (13)(14)(17)
- 24. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2010** *J. Approx Theory* 162 987 (14)(15)(35)
- 25. Bagchi B, Quesne C and Roychoudhury R **2009** *Pramana J. Phys.* **73** 337 (16)(17)(43)
- 26. Midya B and Roy B **2013** *J. Phys. A: Math.Theor.* 46 175 201 (18)(18)
- 27. Bender C M et al **2018** *PT Symmetry in Quantum and Classical Mechanics* (London: World Scientific Publishing Europe Ltd.) (19)
- 28. Frank W M, Land D J and Spector R M **1971** *Rev. Mod. Phys.* 43 36 (20)
- 29. Sukumar C V **1985** *J. Phys. A: Math. Gen.* 18 2937 (21)(26)
- 30. Ancarani L U and Braye D **1992** *Phys. Rev. A* 46 206 (22)
- 31. Lévai G, Baye D and Sparenberg J-M **1997** *Lect. Notes Phys.* 488 363 (23)(29)
- 32. Odake S and Sasaki R **2009** *Phys. Lett. B* 679 414 (24)(20)
- 33. Odake S and Sasaki R **2010** *Phys. Lett. B* 684 173 (25)(47)
- 34. Lévai G and Roy P **1999** *Phys. Lett. A* 264 117 (28)
- 35. Bhattacharjie A;Sudarshan E.C.G. A class of solvable potentials. *Nuovo Cim.* **1962**,25, 864-879. (4)(3)
- 36. Lévai G. A search for shape-invariant solvable potentials. *J. Pys. A Math. Gen.* **1989**, 22, 689-702. (5)(12)
- 37.Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B* **1981**, 188, 513 (6)
- 38. Junker G. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*; Sppringer: Berlin 1996 (8)(3)
- 39. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *C. R. Acad.Sci.* **1882**, 94, 1456 (9)(9)
- 40. Gendenshtein L. E. Derivation of exact of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. *JETP Lett.* **1983**,38,356-359.(4)(10)(11)
- 41. Ronveaux A. (Ed.) *Heun's Differential Equations*; Oxford University Press: Oxford,UK, 1995 (22)
- 42. Takemura K. Heun's equqtion, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial. *J.Phys.A Math Theor.* **2012**, 45, 085211.(20)(42)
- 43. Lévai G. Potentials from the Polynomial Solutions of the Confluent Heun Equation *Symmetry* **2023**,15,461 (21)(34)
- 44. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the general Heun functions. *Ann.Phys.* **2018**, 388 456-471.(22)(26)
- 45. Cooper F.;Ginocchio J. N.; Khare A. Relationship between supersymmetry and solvable potentials. *Phys. Rev. D* **1987**,36,2458 (24)

- 46. Odake S ; Sasaki R. Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states. *J. Phys.A* **2013**,46,245201 (25)
- 47. Sukumar C. V. Supersymmetric quantum mechanics of one dimensional system. *J.Phys. A Math. Gen.* **1985**,18,2917 (27)
- 48. Ancarani L.U.;Baye D. Iterative supersymmetric construction of phase-equivalent potentials. *Phys.Rev. A* **1992**, 46,206. (28)
- 49. Baye D.;Sparenberg J-M. Supersymmetric transformations of real potentials on the line. *J.Pys. A Math.Gen.* **1995**,28,5079. (30)
- 50. Bender C. M.;Tateo R.;Dorey P.E.;Dunning T.C.;Lévai G.;Kuzhel S.;Hook D. W. *PT Symmetry in Quantum and Classical Physics*;WSPU Ltd.:London, UK, **2019** (35)(15)
- 51. Acar Y. C. ;Acevedo L;Kuru S. *Phys.Scr.* **2023**,98,125229. (37)
- 52. Yadav R. K.;Kumari N.;Khare A.;Mandal B.P. Group theoretic approach to rationally extended shape invariant potentials. *Ann.Phys.* **2015**,359, 46-54. (38)
- 53. Lévai G. A class of exactly solvable potentials related to the Jacobi polynomials. *J. Phys. A Math Gen.* **1991**,24,131. (39)
- 54. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials I. One-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.* **1984**,152,203. (40)
- 55. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials II. The three-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.* **1985**,159,467.(41)
- 56. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2010** *J. Phys.A Math.Theor.*,43,434016. (48)(21)
- 57. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. *Contemp.Math.* 2012,563,51.(49)
- 58. Milson R. Liouville transformation and exactly solvable Schrödinger equations. *Int. J. Theor.Phys.* **1998**, 37,1735.(44)
- 59. Natanzon G. Overlapping of Lévai's and Milson's e -tangent-polynomial potentials. along symmetric curves. *Axioms* **2023**,12,584.(45)
- 60. Miller W.J. *Lie Theory of Special Functions*: New York,NY,USA,1968(10)
- 61. Lévai G. PT symmetry in Natanzon-class potentials. *Int.J.Theor Phys.* **2015**,54,2724 (13)
- 62. Ishkhnyan A. M.;Dorey P.E.;Krainov V. Discretization of Natanzon potentials. *Eur.Phys.J.Plus* **2016**,141,342. (14)
- 63. Bochner S. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Math. Z.* **1929**,29,730 (16)
- 64. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. *Math.Annalen* **1889**,33,51.(23)
- 65. Manning M.F. Exact solutions of the Schrödinger equation. *Phys.Rev.* **1935**,48,161 (25)
- 66. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the confluent Heun functions. *Theor.Math.Phys.* **2016**,188,980.(27)

- 67. Ushveridze A.G. *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*;Institute of physics Publishing: Bristol,UK,1994. (31)
 - 68. Natanzon G. X_1 -Jacobi differential polynomials systems and related double-step shape-invariant Liouville potentials solved by exceptional orthogonal polynomials. *Axioms* **2025**,14,218. (45)
 - 69. Lévai G. PT Symmetry in Natanzon-class Potentials.*Int.J.Theor.Phys.***2015**,54,2724.
 - 70. Quesne C.Extending Romanowski Polynomials in quantum mechanics.*J.Math.Phys.* **2013**,54,122103.(33)
 - 71. Raposo A.P.;Weber H.J.;Alvarez-Castillo D.E.Kirchbach M.Romanowski polynomials in selected physics models. *Cent.Eur.J.Phys.***2007**,5,253. (34)
 - 72. Marx György *Kvantummechanika Műszaki Bp.*1964.89.o.
 - 73.Dutt R.;Khare A.;Varshni Y.P.New class of conditionally exactly solvable potential.*J.Phys.A Math.Theor.***2012**,45,444020
-

(1-73): references in the thesis

References to publications from 2020, 2024, 2025

5.List of Publications



**UNIVERSITY of
DEBRECEN**

**UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN**

H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen

Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK//2026.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Tibor Soltész
Doctoral School: Doctoral School of Physics
MTMT ID: 10104336

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. Lévai, G., **Soltész, T.**: Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations.
Mathematics. 13 (12), 1-21, 2025. EISSN: 2227-7390.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/math13121963>
IF: 2.2 (2024)
2. **Soltész, T.**, Pethő, L. F., Lévai, G.: Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class.
Symmetry. 16 (2), 1-25, 2024. EISSN: 2073-8994.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/sym16020174>
IF: 2.2
3. Lévai, G., **Soltész, T.**: Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension.
Eur. J. Phys. 41 (2), 1-15, 2020. ISSN: 0143-0807.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6404/ab5f90>
IF: 0.781

Total IF of journals (all publications): 5,181

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 5,181

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

25 February, 2026

