

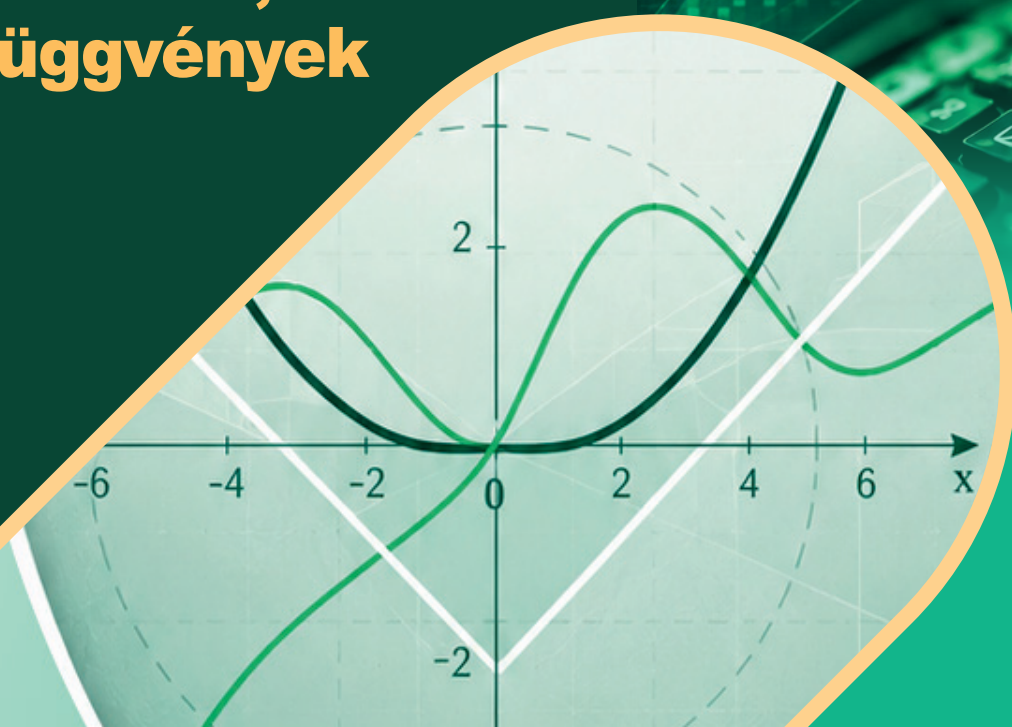


DEBRECENI
EGYETEM

Gazdaságtudományi Kar

KÉZI CSABA GÁBOR
VINCZE SZILVIA

**Matematika
gazdasági
alkalmazásokkal:
Halmazok,
relációk,
függvények**



MATEMATIKA GAZDASÁGI ALKALMAZÁSOKKAL:
HALMAZOK, RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK

DEBRECENI EGYETEM
GAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR

Matematika gazdasági alkalmazásokkal: Halmazok, relációk, függvények

Szerzők:
DR. KÉZI CSABA GÁBOR

DR. VINCZE SZILVIA



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2026

Lektor:
DR. SIPOS DÓRA FRUZZSINA
adjunktus

ISBN 978-963-615-369-4 (pdf)

© Debreceni Egyetemi Kiadó–Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének a tagja
dupress.unideb.hu

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Borítóterv, nyomdai előkészítés: M. Szabó Monika

Tartalomjegyzék

1. fejezet: Halmazok	3
1.1. Bevezetés	4
1.2. Halmazok megadása, két halmaz egyenlősége	5
1.3. Részhalmaz, hatványhalmaz fogalma	12
1.4. Halmazok Descartes-szorzata	18
1.5. Műveletek halmazokkal	20
1.6. Nevezetes számhalmazok	34
1.7. Halmazok alkalmazása a közgazdaságtanban	38
1.8. Összefoglaló feladatok	45
2. fejezet: Relációk	53
2.1. Bevezetés	54
2.2. Reláció fogalma, értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze	55
2.3. Relációk tulajdonságai, ekvivalencia, rendezés	64
2.4. Relációk a közgazdaságtanban	67
2.5. Összefoglaló feladatok	72
3. fejezet: Függvénytani alapfogalmak és gazdasági alkalmazásai	79
3.1. Függvény definíciója, helyettesítési értéke	80
3.2. Függvények tulajdonságai	87
3.3. Függvénytranszformációk	104
3.4. Műveletek függvényekkel	115
3.5. Függvények inverze	121
3.6. Az egyváltozós függvények nevezetes osztályai	127
3.7. Függvények gazdasági alkalmazásai	164

1. fejezet

Halmazok

1.1. Bevezetés

Miért van szüksége egy gazdálkodási szakos hallgatónak halmazelméletre?

A gazdasági döntések mögött mindig rendszerezés áll. Egy vállalat ügyfeleket csoportosít, egy piackutató fogyasztói szegmenseket különít el, egy pénzügyi elemző befektetési alternatívákat hasonlít össze.

Amikor azt kérdezzük, hogy

- Kik vásároltak A terméket?
- Kik vásároltak B terméket?
- Kik vásároltak mindkettőt?
- Hányan nem tartoznak egyik csoportba sem?

valójában halmazokkal és halmazműveletekkel dolgozunk.

A modern gazdasági elemzés adatbázisokra, ügyfélkörökre, termékportfóliókra, piacokra és döntési alternatívákra épül. Ezek mind jól definiált elemek összességei, azaz halmazok. A halmazelmélet

- segít pontosan megfogalmazni gazdasági modellek alapját,
- lehetővé teszi a piaci szegmensek matematikai leírását,
- megalapozza a valószínűségszámítást és a statisztikát,
- előkészíti a függvénytan és az optimalizálás eszköztárát.

Különösen fontos, hogy a későbbi fejezetekben megjelenő keresleti függvények, költségfüggvények, profitmaximalizálási problémák vagy költségvetési modellek mind alapvetően halmazelméleti alapokra épülnek.

A gazdasági matematika egyik célja nem az, hogy elvont struktúrákat tanuljunk önmagukért, hanem az, hogy olyan eszközöket sajátítsunk el, amelyek segítenek rendszerezni, elemezni és modellezni a gazdasági jelenségeket.

Ebben a fejezetben

- megismerkedünk a halmaz fogalmával és jelöléseivel,
- áttekintjük a legfontosabb halmazműveleteket,
- értelmezzük ezek gazdasági alkalmazásait,
- valamint előkészítjük a következő fejezetekben szereplő matematikai modellek formális alapját.

A cél nem az elméleti mélység, hanem a biztos, alkalmazható alap megteremtése.

1.2. Halmazok megadása, két halmaz egyenlősége

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A természetben lejátszódó események, jelenségek kölcsönhatásban állnak egymással. A kapcsolatok leírása, vizsgálata és gyakorlati alkalmazása a mindennapi nyelv segítségével a legtöbb esetben igen nehézkes, sőt időnként kivitelezhetetlen.

Emiatt kialakult egy sajátos nyelv, amely megkönnyíti a dolgunkat. Ezen nyelv alapeleme a függvény, amely igen jelentős szerepet játszik a közgazdaságtani problémák megoldásában is.

A közgazdaságtan számos alapfogalma – például a keresleti függvény, a kínálati függvény, a költség-, bevétel- és nyereségfüggvények, valamint a termelési és fogyasztási modellek – matematikai összefüggések formájában írhatók le. Ezek elemzése, összehasonlítása és előrejelzése csak megfelelően definiált matematikai eszközökkel végezhető el.

A függvény általános fogalmához szükségünk van a halmaz fogalmának ismeretére, hiszen mind az értelmezési tartomány, mind az értékkészlet halmazként jelenik meg. Ennek megfelelően a matematikai gondolkodás egyik alappillére a halmazelméleti szemlélet, amely rendszerezni és pontosan megfogalmazni segíti a közgazdasági modellek alapját képező összefüggéseket.

A fent leírtak miatt a jegyzet első fejezetében a halmaz fogalmával, valamint a halmazokhoz kapcsolódó legfontosabb alapfogalmakkal ismerkedünk meg, megalapozva a későbbi fejezetekben szereplő közgazdasági alkalmazásokat.

A gazdasági gyakorlatban gyakran találkozunk jól meghatározott elemekből álló csoportokkal.

Egy vállalat ügyféladatbázisa, egy ország exporttermékeinek köre, egy befektetési portfólió eszközei vagy egy adott piacon jelen lévő versenytársak mind olyan rendszerezett összességek, amelyek matematikailag halmazként írhatók le.

A halmaz megadása a gazdasági elemzés első lépése.

Ahhoz, hogy modellezni tudjunk egy helyzetet, pontosan rögzíteni kell:

- kik tartoznak egy vizsgált csoportba,
- milyen feltételek alapján kerül be egy elem,
- illetve mikor tekinthető két csoport azonosnak.

Például:

- Egy vállalat prémium ügyfeleinek halmaza megadható konkrét névlista alapján.
- Egy magas jövedelmű fogyasztói csoport megadható egy feltétellel (például éves jövedelem > 5 millió Ft).
- Két piaci szegmens akkor azonos, ha pontosan ugyanazok a fogyasztók tartoznak bele.

A gazdasági döntések megalapozásához ezért elengedhetetlen a halmazok egyértelmű, precíz megadása és az egyenlőség fogalmának tisztázása.

Ebben az alfejezetben áttekintjük, hogyan adhatók meg halmazok felsorolással vagy tulajdonság alapján, valamint mit jelent két halmaz egyenlősége matematikai értelemben.

Például

$$A = \{\text{„sikeres vállalatok”}\}$$

nem tekinthető jól definiált halmaznak, mert a „sikeres” kifejezés nem egyértelmű, jelentése nem pontosan rögzített. Más-más szempontok szerint más vállalatok tartozhatnának bele, ezért nem dönthető el minden elemről egyértelműen, hogy a halmazhoz tartozik-e.

Ugyanakkor például a

$$B = \{x \mid x \text{ olyan vállalat, amelynek éves nyeresége meghaladja az } 500 \text{ millió Ft-ot}\}$$

már jól definiált halmaz, mert a bekerülés feltétele pontosan meg van adva.

Jelölések, megállapodások. A halmaz, elem, eleme fogalmakat nem definiáljuk, adottnak tekintjük. A halmaz bizonyos jól meghatározott, különböző objektumok összességét jelenti. A halmazt alkotó objektumok a halmaz elemei.

Egy halmazban minden elem csak egyszer fordulhat elő és az elemek sorrendje tetszőleges. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha minden elemről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy benne van-e a halmazban.

A halmazokat latin nagybetűkkel, a halmaz elemeit latin kisbetűkkel jelöljük. Azt, hogy az a elem *elem*e az A halmaznak az $a \in A$ jelöléssel fejezzük ki, míg ennek tagadására, vagyis annak kifejezésére, hogy az a elem nem tartozik az A halmazba az $a \notin A$ jelölést használjuk.

Halmazokat megadhatunk az elemeinek felsorolásával, például

$$A = \{1; 2; 3\},$$

vagy megadhatunk valamilyen tulajdonságokkal, például

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\},$$

amit úgy olvasunk ki, hogy a B halmaz azokat a valós számokat tartalmazza, melyek negatívak.

Példa. Az

$$A = \{\text{ügyes fiúk}\}$$

matematikai értelemben nem halmaz, hiszen az, hogy „ügyes” nem mindenki számára jelenti ugyanazt, egy szubjektív fogalom. Emiatt egy adott személyről nem tudjuk megmondani, hogy beletartozik-e, vagy sem abba a meghatározásba, hogy „ügyes”. A

$$B = \{\text{Magyarország városai 2025. január 2-án}\}$$

halmaz, hiszen a halmazt meg tudjuk adni az elemeinek a felsorolásával.

Definíció. *Üreshalmaznak* nevezzük azt a halmazt, melynek egyetlen eleme sincs. Jele: $\emptyset$.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok *egyenlőek*, ha az elemeik ugyanazok. Jele: $A = B$. Ennek tagadására az $A \neq B$ jelölést használjuk.

Példa. Az

$$A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

$$B = \{\text{egyjegyű páratlan számok}\}$$

$$C = \{n \leq 9 \mid n \text{ páratlan pozitív egész szám}\}$$

halmazok esetén $A = B = C$.

Definíció. Egy véges halmaz elemeinek a számát a halmaz számosságának nevezzük. Az A halmaz számosságára az $|A|$ jelölést használjuk.

Kidolgozott feladatok

1. **Feladat.** Döntsük el, hogy halmaz-e, ha igen, akkor adjuk meg az elemeinek felsorolásával az alábbiakat:

- a) $A = \{\text{Magyarország városai 2025. október 22-én}\};$
- b) $B = \{\text{Pilinszky János versei}\};$
- c) $C = \{\text{a természetes számok}\};$
- d) $D = \{\text{az } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\};$
- e) $E = \{\text{az } x^2 + 1 = 0 \text{ egyenlet valós gyökei}\};$
- f) $F = \{\text{az egyjegyű prímszámok}\};$
- g) $G = \{\text{a szép lányok}\}.$
- h) $H = \{\text{az } x^2 - 4 = 0 \text{ egyenlet egész megoldásai}\}.$
- i) $I = \{\text{a tehetséges matematikusok}\}.$

Megoldás:

- a) *Igen, halmaz.* Az időpont rögzíti a közigazgatási státuszokat, így a városok köre eldönthető.
- b) *Igen, halmaz.* Pilinszky életműve rögzített, a versek köre jól meghatározott.
- c) *Igen, halmaz.* A természetes számok halmaza standard, jól meghatározott.
- d) *Igen, halmaz.* Az egyenlet valós gyökei egyértelműen meghatározhatóak. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2},$$

tehát a halmaz $D = \{2; 3\}.$

- e) *Igen, halmaz.* Az egyenletnek nincs valós gyöke, tehát az E halmaz üreshalmaz.
- f) *Igen, halmaz.* Az egyjegyű prímszámok, vagyis az F halmaz elemei

$$F = \{2; 3; 5; 7\}.$$

- g) *Nem halmaz.* A „szép lányok” nem egyértelműen meghatározható halmaz, nem tudjuk felsorolni az elemeit.
- h) *Igen, halmaz.* Ha $x^2 - 4 = 0$, akkor $x^2 = 4$, így az egyenlet egész megoldásai -2 és 2 , azaz

$$H = \{-2; 2\}.$$

- i) *Nem halmaz.* A „tehetséges” szó egy szubjektív megítélés, nem tudjuk megmondani, hogy kik a tehetséges matematikusok.

2. **Feladat.** Soroljuk fel a következő halmazok elemeit:

- a) $A = \{ \text{a } 100\text{-nál kisebb pozitív négyzetszámok} \};$
 b) $B = \{ \text{a } 10\text{-nél kisebb pozitív négyzetszámok száma} \};$
 c) $C = \left\{ \text{az } \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökei} \right\};$
 d) $D = \left\{ \text{az } \frac{x-1}{x} = 2 \text{ egyenlet pozitív gyökeinek száma} \right\};$
 e) $E = \{ \text{az } x^2 - 2x \leq 0 \text{ egyenlőtlenség egész gyökei} \};$
 f) $F = \{ \text{az } x^2 + 4x < 0 \text{ egyenlőtlenség egész gyökeinek száma} \};$
 g) $G = \{ \text{az olyan kétjegyű számok, melyek számjegyeinek összege } 9 \};$
 h) $H = \{ 729 \text{ pozitív osztói} \}.$

Megoldás:

- a) Az A halmaz elemei:

$$A = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}.$$

- b) A 10-nél kisebb négyzetszámok: 1, 4, 9. Ezek száma 3, így

$$B = \{3\}.$$

- c) Az egyenlet értelmezési tartománya $x \neq 0$. Az

$$\frac{x-1}{x} = 2$$

egyenlet mindkét oldalát x -szel szorozva, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$x - 1 = 2x \Rightarrow -1 = x \Rightarrow x = -1.$$

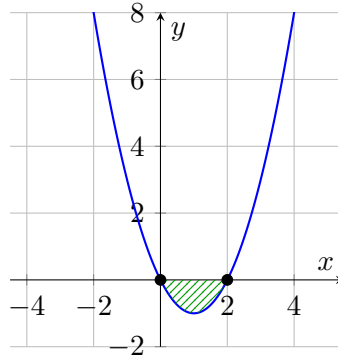
Pozitív gyök nincs, tehát

$$C = \emptyset.$$

- d) Az előző feladat szerint pozitív gyök nincs, így a gyökök száma 0, tehát

$$D = \{0\}.$$

- e) Az $x^2 - 2x \leq 0$ egy másodfokú egyenlőtlenség, amelyet grafikusan oldunk meg. Az $x \mapsto x^2 - 2x$ függvény zérushelyeinek meghatározásához megoldjuk az $x^2 - 2x = 0$ egyenletet, amiből kiemelés után azt kapjuk, hogy $x \cdot (x - 2) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $x = 0$ vagy $x - 2 = 0$, azaz $x = 2$.

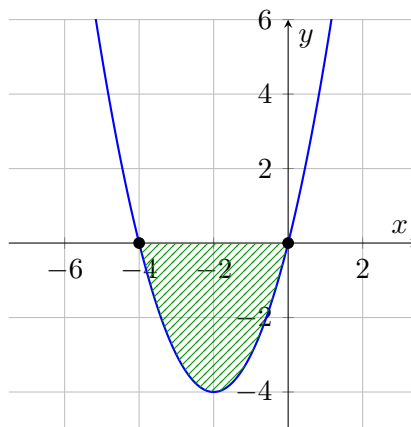


Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x \in [0; 2]$. Az intervallumba eső egész számok: $x = 0, 1, 2$, így $E = \{0; 1; 2\}$.

- f) Az $x^2 + 4x < 0$ egy másodfokú egyenlőtlenség, amelyet grafikusan oldunk meg. Az $x \mapsto x^2 + 4x$ függvény zérushelyeinek meghatározásához megoldjuk az

$$x^2 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x + 4) = 0$$

egyenletet, ami csak akkor lehetséges, ha $x = 0$ vagy $x + 4 = 0$, azaz $x = -4$.



Az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x \in] - 4; 0[$. Az intervallumba eső egész számok: $x = -3, -2, -1$, azaz három darab, így

$$F = \{3\}.$$

g) Kétjegyű számok, melyeknél $a + b = 9$.

A keresett számok 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, így

$$G = \{18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90\}.$$

h) Mivel $729 = 3^6$, ezért a pozitív osztók 3^k alakúak, ahol $k = 0, 1, \dots, 6$, így

$$H = \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}.$$

1.3. Részhalmaz, hatványhalmaz fogalma

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A gazdasági elemzésben ritkán vizsgálunk teljes populációkat homogén egészként. A vállalatok ügyfeleiket szegmensekre bontják, a piacokat célcsoportokra osztják, a befektetési lehetőségeket kockázati kategóriák szerint rendszerezik.

Ezek a struktúrák matematikailag részhalmazokként értelmezhetők.

A hatványhalmaz fogalma ennél tovább megy: azt mutatja meg, hogy egy adott elemből álló rendszer hányféle kombinációban vizsgálható. Már viszonylag kevés alternatíva esetén is gyorsan nő a döntési lehetőségek száma.

Ebben az alfejezetben megismerkedünk a részhalmaz és a hatványhalmaz fogalmával, amelyek a gazdasági rendszerek strukturált elemzésének alapját képezik.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részhalmaza* a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$. Az A halmaz valódi részhalmaza B -nek, ha A részhalmaza B -nek, de $A \neq B$.

Megjegyzés. Az üreshalmaz minden halmaznak részhalmaza.

Példa. Az $A = \{1; 2; 3\}$ halmaznak részhalmaza a $B = \{2; 3\}$ halmaz. Jelölése: $B \subset A$.

Példa. A páros számok részhalmazát alkotják az egész számok halmazának.

Tétel. Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n .

Definíció. Egy halmaz összes részhalmazából képzett halmazt az adott halmaz *hatványhalmazának* nevezzük. Jele: $\mathcal{P}(A)$.

Következmény. Egy n elemű halmaz hatványhalmazának számossága: 2^n .

Példa. Az $A = \{1; 2\}$ halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}$$

halmaz.

Kidolgozott feladatok

3. Feladat. Tekintsük az $A = \{1; 2; 3\}$ halmazt!

- a) Adjuk meg összes részhalmazát!
- b) Határozzuk meg az A halmaz hatványhalmazát!

Megoldás:

- a) A keresett részhalmazok:

$$\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset.$$

- b) Az A halmaz hatványhalmaza az A összes részhalmazát tartalmazó halmaz, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}, \emptyset\}.$$

4. Feladat. Tekintsük az $A = \{\star; \spadesuit; \diamond\}$ halmazt!

- a) Adjuk meg összes részhalmazát!
- b) Határozzuk meg az A halmaz hatványhalmazát!

Megoldás:

- a) A keresett részhalmazok:

$$\{\star\}; \{\spadesuit\}; \{\diamond\}; \{\star; \spadesuit\}; \{\star; \diamond\}; \{\spadesuit; \diamond\}; \{\star; \spadesuit; \diamond\}; \emptyset.$$

- b) Az A halmaz hatványhalmaza az A összes részhalmazát tartalmazó halmaz, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\star\}; \{\spadesuit\}; \{\diamond\}; \{\star; \spadesuit\}; \{\star; \diamond\}; \{\spadesuit; \diamond\}; \{\star; \spadesuit; \diamond\}; \emptyset\}.$$

5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az A és B halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha egymásnak kölcsönösen részhalmazai, azaz ha $A \subset B$ és $B \subset A$ teljesül.

Megoldás:

Ha $A = B$, akkor nyilván $A \subset B$ és $B \subset A$ is teljesül.

Megfordítva, egyrészt ha $A \subset B$, akkor A minden eleme B -nek is eleme, másrészt ha $B \subset A$, akkor B minden eleme A -nak is eleme, így $A = B$.

6. Feladat. Igazoljuk, hogy egy 10 elemű halmaznak ugyanannyi 3 elemű részhalmaza van, mint amennyi 7 elemű!

Megoldás:

A 10 elemű halmaz 7 elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

A 10 elemű halmaz 3 elemű részhalmazainak száma:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy n elemű halmaznak ugyanannyi k elemű részhalmaza van, mint amennyi $n - k$ elemű!

Megoldás:

Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$.

Egy n elemű halmaz $n - k$ elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{n-k}$. Mivel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ezért az állítást igazoltuk.

8. Feladat. Egy halmaznak 10 eleme van. Hány darab részhalmaza van?

Megoldás:

A 10 elemű halmaz részhalmazainak száma

$$2^{10} = 1\,024.$$

9. Feladat. Egy halmaznak 512 darab részhalmaza van. Hány elemű a halmaz?

Megoldás:

Mivel egy n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n , ezért az

$$512 = 2^n$$

egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy $n = 9$, így a halmaz 9 elemű.

10. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ egyenlet valós megoldásai}\},$$

$$B = \{x^{10} = -1 \text{ egyenlet valós megoldásai}\},$$

$$C = \{x^4 - 16 = 0 \text{ egyenlet valós gyökeinek száma}\},$$

$$D = \{3 \text{ és } 7 \text{ közé eső páros számok}\}$$

halmazokat!

- Adjuk meg a fenti halmazokat elemeik felsorolásával!
- Válasszunk ki a fenti halmazok közül olyan halmazokat, melyek egyenlők!
- Adjunk meg olyan halmazokat, melyek halmaz, részhalmaz kapcsolatban állnak egymással.

Megoldás:

- Az $x^2 - 10x + 24 = 0$ egyenletet a másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2},$$

amiből a megoldások $x_1 = 6$, $x_2 = 4$. Így $A = \{4; 6\}$. Mivel nem létezik olyan valós szám, melynek a páros kitevőjű hatványa negatív szám lenne, ezért $B = \emptyset$. Az $x^4 - 16 = 0$ egyenletnek két valós megoldása van, -2 és 2 , így $C = \{2\}$. A D halmaz elemei $D = \{4; 6\}$.

- Az előbbieket alapján azt kaptuk tehát, hogy $A = D$.
- A B halmaz minden halmaznak részhalmaza, továbbá $D \subset A$ és $A \subset D$.

11. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 4 \geq 0\}$$

és a

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x+3} \leq 0\right\}$$

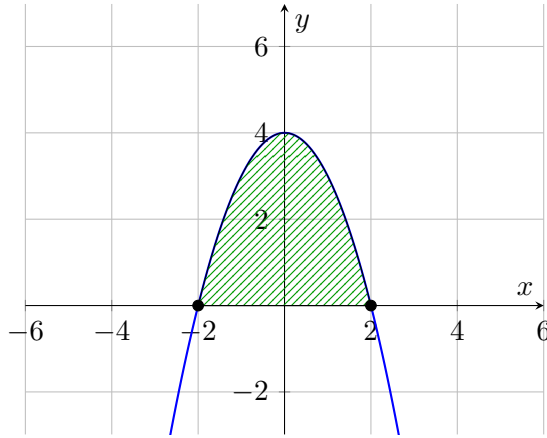
halmazokat! Bizonyítsuk be, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak!

Megoldás:

Először megoldjuk a $-x^2 + 4 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Az $x \mapsto -x^2 + 4$ függvény zérushelye, vagyis az

$$-x^2 + 4 = 0$$

egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Az $x \mapsto -x^2 + 4$ függvény grafikonja alapján látható, hogy az x tengely fölött az $x \in [-2; 2]$ intervallumon vagyunk:



Tehát az A halmaz:

$$A = [-2; 2].$$

Ezután megoldjuk az

$$\frac{x-2}{x+3} \leq 0$$

egyenlőtlenséget két esetre bontva. Vegyük észre, hogy $x = -3$ -nál a kifejezés nem értelmezett.

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

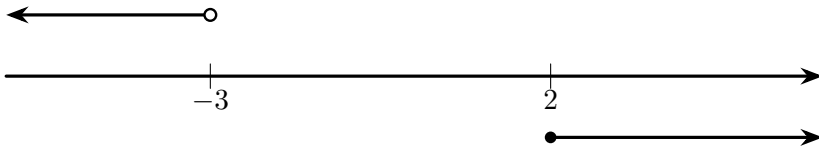
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 3 < 0,$$

így

$$x \geq 2 \quad \text{és} \quad x < -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Így az első esetben nem kapunk megoldást.

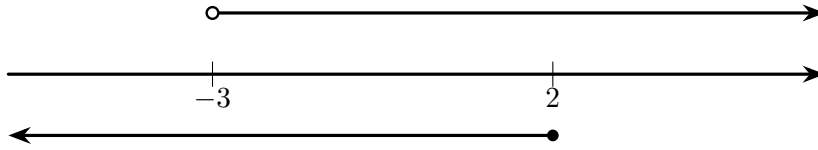
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$x - 2 \leq 0 \quad \text{és} \quad x + 3 > 0,$$

így

$$x \leq 2 \quad \text{és} \quad x > -3.$$

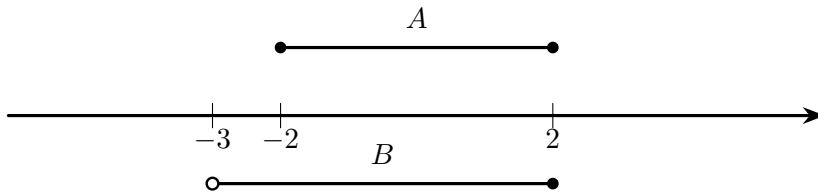
Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Ebben az esetben azt kaptuk, hogy a közös rész $] - 3; 2]$, így tehát a B halmaz:

$$B =] - 3; 2].$$

Az A és B halmazokat közös számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Tehát azt kaptuk, hogy $A \subset B$.

1.4. Halmazok Descartes-szorzata

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A gazdasági modellek jelentős része két vagy több változó kapcsolatát vizsgálja. Ár és mennyiség, költség és kibocsátás, jövedelem és fogyasztás. Ezek mind olyan párok, amelyek együttesen értelmezhetők.

A Descartes-szorzat fogalma lehetővé teszi, hogy két halmaz elemeiből rendezett párokat képezzünk, és ezzel formálisan leírjuk a többváltozós gazdasági helyzeteket.

A többváltozós gazdasági modellezés egyik alaplépése tehát a Descartes-szorzat fogalmának megértése. Ebben az alfejezetben formálisan definiáljuk a Descartes-szorzatot.

Definíció. Legyenek A és B halmazok. Ekkor az $(a; b)$ szimbólumot *rendezett elempárnak* nevezzük, ha $a \in A$ és $b \in B$.

Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatán* azt az $A \times B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei olyan rendezett elempárokból állnak, melyek első tagja az A , második tagja a B halmazból való, azaz

$$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Az A halmaz önmagával vett Descartes-szorzatát szokás A^2 -el is jelölni:

$$A^2 = A \times A.$$

Példa. Tekintsük az $A = \{1; 3\}$ és $B = \{2; 4\}$ halmazokat! Ekkor

$$A \times B = \{(1; 2); (1; 4); (3; 2); (3; 4)\},$$

másrészt

$$B \times A = \{(2; 1); (2; 3); (4; 1); (4; 3)\},$$

amiből látható, hogy $A \times B$ és $B \times A$ nem egyenlőek, tehát a Descartes-szorzat nem-kommutatív művelet.

Megjegyzés. Az

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

halmaz elemei megfeleltethetők a „kétdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszer” pontjainak, ha rögzítünk egy koordináta-rendszert.

Kidolgozott feladatok

12. Feladat. Tekintsük az $A = \{2; 3; 5\}$ és $B = \{1; 2; 5; 8\}$ halmazokat! Adjuk meg az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett Descartes-szorzatok

$$A \times B = \{(2; 1); (2; 2); (2; 5); (2; 8); (3; 1); (3; 2); (3; 5); (3; 8); (5; 1); (5; 2); (5; 5); (5; 8)\},$$

illetve

$$B \times A = \{(1; 2); (1; 3); (1; 5); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (5; 2); (5; 3); (5; 5); (8; 2); (8; 3); (8; 5)\}.$$

13. Feladat. Soroljuk fel a $A \times B$ halmaz elemeit, ha

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 1\}$$

és

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 2\}.$$

Megoldás:

Az A halmaz:

$$A = \{-2; -1; 0; 1\},$$

a B halmaz:

$$B = \{0; 1; 2\},$$

így az $A \times B$ halmaz:

$$A \times B = \{(-2; 0); (-2; 1); (-2; 2); (-1; 0); (-1; 1); (-1; 2); (0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; 0); (1; 1); (1; 2)\}.$$

1.5. Műveletek halmazokkal

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A halmazműveletek a gazdasági adatfeldolgozás és döntéshozatal alapvető eszközei.

Amikor egy vállalat azt vizsgálja, hogy egy adott terméket kik vásároltak, mely fogyasztók tartoznak egyszerre több célcsoportba, vagy kik azok, akik egy kategóriába tartoznak, de egy másikba nem, akkor valójában uniót, metszetet és különbséget számít.

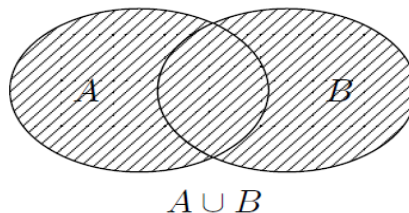
A halmazműveletek tehát nem pusztán elméleti fogalmak, hanem a gazdasági információfeldolgozás matematikai alapjai.

Ebben az alfejezetben áttekintjük a legfontosabb halmazműveleteket és azok tulajdonságait.

Ebben a részben legyen $H \neq \emptyset$ az úgynevezett alaphalmaz és legyenek az A, B, C halmazok a H részhalmazai.

Definíció. Az A és B halmazok *unióján* azt az $A \cup B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei, azaz

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

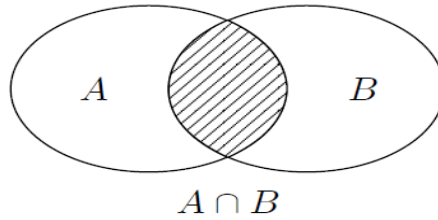


Példa. Az $A = \{1; 2\}$ és a $B = \{2; 3\}$ halmaz uniója

$$A \cup B = \{1; 2; 3\}.$$

Definíció. Az A és B halmazok *metszetén* azt az $A \cap B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei mindkét halmaznak elemei, azaz

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

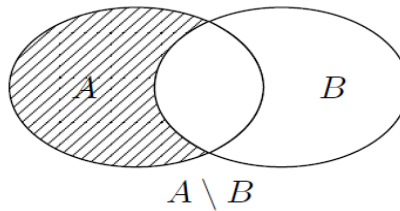


Példa. Az $A = \{1; 2\}$ és a $B = \{2; 3\}$ halmaz metszete

$$A \cap B = \{2\}.$$

Definíció. Az A különbség B halmazon azt az $A \setminus B$ -vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei A -nak elemei, de B -nek nem elemei, azaz

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

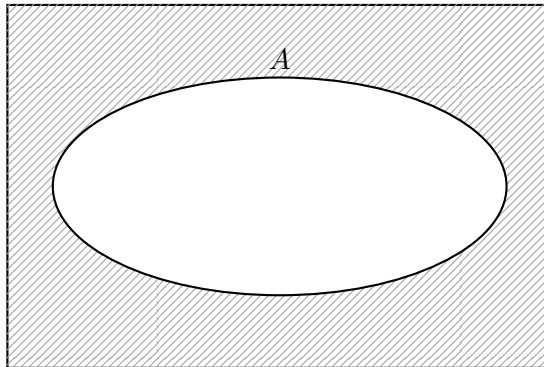


Példa. Az $A = \{1; 2\}$ és a $B = \{2; 3\}$ halmazok esetén

$$A \setminus B = \{1\}.$$

Definíció. Legyen H egy tetszőleges nemüres halmaz és legyen az A halmaz a H részhalmaza! Az A halmaznak a H halmazra vonatkozó komplementerén a $H \setminus A$ halmazt értjük, amelyet $\bar{A}$ módon jelölünk.

H



1.5.1. **Példa.** Tekintsük a

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{1; 3; 4; 5; 6\}$$

halmazt. Ekkor A komplementere:

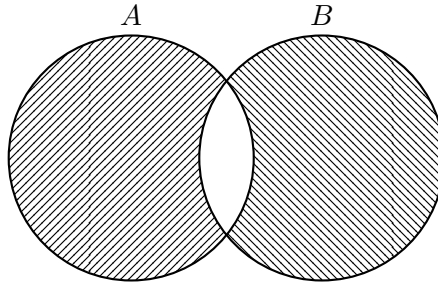
$$\overline{A} = \{2; 7; 8; 9\}.$$

Tétel. Tetszőleges A és B halmazok esetén

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Definíció. Az A és B halmazok *szimmetrikus differenciáján* azt a halmazt értjük, melynek elemei pontosan az egyik halmaznak elemei, azaz

$$A \triangle B = \{x \mid \text{vagy } x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$



Példa. Az $A = \{1; 2; 3\}$ és a $B = \{2; 3; 4\}$ halmazok esetén

$$A \triangle B = \{1; 4\}.$$

Tétel. Tetszőleges A és B halmazok esetén

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Tétel. (a halmazműveletek tulajdonságai)

Legyenek A , B , C egy H alaphalmaz részhalmazai. Ekkor igazak a következő állítások:

- 1) $A \cup B = B \cup A$, azaz az unió kommutatív;
- 2) $A \cap B = B \cap A$, azaz a metszet kommutatív;
- 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, azaz az unió asszociatív;
- 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, azaz a metszet asszociatív;
- 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, azaz a metszet disztributív az unióra nézve;

- 6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, azaz az unió disztributív a metszetre nézve;
- 7) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, azaz az unió és a metszet idempotens;
- 8) $A \cup \bar{A} = H$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$;
- 9) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, azaz teljesülnek az úgynevezett de-Morgan azonosságok.

Tétel. Az $A \cup B$ halmaz számosságára teljesül az

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

összefüggés, amelyet két halmazra vonatkozó szitaformulának is nevezünk.

Tétel. Az $A \cup B \cup C$ halmaz számosságára teljesül az

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

összefüggés, amelyet három halmazra vonatkozó szitaformulának is nevezünk.

Kidolgozott feladatok

14. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B halmazok esetén teljesül az

$$\overline{\overline{A \cup B}} = A \cap B$$

összefüggés!

Megoldás:

A de-Morgan azonosság szerint

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B,$$

amivel igazoltuk az állítást.

15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B halmazok esetén teljesül az

$$\overline{\overline{A \cap B}} = A \cup B$$

összefüggés!

Megoldás:

A de-Morgan azonosság szerint

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B,$$

amivel igazoltuk az állítást.

16. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges H alaphalmaz és $A, B \subset H$ halmazok esetén teljesül az

$$(\overline{B} \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = H \setminus (A \cap B)$$

összefüggés!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$\overline{B} \setminus \overline{A} = \overline{B} \cap \overline{\overline{A}} = \overline{B} \cap A,$$

másrészt

$$\overline{A} \setminus B = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B},$$

végül

$$\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B,$$

így

$$(\overline{B} \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = H \setminus (A \cap B),$$

amivel igazoltuk az állítást.

17. Feladat. Tekintsük a

$$H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{2; 3; 5\}, \quad B = \{1; 2; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, valamint a $\overline{B}$ halmazokat!

Megoldás:

A két halmaz uniójába azok az elemek tartoznak, amelyek legalább az egyik halmaznak elemei, így

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 8\}.$$

Két halmaz metszetébe azok az elemek tartoznak, amelyek mindkét halmaznak elemei, így

$$A \cap B = \{2; 5\}.$$

Az $A \setminus B$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem elemei, így

$$A \setminus B = \{3\}.$$

A $B \setminus A$ halmaz elemei azok az elemek, amelyek a B halmaznak elemei, de az A halmaznak nem elemei, így

$$B \setminus A = \{1; 8\}.$$

Az A halmaz komplementerébe azok az elemek tartoznak, amelyek az A halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így

$$\overline{A} = \{1; 4; 6; 7; 8\}.$$

A B halmaz komplementerébe azok az elemek tartoznak, amelyek a B halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei, így

$$\overline{B} = \{3; 4; 6; 7\}.$$

18. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{1; 2; 5; 7\}, \quad B = \{2; 4; 5; 8\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett halmazok:

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$$

$$A \cap B = \{2; 5\}$$

$$A \setminus B = \{1; 7\}$$

$$B \setminus A = \{4; 8\}.$$

19. **Feladat.** Adjuk meg az $A \cap B$ halmaz elemeit, ha

$$A = [-5; 3[$$

és $B = \mathbb{Z}$ (egész számok halmaza).

Megoldás:

Feladatunk a $[-5; 3[$ intervallumba eső egész számok megadása, amelyek az alábbiak:

$$A \cap B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}.$$

20. **Feladat.** Adjuk meg az $A \cap B$ halmaz elemeit, ha

$$A = [-5; 3[$$

és $B = \mathbb{N}$ (természetes számok halmaza).

Megoldás:

Feladatunk a $[-5; 3[$ intervallumba eső természetes számok megadása:

$$A \cap B = \{1; 2\}.$$

21. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \geq 0\}$$

és a

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 4 < 0\}$$

halmazokat! Adjuk meg az $A \cup B$, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazokat!

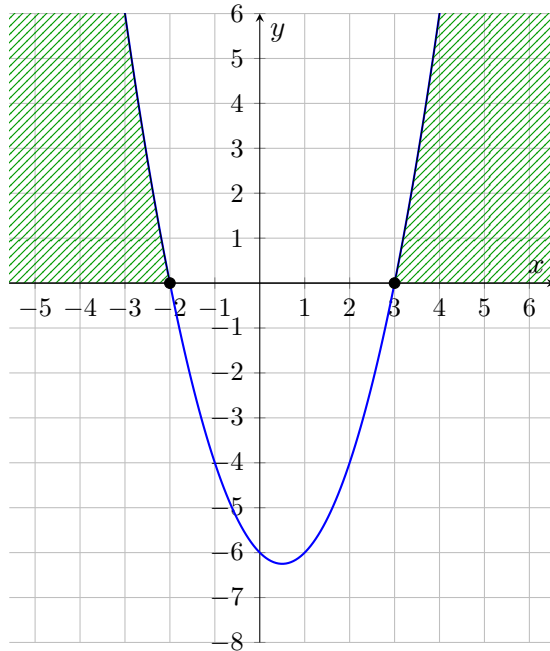
Megoldás:

Első lépésben megoldjuk az $x^2 - x - 6 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Ehhez először

megoldjuk az $x^2 - x - 6 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felírva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

amiből $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ adódik. Ezek segítségével felvázoljuk az előbb definiált függvény grafikonját.



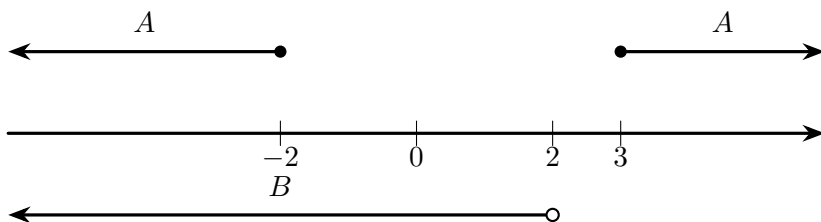
Az egyenlőtlenség megoldása, vagyis az A halmaz

$$A =] - \infty; -2] \cup [3; \infty[,$$

Most megoldjuk a $2x - 4 < 0$ egyenlőtlenséget. Mindkét oldalhoz 4-et hozzáadva, majd mindkét oldalt elosztva 2-vel azt kapjuk, hogy $2x < 4$, azaz $x < 2$, így a B halmaz

$$B =] - \infty; 2[.$$

Az A és B halmazokat számegyenesen ábrázolva az alábbiakat kapjuk:



A megfelelő halmazműveletek eredményei

$$A \cup B =]-\infty; 2[\cup [3; \infty[= \mathbb{R} \setminus [2; 3[$$

$$A \cap B =]-\infty; -2]$$

$$A \setminus B = [3; \infty[$$

$$B \setminus A =]-2; 2[.$$

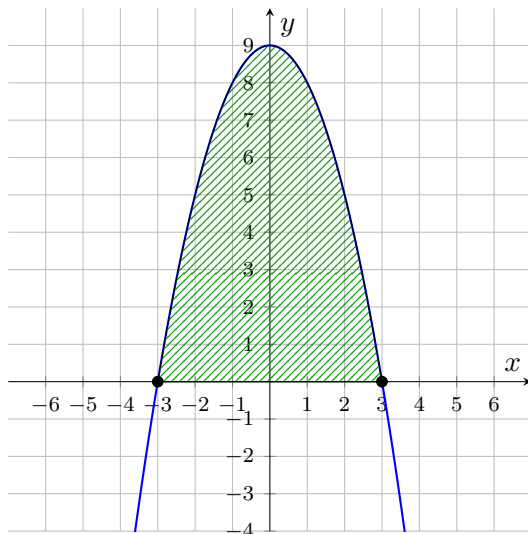
22. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 9 > 0\} \text{ és } B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+4} < 0\right\}$$

halmazokat! Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt!

Megoldás:

Először megoldjuk a $-x^2 + 9 > 0$ egyenlőtlenséget. A $-x^2 + 9$ függvény zérushelye, vagyis $-x^2 + 9 = 0$ egyenlet megoldásai $x_1 = -3$ és $x_2 = 3$. A parabolát vázlatosan felrajzolva azt alábbi ábrát kapjuk:



Tehát az A halmaz:

$$A =] - 3; 3[.$$

Ezután megoldjuk az

$$\frac{x-1}{x+4} < 0$$

egyenlőtlenséget két esetre bontva.

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

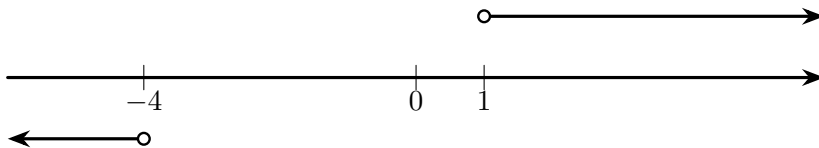
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x - 1 > 0 \quad \text{és} \quad x + 4 < 0,$$

így

$$x > 1 \quad \text{és} \quad x < -4.$$

Számegyenesen ábrázolva:



Látszik, hogy a egyenlőtlenség egyszerre nem teljesülhet, tehát az első esetben nem kapunk megoldást.

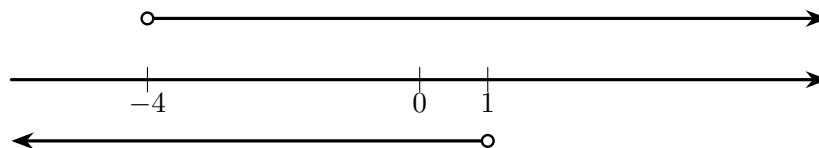
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$x - 1 < 0 \quad \text{és} \quad x + 4 > 0,$$

így

$$x < 1 \quad \text{és} \quad x > -4.$$

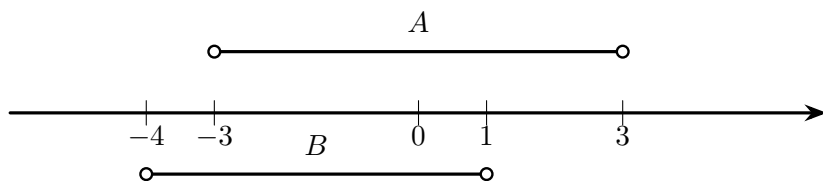
Számegyenesen ábrázolva:



Tehát

$$B =] - 4; 1[.$$

Az A és B halmazokat közös számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Tehát azt kaptuk, hogy

$$A \cap B =] - 3; 1[.$$

23. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 < 0\} \text{ és } B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-2}{x-6} > 0\right\}$$

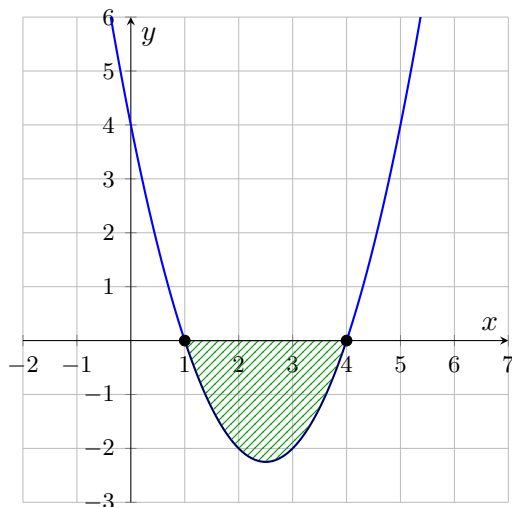
halmazokat! Határozzuk meg az $A \cap B$ halmazt!

Megoldás:

Először megoldjuk az $x^2 - 5x + 4 < 0$ egyenlőtlenséget. Ehhez első lépésben kiszámoljuk az $x^2 - 5x + 4 = 0$ egyenlet gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

így $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$. Mivel a parabola felfelé nyílik, a két gyök között negatív a függvény értéke:



Tehát azt kaptuk, hogy

$$A =]1; 4[.$$

Ezután megoldjuk az

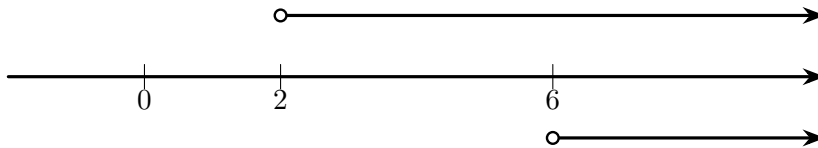
$$\frac{x-2}{x-6} > 0$$

egyenlőtlenséget két esetre bontva. Egy tört akkor pozitív, ha a számláló és nevező azonos előjelű.

I. eset: $\frac{+}{+}$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2, \quad \text{és} \quad x - 6 > 0 \Rightarrow x > 6.$$

Számegyenesen ábrázolva:



Tehát azt kaptuk, hogy $B_1 =]6; \infty[.$

II. eset: $\frac{-}{-}$

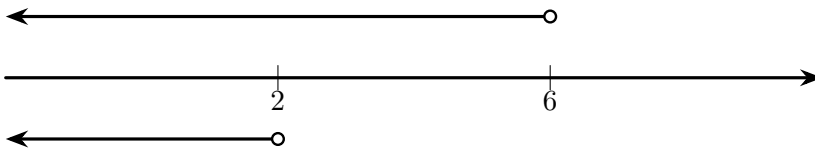
Ekkor

$$x - 2 < 0 \quad \text{és} \quad x - 6 < 0,$$

azaz

$$x < 2 \quad \text{és} \quad x < 6.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:

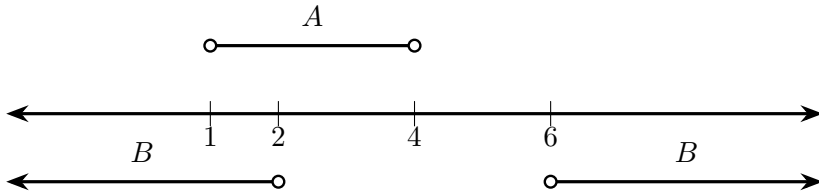


Ebből leolvasható, hogy $B_2 =] - \infty; 2[.$

Tehát a B halmaz:

$$B =] - \infty; 2[\cup]6; \infty[.$$

Az A és B halmazokat közös számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Tehát azt kaptuk, hogy

$$A \cap B =]1; 2[.$$

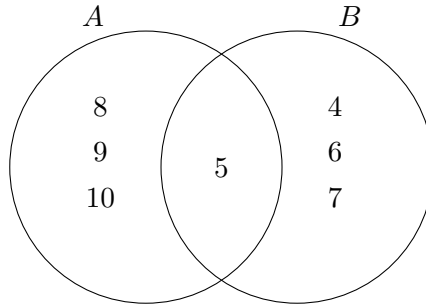
24. **Feladat.** Az A és B halmazok uniója, különbsége, illetve metszete ismert:

$$A \cup B = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}; \quad A \setminus B = \{8; 9; 10\}; \quad A \cap B = \{5\}.$$

Határozzuk meg az A és a B halmazokat!

Megoldás:

Venn diagramon ábrázolva a halmazokat az alábbi ábra adódik:



Leolvasható, hogy az A halmaz, illetve a B halmaz:

$$A = \{5; 8; 9; 10\}; \quad B = \{4; 5; 6; 7\}.$$

25. **Feladat.** Legyen az A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, a B halmaz a 3-mal osztható egyjegyű, pozitív egész számok halmaza. Adjuk meg az A és B halmazokat elemeik felsorolásával! Határozzuk meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!

Megoldás:

A keresett A és B halmazok:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$B = \{3; 6; 9\}$$

Az $A \cup B$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazok:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$A \cap B = \{3; 6\}$$

$$A \setminus B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}.$$

26. Feladat. Az A , B és a C halmazokról az alábbiakat tudjuk:

$$A \cup B \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\};$$

$$A \setminus B = \{8; 9; 10\};$$

$$A \cap B = \{1; 2; 3\};$$

$$A \cap B \cap C = \{1; 3\};$$

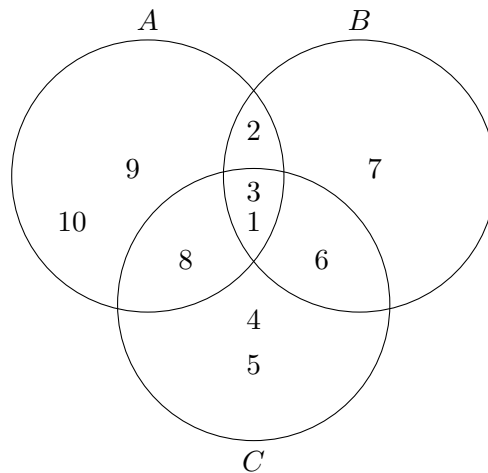
$$A \cap C = \{1; 3; 8\};$$

$$B \setminus C = \{2; 7\}.$$

Határozzuk meg az A , B és C halmazokat!

Megoldás:

Venn digramon ábrázolva a halmazokat az alábbi ábrát kapjuk:



Most már leolvasható, hogy

$$A = \{1; 2; 3; 8; 9; 10\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 6; 7\}$$

$$C = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}.$$

1.6. Nevezetes számhalmazok

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A gazdasági modellekben változók szerepelnek: árak, mennyiségek, költségek, hozamok, kamatlábak. Ezek értelmezéséhez pontosan tudnunk kell, hogy milyen számhalmazon dolgozunk.

- Egy darabszám pozitív egész szám (természetes szám).
- Egy nettó eredmény lehet negatív, így egész szám.
- Egy ár, kamatláb vagy hozam tört alakban is megjelenhet, így racionális szám.
- A folytonos modellek – például keresleti vagy költségfüggvények – már a valós számok halmazán értelmezettek.

A nevezetes számhalmazok áttekintése ezért nem öncélú elmélet, hanem a későbbi gazdasági modellezés matematikai alapja.

Definíció. Az $\mathbb{N} = \{1; 2; 3 \dots\}$ halmazt a *természetes számok halmazának* nevezzük.

Megjegyzés. A természetes számok halmazából az összeadás és a szorzás művelete nem vezet ki, azaz két természetes szám összege, illetve két természetes szám szorzata is természetes szám.

Definíció. A

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

halmazt az *egész számok halmazának* nevezzük.

Megjegyzés. Az egész számok halmazából az összeadás, a kivonás és a szorzás művelete nem vezet ki, azaz két egész szám összege, különbsége, illetve két egész szám szorzata is egész szám.

Megjegyzés. Az egész számok halmazának részhalmaza a természetes számok halmaza.

Definíció. *Racionális számok halmazának* nevezzük azt a halmazt, melynek elemei előállnak két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}$.

Megjegyzés. A racionális számok halmazából az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás művelete nem vezet ki, azaz két racionális szám összege, különbsége, szorzata és két nullától különböző racionális szám hányadosa is racionális szám.

Megjegyzés. A racionális számok halmaza részhalmazként tartalmazza az egész számok és a természetes számok halmazát, pontosabban $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Megjegyzés. Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört alakban.

Példa. A $0,1234$ szám közönséges törtként való felírása:

$$0,1234 = \frac{1234}{10000} = \frac{617}{5000}.$$

Példa. Az $1, \dot{3}$ szám közönséges törtként való felírása

$$1, \dot{3} = \frac{4}{3},$$

ugyanis

$$x = 1, \dot{3}$$

esetén $10x = 13, \dot{3}$, majd kivonva egymásból az előbbi két egyenletet $9x = 12$ adódik, amiből az x -et kifejezve, majd a kapott törtet egyszerűsítve

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

adódik.

Definíció. *Valós számok halmazának* nevezzük a számegyenes pontjainak megfeleltethető számhalmazt. Jelölés: $\mathbb{R}$.

Definíció. *Irracionális számok halmazának* nevezzük a racionális számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó komplementerét, azaz azokat a valós számokat, amelyek nem állnak elő két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}^*$.

Példa. A $\sqrt{2}$ szám irracionális. Ugyanis tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ekkor léteznek olyan p és q egész számok, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

továbbá feltehető, hogy p -nek és q -nak nincs közös osztója, azaz a tört tovább már nem egyszerűsíthető. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd beszorozva q^2 -el azt kapjuk, hogy

$$2q^2 = p^2.$$

Ez azt jelenti, hogy p^2 osztható 2-vel. Viszont egy páratlan szám négyzete is páratlan. Ebből következik, hogy p osztható 2-vel, azaz van olyan k egész szám, hogy $p = 2k$, vagyis $p^2 = 4k^2$. Ugyanakkor $p^2 = 2q^2$, tehát $4k^2 = 2q^2$, vagyis $2k^2 = q^2$. Azaz q^2 páros, de akkor q is páros, azaz osztható 2-vel, ami ellentmond annak, hogy p -nek és q -nak nincs közös osztója.

Megjegyzés. A valós számok halmazára teljesül, hogy

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*.$$

Kidolgozott feladatok

27. Feladat. Tekintsük a nevezetes számhalmazokat a szokásos jelölésekkel! Adjuk meg a következő halmazokat:

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ | d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ | g) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Q}$ |
| b) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$ | e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q}$ |
| c) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ | f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$ | i) $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q}$. |

Megoldás:

Mivel $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, továbbá $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, ezért

- | | | |
|--|--|---|
| a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ | d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ | g) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ |
| b) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$ | e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Q}^* \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*$ |
| c) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ | f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ | i) $\mathbb{Q}^* \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. |

28. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy két racionális szám összege racionális, azaz ha $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor $a + b \in \mathbb{Q}$.

Megoldás:

Ha $a \in \mathbb{Q}$, akkor léteznek olyan p és m egész számok, valamint q és n nullától különböző egész számok, hogy

$$a = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{m}{n}.$$

Ekkor

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{nq}.$$

Mivel két egész szám összege és szorzata is egész szám, ezért azt kapjuk, hogy

$$pn + mq \in \mathbb{Z},$$

továbbá

$$0 \neq n \cdot q \in \mathbb{Z},$$

ezért $a + b$ két egész szám hányadosa, így racionális szám.

1.7. Halmazok alkalmazása a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló

Motiváció. Ebben a fejezetben megismerkedtünk a halmaz fogalmával, a halmazműveletekkel, a részhalmaz és a hatványhalmaz jelentőségével, valamint a Descartes-szorzat szerepével. Ezek az eszközök azonban nem önmagukért fontosak. A következő fejezetekben például

- a függvények értelmezési tartománya halmaz,
- a költségvetési modell halmazként írható le,
- az optimalizálási problémák megoldáshalmaza szintén halmaz,
- a valószínűségszámítás eseményei pedig halmazokként értelmezhetők.

A halmazelmélet tehát a gazdasági modellezés nyelve és logikai alapja.

Példa. A gazdasági elemzésben különösen fontos, hogy egy halmaz elemei objektív módon legyenek meghatározva. Tegyük fel, hogy egy vállalat a „prémium ügyfelek” halmazát szeretné megadni, de tudjuk azt is, hogy akkor lesz valaki prémium ügyfél, ha legalább 1 000 000 Ft értékben vásárol. Ha ezt úgy írjuk fel, hogy

$$A = \{\text{„sikeres ügyfelek”}\},$$

akkor ez nem halmaz, nem egyértelműen definiált, mert a „sikeres” kifejezés nem objektív kritérium.

Ezzel szemben az, hogy

$$B = \{\text{ügyfelek, akik a múlt évben legalább 1 000 000 Ft értékben vásároltak}\}.$$

már halmaz, mert egyértelműen definiált, ezért matematikailag jól kezelhető.

Az előbbi példa jól mutatja, hogy a gazdasági modellezésben csak azok a csoportok használhatók biztonsággal, amelyek tagsága pontosan eldönthető.

Példa. Az előbbi példát tovább folytatva tegyük fel, hogy egy vállalat két különböző módszerrel határozza meg a „kiemelt ügyfelek” körét. Legyen

$$C = \{\text{ügyfelek, akik a múlt évben legalább 1 000 000 Ft értékben vásároltak}\}$$

és

$$D = \{\text{ügyfelek, akik arany szintű tagsággal rendelkeznek}\}.$$

Mivel a két lista pontosan ugyanazokat az ügyfeleket tartalmazza, ezért

$$C = D.$$

A halmazegyenlőség tehát azt jelenti, hogy két különböző megfogalmazás mögött ugyanaz az ügyfélkör áll.

Példa. A Descartes-szorzat konkrét gazdasági helyzetek formális leírására szolgál. Például:

- Ha A a termékek halmaza, B pedig a piacok halmaza, akkor $A \times B$ a lehetséges termék–piac kombinációkat tartalmazza.
- Ha az egyik halmaz az árak, a másik a mennyiségek halmaza, akkor a Descartes-szorzat a lehetséges ár–mennyiség párokat adja meg.
- A költségvetési modellekben a jószágkosarak is rendezett párok vagy általánosabban rendezett n -esek formájában jelennek meg.

Tegyük fel, hogy egy vállalat három terméket gyárt:

$$T = \{T_1; T_2; T_3\},$$

és két piacon értékesít:

$$P = \{\text{Hazai piac}; \text{Külföldi piac}\}.$$

Ekkor

$$T \times P = \{(T_1; \text{Hazai piac}); (T_1; \text{Külföldi piac}); \\ (T_2; \text{Hazai piac}); (T_2; \text{Külföldi piac}); \\ (T_3; \text{Hazai piac}); (T_3; \text{Külföldi piac})\}.$$

Ez a halmaz az összes lehetséges termék–piac kapcsolatot tartalmazza. A tényleges értékesítési struktúra ennek egy részhalmaza lesz.

Példa. A szitaformula a gazdasági elemzés egyik leggyakoribb gyakorlati eszköze. Segítségével meghatározható, hogy egy adott piaci kampány vagy termékportfólió mekkora tényleges lefedettséget ér el.

Egy piackutatás során 500 fogyasztót vizsgálnak.

- 280 fő vásárol A márkát,
- 200 fő vásárol B márkát,
- 90 fő mindkét márkát vásárolja.

A szitaformula alapján

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

adódik, ezért

$$|A \cup B| = 280 + 200 - 90 = 390,$$

tehát 390 fő vásárol legalább az egyik márkából.

Példa. Egy vállalat három online csatornán hirdet:

$$A = \text{Facebook}, \quad B = \text{Instagram}, \quad C = \text{Google Ads}.$$

A kampányadatok alapján ismert az egyes csatornák elérése és azok átfedése:

- $|A| = 600$ fő,
- $|B| = 500$ fő,
- $|C| = 400$ fő,
- $|A \cap B| = 200$ fő,
- $|A \cap C| = 150$ fő,
- $|B \cap C| = 120$ fő,
- $|A \cap B \cap C| = 80$ fő.

A teljes elérés meghatározásához a háromhalmazos szitaformulát alkalmazzuk, így

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$|A \cup B \cup C| = 600 + 500 + 400 - 200 - 150 - 120 + 80 = 1\,110.$$

Tehát a kampány összesen 1 110 különböző személyt ér el.

Példa. A gazdasági modellekben szereplő mennyiségek különböző számhalmazokhoz tartoznak.

- A darabszámok – például az eladott termékek száma – természetes számok.
- Egy vállalat eredménye negatív is lehet, ezért olyan modellekben, ahol egész egységekkel dolgozunk, az egész számok halmaza is megjelenik.
- Az árak, kamatlábak és hozamok gyakran racionális számokkal írhatók le.
- A különböző gazdasági jellegű függvények – például a keresleti vagy költségfüggvények – a valós számok halmazán értelmezettek.

Definíció. Tegyük fel, hogy egy fogyasztó kétféle árucikkből szeretne vásárolni. Az elsőből x , a másodikból pedig y mennyiséget. Az árucikkek egységárai rendre legyenek p és q . Az árucikkek mennyiségeiből álló $(x; y)$ rendezett párt *jószágkosárnak* hívjuk.

Megjegyzés. Az előbbi jószágkosárnak a p és q árak melletti értéke

$$p \cdot x + q \cdot y.$$

Definíció. Tegyük fel, hogy a fogyasztónak az előbbi két árucikkből való vásárláshoz m nagyságú összeg áll rendelkezésére. Ekkor a

$$p \cdot x + q \cdot y \leq m$$

egyenlőtlenséget *költségvetési feltétel*nek hívjuk.

Definíció. Ha még azt is feltételezzük, hogy a mennyiségek csak nemnegatívak lehetnek, akkor *költségvetési halmaz*nak mondjuk az összes olyan $(x; y)$ jószágkosárból álló elempárt, melyek kielégítik a

$$p \cdot x + q \cdot y \leq m, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

egyenlőtlenségeket, azaz a költségvetési halmaz:

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid p \cdot x + q \cdot y \leq m, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Kidolgozott feladatok

29. Feladat. Jelentse a H alaphalmaz azon Magyarországon élő személyek halmazát, akik adót fizetnek. Legyen az A halmaz azon adófizetők halmaza, akik legalább 5 millió forintos évi jövedelemmel rendelkeznek. Legyen a B halmaz azon adófizetők halmaza, akik legfeljebb 10 millió forintos évi jövedelemmel rendelkeznek.

- a) Mit jelent az $A \cap B$ halmaz?
- b) Mit jelent az $A \cup B$ halmaz?
- c) Mit jelent az $A \setminus B$ halmaz?
- d) Mit jelent a $B \setminus A$ halmaz?

Megoldás:

- a) Az $A \cap B$ halmazba azok az adófizetők tartoznak, akik mindkét tulajdonsággal rendelkeznek, tehát az $A \cap B$ halmaz azokat az adófizetőket jelenti, akik legalább 5 millió és legfeljebb 10 millió forint közötti éves jövedelemmel rendelkeznek.
- b) Az $A \cup B$ halmazba azok az adófizetők tartoznak, akik legalább az egyik tulajdonsággal rendelkeznek, tehát az $A \cup B$ halmaz azokat az adófizetőket jelenti, akik legalább 5 millió vagy legfeljebb 10 millió forint közötti éves jövedelemmel rendelkeznek, amely halmaz minden magyarországi adófizetőt tartalmaz.
- c) Az $A \setminus B$ halmaz azon adófizetőket jelenti, akik 10 millió forintnál nagyobb éves jövedelemmel rendelkeznek.
- d) A $B \setminus A$ halmaz azon adófizetőket jelenti, akik 5 millió forintnál kevesebb éves jövedelemmel rendelkeznek.

30. Feladat. Egy piackutató cég 500 fogyasztót kérdezett meg arról, hogy melyik márkát vásárolja rendszeresen:

A = azok halmaza, akik az α márkát veszik,

B = azok halmaza, akik a β márkát veszik.

A felmérés eredményei:

$$|A| = 280, \quad |B| = 200, \quad |A \cap B| = 90.$$

- a) Hányan vásárolnak legalább az egyik márkából?

- b) Hányan vásárolnak csak az egyik márkából?
 c) Hányan nem vásárolnak egyik márkából sem?
 d) Értelmezzük gazdaságilag az $A \cap B$ halmazt!

Megoldás:

A teljes minta elemszáma 500, legyen $|H| = 500$.

- a) Azon vásárlók száma, akik legalább az egyik márkából vásárolnak

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 280 + 200 - 90 = 390.$$

- b) Azon vásárlók száma, akik csak az α márkából vásárolnak

$$|A \setminus B| = 280 - 90 = 190.$$

Azon vásárlók száma, akik csak a β márkából vásárolnak

$$|B \setminus A| = 200 - 90 = 110,$$

így azok száma, akik csak az egyik márkából vásárolnak

$$|(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| = 190 + 110 = 300.$$

- c) Azon vásárlók száma, akik egyik márkából sem vásárolnak

$$N - |A \cup B| = 500 - 390 = 110.$$

- d) Az $A \cap B$ a márkahű, többmárkás vásárlók szegmense (mindkettőt rendszeresen veszik), számuk a vizsgált mintában 90 fő.

31. Feladat. Egy cég felmérést készít egyik kis üzlete forgalmáról. Az üzletben háromfajta cikket árulnak, nevezetesen A -t, B -t és C -t. Az eladó így számolt be a napi forgalomról: „Az üzletben 40-en fordultak meg, közülük 15-en nem vettek semmit. Az A árucikkből 15-en vásároltak, a B -ből 12-en, a C -ből 10-en. Tudjuk, hogy 6 vevő vásárolt A -ból és B -ből, nem volt olyan vevő, aki B -ből és C -ből vásárolt, 3 vevő C -ből és A -ból vásárolt.” Ha Ön lenne az eladó főnöke, mit mondana a fenti beszámoló után beosztottjának?

Megoldás:

Jelölje $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ rendre az A -, B -, illetve C -terméket vásárlók halmazát. A boltban megfordult 40 emberből 15 nem vett semmit, tehát

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = 40 - 15 = 25.$$

A szitaformula szerint

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| - |\mathcal{A} \cap \mathcal{B}| - |\mathcal{B} \cap \mathcal{C}| - |\mathcal{C} \cap \mathcal{A}| + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|.$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$25 = 15 + 12 + 10 - 6 - 0 - 3 + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}| = 28 + |\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}|.$$

Ebből $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}| = 25 - 28 = -3$ adódik, ami lehetetlen. Tehát a megadott számok ellentmondásosak. Azt mondanánk a beosztottnak, hogy „Ez a kimutatás hibás; kérlek, ellenőrizd és számold újra, mert valamely adat vagy adatok biztosan nem jók.”

32. Feladat. Legyen két termék ára $p = 2$, illetve $q = 4$, és tegyük fel, hogy a fogyasztónak $m = 40$ egység jövedelme van. Írjuk fel a költségvetési halmazt, és határozzuk meg a tengelymetszeteket!

Megoldás:

A költségvetési halmaz

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 4y \leq 40, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

A tengelymetszeteket a határegyenes alapján számítjuk. A

$$2x + 4y = 40$$

egyenletben, ha $x = 0$, akkor

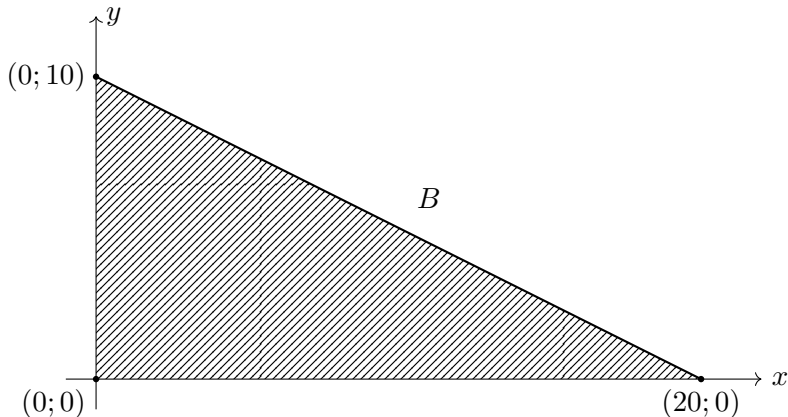
$$4y = 40 \Rightarrow y = 10.$$

Ha $y = 0$, akkor

$$2x = 40 \Rightarrow x = 20.$$

Tehát a költségvetési egyenes a $(20; 0)$ és $(0; 10)$ pontokat köti össze.

Az alábbi ábra szemlélteti a halmazt:



1.8. Összefoglaló feladatok

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben megismerkedtünk a halmaz fogalmával, a halmazok megadásának módjaival, a részhalmaz és hatványhalmaz jelentőségével, a Descartes-szorzat szerepével, valamint a legfontosabb halmazműveletekkel.

Ezek az eszközök nem önmagukért fontosak. A gazdasági elemzés során:

- ügyfélcsoportokat határozunk meg,
- piaci szegmenseket vizsgálunk,
- döntési alternatívák kombinációit elemezzük,
- többváltozós modelleket építünk,
- kampányok vagy termékportfóliók lefedettségét számítjuk.

A halmazelmélet biztosítja azt a formális nyelvet és logikai keretet, amelyre a későbbi fejezetekben tárgyalt függvények, optimalizálási problémák és valószínűségi modellek épülnek.

A cél nem az elméleti mélység volt, hanem egy olyan biztos alap megteremtése, amelyre a gazdasági matematika további eszköztára építhető.

Ebben a szakaszban a fejezet áttekintéseként néhány bonyolultabb, összetettebb feladatot fogunk megoldani.

Kidolgozott feladatok

33. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$$

és a

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+2}{x-3} > 2\right\}$$

halmazokat!

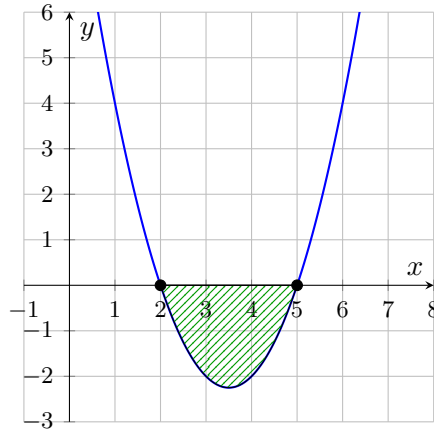
- Adjuk meg az A halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- Határozzuk meg az $A \cap \mathbb{N}$ halmazt!
- Adjuk meg a B halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- Az A és B halmazokat ábrázoljuk ugyanazon a számegyenesen!
- Részalmaz-e B az A halmaznak?
- Írjuk fel az $A \cup B$ halmazt!
- Írjuk fel az $A \cap B$ halmazt!
- Írjuk fel az $A \setminus B$ halmazt!
- Írjuk fel az $B \setminus A$ halmazt!
- Határozzuk meg az $\overline{A}$ halmazt!
- Határozzuk meg az $\overline{B}$ halmazt!
- Adjuk meg az $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazt!

Megoldás:

- Az A halmaz meghatározásához először megkeressük az $x^2 - 7x + 10$ függvény zérushelyeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = 5$ és $x_2 = 2$. A parabolát vázlatosan felrajzolva az alábbi ábrát kapjuk:



Tehát $A = [2; 5]$.

b) Mivel

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\},$$

ezért

$$A \cap \mathbb{N} = \{2; 3; 4; 5\}.$$

c) A B halmaz meghatározásához első lépésben nullára rendezzük az egyenlőtlenséget. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+2}{x-3} > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2}{x-3} - 2 > 0$$

Közös nevezőre hozva és elvégezve a lehetséges összevonásokat

$$\frac{x+2-2 \cdot (x-3)}{x-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+8}{x-3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{8-x}{x-3} > 0$$

adódik.

Egy tört akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

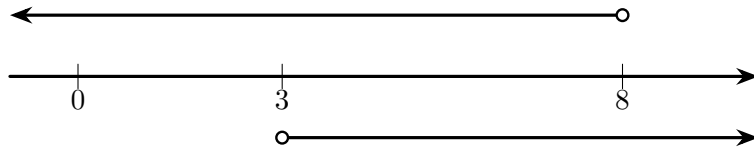
I. eset: $\frac{+}{+}$, azaz a számláló és nevező is pozitív. Ekkor

$$8-x > 0 \quad \text{és} \quad x-3 > 0,$$

azaz

$$x < 8 \quad \text{és} \quad x > 3$$

adódik. Számegyenesen ábrázolva:



A két feltétel metszete: $B_1 =]3; 8[$.

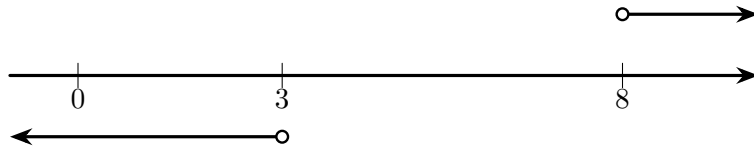
II. eset: Ξ , azaz a számláló és a nevező is negatív.

$$8 - x < 0 \quad \text{és} \quad x - 3 < 0,$$

azaz

$$x > 8 \quad \text{és} \quad x < 3$$

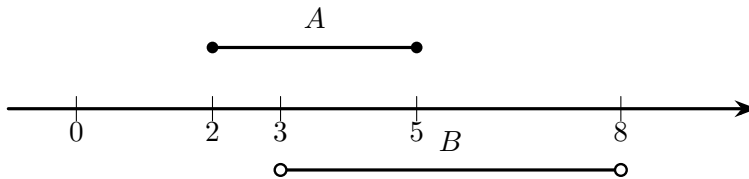
adódik. Számegyenesen ábrázolva:



Ebben az esetben nem kapunk megoldást. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$B =]3; 8[.$$

d) Az A és B halmazok közös ábrája:



e) Az A halmaz nem részhalmaza B -nek, mert A -nak van olyan eleme, amelyik B -nek nem eleme.

f) Az A és a B halmazok uniója: $A \cup B = [2; 8[$.

g) Az A és a B halmazok metszete: $A \cap B =]3; 5]$.

h) Az $A \setminus B$ halmaz: $A \setminus B = [2; 3]$.

i) A $B \setminus A$ halmaz: $B \setminus A =]5; 8[$.

j) Az $\overline{A}$ halmaz: $\overline{A} =]-\infty; 2[\cup]5; \infty[$.

k) A $\overline{B}$ halmaz: $\overline{B} =]-\infty; 3] \cup [8; \infty[$.

l) Az $\overline{A \cap B}$ halmaz: $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} =]-\infty; 2[\cup [8; \infty[$.

34. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^2 + 4 \geq 0\}$$

és a

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{x-4} < 0\right\}$$

halmazokat!

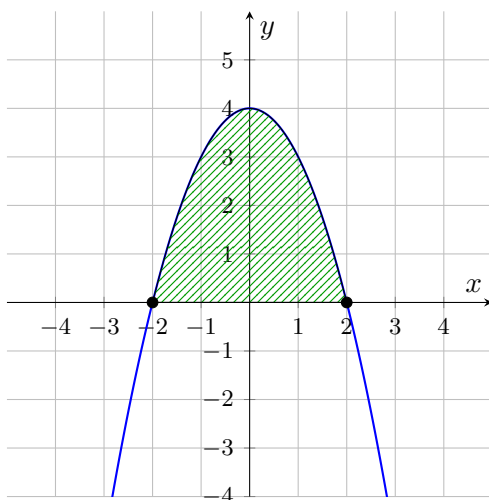
- a) Adjuk meg az A halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- b) Határozzuk meg az $A \cap \mathbb{N}$ halmazt!
- c) Adjuk meg a B halmazt intervallumként vagy intervallumok uniójaként!
- d) Az A és B halmazokat ábrázoljuk ugyanazon a számegyenesen!
- e) Részhalmaza-e B az A halmaznak?
- f) Írjuk fel az $A \cup B$ halmazt!
- g) Írjuk fel az $A \cap B$ halmazt!
- h) Írjuk fel az $A \setminus B$ halmazt!
- i) Írjuk fel az $B \setminus A$ halmazt!
- j) Határozzuk meg az $\overline{A}$ halmazt!
- k) Határozzuk meg az $\overline{B}$ halmazt!
- l) Határozzuk meg az $\overline{A} \cap \overline{B}$ halmazt!

Megoldás:

- a) Az A halmaz meghatározásához először megkeressük a $-x^2 + 4$ függvény zérushelyeit. Mivel

$$-x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 = x^2,$$

így az egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. A parabolát vázlatosan felrajzolva az alábbi ábrát kapjuk:



Mivel a parabola lefelé nyílik, ezért a $-x^2 + 4 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmazán, vagyis az A halmaz

$$A = [-2; 2].$$

b) Mivel

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\},$$

ezért

$$A \cap \mathbb{N} = \{1; 2\}.$$

c) A B halmaz meghatározásához első lépésben vizsgáljuk az előjeleket:

$$\frac{x}{x-4} < 0.$$

Egy tört akkor negatív, ha számláló és nevező különböző előjelű.

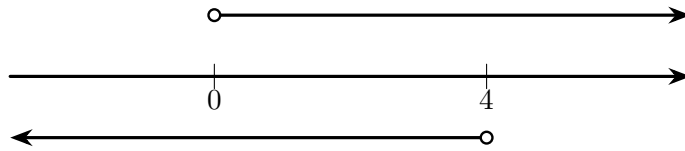
I. eset: $\frac{+}{-}$, azaz a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x > 0 \quad \text{és} \quad x - 4 < 0,$$

azaz

$$x > 0 \quad \text{és} \quad x < 4$$

adódik. Számegyenesen ábrázolva:



A két feltétel metszete: $B_1 =]0; 4[$.

II. eset: $\frac{-}{+}$, azaz a számláló negatív és a nevező pozitív.

$$x < 0 \quad \text{és} \quad x - 4 > 0,$$

azaz

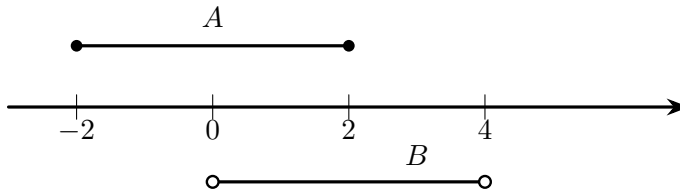
$$x < 0 \quad \text{és} \quad x > 4$$

adódik, ami nem lehetséges, tehát ebben az esetben nem kapunk megoldást.

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$B =]0; 4[.$$

d) Az A és B halmazok közös ábrája:



e) Mivel $B =]0; 4[$ és $A = [-2; 2]$, látszik, hogy B nem részhalmaza A -nak (például $3 \in B$, de $3 \notin A$).

f) Az A és a B halmazok uniója: $A \cup B = [-2; 4[$.

g) Az A és a B halmazok metszete: $A \cap B =]0; 2]$.

h) Az $A \setminus B$ halmaz: $A \setminus B = [-2; 0]$.

i) A $B \setminus A$ halmaz: $B \setminus A =]2; 4[$.

j) Az $\overline{A}$ halmaz: $\overline{A} =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$.

k) A $\overline{B}$ halmaz: $\overline{B} =]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$.

l) Az $\overline{A \cap B}$ halmaz: $\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} =]-\infty; -2[\cup [4; \infty[$.

2. fejezet

Relációk

2.1. Bevezetés

A gazdasági elemzés központi kérdése nem csupán az, hogy milyen elemeket vizsgálunk, hanem az is, hogy milyen kapcsolat áll fenn közöttük.

- Egy vállalat alkalmazottai és a munkakörök között kapcsolat van.
- A fogyasztók és a vásárolt termékek között kapcsolat van.
- A vállalatok és a beszállítók között kapcsolat van.
- Egy ország és exportpiacai között kapcsolat van.

A reláció fogalma azt teszi lehetővé, hogy két halmaz elemei közötti ilyen kapcsolatokat formálisan leírjuk.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy nem minden relációkapcsolat jelent függvénykapcsolatot is. Előfordulhat, hogy:

- egy fogyasztó több terméket is vásárol,
- egy terméket több piacon is értékesítenek,
- egy alkalmazott több projektben is részt vesz.

A relációk a gazdasági modellezés egyik alapfogalmát jelentik. Segítségükkel strukturált módon írhatók le összetett kapcsolatrendszerek.

Ebben az alfejezetben megismerkedünk a reláció formális definíciójával, értelmezési tartományával, értékészletével, inverzével és kompozíciójával.

2.2. Reláció fogalma, értelmezési tartománya, értékkészlete, inverze

Elméleti összefoglaló

Definíció. Az A és a B halmazok közötti $A \times B$ Descartes-szorzat bármely ϱ részhalmazát az A és a B halmazok közötti *relációnak* nevezzük. (Az A és a B sorrendje fontos.)

Megjegyzés. Az alábbiakban néhány fontos észrevételt teszünk a relációkkal kapcsolatban.

1. Azt a tényt, hogy $(a; b) \in \varrho$, úgy is kifejezhetjük, hogy „az a elem ϱ relációjában van a b elemmel”.
2. Az $(a; b) \in \varrho$ jelölés mellett használatosak még a következő jelölések is:

$$a\varrho b, \varrho(a; b), \varrho ab.$$

3. A relációt úgy szemléltethetjük, hogy az $A \times B$ Descartes-szorzat ábráján a ϱ elemeit jelölő pontokat ábrázoljuk.
4. Amennyiben ϱ egy reláció, úgy azt, hogy az $(a; b)$ elempár benne van a relációban úgy is kifejezhetjük, hogy az a elem relációjában van a b elemmel, amit az $a\varrho b$ kapcsolattal jelölhetünk.

Példa. Legyenek adottak a következő halmazok:

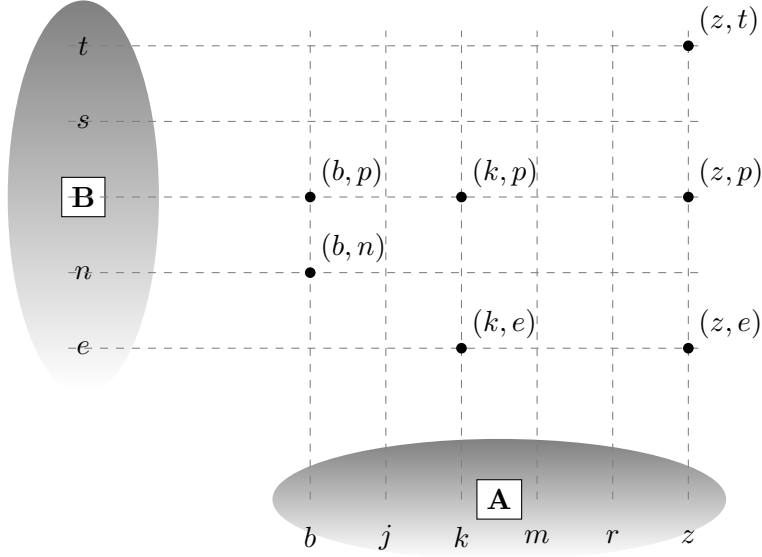
$$A = \{b; j; k; m; r; z\} \quad \text{és} \quad B = \{e; n; p; s; t\}.$$

Ekkor például a

$$\varrho = \{(b; n); (b; p); (k; e); (k; p); (z; e); (z; p); (z; t)\}$$

egy reláció az A és B halmaz között.

A reláció szemléltetéséhez az alábbi ábra ad segítséget:



Definíció. Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy reláció. A

$$D_\varrho = \{x \in A \mid \text{létezik } y \in B \text{ úgy, hogy } (x; y) \in \varrho\} \subset A$$

halmazt a ϱ reláció *értelmezési tartományának* nevezzük.

Definíció. Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy reláció. Az

$$R_\varrho = \{y \in B \mid \text{létezik } x \in A \text{ úgy, hogy } (x; y) \in \varrho\} \subset B$$

halmazt a ϱ reláció *értékkészletének* nevezzük.

Példa. Tekintsük az $A = \{-1; 0; 1\}$ és a $B = \{-1; 0\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \cdot b = 0\} \subset A \times B.$$

Először felírjuk az $A \times B$ halmazt:

$$A \times B = \{(-1; -1); (-1; 0); (0; -1); (0; 0); (1; -1); (1; 0)\}.$$

A reláció elemei:

$$\varrho = \{(-1; 0); (0; -1); (0; 0); (1; 0)\}.$$

A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elempárok első koordinátájából álló halmaz, értékkészlete a második koordinátákból álló halmaz, azaz

$$D_\varrho = \{-1; 0; 1\}, \quad R_\varrho = \{-1; 0\}.$$

Definíció. Egy $\varrho \subset A \times B$ reláció *inverzén* az

$$\varrho^{-1} = \{(b; a) \in B \times A \mid (b; a) \in \varrho\}$$

relációt értjük.

Példa. A

$$\varrho = \{(1; 2); (1; 5); (3; 4)\}$$

reláció inverze az

$$\varrho^{-1} = \{(2; 1); (5; 1); (4; 3)\}$$

reláció.

Megjegyzés. A gazdasági életben ritkán fordul elő, hogy két tényező között közvetlen, egyértelmű kapcsolat áll fenn. Sokkal jellemzőbb, hogy az egyik változó hatását egy köztes tényező közvetíti. Matematikailag ezt az egymás utáni kapcsolatot nevezzük összetett relációnak.

Definíció. Legyenek A, B, C tetszőleges halmazok, $\varrho_1 \subset A \times B$, valamint $\varrho_2 \subset B \times C$ adott relációk. A ϱ_1 és ϱ_2 relációk *kompozícióján* a

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(a; c) \mid \text{létezik } b \in B \text{ úgy, hogy } (a; b) \in \varrho_1, (b; c) \in \varrho_2\}$$

relációt értjük. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy $\varrho_2 \circ \varrho_1$ a ϱ_1 és ϱ_2 relációkból képzett összetett reláció.

Példa. Legyenek adottak a következő halmazok:

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\},$$

$$B = \{-1; 0; 1; 2\},$$

$$C = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Továbbá tekintsük a

$$\varrho_1 = \{(a; b) \in A \times B \mid |a| = b\},$$

$$\varrho_2 = \{(b; c) \in B \times C \mid b + 3 = c\}$$

relációkat! Meghatározzuk a $\varrho_2 \circ \varrho_1$ relációt.

Először megadjuk a ϱ_1 és ϱ_2 relációk elemeit:

$$\varrho_1 = \{(-2; 2); (-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 2)\},$$

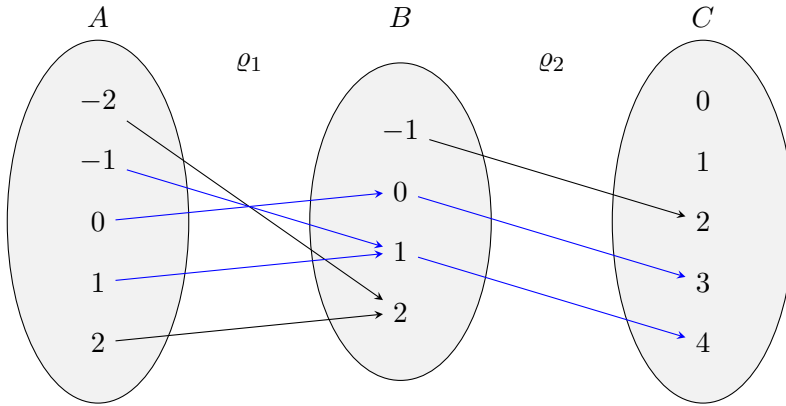
és

$$\varrho_2 = \{(-1; 2); (0; 3); (1; 4)\}.$$

Ekkor a definíció szerint azt kapjuk, hogy

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(-1; 4); (0; 3); (1; 4)\}.$$

Szemléltessük a relációt az alábbi nyíldiagrammal. A kék színű nyilak mutatják az összetett reláció elemeit.



Példa. Tekintsük a

$$\varrho_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}, \quad \varrho_2 = \{(y; z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 2y\}$$

relációkat! Ekkor $(x; z) \in \varrho_2 \circ \varrho_1$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan y , hogy

$$y = x + 1 \quad \text{és} \quad z = 2y,$$

így azt kapjuk, hogy

$$z = 2 \cdot (x + 1) = 2x + 2.$$

Tehát

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(x; z) \mid z = 2x + 2\}.$$

Látható, hogy az összetett reláció egy „függvényszerű” relációt ad meg, nevezetesen az

$$f(x) = 2x + 2$$

függvény grafikonja lenne.

Kidolgozott feladatok

35. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ és a $B = \{1; 2; 3\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, a + b = 2\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit és ábrázoljuk azokat koordinátarendszerben!
- Írjuk fel a ϱ^{-1} inverz relációt!
- Határozzuk meg a reláció és az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

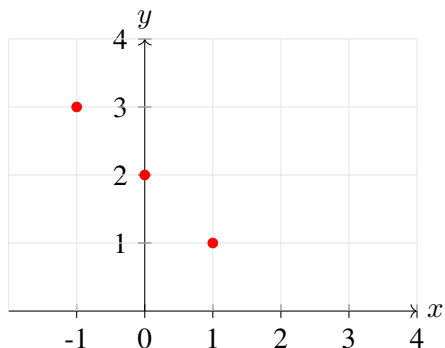
- A Descartes szorzat elemei olyan rendezett elempárok, melyek első komponense az első halmazból, második komponense a második halmazból való, így

$$A \times B = \{(-1; 1); (-1; 2); (-1; 3); (0; 1); (0; 2); (0; 3); (1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3)\}.$$

- Az ϱ reláció azokat az elempárokat tartalmazza, amelyek koordinátáinak összege 2, azaz

$$\varrho = \{(-1; 3); (0; 2); (1; 1)\}.$$

Koordinátarendszerben ábrázolva a relációt:



- c) Az inverz reláció elemeit úgy kapjuk meg, hogy a relációban szereplő elemek első és második koordinátáját „megcseréljük”, így

$$\varrho^{-1} = \{(3; -1); (2; 0); (1; 1)\}.$$

- d) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elemek első koordinátája

$$D_{\varrho} = \{-1; 0; 1\} \subset A,$$

értékkészlete a relációban szereplő elemek második koordinátája

$$R_{\varrho} = \{1; 2; 3\} \subset B.$$

Az inverz reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

$$D_{\varrho^{-1}} = \{1; 2; 3\} = R_{\varrho};$$

$$R_{\varrho^{-1}} = \{-1; 0; 1\} = D_{\varrho}.$$

36. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4\}$ és a $B = \{2; 4; 6\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, a \text{ osztója } b\text{-nek vagy } b = a + 2\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit és ábrázoljuk azokat koordinátarendszerben!
- Írjuk fel a ϱ^{-1} inverz relációt!
- Határozzuk meg a reláció és az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

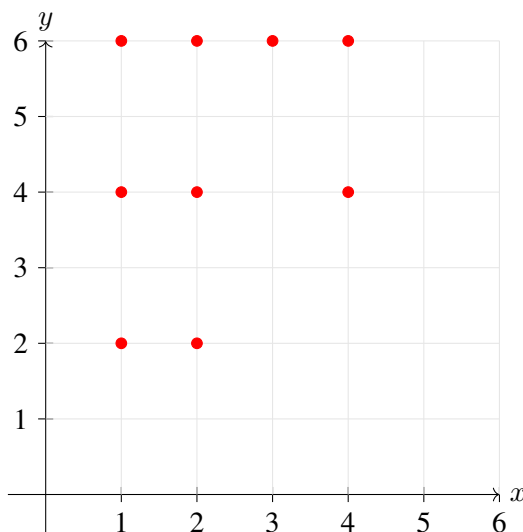
- a) A Descartes szorzat elemei olyan rendezett elem párok, melyek első komponense az első halmazból, második komponense a második halmazból való! Tehát

$$A \times B = \{(1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 2); (2; 4); (2; 6); (3; 2); (3; 4); (3; 6); (4; 2); (4; 4); (4; 6)\}.$$

- b) A ϱ reláció azokat az elem párokat tartalmazza, amelyek koordinátáira teljesül, hogy az első koordináta osztója a másodiknak vagy a második koordináta 2-vel több, mint az első:

$$\varrho = \{(1; 2); (1; 4); (1; 6); (2; 2); (2; 4); (2; 6); (3; 6); (4; 4); (4; 6)\}.$$

Koordinátarendszerben ábrázolva



- c) Az inverz reláció elemeit úgy kapjuk meg, hogy a relációban szereplő elemek első és második koordinátáját „megcseréljük”, így

$$\varrho^{-1} = \{(2; 1); (4; 1); (6; 1); (2; 2); (4; 2); (6; 2); (6; 3); (4; 4); (6; 4)\}.$$

- d) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elemek első koordinátája

$$D_{\varrho} = \{1; 2; 3; 4\} \subset A,$$

értékkészlete a relációban szereplő elemek második koordinátája

$$R_{\varrho} = \{2; 4; 6\} \subset B.$$

Az inverz reláció értelmezési tartománya és értékkészlete

$$D_{\varrho^{-1}} = \{2; 4; 6\} = R_{\varrho};$$

$$R_{\varrho^{-1}} = \{1; 2; 3; 4\} = D_{\varrho}.$$

37. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{\text{Anna}, \text{Béla}\},$$

$$B = \{\text{Debrecen}, \text{Bécs}\},$$

$$C = \{\text{Magyarország}, \text{Ausztria}\}$$

halmazokat! Tegyük fel, hogy az alábbi reláció leírja, ki melyik városban él:

$$\varrho_1 = \{(\text{Anna}; \text{Debrecen}), (\text{Béla}; \text{Bécs})\}.$$

Legyen továbbá

$$\varrho_2 = \{(\text{Debrecen}; \text{Magyarország}), (\text{Bécs}; \text{Ausztria})\},$$

amely megadja, hogy melyik város melyik országban található.

Határozzuk meg a $\varrho_2 \circ \varrho_1$ összetett relációt és értelmezzük azt szövegben!

Megoldás:

Az összetett reláció:

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(\text{Anna}; \text{Magyarország}), (\text{Béla}; \text{Ausztria})\}.$$

Azt kaptuk, hogy Anna Magyarországon, Béla Ausztriában él. A relációk láncolata így összekötötte a személyt az országgal a városokon keresztül.

38. Feladat. Legyenek adottak az

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{x, y, z\}$$

halmazok! Tekintsük az alábbi relációkat:

$$\varrho_1 = \{(1; a), (2; a), (3; b)\},$$

$$\varrho_2 = \{(a; x), (a; y), (b; z)\}.$$

Határozzuk meg az $\varrho_2 \circ \varrho_1$ összetett relációt!

Megoldás:

A ϱ_1 relációban az alábbi hozzárendelések vannak:

- $1 \mapsto a$
- $2 \mapsto a$
- $3 \mapsto b$

A ϱ_2 relációban az alábbi hozzárendelések vannak:

- $a \rightarrow x, \quad a \rightarrow y$
- $b \rightarrow z$

Mivel

- az 1-hez a ϱ_1 reláció az a elemet rendeli, míg az a -hoz a ϱ_2 reláció az x -et és y -t rendeli hozzá, így

$$(1; x), (1; y) \in \varrho_2 \circ \varrho_1$$

- a 2-höz a ϱ_1 reláció az a elemet rendeli, míg az a -hoz a ϱ_2 reláció az x -et és y -t rendeli hozzá, így

$$(2; x), (2; y) \in \varrho_2 \circ \varrho_1$$

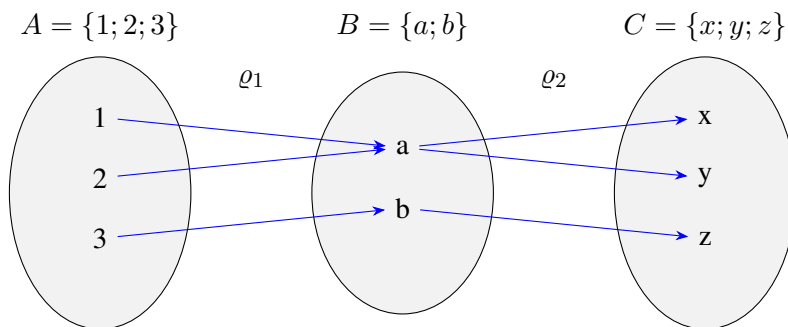
- a 3-hoz a ϱ_1 reláció a b elemet rendeli, míg a b -hez a ϱ_2 reláció a z -t rendeli hozzá, így

$$(3; z) \in \varrho_2 \circ \varrho_1,$$

ezért a $\varrho_2 \circ \varrho_1$ összetett reláció elemei

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; z)\}.$$

Szemléletesen:



2.3. Relációk tulajdonságai, ekvivalencia, rendezés

Elméleti összefoglaló

2.3.1. Definíció. Legyen adott az A halmaz. Azt mondjuk, hogy az $\varrho \subset A \times A$ reláció

- (1) *reflexív*, ha minden elem relációban van önmagával, azaz ha $x\varrho x$ minden $x \in A$ esetén;
- (2) *irreflexív*, ha minden $x \in A$ esetén $(x; x) \notin \varrho$;
- (3) *szimmetrikus*, ha $x\varrho y$ -ből következik, hogy $y\varrho x$ minden $x, y \in A$;
- (4) *antiszimmetrikus*, ha $x\varrho y$ és $y\varrho x$, akkor $x = y$;
- (5) *transzítív*, ha $x\varrho y$ és $y\varrho z$, akkor $x\varrho z$;
- (6) *teljes vagy lineáris*, ha $x\varrho y$ vagy $y\varrho x$ teljesül.

2.3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy reláció

- *ekvivalencia reláció*, ha reflexív, szimmetrikus és transzítív;
- *félig rendezési reláció*, vagy *parciális rendezés*, ha reflexív, antiszimmetrikus és transzítív;
- *rendezési reláció*, ha olyan félig rendezés, amely teljes is;
- *gyenge rendezés vagy preferencia*, ha reflexív, transzítív és teljes.

2.3.3. Példa. A valós számok halmazán az „egyenlőség” ekvivalencia reláció! Azaz, ha

$$A = \mathbb{R}, \quad \varrho : \text{„egyenlőség”},$$

akkor ϱ ekvivalencia reláció A -n, ugyanis a reláció

- reflexív, mert $a = a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén
- szimmetrikus, mert ha $a = b$, akkor $b = a$
- transzítív, mert ha $a = b$ és $b = c$, akkor $a = c$.

Kidolgozott feladatok

39. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3\}$ halmazt!

- Írjuk fel az $A \times A$ halmazt!
- Hány darab különböző relációt adhatunk meg az A halmazon?
- Adjunk meg egy olyan relációt az A -n, amely reflexív!

Megoldás:

- Az $A \times A$ Descartes-szorzat elemei olyan rendezett elempárok melyek első és második koordinátája is az A halmazból való

$$A \times A = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (3; 3)\}.$$

- Az A halmazon adott reláción az $A \times A$ halmaz tetszőleges részhalmazát értjük. Mivel $A \times A$ -nak 9 eleme van, ezért annyi relációt tudunk felírni, amennyi részhalmazát képezhetjük ennek a halmaznak, azaz $2^9 = 512$ relációt tudunk megadni A -n.

- Például a

$$\varrho = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3)\}$$

reláció reflexív, mert minden $a \in A$ esetén $(a; a) \in \varrho$. Ezen három elemhez bármilyen további elemet hozzávéve a reláció reflexív marad!

40. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a síkbeli egyenesek között a „párhuzamoság” ekvivalencia reláció!

Megoldás:

A reláció ekvivalencia reláció, ugyanis

- reflexív, mert minden egyenes párhuzamos önmagával;
- szimmetrikus, mert ha $a \parallel b$, akkor $b \parallel a$;
- transzitiv, mert ha $a \parallel b$ és $b \parallel c$, akkor $a \parallel c$.

41. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a valós számok halmazán a „ $\leq$ ” reláció rendezési reláció!

Megoldás:

A reláció rendezési reláció, ugyanis

- reflexív, mert $a \leq a$ minden a valós számra;
- antiszimmetrikus, mert ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$;

- tranzitív, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$;
- teljes, mert $a \leq b$ vagy $b \leq a$ közül legalább az egyik fennáll minden a és b valós szám esetén.

42. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy a halmazok között a „ $\subset$ ” reláció parciális rendezés, de nem rendezési reláció!

Megoldás:

A reláció parciális rendezési reláció, ugyanis

- reflexív, mert $A \subset A$ minden A halmaz esetén;
- antiszimmetrikus, mert ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$;
- tranzitív, mert ha $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor $A \subset C$;
- nem teljes, mert léteznek olyan A és B halmazok, hogy $A \subset B$, $B \subset A$ egyike sem teljesül.

43. **Feladat.** Adjunk példát olyan relációra, amely szimmetrikus és antiszimmetrikus is.

Megoldás:

A valós számok közötti $=$ reláció szimmetrikus, mert ha $a = b$, akkor $b = a$, továbbá antiszimmetrikus, mert ha $a = b$ és $b = a$, akkor a és b megegyeznek.

44. **Feladat.** Adjunk példát olyan relációra, amely nem szimmetrikus és nem is antiszimmetrikus.

Megoldás:

Az egész számok között az oszthatóság, mint reláció nem szimmetrikus, mert ha a osztója b -nek, akkor nem igaz, hogy $b|a$ minden a és b egész számra, ezt mutatja például az, ha $a = 2$ és $b = 4$.

A reláció nem antiszimmetrikus, mert ha $a|b$ és $b|a$, akkor $a = b$ valamint $a = -b$ is teljesül.

2.4. Relációk a közgazdaságban

Elméleti összefoglaló

Nevezetes relációk a közgazdaságban. Legyen A egy olyan halmaz amelynek az elemei azok a lehetőségek (javak, szolgáltatások, stb.) amelyekből a fogyasztó választhat. Ha az egyed választani akar, akkor rendelkeznie kell valamiféle olyan véleményrel az A halmaz elemeiről, amelynek alapján eldöntheti azt, hogy két elem közül melyiket értékeli többre, melyiket „preferálja” jobban. Ha például x a jobb az y -nél, akkor ezt úgy fogjuk jelölni, hogy $x \succeq y$. Induljunk ki egy tetszőleges $\succeq$ relációból. Ekkor az alábbi négy, egymást kizáró eset lehetséges:

- x és y közömbösek (indifferensek), ha $x \succeq y$ és $y \succeq x$, jele: $x \approx y$;
- x és y nem összehasonlíthatóak, ha $x \not\succeq y$ és $y \not\succeq x$, jele: $x?y$;
- x szigorúan preferált y -hoz képest, ha $x \succeq y$ és $y \not\succeq x$, jele: $x \succ y$;
- y szigorúan preferált x -hez képest, ha $y \succeq x$ és $x \not\succeq y$, jele: $y \succ x$.

Megmutatható, hogy ha $\succeq$ gyenge rendezés az A halmazon, akkor a közömbösség (indifferencia) ekvivalencia-reláció. A racionális döntést hozó személyt gyenge rendezés (preferencia) jellemez.

A preferencia három axiómája közül a reflexivitás természetes, ezért a tranzitivitás és a teljesség az, amivel empirikus szempontból foglalkozni kell. Hozható érv mindkét feltételezés mellett és ellen is.

A teljesség például azzal kritizálható, hogy túlságosan erős feltevés: nem biztos, hogy a fogyasztó bármely két fogyasztási cikket össze tud hasonlítani. A tranzitivitás mellett szól, hogy bizonyos szabályok szerint döntünk, akkor következetes döntéseket igyekszünk hozni.

Ugyanakkor a tranzitivitás ellen szól bizonyos esetekben például az emberi érzékelés. Például tegyük fel, hogy valaki a lakása fűtésénél a 19 és 20 fok valamint a 20 fok és 21 fok között nem tud különbséget tenni (közömbös) számára, de a 21 fokot már jobban preferálja, mint a 19 fokot.

Ekkor $19 \approx 20$ és $20 \approx 21$ de $21 \succ 19$, ami ellentmond a tranzitivitásnak.

Egy érdekes eset, melyet Pearce ír le. Képzeljük el, hogy X úr vendégsében vacsorázik, és a végén a gyümölcs fogásnál az első lépésben egy kis és egy nagy alma közül választhat. A kisebbiket választja, mert éhes ugyan, de jólnevelt. A második kínálásnál egy nagy körte és egy kis alma közül választhat, és a körtét

választja, mert éhes. A harmadik kínálásnál egy nagy alma és nagy körte közül az almát választja, mert azt jobban szereti. Matematikailag:

$$\begin{aligned} \text{kis alma} &\succ \text{nagy alma} \\ \text{nagy körte} &\succ \text{kis alma} \\ \text{nagy alma} &\succ \text{nagy körte,} \end{aligned}$$

amiből a tranzitivitás feltétele miatt:

$$\text{kis alma} \succ \text{nagy alma} \succ \text{nagy körte} \succ \text{kis alma}$$

adódik, ami ellentmondás. Itt különböző körülmények között a döntés különböző motivációja erősödik meg.

Összetett relációk a közgazdaságban. A gazdasági folyamatok többsége láncszerűen épül fel. Például:

- a reklámköltés hat a keresletre
- a kereslet hat az árbevételre
- az árbevétel hat a profitra.

Itt valójában három külön reláció működik egymás után, és ezek „egymás utáni végrehajtása” adja a teljes, közvetett kapcsolatot:

$$\text{reklám} \longrightarrow \text{kereslet} \longrightarrow \text{árbevétel} \longrightarrow \text{profit}.$$

A matematikai nyelvén ez összetett relációk sorozata. Ha a jelöléseink:

$$\varrho_1 = \{\text{reklám} \rightarrow \text{kereslet}\}$$

$$\varrho_2 = \{\text{kereslet} \rightarrow \text{árbevétel}\}$$

$$\varrho_3 = \{\text{árbevétel} \rightarrow \text{profit}\},$$

akkor a teljes, közvetett összefüggés az alábbi módon adható meg:

$$\varrho_3 \circ \varrho_2 \circ \varrho_1.$$

Az ilyen több lépésen keresztül érvényesülő hatások megértése a közgazdaságban alapvető, hiszen csak így lehet az ok-okozati láncokat helyesen elemezni, modellezni vagy később optimalizálni.

Kidolgozott feladatok

45. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{\text{Alfa Kft.}, \text{Béta Kft.}, \text{Gamma Kft.}\}$$

$$B = \{\text{A-termék}, \text{B-termék}, \text{C-termék}\}$$

halmazokat! Definiáljuk a ϱ relációt az alábbi módon:

$$\varrho = \{(\text{Alfa Kft.}; \text{A-termék}); (\text{Béta Kft.}; \text{A-termék}); (\text{Béta Kft.}; \text{C-termék}); (\text{Gamma Kft.}; \text{B-termék})\}.$$

Ez azt jelenti, hogy melyik vállalat melyik terméket gyártja.

Adjuk meg a reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány

$$D_{\varrho} = \{\text{Alfa Kft.}; \text{Béta Kft.}; \text{Gamma Kft.}\} = A,$$

mivel mindhárom vállalat szerepel a relációban.

Az értékkészlet

$$R_{\varrho} = \{\text{A-termék}, \text{B-termék}, \text{C-termék}\} = B,$$

mivel minden terméket legalább egy vállalat gyárt.

Az inverz reláció:

$$R_{\varrho^{-1}} = \{(\text{A-termék}; \text{Alfa Kft.}); (\text{A-termék}; \text{Béta Kft.}); (\text{C-termék}; \text{Béta Kft.}); (\text{B-termék}; \text{Gamma Kft.})\}.$$

Az inverz megmutatja, hogy mely terméket mely vállalatok gyártják, vagyis megfordítjuk a nézőpontot.

46. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{100; 120; 150\} \quad (\text{ár, Ft})$$

$$B = \{300; 250; 200\} \quad (\text{kereslet, db})$$

halmazokat! Definiáljuk a ϱ relációt az alábbi módon:

$$\varrho = \{(100; 300); (120; 250); (150; 200)\}.$$

Ez azt fejezi ki, hogy minden árhoz egy keresletérték tartozik. Adjuk meg a reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány:

$$D_\varrho = \{100; 120; 150\} = A,$$

mivel mindhárom lehetséges ár szerepel a relációban.

Az értékkészlet:

$$R_\varrho = \{300; 250; 200\} = B,$$

mivel mindegyik keresletérték szerepel a relációban.

Az inverz reláció:

$$R_{\varrho^{-1}} = \{(300; 100); (250; 120); (200; 150)\}.$$

Ez azt mutatja, hogy mely kereslethez milyen ár tartozik. Például 300 darab kereslet akkor lép fel, ha az ár 100 Ft.

47. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{\text{Kata; Máté; Zsófi}\} \quad (\text{dolgozók}),$$

$$B = \{\text{Pénzügy; Marketing}\} \quad (\text{részlegek}),$$

$$C = \{\text{Farkas; Tóth}\} \quad (\text{vezetők})$$

halmazokat! Definíáljuk a ϱ_1 és ϱ_2 relációkat az alábbiak szerint:

$$\varrho_1 = \{(\text{Kata; Pénzügy}); (\text{Máté; Pénzügy}); (\text{Zsófi; Marketing})\},$$

amely megmutatja, hogy ki melyik részlegen dolgozik;

$$\varrho_2 = \{(\text{Pénzügy; Farkas}), (\text{Marketing; Tóth})\},$$

amely azt jelzi, ki melyik részleg vezetője. Határozzuk meg a $\varrho_2 \circ \varrho_1$ összetett relációt és értelmezzük azt szövegben!

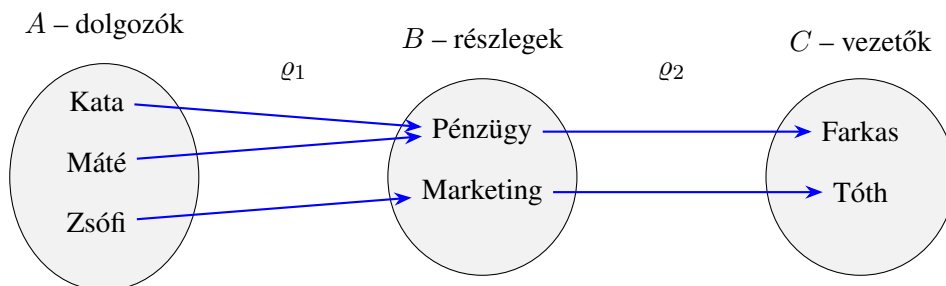
Megoldás:

Az összetett reláció definíciója alapján

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(\text{Kata; Farkas}); (\text{Máté; Farkas}); (\text{Zsófi; Tóth})\}.$$

Ez az összetett reláció tehát megmutatja, hogy ki kinek a főnöke. Azt kaptuk, hogy Kata és Máté Farkasnak, Zsófi pedig Tóthnak a beosztottja.

A kapcsolatokat az alábbi ábrával is szemléltethetjük:



2.5. Összefoglaló feladatok

48. **Feladat.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ és a $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, a \cdot b \leq 10\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit!
- Ábrázoljuk a reláció elemeit koordináta-rendszerben!
- Ábrázoljuk a relációt nyíldiagrammon!
- Adjuk meg a reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Határozzuk meg az inverz relációt!
- Adjuk meg az inverz reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

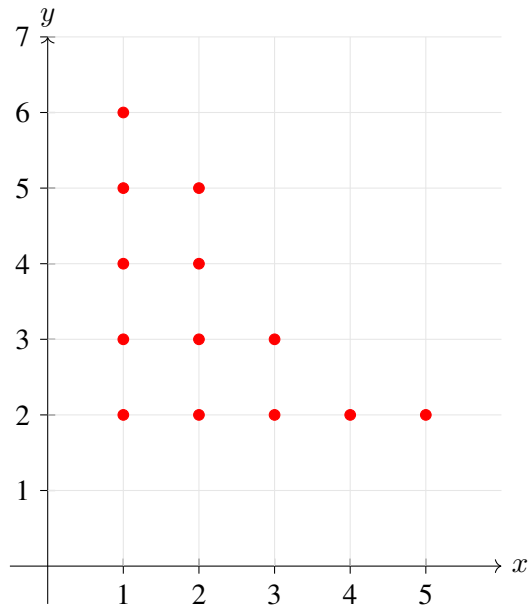
- A Descartes-szorzat elemei olyan rendezett elempárok, melyek első komponense az első halmazból, második komponense a második halmazból való. Tehát

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6); \\ & (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6); \\ & (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6); \\ & (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5); (4; 6); \\ & (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6) \}. \end{aligned}$$

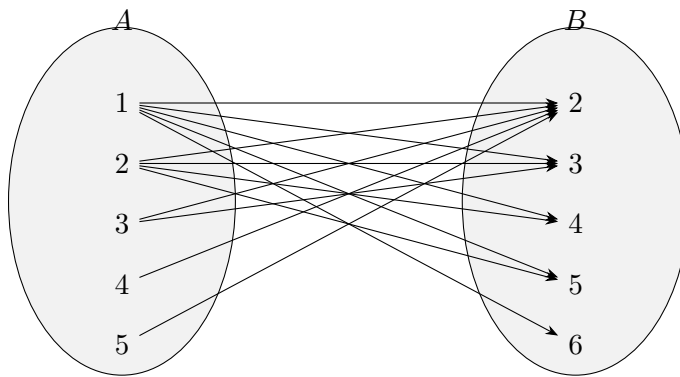
- A ϱ reláció azokat az elempárokat tartalmazza, amelyekre a koordináták szorzata nem nagyobb 10-nél, azaz $a \cdot b \leq 10$, így

$$\begin{aligned} \varrho = \{ & (1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); (1; 6); \\ & (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 2); (3; 3); (4; 2); (5; 2) \}. \end{aligned}$$

- Koordináta-rendszerben ábrázolva:



d) A reláció nyíldiagrammon ábrázolva:



e) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elemek első koordinátáinak halmaza:

$$D_{\rho} = \{1; 2; 3; 4; 5\} = A.$$

Az értékkészlet a relációban szereplő második koordináták halmaza:

$$R_{\rho} = \{2; 3; 4; 5; 6\} = B.$$

- f) Az inverz reláció elemeit úgy kapjuk, hogy a relációban szereplő elempárok első és második koordinátáját felcseréljük, azaz

$$\varrho^{-1} = \{(2; 1); (3; 1); (4; 1); (5; 1); (6; 1); (2; 2); (3; 2); (4; 2); (5; 2); (2; 3); (3; 3); (2; 4); (2; 5)\}.$$

- g) Az inverz reláció értelmezési tartománya:

$$D_{\varrho^{-1}} = \{2; 3; 4; 5; 6\} = R_{\varrho},$$

értékkészlete pedig:

$$R_{\varrho^{-1}} = \{1; 2; 3; 4; 5\} = D_{\varrho}.$$

Vagyis az inverz relációban a korábbi értékkészlet és értelmezési tartomány „szerepet cserél”.

49. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \{1; 2; 3\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$C = \{2; 3; 4; 5\}$$

halmazokat. Definiáljuk a következő relációkat:

$$\varrho_1 = \{(a; b) \mid a \in A, b \in B, b \leq a + 2\}$$

$$\varrho_2 = \{(b; c) \mid b \in B, c \in C, c = b + 1\}.$$

- Adjuk meg az $A \times B$ és a $B \times C$ halmazt!
- Határozzuk meg a ϱ_1 és ϱ_2 relációk elemeit!
- Ábrázoljuk a ϱ_1 reláció elemeit koordinátarendszerben!
- Ábrázoljuk a relációkat nyíldiagrammon a három halmaz között!
- Határozzuk meg az $\varrho_2 \circ \varrho_1$ összetett relációt!
- Adjuk meg a ϱ_1 , ϱ_2 és $\varrho_2 \circ \varrho_1$ relációk értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Határozzuk meg az $(\varrho_2 \circ \varrho_1)^{-1}$ inverz relációt, valamint annak értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

a) Az $A \times B$ halmaz elemei:

$$A \times B = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); \\ (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); \\ (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4)\}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$B \times C = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (1; 5); \\ (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); \\ (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); \\ (4; 2); (4; 3); (4; 4); (4; 5)\}.$$

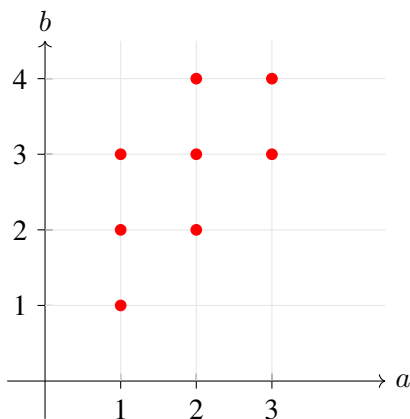
b) A ϱ_1 reláció azokat az $(a; b)$ elempárokat tartalmazza, amelyekre $b \leq a + 2$ teljesül, így

$$\varrho_1 = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (3; 3); (3; 4)\}.$$

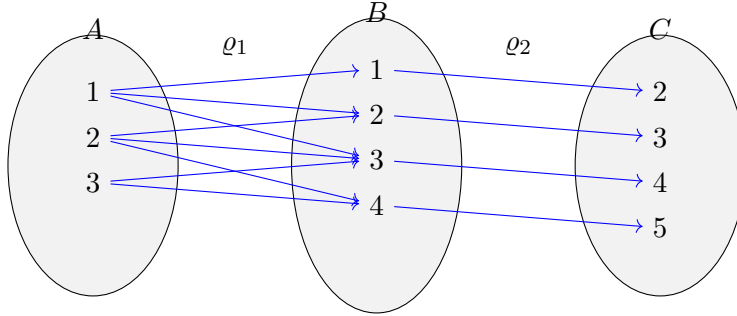
A ϱ_2 reláció azokat a $(b; c)$ elempárokat tartalmazza, amelyekre $c = b + 1$ teljesül, tehát

$$\varrho_2 = \{(1; 2); (2; 3); (3; 4); (4; 5)\}.$$

c) A ϱ_1 reláció koordinátarendszerben (vízszintesen $a \in A$, függőlegesen $b \in B$):



d) Nyíldiagram a három halmaz között:



e) Mivel

- $a = 1$ -hez a ϱ_1 reláció a $b = 1, 2, 3$ elemeket rendeli és ezekhez a ϱ_2 reláció a $c = 2, 3, 4$ elemeket rendeli, ezért az összetett relációban benne lesznek $(1; 2); (1; 3); (1; 4)$ elemek;
- $a = 2$ -höz a ϱ_1 reláció a $b = 2, 3, 4$ elemeket rendeli, és ezekhez a ϱ_2 reláció a $c = 3, 4, 5$ elemeket rendeli, ezért az összetett relációban benne lesznek a $(2; 3), (2; 4), (2; 5)$ elemek;
- $a = 3$ -hoz a ϱ_1 reláció a $b = 3, 4$ elemeket rendeli, amikhez a ϱ_2 reláció a $c = 4, 5$ elemeket rendeli, így az összetett relációban benne lesznek a $(3; 4), (3; 5)$ elemek.

Tehát

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (3; 4); (3; 5)\}.$$

f) Az értelmezési tartományok és értékkészletek:

$$D_{\varrho_1} = \{1; 2; 3\}$$

$$R_{\varrho_1} = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$D_{\varrho_2} = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$R_{\varrho_2} = \{2; 3; 4; 5\}$$

$$D_{\varrho_2 \circ \varrho_1} = \{1; 2; 3\}$$

$$R_{\varrho_2 \circ \varrho_1} = \{2; 3; 4; 5\}.$$

g) Az $(\varrho_2 \circ \varrho_1)^{-1}$ inverz reláció elemeit úgy kapjuk, hogy az $\varrho_2 \circ \varrho_1$ reláció elemeiben felcseréljük az első és második koordinátát, azaz

$$(\varrho_2 \circ \varrho_1)^{-1} = \{(2; 1); (3; 1); (4; 1); (3; 2); (4; 2); (5; 2); (4; 3); (5; 3)\}.$$

Ennek értelmezési tartománya:

$$D_{(\varrho_2 \circ \varrho_1)^{-1}} = \{2; 3; 4; 5\} = R_{\varrho_2 \circ \varrho_1},$$

értékkészlete pedig:

$$R_{(\varrho_2 \circ \varrho_1)^{-1}} = \{1; 2; 3\} = D_{\varrho_2 \circ \varrho_1}.$$

3. fejezet

Függvénytani alapfogalmak és gazdasági alkalmazásaik

3.1. Függvény definíciója, helyettesítési értéke

Elméleti összefoglaló

A függvények kiemelt szerepet töltenek be a gazdasági gondolkodásban, mert segítségükkel világosan és egyértelműen leírhatók a különböző gazdasági tényezők közötti kapcsolatok.

A gazdasági folyamatok lényege mindig valamely változó hatásának vizsgálata egy másikra, így a függvények a gazdasági összefüggések matematikai nyelvét adják.

A függvényfogalom lehetővé teszi, hogy a változások közötti viszonyt pontosan, számszerűen és következetesen jelenítsük meg, ezáltal alapot teremtsünk a gazdasági jelenségek értelmezéséhez és elemzéséhez.

Különösen fontos szerepet kapnak a függvények a döntéshozatalban és az optimalizálásban, hiszen a költségek, bevételek, profit, árképzés és egyéb gazdasági tényezők vizsgálata szinte kivétel nélkül függvényekkel írható le.

A modellezés és előrejelzés szintén elképzelhetetlen a függvények alkalmazása nélkül, mert ezek teszik lehetővé, hogy a gazdasági rendszerek működését strukturáltan, összefüggéseiben lássuk. A későbbi matematikai eszközök – így a deriváltak, a határfogalmak vagy az összetett függvények – mind erre az alapra épülnek, ezért a függvények ismerete és helyes értelmezése nélkülözhetetlen a gazdasági elemzésekben és a gyakorlati gazdálkodási feladatok megoldásában.

A gazdasági elemzések középpontjában rendszerint két változó kapcsolata áll. Vizsgálhatjuk például, hogyan függ az értékesített mennyiség az ártól, hogyan alakul a költség a kibocsátás függvényében, vagy miként változik a bevétel az eladott termékek számával.

Ezek az összefüggések matematikailag függvényekkel írhatók le. A függvény fogalma lehetővé teszi, hogy egy változó értékéhez egyértelműen hozzárendeljünk egy másik változót, és így a gazdasági kapcsolatokat pontosan és következetesen modellezzük.

Definíció. Legyenek A és B halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt *függvénynek* nevezzük, ha az A halmaz minden eleme pontosan egy B halmazbeli elemmel áll relációban.

Megjegyzés. Ha az f reláció függvény, akkor az $f \subset A \times B$ jelölés helyett az $f: A \rightarrow B$ jelölést használjuk. Ha $(x; y) \in f$, akkor azt úgy jelöljük, hogy

$f(x) = y$, és úgy olvassuk ki, hogy az f függvény x helyen felvett helyettesítési értéke y , vagy hogy az f függvény az x elemhez az y elemet rendeli hozzá.

Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *grafikonjának* vagy *gráfjának* nevezzük az

$$\text{graf}(f) = \{(x; y) \mid x \in D\}$$

halmazt.

Kidolgozott feladatok

50. Feladat. Tekintsük az

$$\varrho = \{(1; 2); (2; 3); (3; 4); (3; 5)\}$$

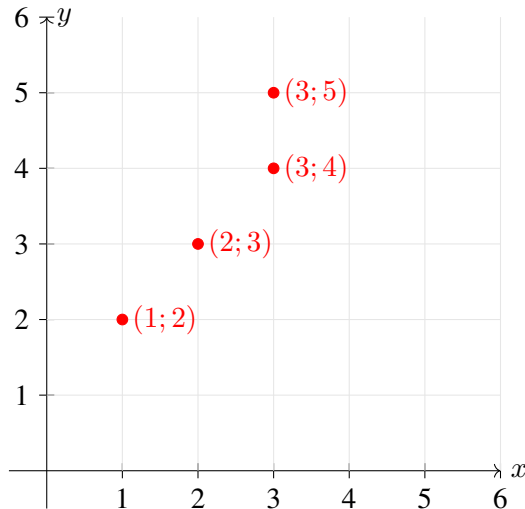
relációt! Döntsük el, hogy függvény-e?

Megoldás:

Egy $\varrho \subset A \times B$ reláció akkor függvény, ha az A halmaz minden eleméhez legfeljebb egy B halmazbeli elem van hozzárendelve. A ϱ relációban

$$1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 4, \quad 3 \mapsto 5.$$

Látható, hogy 3-hoz két különböző érték is hozzá van rendelve (4 és 5), emiatt nem függvény az ϱ reláció nem függvény.



Ha egy reláció függvény lenne, akkor „egymás fölött nem szerepelhetne több pont”. Jelen esetben a $(3; 4)$ és $(3; 5)$ pontok „egymás fölött vannak”, így a reláció nem függvény.

51. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad B = \{1; 2; 3; 4\}$$

halmazokat! Definíáljunk a $\varrho \subset A \times B$ relációt úgy, hogy

$$\varrho = \{(a; b) \in A \times B \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}.$$

- a) Adjuk meg az $A \times B$ halmazt!
- b) Határozzuk meg a ϱ reláció elemeit!
- c) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a ϱ relációt!
- d) Döntsük el, hogy a ϱ reláció függvény-e?

Megoldás:

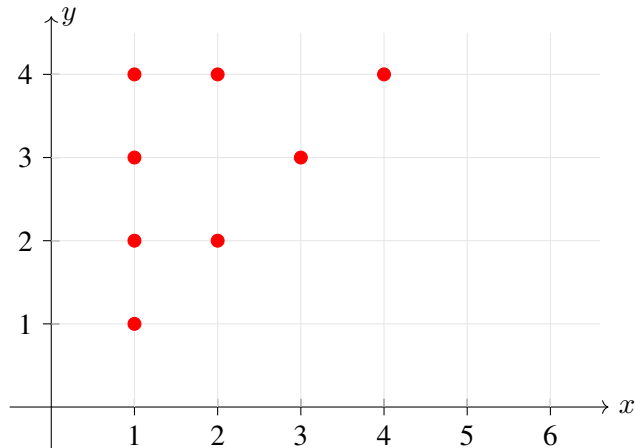
- a) Az $A \times B$ halmaz:

$$A \times B = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (4; 1); (4; 2); (4; 3); (4; 4); (5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (6; 1); (6; 2); (6; 3); (6; 4)\}.$$

- b) A ϱ reláció elemei:

$$\varrho = \{(1; 1); (1; 2); (2; 2); (1; 3); (3; 3); (1; 4); (2; 4); (4; 4)\}.$$

- c) A reláció ábrázolása:



- d) Például az $a = 1$ elemhez több b is tartozik, hiszen $1 \mid 1, 2, 3, 4$, ezért a reláció nem függvény. Ezt jól szemlélteti az előbbi ábra is.

52. Feladat. Tekintsük az

$$f(x) = 2x - x^2$$

függvényt! Számoljuk ki az

$$f(a + 3) - f(a - 3)$$

értéket, ha $a \in \mathbb{R}$ paraméter.

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(a+3) &= 2 \cdot (a+3) - (a+3)^2 = 2a+6 - (a^2+6a+9) = \\ &= 2a+6 - a^2 - 6a - 9 = -a^2 - 4a - 3, \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(a-3) &= 2 \cdot (a-3) - (a-3)^2 = 2a-6 - (a^2-6a+9) = \\ &= 2a-6 - a^2 + 6a - 9 = -a^2 + 8a - 15, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(a+3) - f(a-3) &= -a^2 - 4a - 3 - (-a^2 + 8a - 15) = \\ &= -a^2 - 4a - 3 + a^2 - 8a + 15 = -12a + 12. \end{aligned}$$

53. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-1}{x-3}$ függvényt!

- Adjuk meg az f függvény helyettesítési értékét az $x = 4$ helyen!
- Adjuk meg az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2.
- Adjuk meg azokat az x valós számokat, amelyekre a függvényérték negatív!

Megoldás:

- a) Az
- f
- függvény helyettesítési értékét az
- $x = 4$
- helyen:

$$f(4) = \frac{-1}{4-3} = -1.$$

- b) Az értelmezési tartománynak azt az elemét, amelyre a függvényérték 2 az
- $f(x) = 2$
- egyenlet megoldása adja:

$$\frac{-1}{x-3} = 2 \quad \Rightarrow \quad -1 = 2x - 6,$$

azaz $x = 2,5$.

- c) Azokat az
- x
- valós számokat keressük, amelyre
- $f(x) < 0$
- , vagyis a

$$\frac{-1}{x-3} < 0$$

egyenlőtlenség megoldását. Mivel a számláló negatív szám, ezért a tört csak úgy lehet negatív, ha a nevező pozitív, azaz ha $x - 3 > 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $x > 3$, így a keresett valós számok a $]3; \infty[$ intervallum elemei.

54. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 - x + 1$ függvényt! Mutassuk meg, hogy $f(x+1) = f(-x)$ teljesül minden x valós szám esetén!

Megoldás:

Kiszámolva az $f(x+1)$ értéket egyrészt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 - (x+1) + 1 = x^2 + 2x + 1 - x - 1 + 1 = \\ &= x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Másrészt

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 1 = x^2 + x + 1,$$

így $f(x+1) = f(-x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

55. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 9 - x^2$ függvényt! Adjuk meg az

$$f(b+3) - f(b-3)$$

kifejezés értéket tovább már nem egyszerűsíthető alakban, ha $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} f(b+3) &= 9 - (b+3)^2 = 9 - (b^2 + 6b + 9) = \\ &= 9 - b^2 - 6b - 9 = -b^2 - 6b = -b \cdot (b+6), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(b-3) &= 9 - (b-3)^2 = 9 - (b^2 - 6b + 9) = \\ &= 9 - b^2 + 6b - 9 = -b^2 + 6b = -b \cdot (b-6), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} f(b+3) - f(b-3) &= -b^2 - 6b - (-b^2 + 6b) = \\ &= -b^2 - 6b + b^2 - 6b = -12b. \end{aligned}$$

56. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 1 - x^2$ függvényt! Határozzuk meg az

$$\frac{f(b+1)}{f(b-1)}$$

kifejezés értékét tovább már nem egyszerűsíthető alakban, ha $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned}f(b+1) &= 1 - (b+1)^2 = 1 - (b^2 + 2b + 1) = \\&= 1 - b^2 - 2b - 1 = -b^2 - 2b = -b \cdot (b+2),\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}f(b-1) &= 1 - (b-1)^2 = 1 - (b^2 - 2b + 1) = \\&= 1 - b^2 + 2b - 1 = -b^2 + 2b = -b \cdot (b-2),\end{aligned}$$

ezért

$$\frac{b+1}{b-1} = \frac{-b \cdot (b+2)}{-b \cdot (b-2)} = \frac{b+2}{b-2}.$$

3.2. Függvények tulajdonságai

Elméleti összefoglaló

Motiváció. Egy gazdasági függvény értelmezése során nemcsak az számít, hogy hogyan számoljuk ki az értékét, hanem az is, hogy milyen tartományban értelmezett, van-e szélsőértéke, hogyan változik. Ezek a tulajdonságok alapvető szerepet játszanak például a költség- vagy bevételi függvények elemzésében.

Megjegyzés. Mivel minden függvény egy reláció, ezért a relációknál tárgyalt értelmezési tartomány és értékkészlet fogalom továbbra is ugyanúgy érvényben marad, ahogyan azt a relációnál tárgyaltuk. Azonban azért, hogy gyakoroljuk a függvények során bevezetett jelöléseket, bevezetjük külön a függvények nyelvén is az értelmezési tartomány és értékkészlet fogalmát.

Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *értelmezési tartományán* a

$$D_f = \{x \in D \mid y = f(x)\}$$

halmazt értjük.

Példa. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény esetén a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmaza, amelyen a függvény értelmezve van: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Példa. Tegyük fel, hogy n tetszőleges természetes szám! Az

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

függvény értelmezési tartománya: $x \in [0; \infty[$.

Példa. Tegyük fel, hogy a tetszőleges, 1-től különböző pozitív valós szám! Az $f(x) = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[$.

Példa. Tegyük fel, hogy a tetszőleges pozitív valós szám!

Az $f(x) = \log_x a$ függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[\setminus \{1\}$.

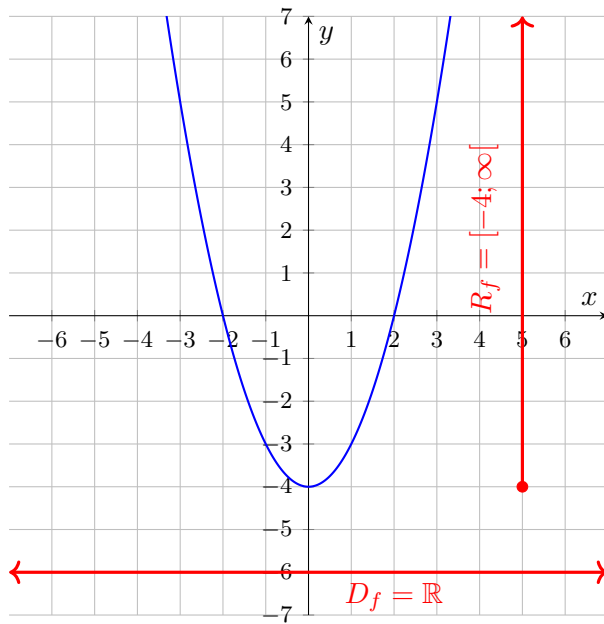
Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *értékkészletén* az

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$$

halmazt értjük.

Megjegyzés. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékkészlete az $f(x)$ függvényértékek halmaza.

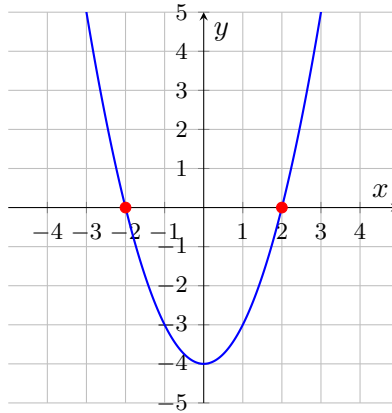
Példa. Az alábbi ábra szemlélteti az $f(x) = x^2 - 4$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét:



Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen *zérushelye* van, ha $f(x_0) = 0$.

Megjegyzés. A zérushely meghatározása egy egyenlet megoldását jelenti. A függvény hozzárendelési szabályát egyenlővé kell tenni nullával és meg kell oldani a kapott egyenletet!

Példa. Az $f(x) = x^2 - 4$ függvény zérushelye $x = \pm 2$. A zérushelyet az alábbi ábra szemlélteti:



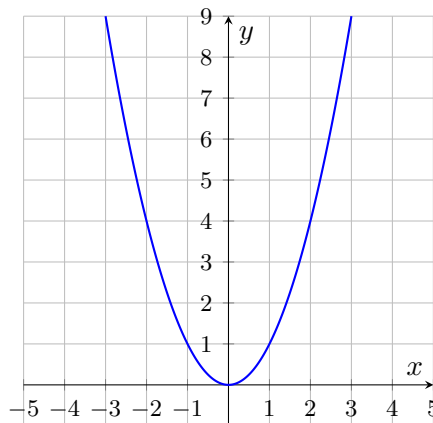
Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}$ az origóra szimmetrikus halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ teljesül minden $x \in D$ esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in D$ esetén.

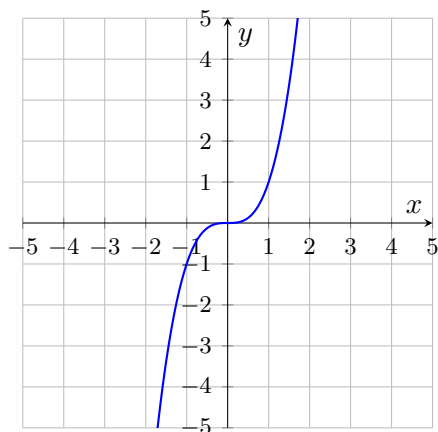
Megjegyzés. Ha egy függvény páros, akkor a grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

Ha egy függvény páratlan, akkor a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény páros.



Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény páratlan.



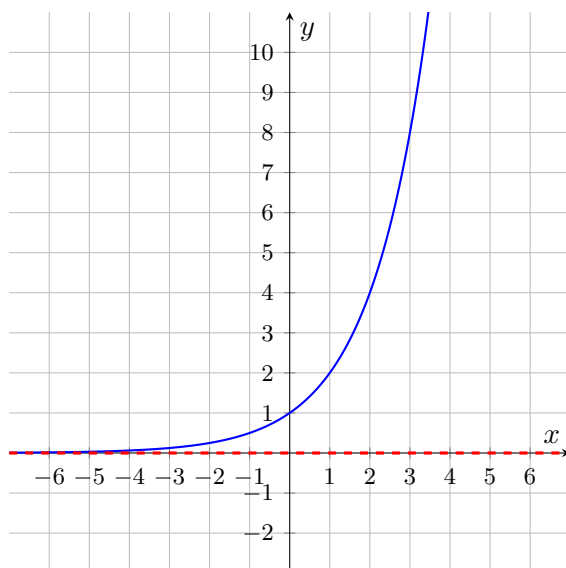
Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *alulról korlátos*, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in D$ esetén;
- *felülről korlátos*, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D$ esetén;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

Definíció. Ha az f függvény alulról korlátos, akkor a legnagyobb alsó korlátot a függvény *pontos alsó korlátjának* vagy más szóval *infimumának* nevezzük.

Definíció. Ha az f függvény felülről korlátos, akkor a legkisebb felső korlátot a függvény *pontos felső korlátjának* vagy más szóval *szuprémumának* nevezzük.

Példa. Az $f(x) = 2^x$ függvény alulról korlátos, mert $f(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, a függvény infimuma 0.



Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *maximuma* van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legkisebb eleme;
- *szélsőértéke* van, ha minimuma vagy maximuma van az x_0 helyen.

Definíció. Az x_0 valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén az

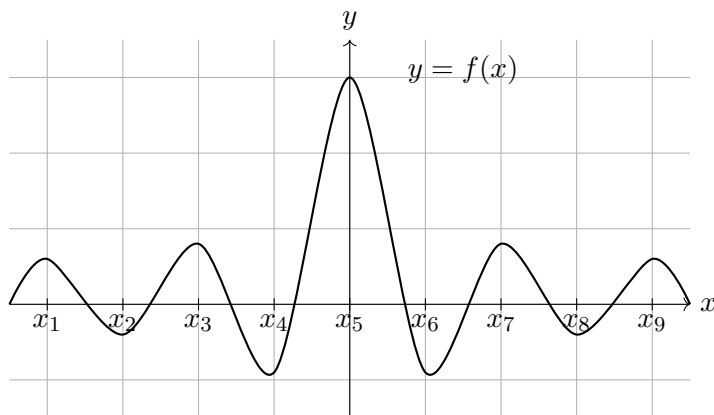
$$]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$$

intervallumot értjük.

Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *lokális (helyi) maximuma* van, ha létezik olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, amelyre $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f -nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték;
- *lokális (helyi) minimuma* van, ha létezik $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f -nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legkisebb függvényérték;
- *lokális szélsőértéke* van, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az x_0 helyen.

Példa. Tekintsük az alábbi, grafikonjával értelmezett függvényt:

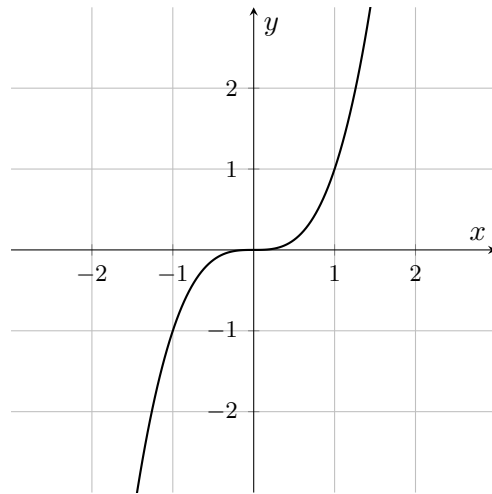


Ezen függvény esetén x_1, x_3, x_7, x_9 lokális maximumhelyek, x_5 globális maximumhely. Az x_2, x_8 lokális minimumhelyek, x_4, x_6 globális minimumhelyek.

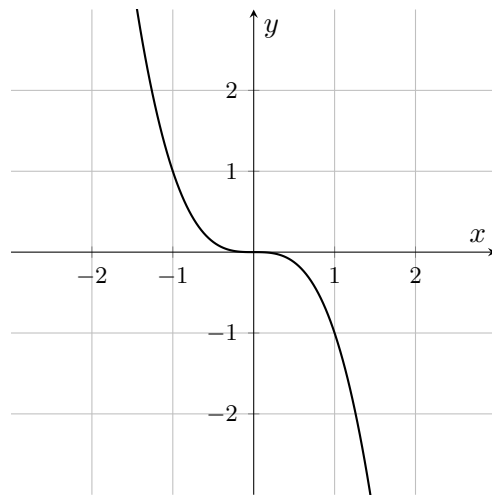
Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

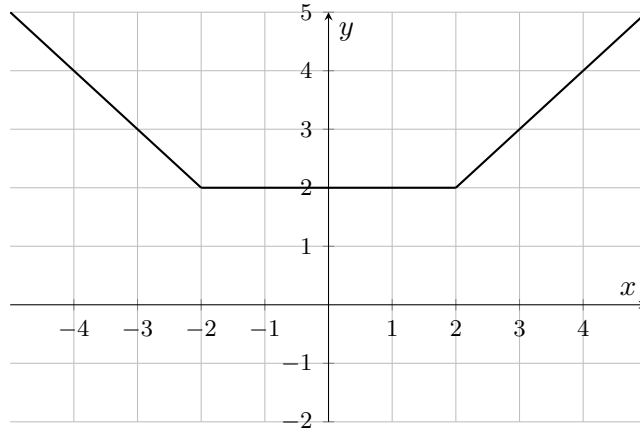
Példa. Az $f(x) = x^3$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton növekvő.



Példa. Az $f(x) = -x^3$ függvény értelmezési tartományának minden pontjában szigorúan monoton növekvő.



Példa. Tekintsük az alábbi, grafikonjával értelmezett függvényt!



A függvény a $]-\infty; -2]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[2; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[-2; 2]$ intervallumon monotonon növekvő és monoton csökkenő is egyidejűleg, azaz konstans.

Megjegyzés. Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton növekvő az $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ intervallumon, akkor f -nek az x_0 helyen lokális minimuma van.

Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton csökkenő az $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ intervallumon, akkor f -nek az x_0 helyen lokális maximuma van.

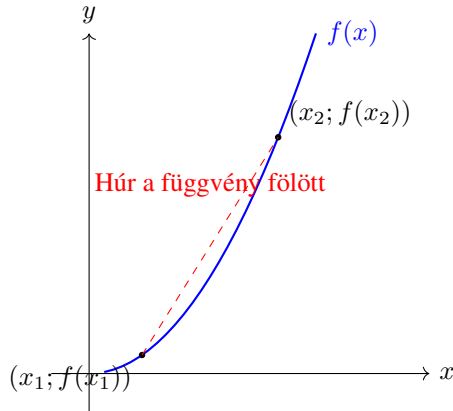
Definíció. Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $(u; f(u))$ és $(v; f(v))$ pontokat összekötő szakasz az f függvény felett halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v) \leq t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v).$$

A $t \cdot u + (1 - t) \cdot v$, ahol $t \in [0; 1]$, a számegyenesen az u és v pontokat összekötő szakaszt jelenti.

Az $f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v)$ az előbbi szakaszon felvett függvényértékek halmaza.

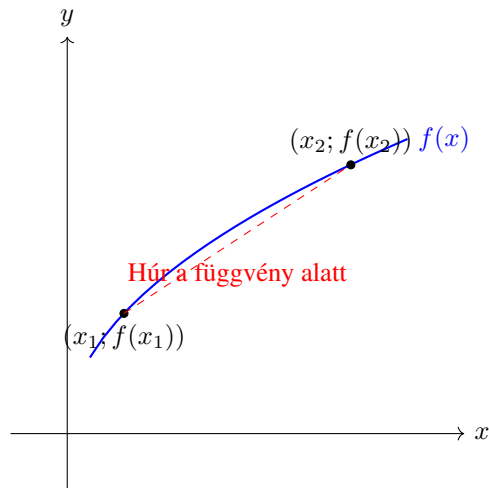
A $t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v)$ az $(u; f(u))$ és $(v; f(v))$ pontokat összekötő szakasz.



Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény konvex.

Definíció. Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konkáv*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $(u; f(u))$ és $(v; f(v))$ pontokat összekötő szakasz az f függvény alatt halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f(t \cdot u + (1 - t) \cdot v) \geq t \cdot f(u) + (1 - t) \cdot f(v).$$



Példa. Az $f(x) = -x^2$ függvény konkáv.

Definíció. Legyen I nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen *inflexiós helye* van, ha x_0 -ban megváltozik a konvexitása, azaz létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f konkáv

és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konvex, vagy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f konvex és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konkáv.

Definíció. Ha az f függvénynek az x_0 inflexiós helye, akkor azt mondjuk, hogy az $(x_0; f(x_0))$ *inflexiós pont*.

Példa. Az $f(x) = \sin x$ függvénynek a $(0; 0)$ inflexiós pontja.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *periodikus*, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + p) = f(x).$$

Példa. Az $f(x) = \sin x$ függvény periodikus.

Definíció. Ha az f függvény periodikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény *periódusának* nevezzük.

Példa. Az $f(x) = \sin x$ függvény periódusa 2π .

Kidolgozott feladatok

57. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{6 - 2x}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$6 - 2x \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \leq 3$, így az értelmezési tartomány a $] - \infty; 3]$ intervallum.

58. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt[4]{2x + 4}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$2x + 4 \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \geq -2$, így az értelmezési tartomány a $[-2; \infty[$ intervallum.

59. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \log_2(x^2 - 7x + 10)$ függvény értelmezve van!

Megoldás:

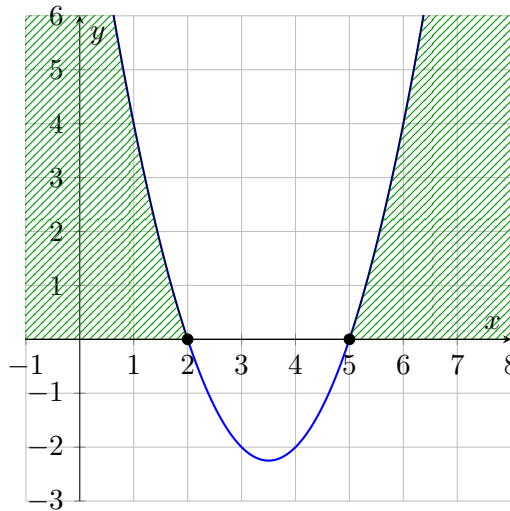
A logaritmusfüggvény csak akkor értelmezett, ha az argumentuma pozitív, azaz

$$x^2 - 7x + 10 > 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 7x + 10$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$. A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely felett van, azaz

$$D_f: x \in]-\infty; 2[\cup]5; \infty[.$$

60. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

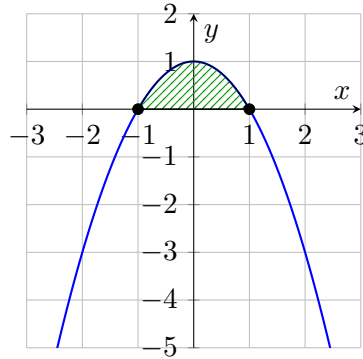
$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a $1 - x^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget grafikusán oldjuk meg. Ehhez első lépésben meghatározzuk az $1 - x^2$ függvény zérushelyeit, azaz meg kell oldanunk az $1 - x^2 = 0$

egyenletet, amire azt kapjuk, hogy $x^2 = 1$, azaz $x = \pm 1$. Ezután felvázoljuk az $1 - x^2$ függvény grafikonját:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása és így egyben az f függvény értelmezési tartománya:

$$D_f: x \in [-1; 1].$$

61. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$$

függvény értelmezve van.

Megoldás:

A törtfüggvény akkor értelmezett, ha a nevezője nem nulla, azaz

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 \neq 0$$

Csoportosítással alakítsuk szorzattá a nevezőt. Ehhez először a tagokat írjuk fel

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^3 + x^2) + (2x + 2) = x^2 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 1)$$

módon. Ezután az $x + 1$ tagot kiemelve azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x + 1) = (x^2 + 2) \cdot (x + 1).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2) \cdot (x + 1).$$

Ez alapján a nevező akkor lesz nulla, ha valamelyik tényező nulla, azaz

- $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$, ami nem ad valós gyököt

$$\bullet \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Tehát a nevező csak akkor lesz nulla, ha $x = -1$, így a függvény értelmezési tartománya

$$D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

62. Feladat. Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \lg \left(\frac{1-x}{x+4} \right)$$

függvény értelmezhető!

Megoldás:

A logaritmus mögött csak pozitív szám lehet, így teljesülnie kell, hogy

$$\frac{1-x}{x+4} > 0.$$

Az egyenlőtlenséget két esetre bontva oldjuk meg.

Egy tört csak úgy lehet pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

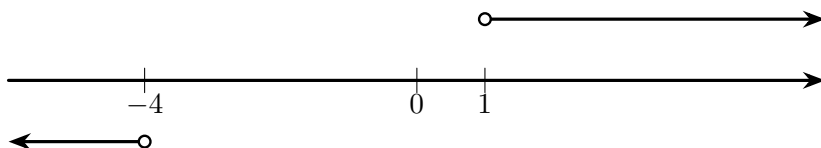
I. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis amikor a számláló és a nevező negatív. Ekkor

$$1-x < 0 \quad \text{és} \quad x+4 < 0,$$

így

$$x > 1 \quad \text{és} \quad x < -4.$$

Számegyesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a két egyenlőtlenség egyszerre nem teljesülhet, tehát az első esetben nem kapunk megoldást.

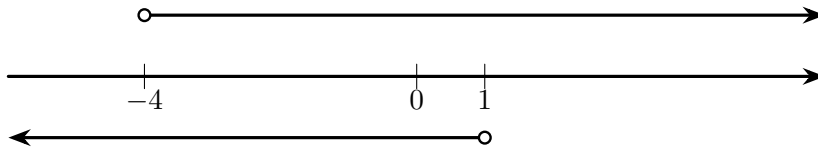
II. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis amikor a számláló és a nevező pozitív. Ekkor

$$-x+1 > 0 \quad \text{és} \quad x+4 > 0,$$

így

$$x < 1 \quad \text{és} \quad x > -4.$$

Számegyesen ábrázolva:



A közös rész: $] - 4; 1[$, így az értelmezési tartomány:

$$D_f: x \in] - 4; 1[.$$

63. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\sqrt{x} \geq 0$, így

$$\sqrt{x-2} \geq 0.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x-2} + 3 \geq 3.$$

Tehát az f függvény értékkészlete:

$$R_f: y \in [3; \infty[.$$

64. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = -3 \cdot \sqrt{x+5} + 3$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

Tudjuk, hogy $\sqrt{x} \geq 0$, így

$$\sqrt{x+5} \geq 0.$$

Mindkét oldalt -3 -mal szorozva

$$-3 \cdot \sqrt{x+5} \leq 0$$

adódik. Mindkét oldalhoz 3 -at hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$-3 \cdot \sqrt{x+5} + 3 \leq 3.$$

Tehát az f függvény értékkészlete:

$$R_f: y \in] - \infty; 3].$$

65. Feladat. Adjuk meg az $f(x) = 2 \cdot |x-1| + 3$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

Tudjuk, hogy $|x| \geq 0$, így

$$|x-1| \geq 0.$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva

$$2 \cdot |x - 1| \geq 0$$

adódik. Mindkét oldalhoz 3-at hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot |x - 1| + 3 \geq 3.$$

Tehát az f függvény értékkészlete:

$$R_f: y \in [3; \infty[.$$

66. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk az $x^2 - 4x = 0$ egyenletet. Ha x -et kiemeljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így $x = 0$, illetve $x - 4 = 0$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $x = 4$.

67. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x} - 3$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a $\sqrt{x} - 3 = 0$ egyenletet.

Hozzáadva a 3-at mindkét oldalhoz azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x} = 3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve $x = 9$ adódik.

Mivel $\sqrt{x}$ csak $x \geq 0$ esetén értelmezett, ezért a megoldás $x = 9$.

68. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = \frac{2x - 5}{x + 1}$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a $\frac{2x - 5}{x + 1} = 0$ egyenletet.

Egy tört akkor nulla, ha a számlálója nulla és a nevezője nem nulla:

$$2x - 5 = 0.$$

Megoldva:

$$2x = 5 \implies x = \frac{5}{2}.$$

69. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \log_2(x-1) - 3$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a $\log_2(x-1) - 3 = 0$ egyenletet.

Hozzáadva mindkét oldalhoz a 3-at azt kapjuk, hogy

$$\log_2(x-1) = 3.$$

A logaritmus definíciója szerint ez ekvivalens azzal, hogy

$$x-1 = 2^3,$$

így

$$x-1 = 8 \implies x = 9.$$

A függvény zérushelye: $x = 9$.

70. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szerint az $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = f(x),$$

így a függvény páros.

71. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szerint az $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{-x} = -x^3 - \frac{1}{x} = -f(x),$$

így a függvény páratlan.

72. **Feladat.** Vizsgáljuk meg paritás szerint az $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x),$$

így a függvény páros.

3.3. Függvénytranszformációk

Elméleti összefoglaló

Motiváció. Egy gazdasági modell ritkán marad változatlan. Ha emelkedik az áfa, nőnek a fix költségek, támogatást vezetnek be, vagy változik az alapár, akkor a teljes gazdasági összefüggés „elmozdul”.

Például ha egy vállalat költségfüggvénye

$$C(x) = 500 + 2x,$$

akkor a fix költség növekedése a grafikon függőleges eltolódását eredményezi. Hasonlóképpen egy paraméter változása módosíthatja a függvény meredekségét vagy elhelyezkedését.

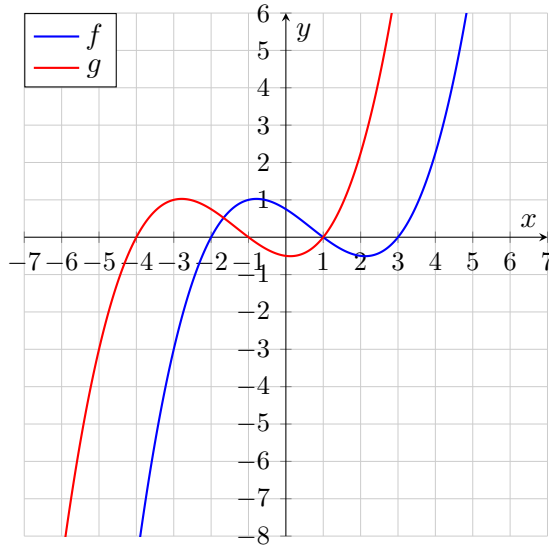
A gazdasági elemzés során ezért nemcsak az számít, hogy milyen a függvény alakja, hanem az is, hogyan módosul a grafikonja a paraméterek változásakor. Ezt írják le a függvénytranszformációk.

Ebben a szakaszban $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény!

Tétel. Ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x + c \in D_f$, akkor $f(x + c)$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(-c; 0)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja balra, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja jobbra tolódik c -vel

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(x + 2)$ függvényt közös koordináarendszerben az f -fel, és figyeljük meg az eltolást!

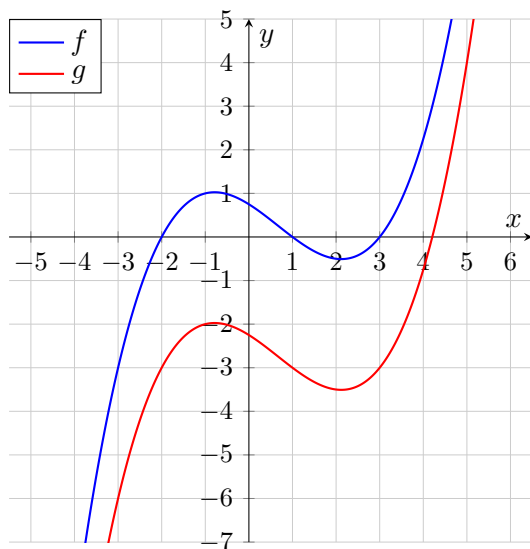
Itt $g(x) = f(x + 2)$ azt jelenti, hogy az f grafikonja 2 egységgel balra tolódik.



Megjegyzés. Fontos megfigyelni, hogy az $f(x + c)$ esetében a grafikon az x -tengely mentén az ellenkező irányba tolódik: ha c pozitív, a grafikon balra, ha c negatív, jobbra mozdul el.

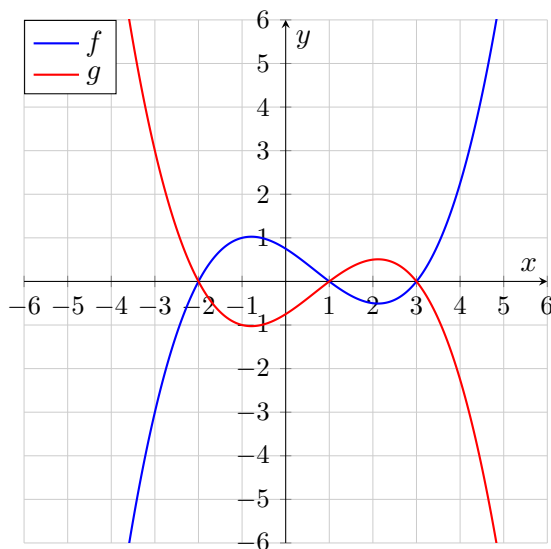
Tétel. Ha $c \in \mathbb{R}$, akkor $f(x) + c$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(0; c)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja felfelé, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja lefelé tolódik c -vel.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(x) - 3$ függvényt közös koordinátarendszerben az f függvénnyel! A $g(x) = f(x) - 3$ a grafikon 3 egységgel lefelé tolását jelenti.



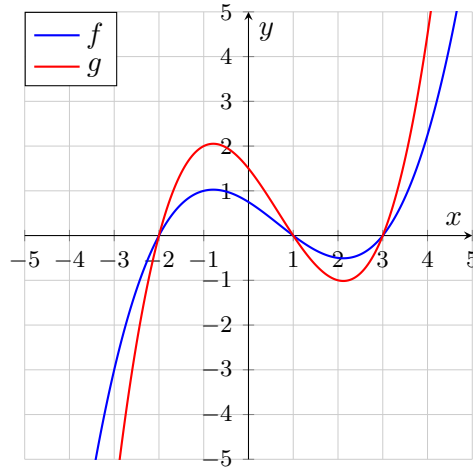
Tétel. A $-f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának x -tengelyre tükrözése.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = -f(x)$ függvényt közös koordináta-rendszerben az f -fel!



Tétel. Ha $a > 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a -szoros nyújtása.

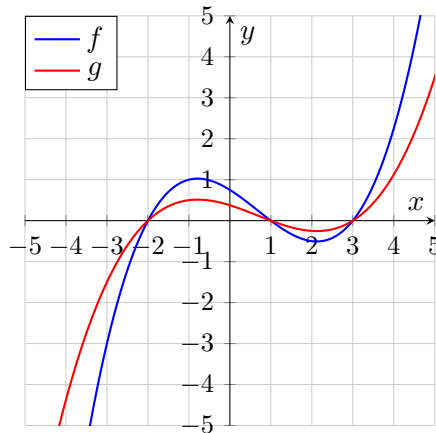
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = 2f(x)$ függvényt! A $g(x) = 2f(x)$ az f grafikonjának kétszeres függőleges nyújtását jelenti.



Tétel. Ha $0 < a < 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a -szoros zsugorítása.

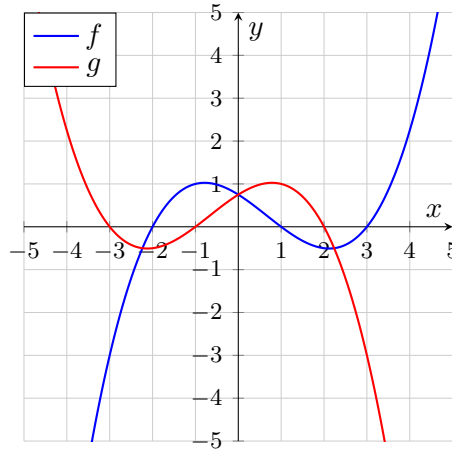
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ függvényt!

A $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ az f grafikonjának $\frac{1}{2}$ -szeres függőleges zsugorítását jelenti.



Tétel. Ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, akkor $f(-x)$ az f grafikonjának y -tengelyre való tükrözése.

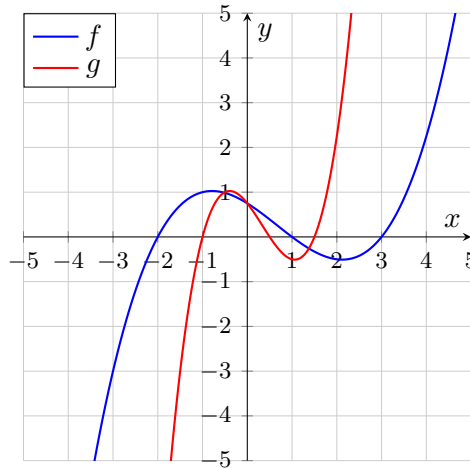
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(-x)$ függvényt!



Tétel. Ha $a > 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$ -szoros zsugorítása.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(2x)$ függvényt!

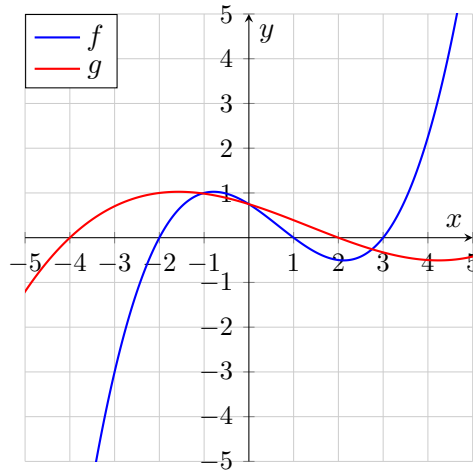
A $g(x) = f(2x)$ az f grafikonjának $\frac{1}{2}$ -szeres vízszintes zsugorítását jelenti.



Tétel. Ha $0 < a < 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$ -szoros nyújtása.

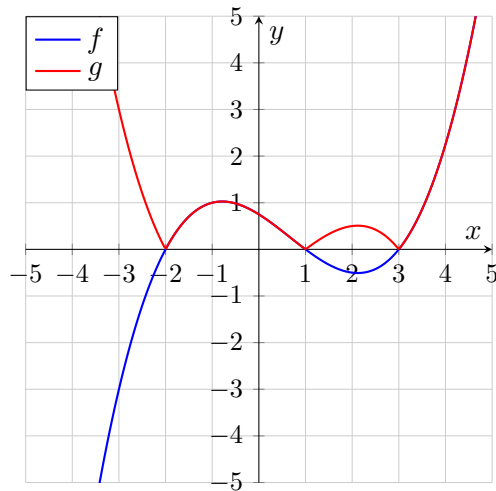
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$ függvényt!

A $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$ az f grafikonjának kétszeres vízszintes nyújtását jelenti.



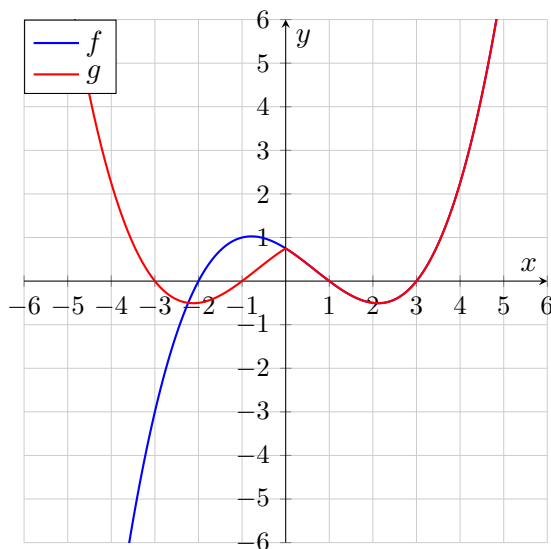
Tétel. Az $|f|$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy az x tengely alatti részt (vagyis a negatív függvényértékeket) tükrözzük az x tengelyre.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = |f(x)|$ függvényt!



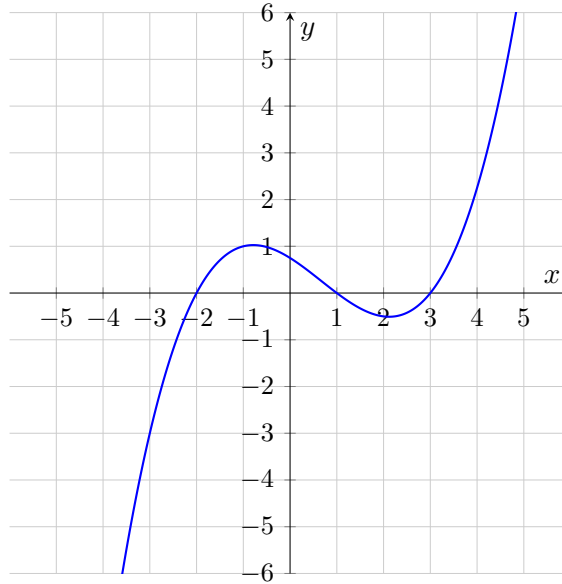
Tétel. Ha $x \in D_f$ esetén $|x| \in D_f$, akkor $f(|x|)$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy a pozitív számokhoz tartozó függvényértékeket tükrözzük az y tengelyre.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(|x|)$ függvényt!



Kidolgozott feladatok

73. Feladat. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:



Ábrázoljuk először a

$$g(x) = f(x + 3)$$

függvényt, majd ezt követően a

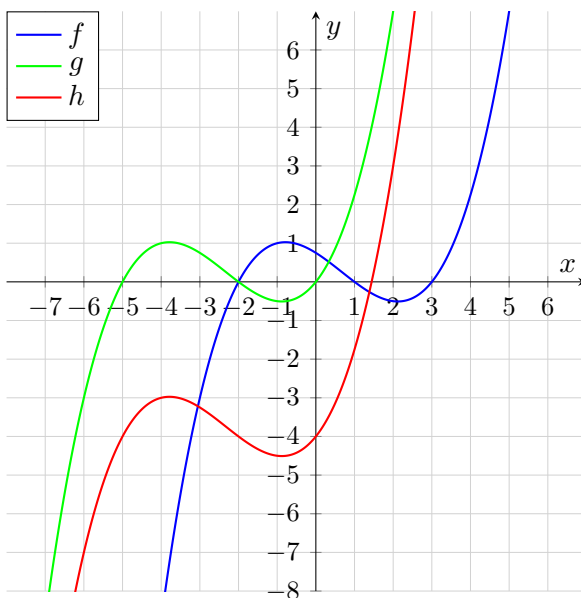
$$h(x) = f(x + 3) - 4$$

függvényt közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg szóvegesen is, hogy milyen irányú és hány egységgel való eltolást jelent a g függvény grafikonja az f függvény grafikonjához képest! Ugyanígy, fogalmazzuk meg szóvegesen, hogy milyen irányú és hány egységgel való eltolást jelent a h függvény grafikonja a g függvény grafikonjához képest!

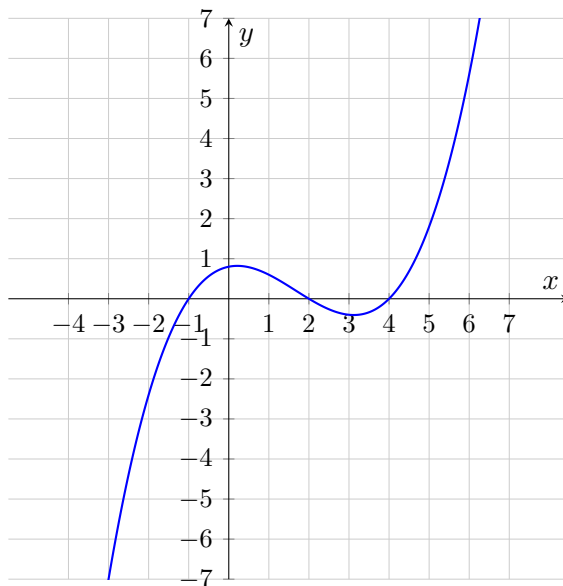
Megoldás:

A $g(x) = f(x + 3)$ esetében 3 egységgel balra tolódik az f függvény grafikonja.

A $h(x) = g(x) - 4 = f(x + 3) - 4$ esetében 4 egységgel lefelé tolódik a g függvény grafikonja:



74. **Feladat.** Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:

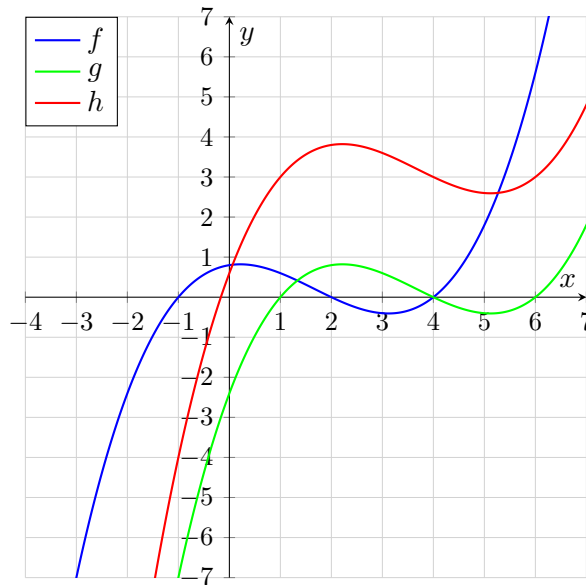


Ábrázoljuk először a $g(x) = f(x-2)$, majd ezt követően a $h(x) = f(x-2)+3$ függvényt!

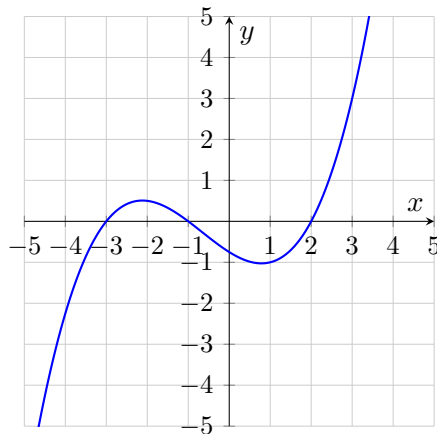
Megoldás:

A $g(x) = f(x - 2)$ esetében 2 egységgel jobbra tolódik az f függvény grafikonja.

A $h(x) = g(x) + 3 = f(x - 2) + 3$ esetében 3 egységgel felfelé tolódik a h függvény grafikonja:



75. Feladat. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:



Ábrázoljuk egymás után az

$$f(x+2), \quad -2 \cdot f(x+2), \quad -2 \cdot f(x+2) - 3$$

függvényeket!

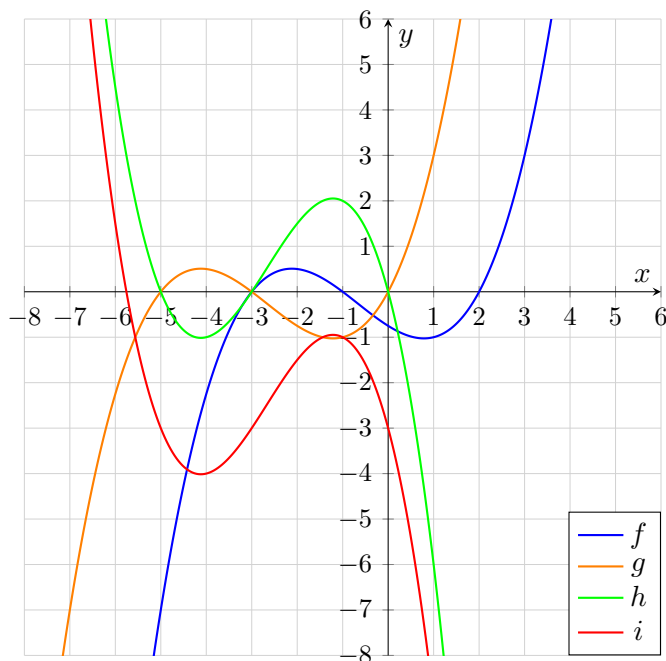
Megoldás:

Először a $g(x) = f(x+2)$ függvényt ábrázoljuk. Mivel az x helyére $x+2$ kerül, ezért az f függvény grafikonja 2 egységgel balra tolódik el.

Ezt követően a $h(x) = -2 \cdot f(x+2)$ függvényt kapjuk meg. A mínuszjel miatt az előző grafikon az x -tengelyre tükröződik, a 2 szorzó miatt pedig függőleges irányban kétszeresére nyúlik.

Végül az $i(x) = -2 \cdot f(x+2) - 3$ függvényhez az előző grafikont 3 egységgel lefelé toljuk.

Az egymást követő átalakítások eredményét az alábbi ábra mutatja:



3.4. Műveletek függvényekkel

Elméleti összefoglaló

Motiváció. A gazdasági modellekben gyakran egyszerre több függvénnyel dolgozunk. A bevétel és a költség különbsége adja a profitot, egy vállalat teljes költsége a fix és változó költségek összegeként írható fel. A függvényekkel végzett műveletek lehetővé teszik ezen összetett gazdasági modellek matematikai felépítését.

Definíció. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ és a $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvények

- *összege* $(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$;
- *különbsége* $(f - g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$;
- *szorzata* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$;
- *hányadosa* $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0, x \in D$ esetén.

Definíció. Legyenek D és H a valós számok halmazának tetszőleges részhalmazai, továbbá f , illetve g a D , illetve H halmazon értelmezett valós értékű függvények. Tegyük fel, hogy az f függvény értékkészlete részhalmaza a g függvény értelmezési tartományának. A g és f függvények *kompozícióján* vagy *összetett függvényén* a $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

függvényt értjük.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy általában

$$f \circ g \neq g \circ f,$$

vagyis a függvények kompozíciója, mint művelet nem kommutatív.

Példa. Ha $f(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x + 10$, akkor

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(4x + 10)$$

és

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 4 \cdot \sin x + 10.$$

Kidolgozott feladatok

76. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x - 3$ függvények összegét!

Megoldás:

Az $f + g$ függvény definíció szerint

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 2) + (x - 3) = 2x - 1.$$

77. Feladat. Tekintsük az $f(x) = (x + 1)^2$ és $g(x) = (x - 1)^2$ függvényeket! Határozzuk meg az $f - g$ függvényt!

Megoldás:

Mivel $f(x) = x^2 + 2x + 1$ és $g(x) = x^2 - 2x + 1$, ezért

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x) = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1) = \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x.\end{aligned}$$

78. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x + 5$ és $g(x) = x - 5$ függvényeket! Határozzuk meg az $f \cdot g$ függvényt!

Megoldás:

Az $f \cdot g$ szorzat:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 25.$$

79. Feladat. Tekintsük az $f(x) = x^2 - 9$ és $g(x) = x - 3$ függvényeket! Határozzuk meg az $\frac{f}{g}$ függvényt!

Megoldás:

Az $\frac{f}{g}$ hányadosra azt kapjuk, hogy

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{x - 3} = x + 3.$$

80. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sin x$ és a $g(x) = x^2 + 7x - 3$ függvényeket!

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

Megoldás:

- a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 7x - 3) = \sin(x^2 + 7x - 3).$$

- b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 + 7 \cdot \sin x - 3 \\ &= \sin^2 x + 7 \cdot \sin x - 3. \end{aligned}$$

81. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2^x$ és a $g(x) = 4x + 1$ függvényeket!

- a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!
b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!

Megoldás:

- a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(4x + 1) = 2^{4x+1}.$$

- b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 4 \cdot 2^x + 1.$$

82. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x + 7$ függvényeket!

- a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!
b) Határozzuk meg az $g \circ f$ összetett függvényt!
c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!
d) Határozzuk meg az $g \circ g$ összetett függvényt!
e) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az összetett függvények értelmezve vannak!
f) Oldjuk meg az $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ egyenletet!

Megoldás:

- a) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 7) = \sqrt{x + 7}.$$

- b) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 7.$$

- c) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}.$$

d) Az összetett függvény definícióját használva azt kapjuk, hogy

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x + 7) = x + 14.$$

e) Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_{f \circ g} = [-7; \infty[.$$

A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_{g \circ f} = [0; \infty[.$$

f) Megoldjuk a

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 7$$

egyenletet. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd elvégezve az összevonásokat és megfelelően rendezve az egyenletet

$$x + 7 = (\sqrt{x} + 7)^2$$

$$x + 7 = x + 14 \cdot \sqrt{x} + 49$$

$$-42 = 14 \cdot \sqrt{x}$$

adódik, ami ellentmondás, ugyanis az egyenlet bal oldalán negatív számot kaptunk, míg a jobb oldalon egy szám négyzetgyökének pozitív számszorosa szerepel, ami pozitív.

83. Feladat. Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x}$ és a $g(x) = x^2 + 2$ függvényeket.

a) Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt!

b) Határozzuk meg a $g \circ f$ összetett függvényt!

c) Határozzuk meg az $f \circ f$ összetett függvényt!

d) Határozzuk meg a $g \circ g$ összetett függvényt!

Megoldás:

a) Az $f \circ g$ összetett függvény:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

b) Az $g \circ f$ összetett függvény:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 2.$$

c) Az $f \circ f$ összetett függvény:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

d) A $g \circ g$ összetett függvény:

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 2) = (x^2 + 2)^2 + 2.$$

84. Feladat. Bontsuk fel két függvény összetételére az $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ függvényt, azaz határozzuk meg a k és b függvényeket úgy, hogy $f(x) = k \circ b(x)$ teljesüljön!

Megoldás:

A $k(x)$ a külső függvény és $b(x)$ a belső függvény, ahol

$$k(x) = \frac{1}{x},$$

és

$$b(x) = x^2 + 4.$$

85. Feladat. Bontsuk fel két függvény összetételére az $f(x) = \sqrt{7-4x}$ függvényt, azaz határozzuk meg a k és b függvényeket úgy, hogy $f(x) = k \circ b(x)$ teljesüljön!

Megoldás:

A $k(x)$ a külső függvény és $b(x)$ a belső függvény, ahol

$$k(x) = \sqrt{x},$$

és

$$b(x) = 7 - 4x.$$

86. Feladat. Bontsuk fel két függvény összetételére az $f(x) = 3^{\sin x}$ függvényt, azaz határozzuk meg a k és b függvényeket úgy, hogy $f(x) = k \circ b(x)$ teljesüljön!

Megoldás:

A $k(x)$ a külső függvény és $b(x)$ a belső függvény, ahol

$$k(x) = 3^x,$$

és

$$b(x) = \sin x.$$

87. Feladat. Bontsuk fel két függvény összetételére az $f(x) = \sin(3^x)$ függvényt, azaz határozzuk meg a k és b függvényeket úgy, hogy $f(x) = k \circ b(x)$ teljesüljön!

Megoldás:

A $k(x)$ a külső függvény és $b(x)$ a belső függvény, ahol

$$k(x) = \sin x,$$

és

$$b(x) = 3^x.$$

3.5. Függvények inverze

Motiváció. Számos gazdasági összefüggés megfordítható. Ha például ismerjük a keresleti függvényt mennyiség szerint, gyakran szükség van arra is, hogy az árat fejezzük ki a mennyiség függvényében. Az inverz függvény fogalma ezt a „szerepcsere” jelenséget teszi matematikailag pontosan kezelhetővé, feltéve hogy az eredeti függvény egyértelműen visszafordítható.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha kölcsönösen egyértelmű, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

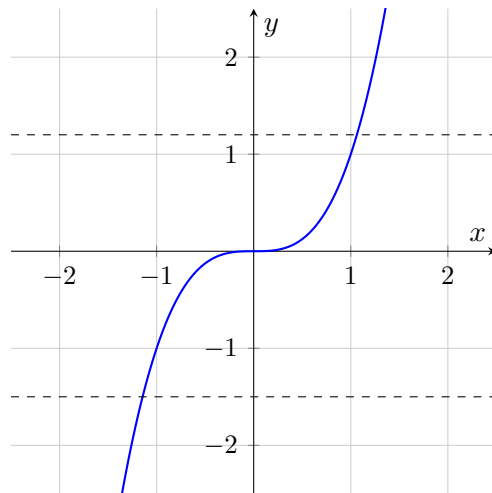
Megjegyzés. Az, hogy egy függvény invertálható szemléletesen azt jelenti, hogy ha a függvény grafikonját „vízszintes vonalakkal elmetsszük, akkor mindenhol legfeljebb egy metszéspontot kapunk”.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvényt!

Mivel f szigorúan monoton növekvő az egész $\mathbb{R}$ -en, ezért $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$, azaz f kölcsönösen egyértelmű, így invertálható. Az inverz függvény:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Az alábbi ábra szemlélteti, hogy bármely vízszintes egyenes legfeljebb egy pontban metszi az f grafikonját, ezért az f függvény invertálható:



Megjegyzés. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény invertálható, és az inverze f^{-1} , akkor

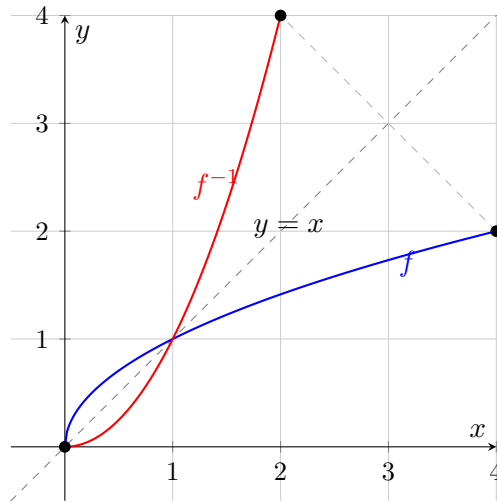
$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Megjegyzés. Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény invertálható, akkor

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x).$$

Megjegyzés. Szemléletesen egy függvény inverze a függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözése. Ez azt is jelenti, hogy ha az $(x; y)$ koordinátájú pont rajta van egy függvény grafikonján, akkor az inverzén rajta van $(y; x)$ koordinátájú pont.

Példa. Az alábbi ábrán az $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ függvény inverzét szemlélítjük:



Kidolgozott feladatok.

88. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 6$ függvényt!

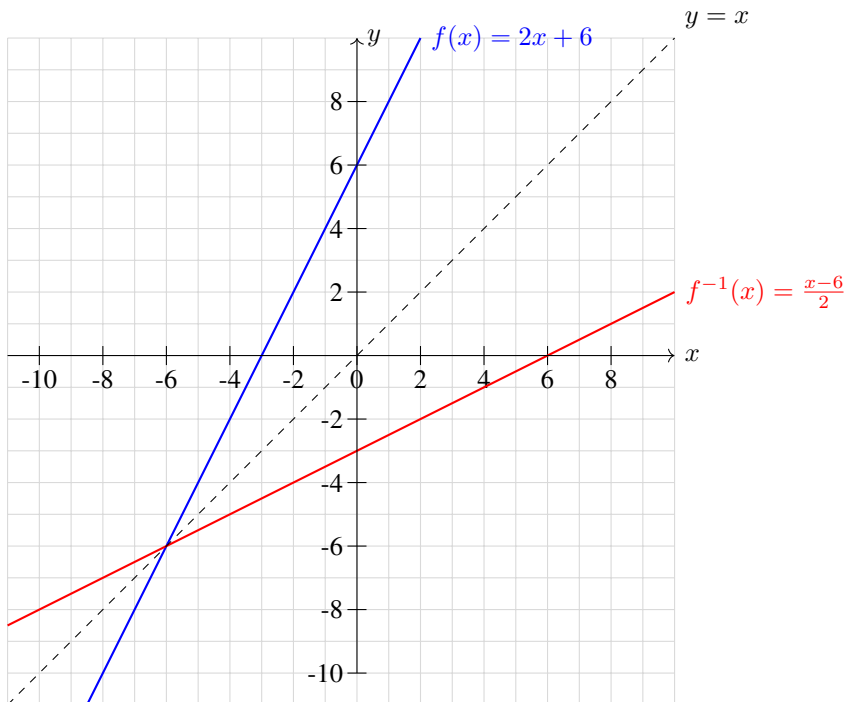
- Invertálható-e a függvény?
- Ha igen, határozzuk meg az inverzét!
- Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

Megoldás:

- Az f függvény grafikonja egy egyenes, így kölcsönösen egyértelmű, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, tehát invertálható.
- Az inverz függvény meghatározásához először az $y = 2x + 6$ egyenletet kell tekintenünk, amiben megcserélve az x és y szerepét azt kapjuk, hogy $x = 2y + 6$. Ebből kifejezve az y -t, megkapjuk az inverz függvényt, azaz

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 6}{2} = \frac{1}{2}x - 3.$$

- A függvény és az inverz függvény grafikonja:



89. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 4$ függvényt!

- Invertálható-e a függvény?
- Ha igen, határozzuk meg az inverzét!
- Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f függvényt és az inverzét!

Megoldás:

- Az f függvény grafikonja egy egyenes, így kölcsönösen egyértelmű, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel, tehát invertálható.
- Az inverz függvény meghatározásához tekintsük az

$$y = -3x + 4$$

egyenletet! Megcserélve az x és y változók szerepét azt kapjuk, hogy

$$x = -3y + 4.$$

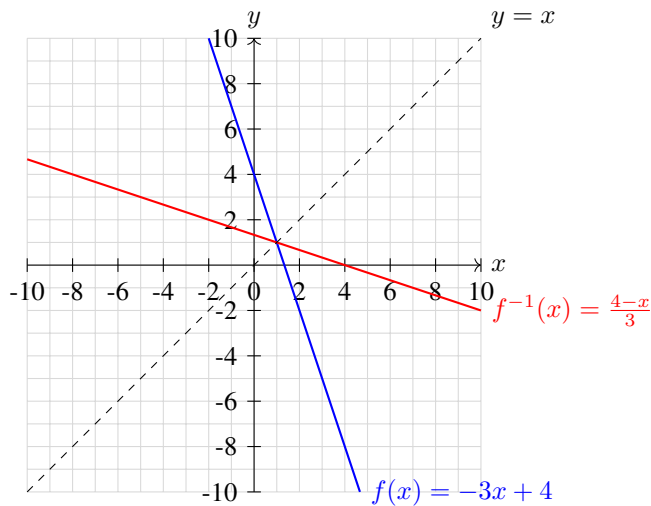
A kapott egyenletből kifejezve y -t azt kapjuk, hogy

$$-3y = x - 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4 - x}{3}.$$

Tehát az inverz függvény:

$$f^{-1}(x) = \frac{4 - x}{3}.$$

- A függvény és az inverz függvény grafikonja:



90. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 4$ függvényt!

- Invertálható-e a függvény?
- Ha igen, határozzuk meg az inverzét!
- Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben az f függvényt és az inverzét!

Megoldás:

- Az $f(x) = 2^x - 4$ függvény szigorúan monoton növekvő az egész $\mathbb{R}$ -en, ezért kölcsönösen egyértelmű, így invertálható.
- Az inverz függvény meghatározásához tekintsük az

$$y = 2^x - 4$$

egyenletet. Megcserélve az x és y szerepét azt kapjuk, hogy

$$x = 2^y - 4.$$

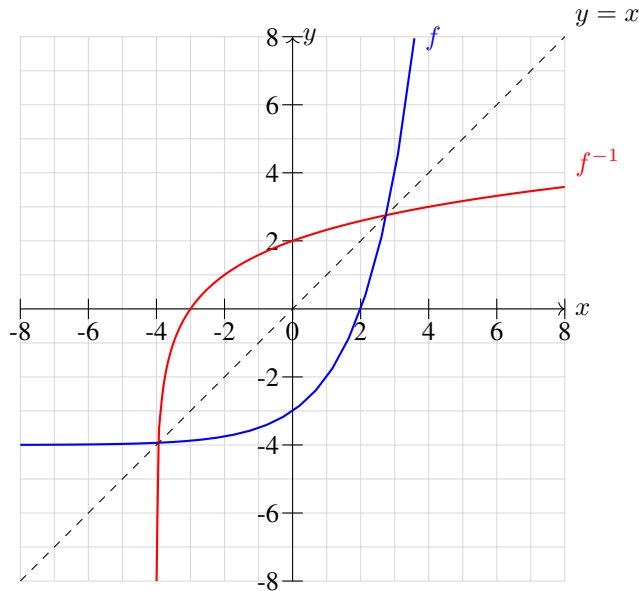
Ebből $x + 4 = 2^y$ adódik, így

$$y = \log_2(x + 4).$$

Tehát az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = \log_2(x + 4).$$

- A függvény és az inverz függvény grafikonja:



91. **Feladat.** Tekintsük az $f:]5; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x - 5) + 1$ függvényt!

a) Invertálható-e a függvény?

b) Ha igen, határozzuk meg az inverzét!

Megoldás:

a) Az f függvény szigorúan monoton növekvő, így kölcsönösen egyértelmű, tehát invertálható.

b) Tekintsük az

$$y = \log_2(x - 5) + 1$$

egyenletet! Megcserélve az x és y szerepét azt kapjuk, hogy

$$x = \log_2(y - 5) + 1.$$

Rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$x - 1 = \log_2(y - 5) \quad \Rightarrow \quad 2^{x-1} = y - 5,$$

tehát

$$y = 2^{x-1} + 5,$$

így az inverz függvény

$$f^{-1}(x) = 2^{x-1} + 5.$$

3.5. Az egyváltozós függvények nevezetes osztályai

Elméleti összefoglaló

Elsőfokú függvények. Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvényt *elsőfokú függvénynek* nevezzük, ahol m -et a függvény *meredekségének* mondjuk.

Az elsőfokú függvények grafikonja egyenes.

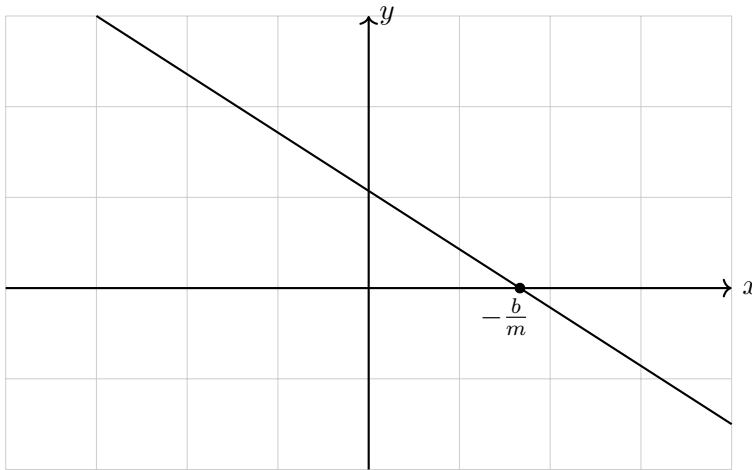
A függvénynek egyetlen zérushelye van: $-\frac{b}{m}$.

A függvény nem korlátos.

Ha $m > 0$, akkor szigorúan monoton növekvő, ha $m < 0$, akkor szigorúan monoton csökkenő, ha $m = 0$, akkor a függvény konstans.

Ha $b = 0$, akkor a függvény páratlan. Ha $b \neq 0$, akkor nem páros, nem páratlan.

Példa. Az alábbi ábra mutatja az $f(x) = mx + b$ függvény grafikonját $m < 0$ esetén:



Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

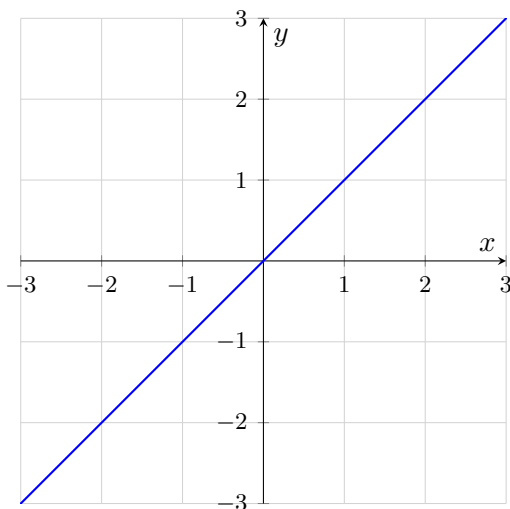
- d) Számítsuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R}$.
- d) Zérushely: $x = 0$.
- e) A függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.
Nincs minimuma, nincs maximuma.
- f) A függvény szigorúan monoton növekvő.
- g) A függvény páratlan, mert a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Másodfokú függvények. Legyen $a \neq 0$ tetszőleges valós szám, továbbá b és c tetszőleges valós számok. Az $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ függvényt *másodfokú függvénynek* nevezzük.

A másodfokú függvény grafikonját *parabolának* hívjuk.

Ha $a > 0$, akkor a parabolának minimuma van. Ha $a < 0$, akkor maximuma van.

A parabola egyenlete átírható

$$f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$$

alakra, amit *tengelyponti alaknak* is hívunk. Ebben az alakban a parabola tengelypontja (csúcspanja), ami egyben a szélsőértéke is

$$T = (u; v),$$

ahol

$$u = -\frac{b}{2a}.$$

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Adjuk meg a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

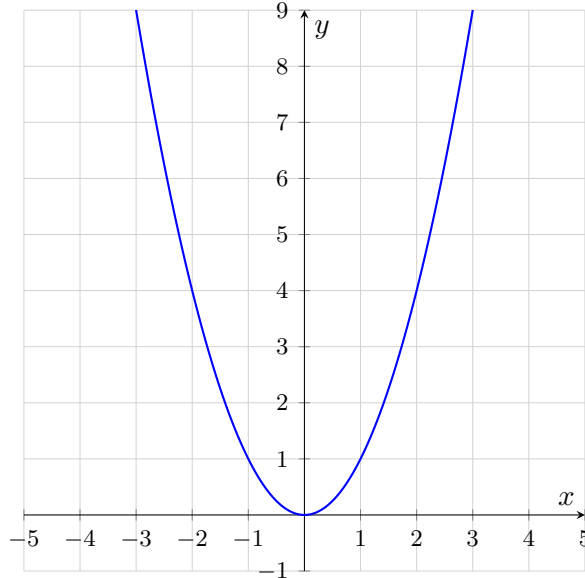
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 0$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Minimuma van. Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = 0$.

f) Szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty; 0]$ intervallumon, és szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.

g) A függvény páros, mert a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Négyzetgyök függvények. Azokat a függvényeket, amelyek leképezési szabályában négyzetgyökös kifejezés szerepel *négyzetgyök függvények*nek nevezzük. A legegyszerűbb gyökfüggvény az $f(x) = \sqrt{x}$.

Példa. Tekintsük az $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = 0, 1, 4, 9$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

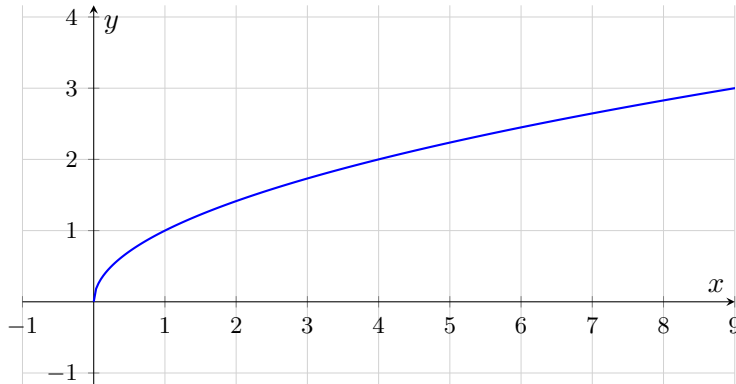
- b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Határozzuk meg a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0; \infty[$.
Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.
- d) Zérushely: $x = 0$.
- e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
Minimuma van. Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = 0$.
- f) Szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.

Abszolútérték függvények. Azokat a függvényeket, amelyek leképezési szabályában abszolútérték szerepel, *abszolútérték függvények*nek nevezzük.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Határozzuk meg a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

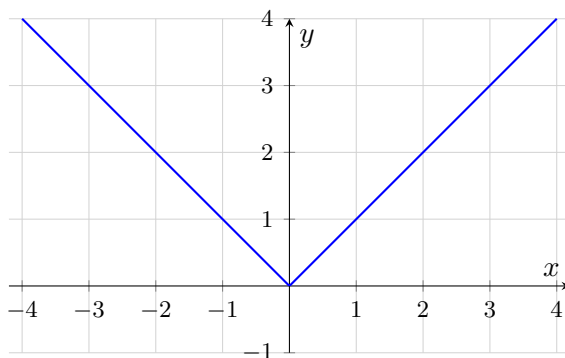
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 0$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Minimuma van. Minimumhely $x = 0$, minimumérték $y = 0$.

- f) Szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty; 0]$ intervallumon, szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.
- g) Páros, mert a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Exponenciális függvények. Legyen a tetszőleges, 1-től különböző valós szám. Az

$$f(x) = a^x$$

alakú függvényeket *exponenciális függvények*nek nevezzük.

Ha $a > 0$, akkor az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő.

Ha $a < 0$, akkor az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az $f(x) = a^x$ függvénynek nincs zérushelye.

Az $f(x) = a^x$ függvénynek nincs szélsőértéke.

Az $f(x) = a^x$ függvény nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvényt!

- a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

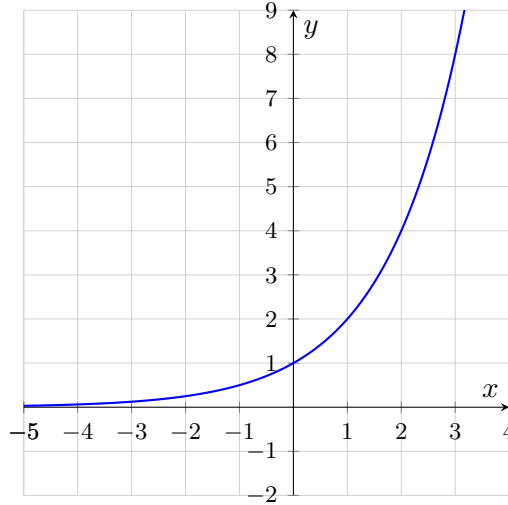
- b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Számítsuk ki a zérushelyet, ha van!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

- b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in]0; \infty[$.

d) Zérushely: nincs.

e) Alulról korlátos.

Nincs minimuma, nincs maximuma.

f) Szigorúan monoton növekvő.

g) Nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Számítsuk ki a zérushelyet, ha van!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

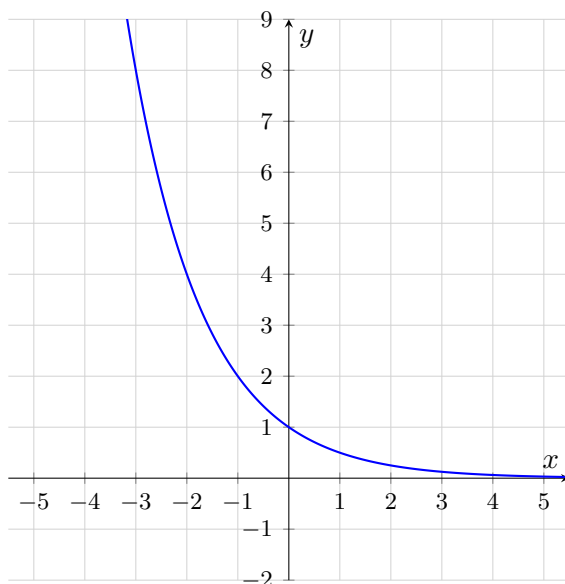
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

b) A függvény grafikonja:

c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.Értékkészlet: $R_f: y \in]0; \infty[$.

d) Zérushely: nincs.

e) A függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Nincs minimuma, nincs maximuma.

f) Szigorúan monoton csökkenő.

g) Nem páros nem páratlan.

Logaritmusikus függvények. Legyen a tetszőleges, 1-től különböző, pozitív valós szám. Az

$$f(x) = \log_a x$$

alakú függvényeket *logaritmusikus függvényeknek* nevezzük.

Ha $a > 0$, akkor az $f(x) = \log_a x$ logaritmusikus függvény szigorúan monoton növekvő.

Ha $a < 0$, akkor az $f(x) = \log_a x$ logaritmusikus függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek egyetlen zérushelye $x = 1$.

Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek nincs szélsőértéke.

Az $f(x) = \log_a x$ függvény nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

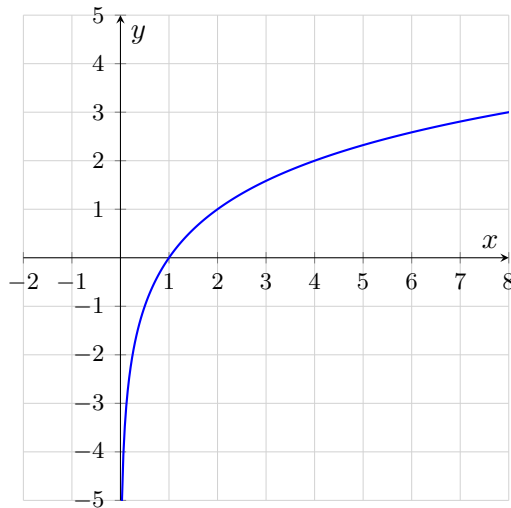
b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b) A függvény grafikonja:



Példa. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

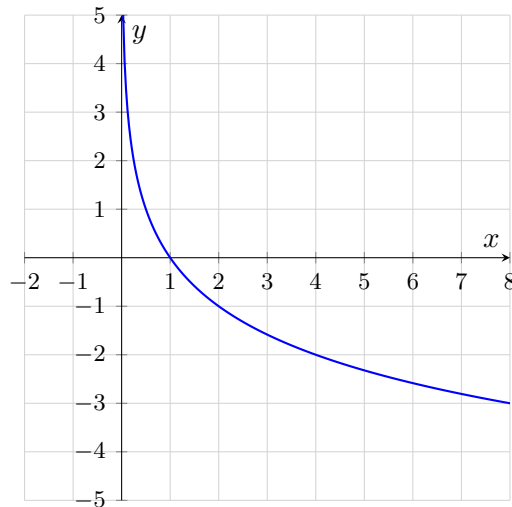
b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

b) A függvény grafikonja:



Törtfüggvények. Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, hogy $c \cdot x + d \neq 0$. Az

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

függvényeket *elsőfokú törtfüggvényeknek* nevezzük.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Számítsuk ki a zérushelyet, ha van!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

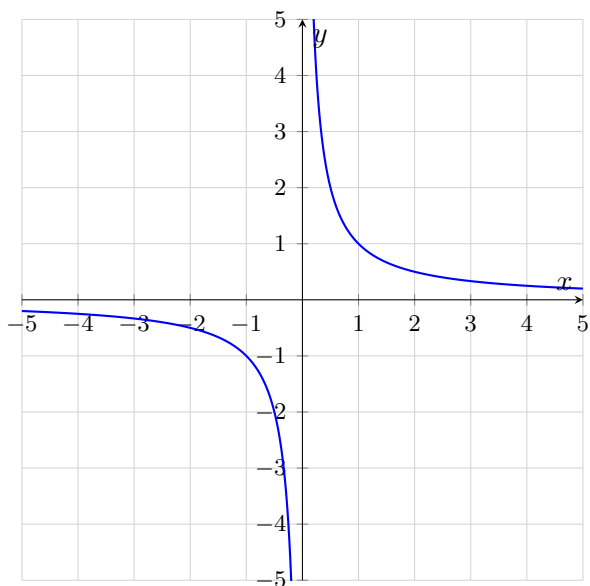
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- d) Zérushely: nincs, mert $\frac{1}{x} = 0$ egyenletnek nincs megoldása.
- e) A függvény nem korlátos sem alulról, sem felülről.
- f) Nincs minimuma, nincs maximuma.
- g) Az $] -\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
Az $]0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
- h) A függvény páratlan, mert a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Kidolgozott feladatok.

92. Feladat. Tekintsük az

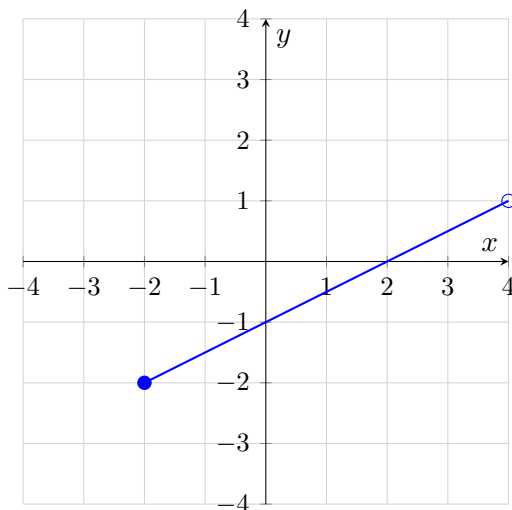
$$f: [-2; 4[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!
- i) Periodikus-e a függvény?
- j) Invertálható-e?

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-2; 4[$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-2; 1[$.
- d) A zérushely az $\frac{1}{2}x - 1 = 0$ egyenlet megoldása. Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}x = 1$, így a zérushely $x = 2$.
- e) A függvény alulról korlátos, infimuma: -2 , felülről korlátos, szuprémuma: 1 . Mivel alulról és felülről is korlátos, ezért korlátos.
- f) Minimumhely: $x = -2$, minimumérték: $y = -2$, maximuma nincs.
- g) Szigorúan monoton növekvő.
- h) Nem páros, nem páratlan.
- i) Nem periodikus.
- j) Invertálható, mert kölcsönösen egyértelmű.

93. **Feladat.** Tekintsük az

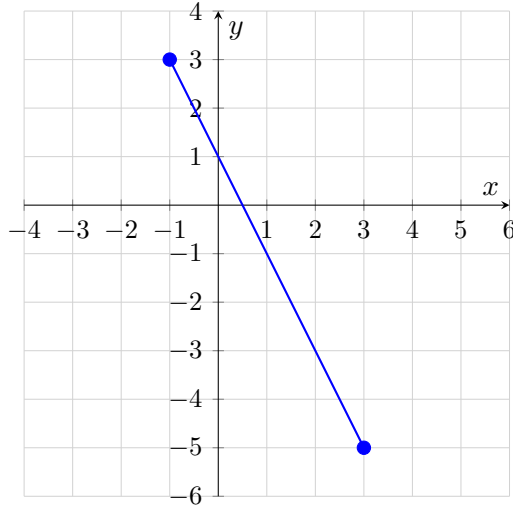
$$f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!
- i) Periodikus-e a függvény?
- j) Invertálható-e?

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-1; 3]$.
- c) Értékkészlet: mivel a függvény lineáris és szigorúan csökkenő, a szélső x -értékekhez tartozó y -értékek adják a határokat:

$$f(-1) = 3, \quad f(3) = -5.$$

Ezért $R_f: y \in [-5; 3]$.

- d) A zérushely a $-2x + 1 = 0$ egyenlet megoldása.

$$-2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Tehát a zérushely $x = \frac{1}{2}$.

- e) A függvény alulról korlátos, infimuma: -5 (és fel is veszi $x = 3$ -nál), felülről korlátos, szuprémuma: 3 (és fel is veszi $x = -1$ -nél). Mivel alulról és felülről is korlátos, ezért korlátos.
- f) Maximumhely: $x = -1$, maximumérték: $y = 3$; minimumhely: $x = 3$, minimumérték: $y = -5$.
- g) Szigorúan monoton csökkenő a $[-1, 3]$ intervallumon.
- h) Nem páros, nem páratlan.
- i) Nem periodikus.

j) Invertálható, mert a zárt intervallumon szigorúan monoton, így kölcsönösen egyértelmű.

94. Feladat. Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes és illeszkedik az $A = (2; 4)$ és $B = (-3; 6)$ koordinátájú pontokra! Határozzuk meg a függvény zérushelyét!

Megoldás:

A keresett függvény grafikonja egyenes, így a függvényt

$$f(x) = m \cdot x + b$$

alakban keressük. Mivel az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(2) = m \cdot 2 + b \Rightarrow 4 = 2m + b.$$

Mivel a B pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(-3) = m \cdot (-3) + b \Rightarrow 6 = -3m + b.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az m és b ismeretleneket:

$$\left. \begin{array}{l} 2m + b = 4 \\ -3m + b = 6 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy

$$5m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$$

Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe

$$-\frac{4}{5} + b = 4 \Rightarrow b = \frac{24}{5}$$

adódik. A keresett függvény tehát:

$$f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{24}{5}.$$

A függvény zérushelye:

$$-\frac{2}{5}x + \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow x = 12.$$

95. Feladat. Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes és illeszkedik az $A = (1; 5)$ és $B = (4; -1)$ koordinátájú pontokra! Határozzuk meg a függvény zérushelyét, majd ábrázoljuk a függvényt!

Megoldás:

A keresett függvény grafikonja egyenes, így a függvényt

$$f(x) = m \cdot x + b$$

alakban keressük. Mivel az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(1) = m \cdot 1 + b \Rightarrow 5 = m + b.$$

Mivel a B pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(4) = m \cdot 4 + b \Rightarrow -1 = 4m + b.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az m és b ismeretleneket:

$$\left. \begin{array}{l} m + b = 5 \\ 4m + b = -1 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy

$$-3m = 6 \Rightarrow m = -2.$$

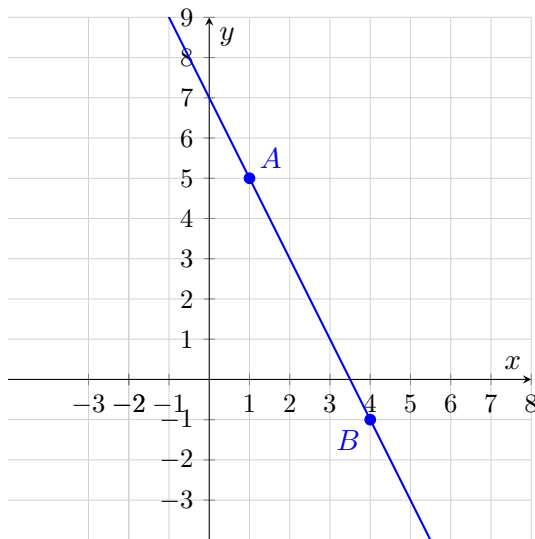
Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe:

$$-2 + b = 5 \Rightarrow b = 7.$$

A keresett függvény tehát $f(x) = -2x + 7$. A függvény zérushelye:

$$-2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5.$$

A függvény grafikonja:

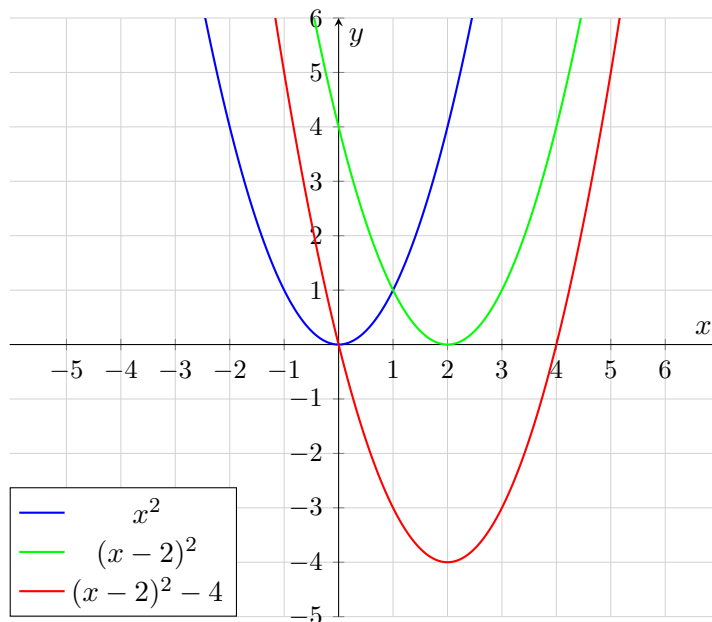


96. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ függvényt!

- Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az x^2 , $(x - 2)^2$ és $(x - 2)^2 - 4$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!
- Jellemezzük paritás szerint!
- Periodikus-e a függvény?
- Invertálható-e?

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-4; \infty[$.
- d) A zérushelyhez megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Mivel $(x-2)^2 - 4 = 0$, ezért $(x-2)^2 = 4$, így $x-2 = 2$ vagy $x-2 = -2$. Ezekből azt kapjuk, hogy
- $$x_1 = 0 \text{ illetve } x_2 = 4.$$
- e) Alulról korlátos, infimuma a -4 , felülről nem korlátos.
- f) Szélsőérték típusa: minimum, minimumhelye $x = 2$ -nél van, minimumérték $y = -4$.
- g) A $] -\infty; 2]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, $[2; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
- h) Nem páros, nem páratlan.
- i) Nem periodikus.
- j) Nem invertálható, mert nem kölcsönösen egyértelmű, például

$$f(0) = f(4) = 0.$$

97. **Feladat.** Tekintsük az

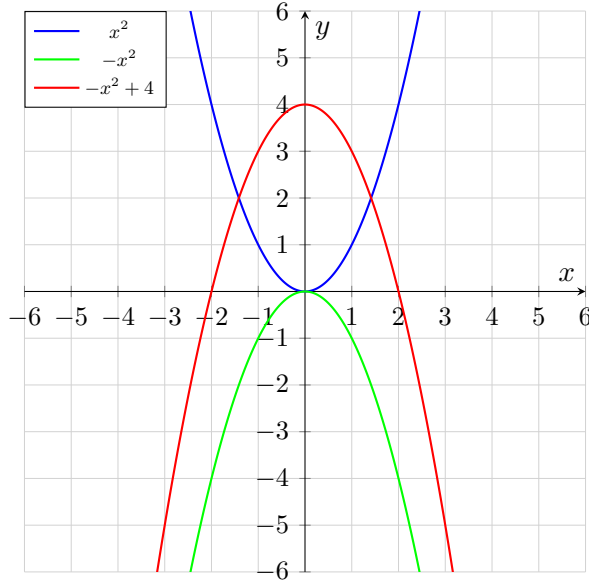
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 4$$

függvényt!

- Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben: legyen az x^2 , $-x^2$ és $-x^2 + 4$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!
- Jellemezzük paritás szerint!
- Periodikus-e a függvény?
- Invertálható-e?

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 4]$.
- d) Zérushely(ek): $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$, így

$$x = \pm 2.$$
- e) A függvény felülről korlátos, szuprémuma: 4, alulról nem korlátos.
- f) Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = 4$.
- g) A $] -\infty; 0]$ intervallumon monoton növekvő, a $[0, \infty[$ intervallumon monoton csökkenő.
- h) Paritás: páros, mert a függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, azaz

$$f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = f(x).$$
- i) Nem periodikus.
- j) Nem invertálható, mert nem kölcsönösen egyértelmű.

98. **Feladat.** Tekintsük az

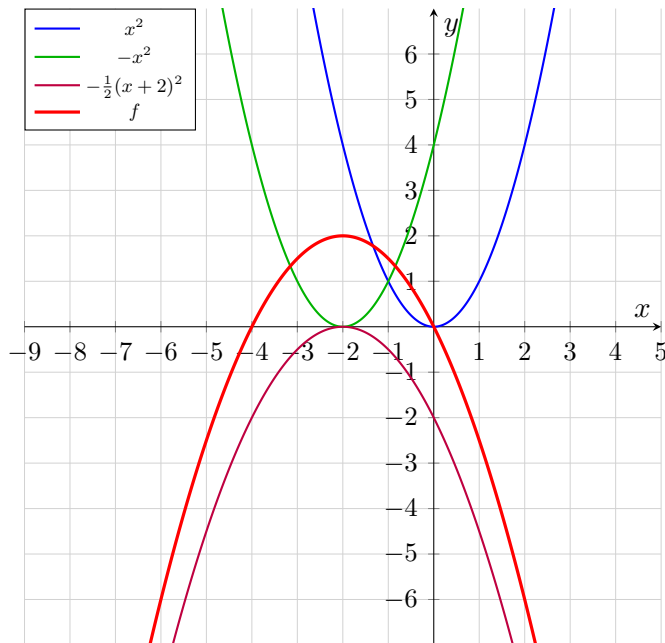
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+2)^2 + 2$$

függvényt!

- Rajzoljuk fel az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben az x^2 , $(x+2)^2$, $-\frac{1}{2} \cdot (x+2)^2$ és $-\frac{1}{2} \cdot (x+2)^2 + 2$ függvényeket ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!
- Jellemezzük paritás szerint!
- Periodikus-e a függvény?
- Invertálható-e?

Megoldás:

- A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 2]$.

- d) Zérushely(ek): $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 4$, így
 $x+2 = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 0$ illetve $x_2 = -4$.
- e) A függvény felülről korlátos, szuprésuma (és maximuma) 2, alulról nem korlátos.
- f) Maximuma van, maximumhely: $x = -2$, maximumérték: $y = 2$.
- g) Monotonitás: a $] -\infty; -2]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[-2; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- h) Paritás: nem páros, nem páratlan.
- i) Nem periodikus.
- j) Nem invertálható, mert nem kölcsönösen egyértelmű, például $f(-4) = 0$ és $f(0) = 0$.

99. **Feladat.** Egy számológépeket gyártó cég nyereségét (euróban) a

$$P(x) = -20x^2 + 1\,400x - 12\,000$$

másodfokú függvény írja le, ahol x a darabonkénti eladási ár (euróban). Határozzuk meg azt az egységárat, amely a lehető legnagyobb profitot eredményezi, valamint adjuk meg a maximális nyereség értékét!

Megoldás:

A nyereséget megadó függvény parabola, melynek maximumhelye az

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a}.$$

Nekünk $a = -20$, $b = 1\,400$, ezért

$$x_{\max} = \frac{-1\,400}{2 \cdot (-20)} = \frac{-1400}{-40} = 35.$$

Tehát a maximális profitot adó eladási ár: 35 euró/darab.

Mivel

$$P(35) = -20 \cdot 35^2 + 1\,400 \cdot 35 - 12\,000 = 12\,500,$$

ezért a maximális profit 12 500 euró.

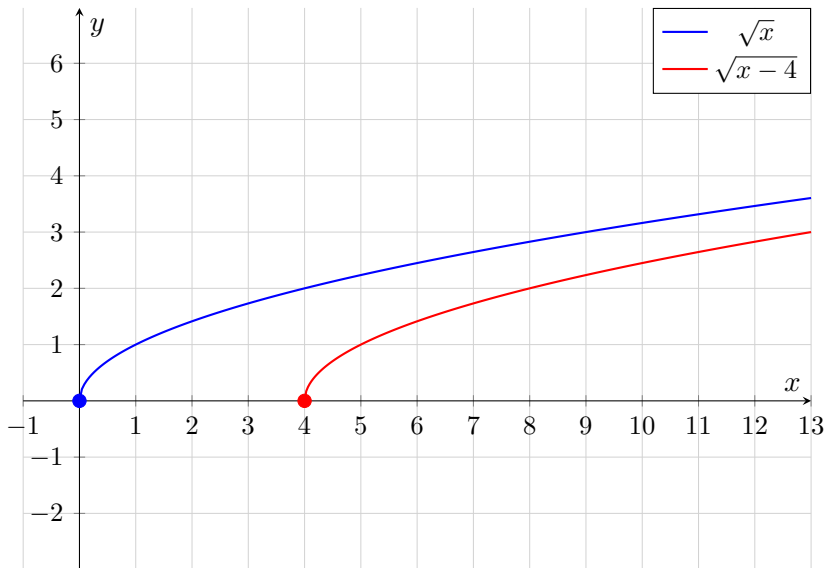
100. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-4}$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, vagyis legyen a $\sqrt{x}$ és $\sqrt{x-4}$ is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



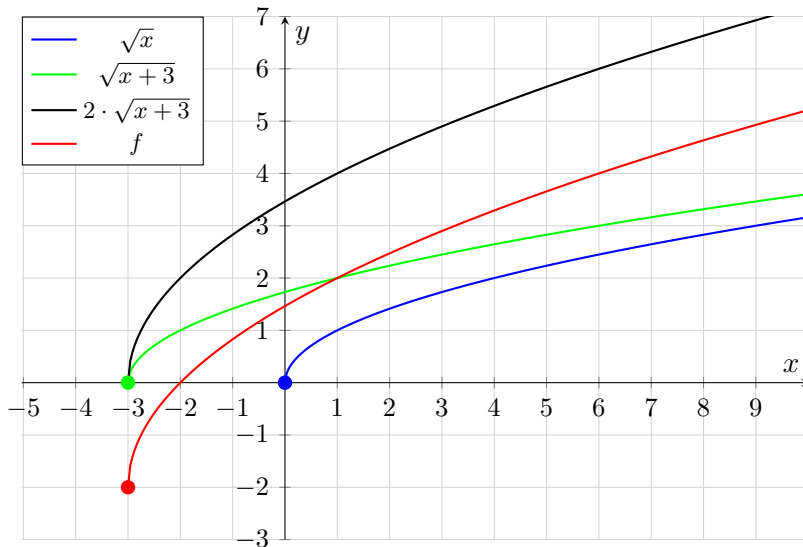
- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [4; \infty[$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.
- d) Zérushely: $x = 4$.
- e) Alulról korlátos. Felülről nem korlátos.
- f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 4$. Minimumérték: $y = 0$.
- g) Szigorúan monoton növekvő.

101. **Feladat.** Tekintsük $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 2$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!

- Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, vagyis legyen a $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+3}$, $2 \cdot \sqrt{x+3}$, $2 \cdot \sqrt{x+3} - 2$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- A függvény grafikon és a lépések:



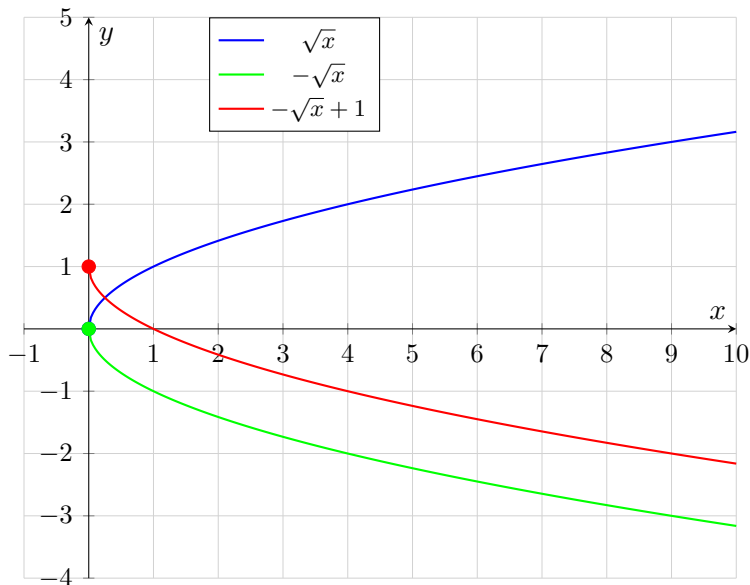
- Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-3; \infty[$.
- Értékkészlet: $R_f: y \in [-2; \infty[$.
- Zérushely: $x = -2$.
- Alulról korlátos. Felülről nem korlátos.
- Minimuma van. Minimumhely: $x = -3$. Minimumérték: $y = -2$.
- Szigorúan monoton növekvő.

102. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = -\sqrt{x} + 1$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!

- Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen a $\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, $-\sqrt{x} + 1$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A grafikon és a lépések:



- Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0; \infty[$.
- Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 1]$.
- Zérushely: $x = 1$.
- Alulról nem korlátos. Felülről korlátos.

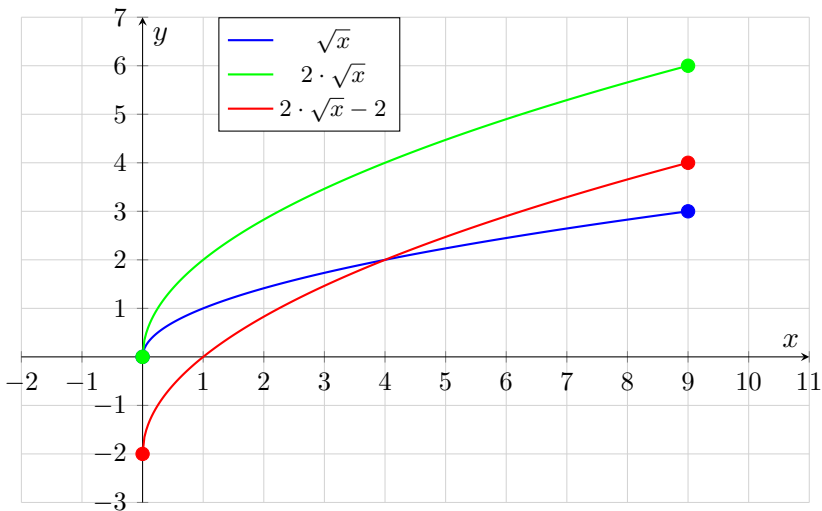
- f) Maximuma van. Maximumhely: $x = 0$. Maximumérték: $y = 1$.
 g) Szigorúan monoton csökkenő.

103. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 2$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a $[0, 9]$ intervallumon, és mutassuk be a transzformációs lépéseket a $g(x) = \sqrt{x}$ függvényből kiindulva!
 b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
 c) Adjuk meg az értékkészletet!
 d) Határozzuk meg a zérushelyet!
 e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
 f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
 g) Jellemezzük a függvényt monotonitás szerint a $[0, 9]$ intervallumon!

Megoldás:

- a) A grafikon és a lépések:



- b) Az értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0, 9]$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-2, 4]$.
 d) Zérushely: $x = 1$.
 e) Alulról és felülről is korlátos.

f) Minimuma és maximuma is van.

Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = -2$.

Maximumhely: $x = 9$, maximumérték: $y = 4$.

g) Szigorúan monoton növekvő.

104. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 3| - 2$ függvényt!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az $|x|$, $|x - 3|$ és $|x - 3| - 2$ is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!

e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

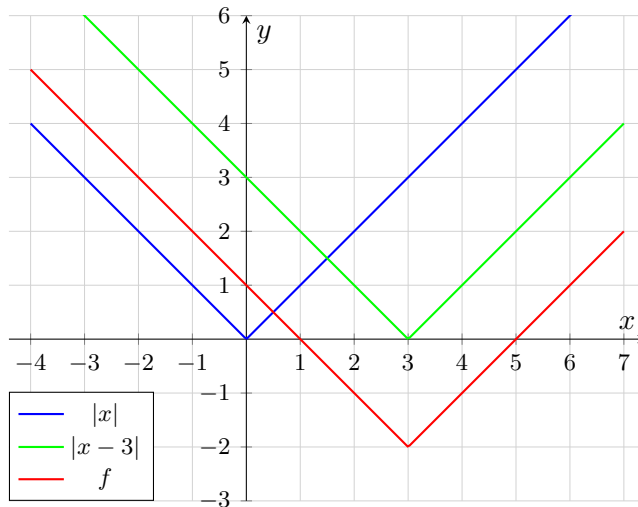
f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

g) Jellemezzük monotonitás szerint!

h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-2; \infty[$.

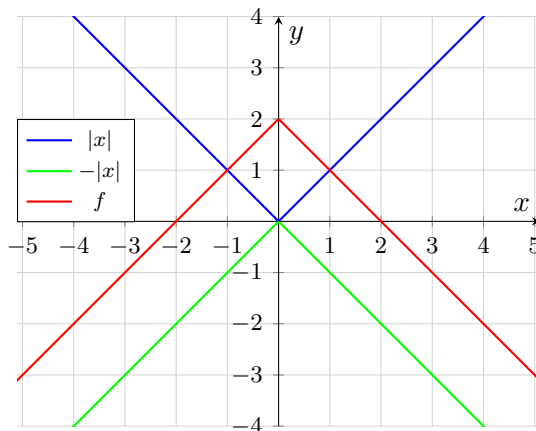
- d) A zérushelyhez megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Mivel $|x - 3| - 2 = 0$, ezért $|x - 3| = 2$, így egyrészt azt kapjuk, hogy $x - 3 = 2$, másrészt $x - 3 = -2$. Ezt felhasználva $x_1 = 5$, illetve $x_2 = 1$ adódik.
- e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
- f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 3$. Minimumérték: $y = -2$.
- g) Szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty; 3]$ intervallumon.
Szigorúan monoton növekvő a $[3; \infty[$ intervallumon.
- h) Nem páros, nem páratlan.

105. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x| + 2$ függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az $|x|$, $-|x|$ és $-|x| + 2$ is ábrázolva!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 2]$.
- d) Megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Mivel $f(x) = -|x| + 2$, ezért a megoldandó egyenlet

$$-|x| + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2.$$

Ebből azt kapjuk, hogy a zérushelyek $x = \pm 2$.

- e) Felülről korlátos. Alulról nem korlátos.
- f) Maximuma van. Maximumhely: $x = 0$. Maximumérték: $y = 2$.
- g) Szigorúan monoton növekvő a $] -\infty; 0]$ intervallumon.
Szigorúan monoton csökkenő a $[0; \infty[$ intervallumon.
- h) Páros, mert a függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre.

106. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x - 2| - 2$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az

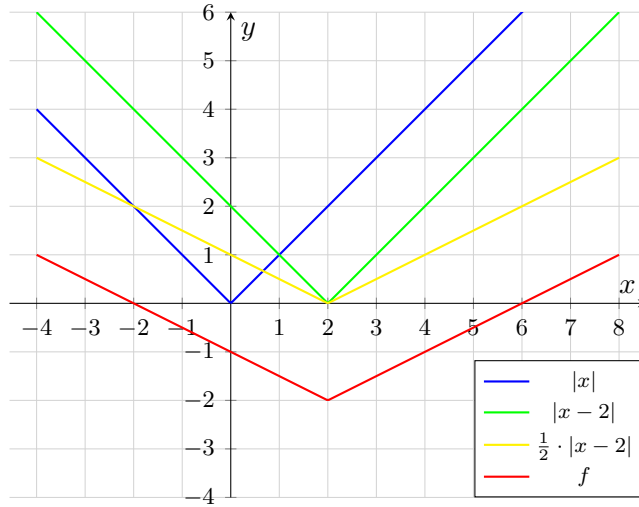
$$|x|, \quad |x - 2|, \quad \frac{1}{2} \cdot |x - 2|$$

függvények is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-2; \infty[$.

d) A zérushelyekhez megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Mivel

$$\frac{1}{2} \cdot |x - 2| - 2 = 0,$$

ezért

$$\frac{1}{2} \cdot |x - 2| = 2 \quad \Rightarrow \quad |x - 2| = 4.$$

Ebből egyrészt $x - 2 = 4$, másrészt $x - 2 = -4$ adódik, azaz

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -2.$$

e) A függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos.

f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 2$. Minimumérték: $y = -2$.

g) A $]-\infty; 2]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[2; \infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekvő.

h) A függvény nem páros és nem páratlan, mivel grafikonja nem szimmetrikus sem az y -tengelyre, sem az origóra.

107. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \cdot |x + 1| + 3$ függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek az

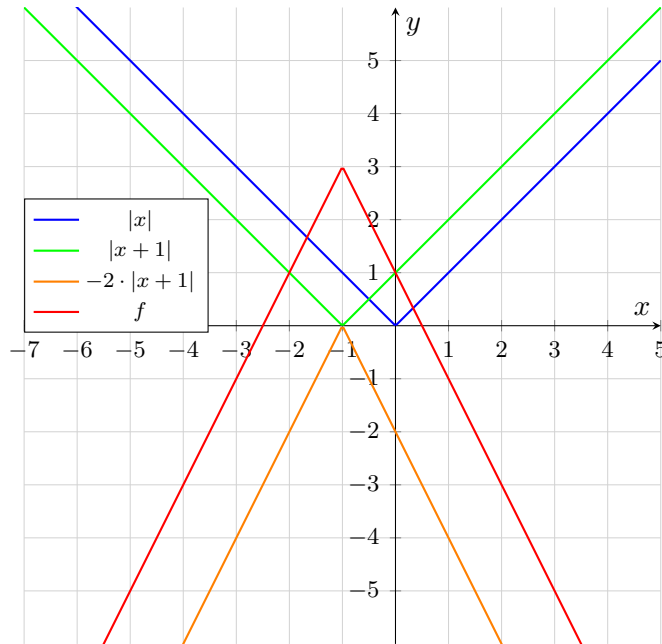
$$|x|, \quad |x+1|, \quad -2 \cdot |x+1|, \quad -2 \cdot |x+1| + 3$$

is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
 c) Határozzuk meg az értékkészletet!
 d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
 e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
 f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
 g) Jellemezzük monotonitás szerint!
 h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 3]$.

d) A zérushelyekhez megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet:

$$-2 \cdot |x + 1| + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot |x + 1| = -3 \quad \Rightarrow \quad |x + 1| = \frac{3}{2}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$x + 1 = \frac{3}{2} \quad \text{illetve} \quad x + 1 = -\frac{3}{2},$$

tehát

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

e) Felülről korlátos, alulról nem korlátos.

f) Maximuma van. Maximumhely: $x = -1$. Maximumérték: $y = 3$.

g) A $] -\infty; -1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[-1; \infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő.

h) Nem páros és nem páratlan, mivel a grafikon sem az y -tengelyre, sem az origóra nem szimmetrikus.

108. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x-2} - 4$ függvényt!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek a

$$2^x, \quad 2^{x-2}, \quad 2^{x-2} - 4$$

függvények is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

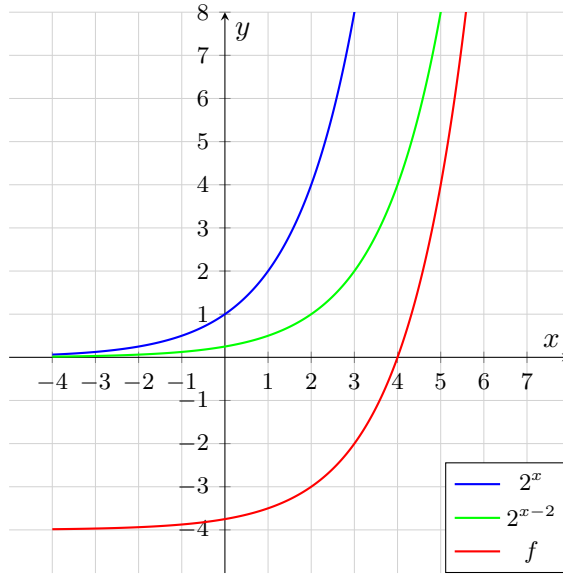
f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

g) Jellemezzük monotonitás szerint!

h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in] - 4; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 4$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

f) Nincs minimuma, nincs maximuma.

g) Szigorúan monoton növekvő.

h) Nem páros, nem páratlan.

109. **Feladat.** Tekintsük az $f: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 2$ függvényt!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushelyet!

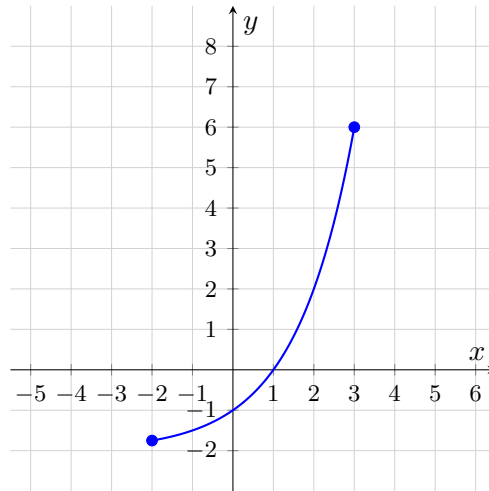
e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

a) A grafikon:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-2; 3]$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-\frac{7}{4}; 6]$.

d) Zérushely: $x = 1$.

e) Alulról és felülről is korlátos (a zárt intervallum miatt).

f) Minimuma és maximuma is van.

Minimumhely: $x = -2$. Minimumérték: $y = -\frac{7}{4}$.

Maximumhely: $x = 3$. Maximumérték: $y = 6$.

g) Szigorúan monoton növekvő.

110. **Feladat.** Tekintsük az $f:]1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x-1) - 3$ függvényt!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek a

$$\log_2 x, \quad \log_2(x-1), \quad \log_2(x-1) - 3$$

függvények is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

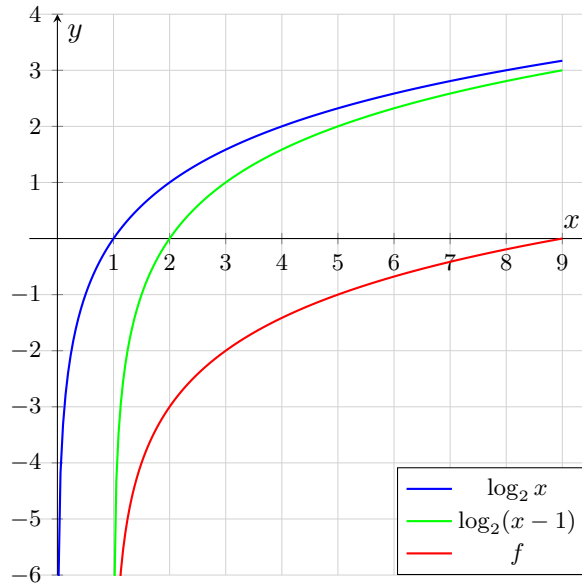
d) Számoljuk ki a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:

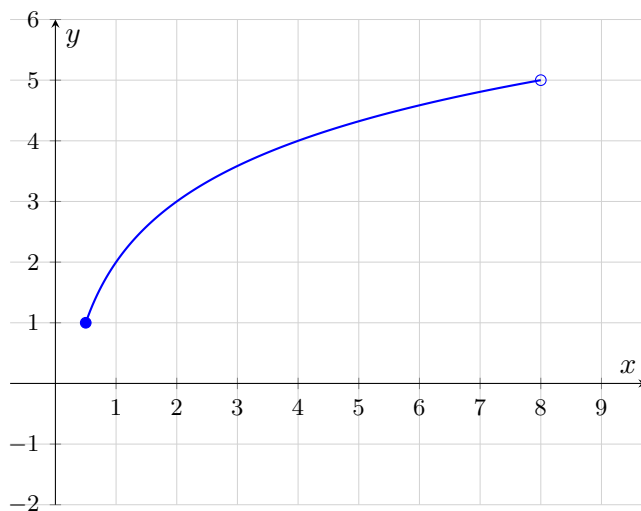


- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in]1; \infty[$.
 - c) Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R}$.
 - d) Zérushely: $x = 9$.
 - e) A függvény nem korlátos sem alulról, sem felülről.
 - f) Nincs minimuma, nincs maximuma.
 - g) Szigorúan monoton növekvő.
 - h) Nem páros, nem páratlan.
111. **Feladat.** Tekintsük az $f: [\frac{1}{2}; 8[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(x) + 2$ függvényt!
- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!
 - b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A grafikon:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [\frac{1}{2}; 8[$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [1; 5[$.
- d) Zérushely: nincs.
- e) Alulról és felülről is korlátos.
- f) Minimuma van, maximuma nincs.
Minimumhely: $x = \frac{1}{2}$, minimumérték: $y = 1$.
- g) Szigorúan monoton növekvő.

3.6. Függvények gazdasági alkalmazásai

Elméleti összefoglaló.

Motiváció. Egy vállalat számára a legfontosabb kérdés nem pusztán az, hogy hogyan alakul a kereslet vagy a költség, hanem az, hogy milyen ár és kibocsátás mellett érhető el a legnagyobb profit.

A keresleti és kínálati összefüggések meghatározzák a piaci környezetet, a bevételi és költségfüggvények pedig lehetővé teszik a vállalati döntések számszerű értékelését.

Ebben a fejezetben az eddig megismert függvénytani eszközöket konkrét gazdasági modellekben alkalmazzuk, és bemutatjuk, hogyan vezetnek ezek a modellek megalapozott gazdasági döntésekhez.

Egy vállalat termelési költségei több tényezőtől függenek. Például a technológiától, a felhasznált alapanyagok árától, a bérek kifizetésétől, az üzemeltetéstől, az adótól, a termelés mennyiségétől. Ezeket a kapcsolatokat matematikai módon függvényként írjuk le.

Az alábbiakban ismertetünk néhány olyan függvényfogalmat, amelyet a közgazdaságtanban használnak.

Definíció. *Fix költségnek* nevezzük azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek. Például ilyenek a bérleti díjak, a hitelkamatok, vagy az olyan egyszeri beruházások, mint például egy gyártósor és az alapanyagok megvásárlása ahhoz, hogy a gyártási folyamatot el tudjuk kezdeni. A fix költséget szokás FC -vel jelölni (fix cost).

Változó költségnek hívjuk azokat a költségeket, amelyek függenek a gyártott mennyiségtől. Például ilyen lehet a dolgozók bére, az anyagköltség, energiaköltség. A változó költséget szokás VC -vel jelölni (variable cost).

Költségfüggvénynek mondjuk azt a függvényt, amely megadja, hogy a termelt mennyiség függvényében mennyi lesz a teljes költségünk, azaz a termelt mennyiséghez hozzárendeli a termelés teljes költségét. A költségfüggvényt szokás $C(q)$ -val vagy $TC(q)$ -val jelölni (total cost).

Példa. Sok esetben a teljes költségfüggvényt olyan

$$C(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

harmadfokú függvénnyel szokás modellezni, amelyre $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$ és $d > 0$ teljesül. Egy ilyen függvény esetén $C(0) = d$ pozitív, ugyanis ez jelenti a

fix költséget. A termelés növekedésével a költség nő. A költség növekedésének üteme kezdetben gyorsabb (ami azt jelenti, hogy a függvény konkáv), majd a növekedés üteme csökken az alkalmazott technológia egyre jobb kihasználtsága miatt. Ezt követően egy bizonyos pont (az inflexiós pont) után a költség ismét gyorsuló mértékben nő (konvexé válik a függvény), ugyanis a technikai keretek a további növekedés számára már szűknek bizonyulhatnak, vagy egyszerűen a kifizetett túlóra díjai már annyira magasak, hogy a költség extrém magassá válik.

Megjegyzés. A korábbi jelöléseket megtartva:

$$C(q) = FC + VC(q).$$

Példa. A $C(q) = q^2 + 2q + 3$ költségfüggvény esetén a fix költsége

$$FC = 3,$$

a változókölség függvény

$$VC(q) = q^2 + 2q.$$

Definíció. *Átlagos fixköltségnek* nevezzük egy termék egy egységére jutó fix költségét.

Megjegyzés. Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos költségfüggvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

Megjegyzés. Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az átlagos változó költségfüggvény:

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q}.$$

Definíció. A termelésből származó összes *bevétel* az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata. A termék árát p -vel, az eladott mennyiséget q -val jelölve, a fent leírtak a $p \cdot q$ összefüggéssel írhatók le. A teljes bevételt R -el vagy TR -el szokás jelölni (revenue).

Definíció. A *keresleti függvény* egy termék minden lehetséges árához hozzárendeli a hozzá tartozó keresett mennyiséget. A függvényt $D(p)$ -vel (demand) vagy $f(p)$ -vel szokás jelölni.

Megjegyzés. A keresleti függvény általában monoton csökkenő, azaz növelve az árat, a belőle keresett mennyiség csökken.

Ha $f(p)$ egy keresleti függvény, vagyis az $f(p)$ függvény megadja, hogy a p

ár mellett mennyi az adott termék iránti kereslet, akkor a termék eladásából származó teljes bevétel:

$$R(p) = p \cdot f(p).$$

Definíció. A keresleti függvény inverzét *inverz keresleti függvénynek* nevezzük. Az inverz keresleti függvény minden egyes mennyiségegységhez hozzárendeli azt az árat, amely mellett a vizsgált személy vagy csoport még éppen hajlandó az adott terméket megvásárolni. Az említett árat *rezervációs ár*nak nevezzük.

Definíció. Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az *átlagbevétel*:

$$AR(q) = \frac{R(q)}{q}.$$

Definíció. *Profitnak* vagy *nyereségnek* nevezzük a bevétel és költség különbségét:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

Definíció. *Fedezeti pontnak* nevezzük azt a termelési szintet, amelyhez tartozó profit értéke zérus.

Megjegyzés. Azon termelési mennyiség esetén, amikor a profit zérus, a bevételi függvény és költségfüggvény értéke azonos.

Az átlagköltség függvény minimuma a fedezeti pont.

Definíció. *Üzembezárási pontnak* nevezzük az átlagos változó költség függvény minimumát.

Definíció. A *kínálat* egy vagy több termék azon mennyisége, amivel az általunk vizsgált személy vagy vállalat rendelkezik, és azt adott ár mellett eladni is hajlandó. Kézenfekvőnek tűnik, hogy minden lehetséges árszinthez az emellett érvényes kínálatot rendeljük hozzá, létrehozva így a *kínálati függvényt*. Ezt $S(p)$ -vel jelölhetjük (supply), ahol p az adott termék ára.

Megjegyzés. A vállalatok kínálati függvényei általában monoton növekvőek, vagyis az ár emelkedésével a kínált mennyiség is nő.

Definíció. A keresleti és kínálati függvény metszéspontját *egyensúlyi pontnak* hívjuk. Az egyensúlyi ponthoz tartozó mennyiséget *egyensúlyi mennyiségnek*, az egyensúlyi ponthoz tartozó árat *egyensúlyi ár*nak nevezzük.

Amikor a kereslet nagyobb, mint a kínálat, *túlkeresletről* vagy más szóval *hiányról* beszélünk. Ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, akkor *túlkínálatról* beszélünk, ilyenkor *felesleg* keletkezik.

A keresleti és a kínálati függvényt egy közös koordináarendszerben ábrázolva a kapott ábrát *Marshall-keresztnek* nevezzük.

Definíció. *Hasznossági függvénynek* mondjuk azt a függvényt, amely a gazdaság egy szereplőjének (vagy bizonyos esetekben a társadalom egészének) meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit matematikai eszközökkel modellezi.

Megjegyzés. A hasznossági függvénytől elvárjuk, hogy monoton növekvő és konkáv legyen. Lényegében az azt jelenti, hogy ha az általunk vizsgált termékből többet vásárolunk, akkor az nagyobb hasznosságot eredményez, továbbá a növekvő mennyiségekhez „egyre kevésbé növekvő” hasznót rendel. A hasznossági függvényt $U(x)$ -el jelöljük.

Példa. A vállalatok gyakran elemzik, hogyan alakul a termék ára a kereslet függvényében. A piaci ár és a kereslet között általában fordított arányossági kapcsolat áll fenn: ha nő a kereslet, az ár csökken, és fordítva.

A gazdasági számításokban azonban sokszor további transzformációkat is végzünk, például az ÁFA (általános forgalmi adó) hozzáadását. Ilyenkor két függvény is szerepet kap, amelyeket egymás után kell alkalmazni. Ez adja a függvények kompozícióját.

Tegyük fel, hogy egy termék nettó egységára a kereslet függvényében az alábbi módon változik:

$$p(q) = 120 - 0,5q, \quad q \in [0, 240],$$

ahol q a keresett mennyiség (darabban mérve), $p(q)$ pedig a nettó egységár (Ft/db). A hozzárendelési szabály egy negatív meredekségű elsőfokú függvény: ha nő a kereslet, az ár csökken.

A vállalat ezután bevezeti az ÁFA-t, amely 27%. A bruttó ár függvénye a nettó ár függvényében:

$$g(p) = 1,27p.$$

Ez a függvény minden nettó árat 27%-kal megszoroz, tehát a bruttó ár kiszámítását végzi el.

Megadjuk, hogyan függ a bruttó ár közvetlenül a kereslettől.

Ehhez egymás után alkalmazzuk a két függvényt:

- először a keresletből meghatározzuk a nettó árat $p(q)$,
- majd erre alkalmazzuk az áfát $g(p)$.

A két lépés egymás utáni alkalmazása a $(g \circ p)(q) = g(p(q))$ összetett függvény végrehajtását jelenti. Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$(g \circ p)(q) = g(p(q)) = 1,27(120 - 0,5q) = 152,4 - 0,635q.$$

Ez az összetett függvény közvetlenül megadja a bruttó árat a kereslet függvényében.

Vizsgáljuk meg, hogy mi az összetett függvény értelmezési tartománya és értékkészlete.

A kereslet q az eredeti feladat szerint $0 \leq q \leq 240$ között változhat. Ez marad az új függvény értelmezési tartománya is, azaz

$$D_{g \circ p} = [0; 240].$$

A bruttó ár $q = 0$ esetén maximális, ekkor

$$(g \circ p)(0) = 152,4,$$

míg $q = 240$ esetén nullára csökken

$$(g \circ p)(240) = 0.$$

Tehát az összetett függvény értékkészlete

$$R_{g \circ p} = [0; 152,4].$$

Gazdasági értelmezésben ez azt jelenti, hogy a függvénykompozíció a gazdasági folyamat két lépését írja le egyetlen képlettel:

- keresleti hatás: a termék árát befolyásolja, hogy hány darabot keresnek.
- ÁFA-hatás: az így kapott nettó árat tovább módosítja az adókulcs.

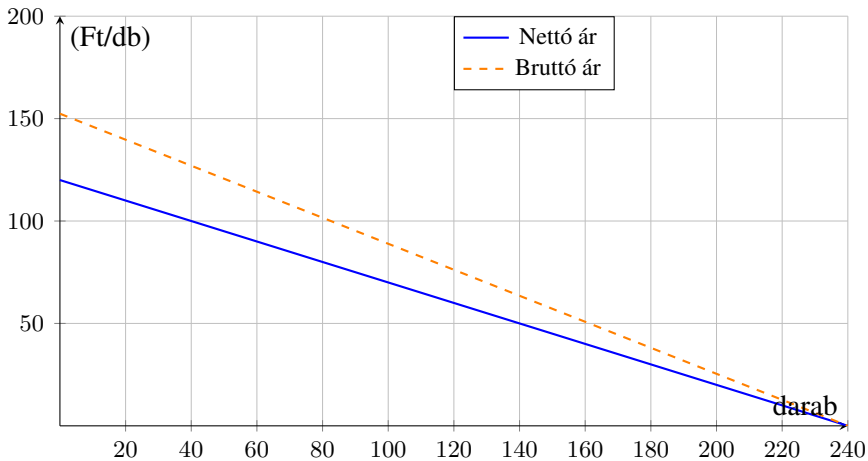
A $g \circ p$ kompozíció tehát a kereslet $\rightarrow$ bruttó ár kapcsolatot adja meg, vagyis megmutatja, hogy a vevők ténylegesen mekkora árat fizetnek a kereslet függvényében. Ez segít például árpolitikai döntések, piaci előrejelzések vagy bevételi modellek készítésében.

Például ha a kereslet $q = 100$ egység, akkor:

$$(g \circ p)(100) = 152,4 - 0,635 \cdot 100 = 88,9,$$

ami azt jelenti, hogy 100 darabos keresletnél a bruttó egységár 88,9 Ft.

Az alábbi ábra a nettó ár és a bruttó ár változását mutatja a kereslet függvényében.



A vízszintes tengelyen a kereslet (q) szerepel, amely a vásárolni kívánt termékek mennyiségét fejezi ki (darabban mérve). A függőleges tengelyen az egységár látható (forintban mérve). Vegyük észre, hogy

- mindkét függvény csökkenő trendet mutat.
- a bruttó ár (szaggatott vonal) mindig a nettó ár „fölött” helyezkedik el, de a két vonal „egyre közelebb kerül egymáshoz”, mert nagyobb keresletnél kisebb az ÁFA abszolút értéke hiszen a nettó ár is csökken.
- A két függvénynek nincs metszéspontja, de a függőleges távolságuk egyre kisebb.

A kék, folytonos vonal a nettó ár függvényét mutatja:

$$p(q) = 120 - 0,5q.$$

Vegyük észre, hogy

- ha nincs kereslet ($q = 0$), akkor az ár maximális, 120 Ft/db.
- Ha nő a kereslet, akkor az egységár csökken, és $q = 240$ esetén az egységár nulla lenne.

A narancssárga, szaggatott vonal a bruttó ár függvénye:

$$(g \circ p)(q) = 152,4 - 0,635q.$$

Ez a függvény úgy jön létre, hogy a nettó ár minden értékét 1,27-tel megszorozzuk, vagyis 27%-os ÁFA-t adunk hozzá.

$$(g \circ p)(q) = g(p(q)) = 1,27(120 - 0,5q).$$

A bruttó árgörbe tehát a nettó árgörbéhez képest

- magasabbról indul (152,4 Ft/db a 120 Ft/db helyett),
- és „meredekebben” csökken (0,635 Ft/db a 0,5 Ft/db helyett).

Összefoglalva a

$$(g \circ p)(q)$$

összetett függvény a teljes folyamatot összefoglalja, azaz megmutatja, hogy a kereslet függvényében hogyan alakul a vásárlók által ténylegesen fizetendő ár.

Kidolgozott feladatok.

112. **Feladat.** Egy termék iránti keresleti függvény

$$f(p) = 100 - 10p,$$

ahol $p \in [0; 10]$ a termék egységára euro-ban. A termék iránti keresletet darabban értjük.

- a) Mennyi a kereslet, ha a termék ára 3 euro?
- b) Rajzoljuk fel a keresleti függvény grafikonját!
- c) Adjuk meg a bevételi függvényt!
- d) Vázoljuk fel a bevételi függvény grafikonját!
- e) Milyen ár esetén lesz a bevétel maximális?
- f) A maximális bevétel esetén hány terméket adunk el?

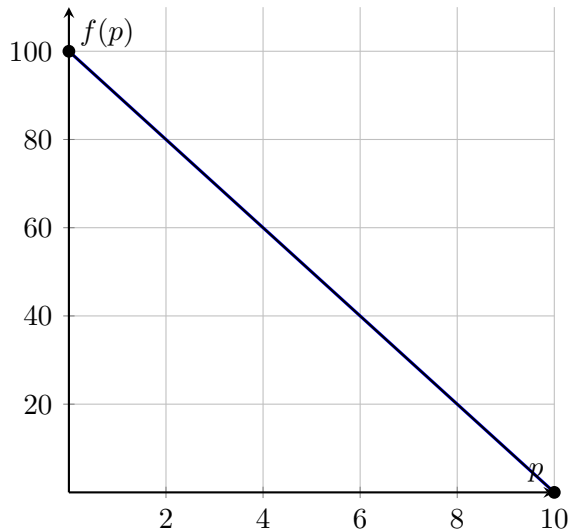
Megoldás:

- a) Három euro esetén

$$f(3) = 100 - 10 \cdot 3 = 70,$$

így 70 darab terméket fogunk tudni értékesíteni.

- b) A kereslet függvény grafikonja:



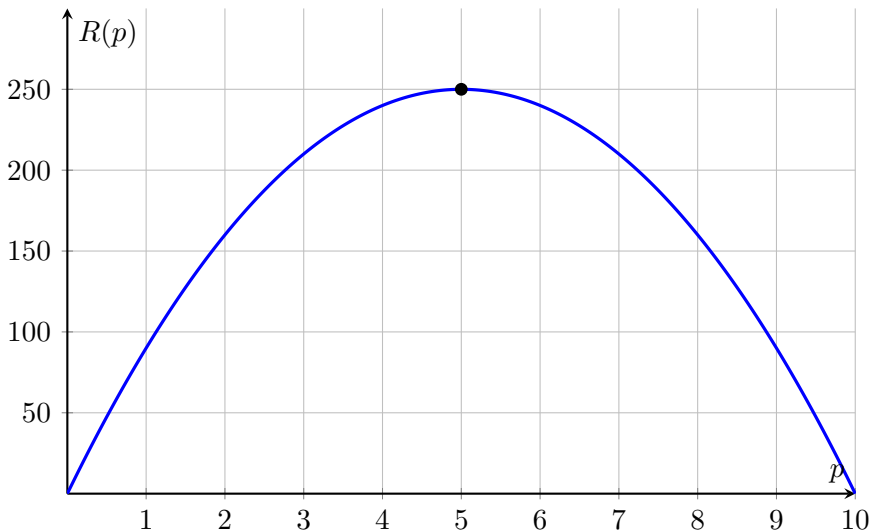
c) A bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (100 - 10p) = 100p - 10p^2.$$

d) Elsőként teljes négyzetté alakítjuk a függvényt. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R(p) &= -10 \cdot (p^2 - 10p) = -10 \cdot [(p - 5)^2 - 25] = \\ &= -10 \cdot (p - 5)^2 + 250. \end{aligned}$$

A függvény grafikonja:



e) A kérdés, hogy milyen egységárat válasszunk a terméknek ahhoz, hogy a bevételünk maximális legyen. A fenti függvénynek akkor van maximuma, ha $p = 5$. Azt kaptuk tehát, hogy 5 euro ár esetén lesz a legnagyobb a bevételünk.

f) Abban az esetben, amikor maximális a bevételünk

$$q = f(5) = 100 - 10 \cdot 5 = 50,$$

így 50 darab terméket kell legyártanunk. Ebben az esetben jutunk tehát a legnagyobb bevételhez, ami

$$R(5) = 5 \cdot f(5) = p \cdot q = 250,$$

vagyis 250 euro.

113. **Feladat.** Egy vállalat teljes költségfüggvénye jól modellezhető a

$$C(q) = q^3 - 4q^2 + 10q + 10$$

függvénnyel, ahol q a vállalat által termelt mennyiség ezer darabban. A költséget ezer euróban értjük.

- a) Adjuk meg a fix költséget!
- b) Adjuk meg a változó költség függvényt!
- c) Adjuk meg az átlagköltség függvényt!
- d) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!
- e) Határozzuk meg az átlagos változó költség függvényt!
- f) Adjuk meg az üzembezárási pontot!

Megoldás:

a) Mivel $C(0) = 10$, ezért a fix költség 10 000 euro.

b) A változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 4q^2 + 10q.$$

c) Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 4q + 10 + \frac{10}{q}.$$

d) Az átlagos fix költség függvény:

$$AFC(q) = \frac{10}{q},$$

e) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10.$$

f) Az üzembezárási pont a átlagos változó költség függvény minimuma. Az átlagos változó költség függvény másodfokú, így a minimumhelye

$$q_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2},$$

ekkor a függvényérték

$$AVC(2) = 4 - 8 + 10 = 6.$$

Az üzembezárási ponthoz tartozó termelési mennyiség: 2 000 darab.

114. Feladat. Egy termék keresleti függvénye $f(p) = 150 - 3p$, kínálati függvénye $S(p) = 2p - 20$. Az árat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

a) Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!

b) Rajzoljuk fel a Marshall-keresztet!

Megoldás:

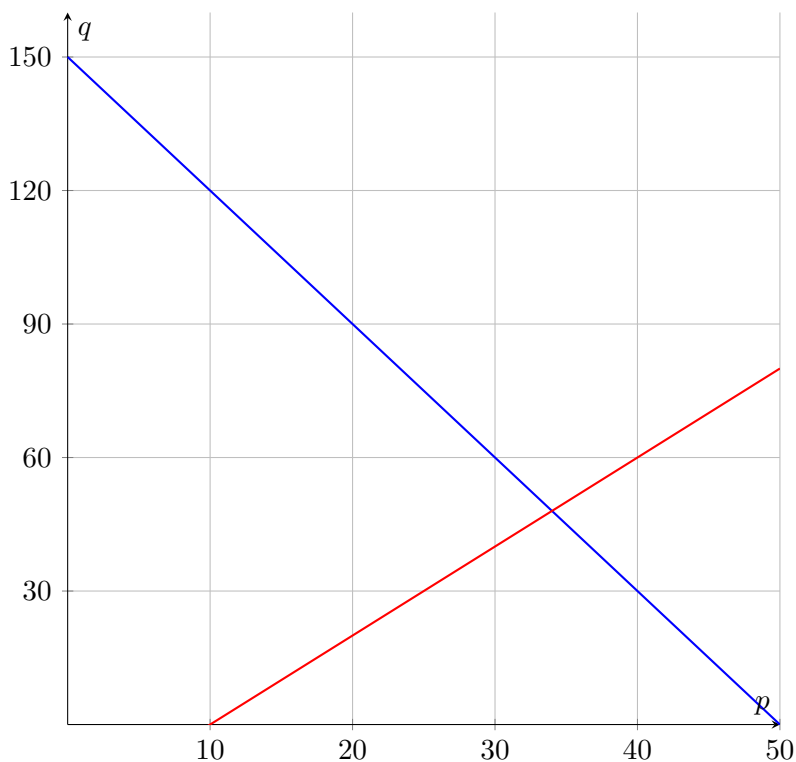
a) Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja, ami jelen esetben a $150 - 3p = 2p - 20$ egyenlet megoldását jelenti. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$170 = 5p,$$

így az egyensúlyi ár $p = 34$ euro. Ekkor az egyensúlyi mennyiség

$$q = f(34) = S(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48 \text{ darab.}$$

b) A Marshall-kereszt:



115. Feladat. Megfigyelték, hogy 485 \$ egységáron 3 000 darabot tudnak értékesíteni egy termékből. Amennyiben az árat 20 \$-ral csökkentik, úgy az eladott mennyiség 250 darabbal növekszik. Az eladott mennyiség az árnak elsőfokú lineáris függvénye!

- Határozzuk meg a keresleti függvényt!
- Adjuk meg azt az árat, amelyhez tartozó kereslet 0 darab!
- Adjuk meg az inverz keresleti függvényt!

Megoldás:

- A keresleti függvényt

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a (485; 3 000) és a (465; 3 250) pontok, így teljesülnek a

$$3\,000 = 485a + b$$

és a

$$3\,250 = 465a + b$$

egyenletek. A második egyenletből kivonva az első azt kapjuk, hogy

$$250 = -20a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{250}{20} = -12,5.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$3\,000 = -485 \cdot 12,5 + b \quad \Rightarrow \quad b = 9\,062,5$$

adódik. A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = -12,5p + 9\,062,5.$$

- Valójában a keresleti függvény zérushelyét keressük, vagyis az $f(p) = 0$ egyenlet megoldását:

$$-12,5p + 9\,062,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 725.$$

Azt kaptuk tehát, hogy 725 \$-os ár esetén már senki sem vásárolja meg a terméket.

- A keresleti mennyiséget q -val jelölve, az előbbieket felhasználásával felírhatjuk a

$$q = -12,5p + 9\,062,5$$

összefüggést. Az inverz keresleti függvény meghatározásához valójában a fenti egyenletből kell kifejeznünk a p -t:

$$p = \frac{q - 9\,062,5}{-12,5} \quad \Rightarrow \quad p = -0,08q + 725.$$

Az inverz keresleti függvény tehát:

$$f^{-1}(q) = -0,08q + 725.$$

116. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye $f(p) = 200 - p$, kínálati függvénye $S(p) = p$.

- a) Határozzuk meg az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
- b) Adjuk meg a bevételi függvényt!

Megoldás:

- a) Az egyensúlyi árat a keresleti függvény és a kínálati függvény metszéspontja, pontosabban a $200 - p = p$ egyenlet megoldása adja. Ebből azt kapjuk, hogy $p = 100$. Az egyensúlyi mennyiséget úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk például a kínálati függvény $p = 100$ helyen vett helyettesítési értékét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$S(100) = 100.$$

- b) A bevételi függvény:

$$R(p) = p \cdot f(p) = 200p - p^2.$$

117. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye $f(p) = 600 - 10p$, ahol az árat \$-ban, a keresleti mennyiséget pedig darabban értjük.

- a) Adjuk meg a bevételi függvényt!
- b) Milyen ár esetén lesz maximális a bevételünk?
- c) Határozzuk meg a keresletet a maximális bevételt biztosító termelési szint esetén!
- d) Mennyi a maximális bevétel?

Megoldás:

- a) A bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = 600p - 10p^2.$$

- b) A bevételi függvény másodfokú, melynek maximumhelye

$$p_{\max} = -\frac{600}{-20} = 30.$$

Azt kaptuk, hogy 30\$-os egységár esetén lesz maximális a bevételünk.

- c) A maximális bevételt biztosító termelési szint esetén a keresleti mennyiség:

$$f(30) = 600 - 10 \cdot 30 = 300 \text{ db.}$$

d) A maximális bevétel

$$R(30) = 600 \cdot 30 - 10 \cdot 30^2 = 9\,000 \text{ \$}.$$

118. Feladat. Egy termék iránti keresletet az ár függvényében modellezzük elsőfokú függvénnyel. Tudjuk, hogy amennyiben a termék egységára 80 Ft, úgy a termék iránti kereslet 1400 db, továbbá, ha a termék egységára 50 Ft, akkor a termék iránti kereslet 2000 db.

Ugyenezen termék esetén, ha a termék ára 80 Ft, akkor a kínálat 750 db, ha a termék ára 50 Ft, akkor a kínálat 375 db. A kínálati függvényt szintén elsőfokú függvénnyel modellezzük!

- Írjuk fel a keresleti függvényt!
- Írjuk fel a kínálati függvényt!
- Adjuk meg a bevételi függvényt!
- Határozzuk meg, hogy milyen egységár esetén lesz a bevétel maximális! Adjuk meg ekkor a keresletet!
- Határozzuk meg a maximális bevételt!
- Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!

Megoldás:

a) Mivel a keresett függvény elsőfokú, ezért

$$f(p) = a \cdot p + b$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a (80; 1400), valamint az (50; 2000) pontok, így egyrészt teljesül, hogy $f(80) = 1400$, másrészt $f(50) = 2000$, amiből a

$$\left. \begin{array}{rcl} 80a + b & = & 1\,400 \\ 50a + b & = & 2\,000 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = -600$, tehát $a = -20$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot (-20) + b = 1400 \quad \Rightarrow \quad b = 3\,000$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a keresleti függvény

$$f(p) = -20p + 3\,000.$$

b) Mivel a kínálati függvény elsőfokú, ezért azt

$$S(p) = c \cdot p + d$$

alakban keressük. A függvény grafikonjára illeszkednek a $(80; 750)$, valamint az $(50; 375)$ pontok, így egyrészt $S(80) = 750$, másrészt $S(50) = 375$, amiből a

$$\left. \begin{array}{l} 80a + b = 750 \\ 50a + b = 375 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy $30a = 375$, így $a = 12,5$. A kapott értéket behelyettesítve például az első egyenletbe

$$80 \cdot 12,5 + b = 750 \quad \Rightarrow \quad b = -250$$

adódik. A kapott eredmények felhasználásával azt kapjuk, hogy a kínálati függvény:

$$S(p) = 12,5p - 250.$$

c) A bevételt a termék egységárának és a termék iránti keresletnek a szorzata adja:

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (-20p + 3\,000) = -20p^2 + 3\,000p.$$

d) A bevételi függvény másodfokú, amelynek minimumhelye

$$p_{\min} = -\frac{3\,000}{2 \cdot (-20)} = 75.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$p = 75 \text{ Ft}$$

esetén lesz maximális a bevétel. Ekkor

$$f(75) = -20 \cdot 75 + 3\,000 = 1\,500,$$

így a keresleti mennyiség 1 500 db.

e) Mivel

$$R(75) = 20 \cdot (75 - 75)^2 + 11\,250 = 11\,250,$$

ezért a maximális bevétel 11 250 Ft.

f) Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja:

$$-20p + 3\,000 = 12,5p - 250 \quad \Rightarrow \quad 32,5p = 3\,000.$$

Az egyensúlyi ár tehát $p = 100$ Ft. Az egyensúlyi mennyiség:

$$f(100) = -20 \cdot 100 + 3\,000 = 1\,000 \text{ db.}$$

119. **Feladat.** Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = q^3 - 20q^2 + 10q + 1\,100,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük.

- Adjuk meg a fix költséget!
- Határozzuk meg a változó költség függvényt!
- Adjuk meg az átlagköltség függvényt!
- Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!
- Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

Megoldás:

a) A fix költség: $FC = 1\,100\,000$ Ft.

b) A változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 20q^2 + 10q.$$

c) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 20q + 10 + \frac{1\,100}{q}.$$

d) Az átlagos fix költség: $AFC = \frac{1\,100}{q}$.

e) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 20q + 10.$$

120. **Feladat.** Egy termék inverz keresleti függvénye

$$f^{-1}(q) = 400 - 5q.$$

Ugyanezen termékhez tartozó (teljes) költségfüggvény

$$C(q) = 20q^2 + 100.$$

A keresletet ezer darabban, a költséget ezer forintban értjük.

- Adjuk meg a keresleti függvényt!
- Határozzuk meg a bevételi függvényt!
- Írjuk fel a profitfüggvényt!
- Ábrázoljuk a profitfüggvényt!
- Hány darab termék eladása esetén lesz a nyereség maximális?

Megoldás:

- a) A keresleti függvényt úgy kapjuk meg, hogy a

$$p = 400 - 5q$$

egyenletből kifejezzük q -t:

$$q = \frac{400 - p}{5}.$$

A keresleti függvény tehát:

$$f(p) = 80 - \frac{1}{5}p.$$

- b) A bevétel az eladott mennyiség függvényében:

$$R(q) = p \cdot q = (400 - 5q) \cdot q = 400q - 5q^2.$$

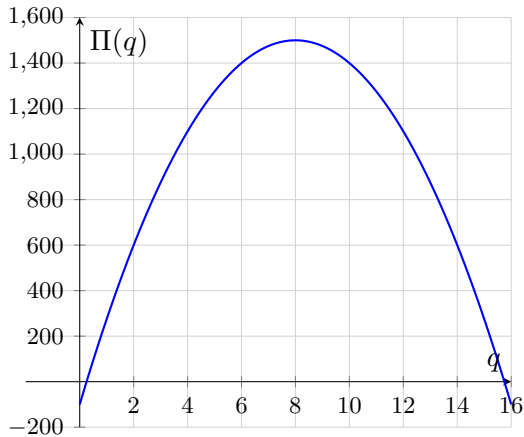
- c) A profitfüggvény

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= R^*(q) - C(q) = (400q - 5q^2) - (20q^2 + 100) = \\ &= -25q^2 + 400q - 100.\end{aligned}$$

- d) A profitfüggvényt teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= -25 \cdot (q^2 - 16q + 4) = -25 \cdot ((q - 8)^2 - 60) = \\ &= -25 \cdot (q - 8)^2 + 1\,500.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva a profitfüggvény grafikonja:



- e) A profitfüggvény maximum helye: $q = 8$, így 8 000 darab termék esetén lesz maximális a nyereségünk. Ekkor a maximális nyereség 1 500 000 Ft.

121. **Feladat.** Egy vállalat (teljes) költségfüggvénye

$$C(q) = 500 + 140q,$$

ahol a költséget ezer forintban, a darabszámot ezer darabban értjük. A bevételt ezer forintban az

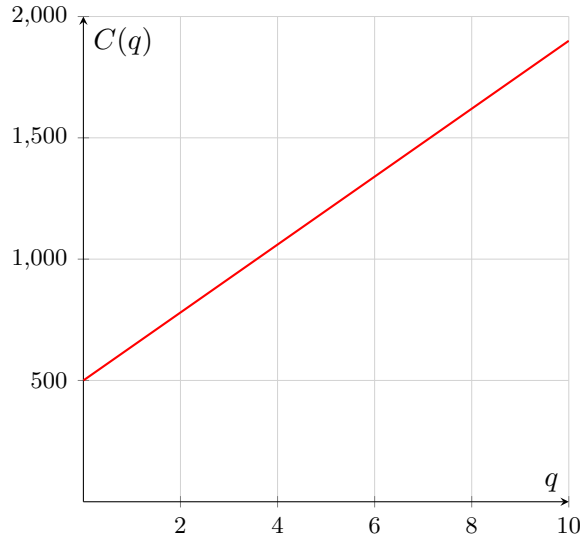
$$R(q) = 200q - q^2$$

függvény adja meg.

- a) Vázoljuk fel a $C(q)$ függvény grafikonját!
- b) Mennyibe kerül 2 000 darab termék előállítása?
- c) Hány darab terméket tudunk előállítani 1 900 000 forintból?
- d) Adjuk meg a fix költséget!
- e) Határozzuk meg a változó költség függvényt!
- f) Adjuk meg az átlag költség függvényt!
- g) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!
- h) Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!
- i) Vázoljuk fel a $C(q)$ függvénnyel közös koordináta-rendszerben a $R(q)$ függvény grafikonját!
- j) Mennyi lesz a bevételünk 2 000 darab termék gyártása esetén?
- k) Adjuk meg a profitfüggvényt!
- l) Hány darab terméket gyártsunk ahhoz, hogy a nyereségünk a lehető legnagyobb legyen?
- m) Mennyi a maximális nyereség?
- n) Vázoljuk fel a profitfüggvény grafikonját!
- o) Hány darab terméket kell eladnunk ahhoz, hogy 975 000 forint legyen a bevételünk?
- p) Hány darab termék gyártása esetén lesz a bevétel nagyobb, mint a költség?

Megoldás:

- a) A $C(q)$ függvény grafikonja:



- b) A költség függvény $q = 2$ helyen vett helyettesítési értéke

$$C(2) = 500 + 140 \cdot 2 = 780,$$

így 2 000 darab termék előállítása 780 000 forintba kerül.

- c) Az

$$1\,900 = 500 + 140q$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki 500-at, majd az egyenlet mindkét oldalát osszuk el 140-nel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1\,900 = 500 + 140q \quad \Rightarrow \quad 1\,400 = 140q \quad \Rightarrow \quad q = 10,$$

tehát 10 000 darab terméket tudunk előállítani.

- d) A fix költség $FC = 500\,000$ forint.

- e) A változó költség függvény:

$$VC(q) = 140q.$$

- f) Az átlag költség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 140 + \frac{500}{q}.$$

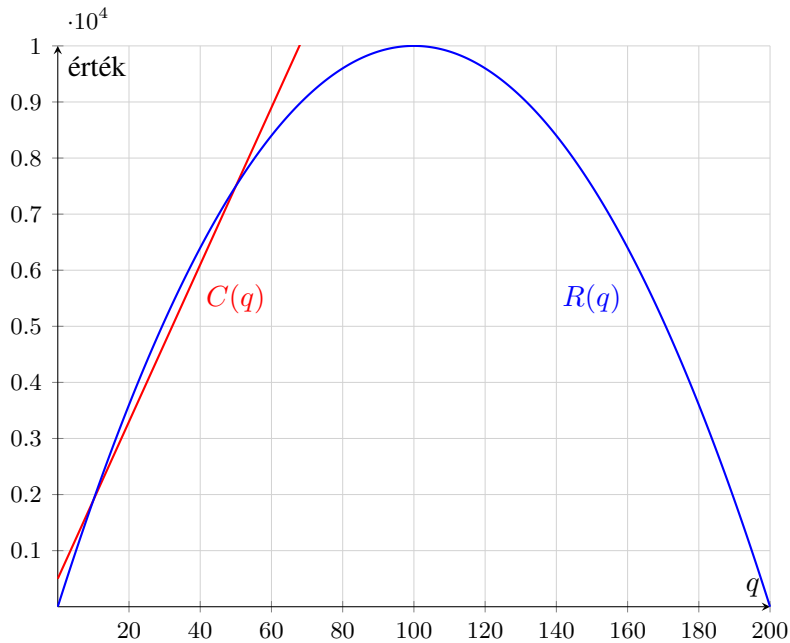
g) Az átlagos fix költség:

$$AFC(q) = \frac{FC}{q} = \frac{500}{q}.$$

h) Az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{140q}{q} = 140.$$

i) A $C(q)$ és $R(q)$ függvény grafikonja:



j) Mivel

$$R(2) = 200 \cdot 2 - 2^2 = 396,$$

ezért 2 000 darab termék gyártása esetén 396 000 forint lesz a bevételünk.

k) A profitfüggvény:

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= R(q) - C(q) = (200q - q^2) - (500 - 140q) = \\ &= -q^2 + 60q - 500. \end{aligned}$$

l) A profitfüggvény maximumhelye:

$$q_{\max} = -\frac{60}{2 \cdot (-1)} = 30,$$

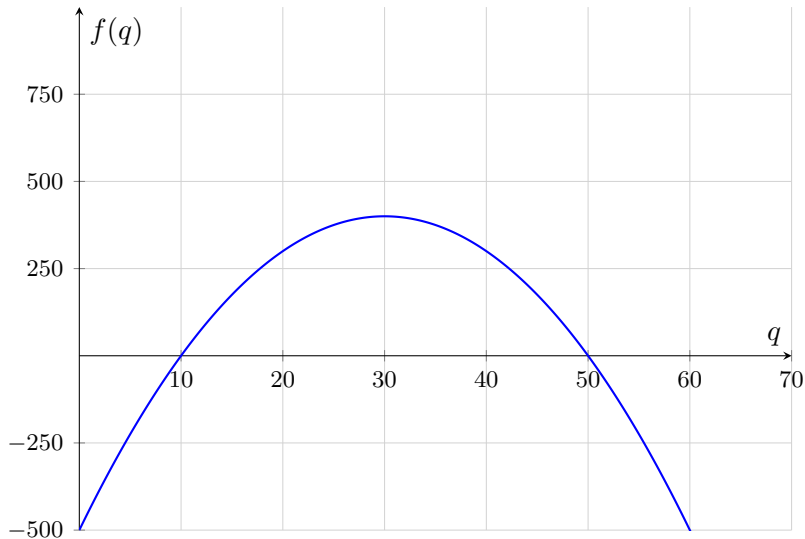
így 30 000 darab termék gyártása esetén lesz a legnagyobb a nyereségünk.

m) Mivel

$$\Pi(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 - 500 = 400,$$

ezért a maximális profit 400 000 forint.

n) A profitfüggvény grafikonja:



o) Meg kell oldanunk a

$$200q - q^2 = 975 \quad \Rightarrow \quad q^2 - 200q + 975 = 0$$

egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$q_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{40\,000 - 3\,900}}{2} = \frac{200 \pm 190}{2},$$

így $q_1 = 195$ és $q_2 = 5$.

p) A bevétel pontosan akkor nagyobb, mint a költség, amikor a profitfüggvény pozitív értéket vesz fel. Ezt az előbbi függvény grafikonjából is leolvashatjuk. Azt kapjuk, hogy

$$q \in]10; 50[$$

esetén teljesül a kívánt feltétel, így ha azt szeretnénk, hogy nagyobb legyen a bevétel, mint a költség, akkor 10 000 darabnál több és 50 000 darabnál kevesebb terméket kell gyártanunk.

122. **Feladat.** Egy termék iránti keresleti függvény

$$f(p) = \frac{8\,000}{p},$$

a kínálati függvény

$$S(p) = 40p - 400 \quad (p \geq 10).$$

A mennyiséget darabban, az árat ezer dollárban értjük.

- Határozzuk meg az egyensúlyi mennyiséget és az egyensúlyi árat!
- Ábrázoljuk a keresleti függvényt és a kínálati függvényt közös koordináta-rendszerben! Jelöljük az egyensúlyi pontot!

Megoldás:

- Meg kell oldanunk az $f(p) = S(p)$, vagyis az

$$\frac{8\,000}{p} = 40p - 400$$

egyenletet. A nevezővel szorozva mindkét oldalt, azt kapjuk, hogy

$$8\,000 = 40p^2 - 400p.$$

Az egyenletet nullára rendezve és mindkét oldalt osztva 40-nel

$$p^2 - 10p - 20 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

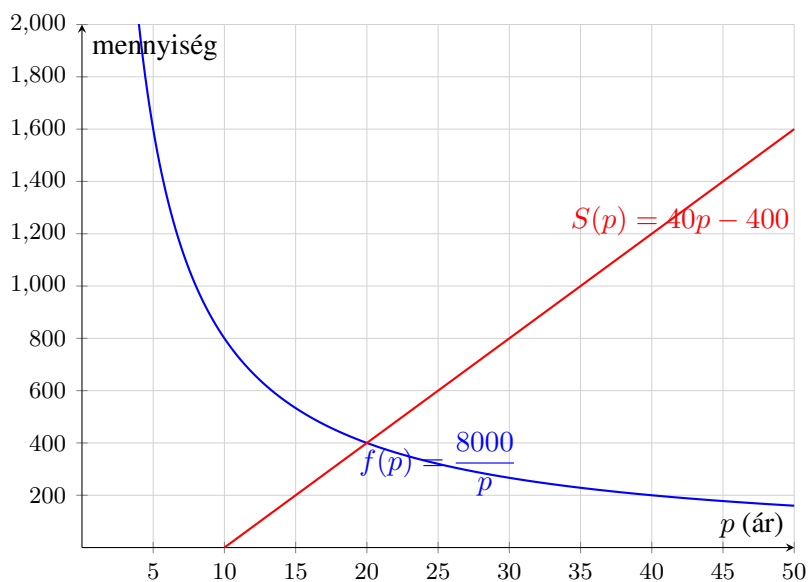
$$p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 800}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2}.$$

Tehát $p_1 = 20$, illetve $p_2 = -10$. Mivel $p > 0$, ezért az egyensúlyi ár 20 000 dollár. Mivel

$$f(20) = \frac{8\,000}{20} = 400,$$

ezért egyensúlyi mennyiség 400 darab.

- A keresleti és kínálati függvények:



123. **Feladat.** Egy termék x darabjának előállítási költsége forintban kifejezve:

$$C(x) = 100x \cdot \sqrt{x} + 500.$$

- Mennyi lesz a költség, ha 9 darab terméket gyártunk?
- Mennyi lesz a költség, ha 16 darab terméket gyártunk?
- Mennyivel növekszik a költség, ha az eredetileg tervezett a darab helyett $a + 1$ darab terméket gyártunk?
- Hány darab terméket tudunk előállítani 100 500 forintból?

Megoldás:

- a) Ha 9 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(9) = 100 \cdot 9 \cdot \sqrt{9} + 500 = 3\,200 \text{ Ft.}$$

- b) Ha 16 darab terméket gyártunk, akkor

$$C(16) = 100 \cdot 16 \cdot \sqrt{16} + 500 = 6\,900 \text{ Ft.}$$

- c) Ha a darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a) = 100a \cdot \sqrt{a} + 500.$$

Ha $a + 1$ darab terméket gyártunk, akkor a költség

$$C(a + 1) = 100 \cdot (a + 1) \cdot \sqrt{a + 1} + 500.$$

A költség növekedése:

$$\begin{aligned} C(a + 1) - C(a) &= 100 \cdot (a + 1) \cdot \sqrt{a + 1} + \\ &+ 500 - 100a \cdot \sqrt{a} - 500 = \\ &= 100 \cdot ((a + 1) \cdot \sqrt{a + 1} - a \cdot \sqrt{a}). \end{aligned}$$

d) Meg kell oldanunk a

$$100\,500 = 100x \cdot \sqrt{x} + 500$$

egyenletet. Az egyenlet mindkét oldalából vonjunk ki 500-at, majd a kapott egyenlet mindkét oldalát osszuk 100-zal. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$100\,500 = 100x \cdot \sqrt{x} + 500$$

$$100\,000 = 100x \cdot \sqrt{x}$$

$$1\,000 = x \cdot \sqrt{x}.$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1\,000\,000 = x^3.$$

Köbgyököt vonva mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $x = 100$. Tehát 100 darab terméket tudunk előállítani 100 500 forintból.

124. Feladat. Egy vállalkozás jelenleg 1 000 Ft-os áron ad el naponta 60 darab terméket. Piackutatás szerint minden 100 Ft-os árcsökkentés 5 darabbal növeli az eladott mennyiséget.

- Fejezzük ki az árbevételt x függvényében, ahol x a 100 Ft-os árcsökkentések száma!
- Mekkora árcsökkentés mellett lesz maximális az árbevétel?
- Mekkora lesz ekkor a maximális árbevétel?

Megoldás:

- Az új ár: $1000 - 100x$ Ft. Az eladott mennyiség: $60 + 5x$ darab. Az árbevétel:

$$R(x) = (1\,000 - 100x) \cdot (60 + 5x).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R(x) &= 60\,000 + 5\,000x - 6\,000x - 500x^2 = \\ &= -500x^2 - 1\,000x + 60\,000. \end{aligned}$$

b) A maximális értéket a másodfokú függvény csúcsa adja, ami

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1\,000}{2 \cdot (-500)} = 1$$

Tehát 1 db 100 Ft-os árcsökkentés, azaz 900 Ft-os ár mellett lesz maximális a bevétel.

c) A maximális árbevétel

$$R(1) = -500 \cdot 1^2 - 1\,000 \cdot 1 + 60\,000 = 58\,500 \text{ Ft},$$

tehát a maximális bevétel 58 500 Ft.

125. Feladat. Megállapították, hogy bizonyos körülmények között x méter hosszúságú alagút építési költsége millió forintban jól modellezhető a

$$C(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

függvénnyel. Tudjuk azt is, hogy 6 méter hosszú alagút építési költsége 23 millió forint, és 12 méter hosszú alagút építési költsége 54 millió forint. Mennyibe kerül egy 15 méteres alagút megépítése?

Megoldás:

Mivel 6 méter hosszú alagút építési költsége 23 millió forint, ezért

$$C(6) = 23.$$

Mivel 12 méter hosszú alagút építési költsége 54 millió forint, ezért

$$C(12) = 54.$$

Ezeket behelyettesítve a költségfüggvény képletébe, két egyenletet kapunk az ismeretlen a és b együtthatókra.

Egyrészt

$$C(6) = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 = 23 \quad \Rightarrow \quad 36a + 6b = 23,$$

másképp

$$C(12) = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 54 \quad \Rightarrow \quad 144a + 12b = 54.$$

Tehát az ismeretlenekre a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\left. \begin{array}{rcl} 36a & + & 6b = 23 \\ 144a & + & 12b = 54 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletet kettővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$72a + 12b = 46.$$

Ezt kivonjuk a második egyenletből

$$(144a + 12b) - (72a + 12b) = 54 - 46 \Rightarrow 72a = 8,$$

adódik, így

$$a = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}.$$

Az $a = \frac{1}{9}$ értéket visszahelyettesítjük a $36a + 6b = 23$ egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$36 \cdot \frac{1}{9} + 6b = 23 \Rightarrow 4 + 6b = 23 \Rightarrow 6b = 19 \Rightarrow b = \frac{19}{6}.$$

Tehát a keresett költségfüggvény:

$$C(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{6}x.$$

Ezt felhasználva a 15 méter hosszú alagút építési költségét:

$$C(15) = \frac{1}{9} \cdot 15^2 + \frac{19}{6} \cdot 15 = \frac{1}{9} \cdot 225 + \frac{19}{6} \cdot 15 = 72,5 \text{ millió forint.}$$

126. Feladat. Egy vállalat termékének keresleti függvénye:

$$D(p) = 200 - 4p,$$

ahol p az egységár (ezer Ft), q az értékesített mennyiség (db). A vállalat költségfüggvénye:

$$C(q) = 20q + 800,$$

ahol a költség ezer Ft-ban értendő.

- Adjuk meg az inverz keresleti függvényt, azaz fejezzük ki az árat a mennyiség függvényében!
- Határozzuk meg a bevételi függvényt!
- Írjuk fel a profitfüggvényt!
- Mekkora kibocsátás mellett maximális a profit?
- Mennyi ekkor a maximális profit?

Megoldás:

a) Az inverz keresleti függvény meghatározásához a

$$q = 200 - 4p$$

egyenletből kifejezve p -t azt kapjuk, hogy

$$4p = 200 - q,$$

így

$$p = \frac{200 - q}{4} = 50 - \frac{q}{4}.$$

b) A bevételi függvény:

$$R(q) = p \cdot q.$$

Mivel

$$p = 50 - \frac{q}{4},$$

ezért

$$R(q) = \left(50 - \frac{q}{4}\right) \cdot q,$$

így

$$R(q) = 50q - \frac{q^2}{4}$$

adódik.

c) A profitfüggvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

Tehát

$$\Pi(q) = \left(50q - \frac{q^2}{4}\right) - (20q + 800),$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = 50q - \frac{q^2}{4} - 20q - 800,$$

azaz

$$\Pi(q) = 30q - \frac{q^2}{4} - 800.$$

d) A profit másodfokú függvény:

$$\Pi(q) = -\frac{1}{4}q^2 + 30q - 800.$$

Mivel a parabola lefelé nyílik, ezért a maximuma a parabola csúcsa:

$$q_{\max} = -\frac{b}{2a}.$$

Jelen esetben

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = 30,$$

ezért

$$q_{\max} = -\frac{30}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{30}{-\frac{1}{2}} = 60.$$

Tehát a profit 60 darab termék kibocsátása mellett maximális.

e) Mivel

$$\Pi(60) = 30 \cdot 60 - \frac{60^2}{4} - 800 = 100,$$

ezért a maximális profit

100 ezer Ft.

127. **Feladat.** Egy vállalat termelési függvénye:

$$q = 10L,$$

ahol L a felhasznált munkaerő mennyisége (például munkaóra), q pedig az előállított kibocsátás (db). A vállalat költségfüggvénye a kibocsátás függvényében:

$$C(q) = 5q + 100.$$

a) Fejezzük ki a költséget a munkaerő függvényében, azaz határozzuk meg a $C(L)$ függvényt!

b) Értelmezzük az eredményt gazdaságilag!

Megoldás:

a) A termelési függvény:

$$q = 10L.$$

Ez azt mondja ki, hogy a kibocsátás a munkaerő függvénye. Ha L nő, akkor q is nő. Minden 1 egységnyi munkaerő 10 egységnyi kibocsátást eredményez. A költségfüggvény:

$$C(q) = 5q + 100.$$

Ez azt fejezi ki, hogy a költség a kibocsátás függvénye. A 100 a fix költség, az $5q$ pedig a változó költség. A feladat azt kéri, hogy a költséget ne a kibocsátás, hanem a munkaerő függvényében adjuk meg, vagyis a $C(L)$ alakot keressük.

Mivel a munkaerő meghatározza a kibocsátást, a kibocsátás pedig meghatározza a költséget, ezért a költséget kompozíció segítségével írhatjuk fel:

$$C(L) = C(q(L)).$$

Mivel

$$q(L) = 10L \quad \text{és} \quad C(q) = 5q + 100,$$

ezért

$$C(L) = 5 \cdot q(L) + 100.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$C(L) = 5 \cdot (10L) + 100.$$

Egyszerűsítés után

$$C(L) = 50L + 100$$

adódik.

b) A kapott eredmény:

$$C(L) = 50L + 100$$

azt jelenti, hogy a vállalat költsége közvetlenül a felhasznált munkaerő mennyiségével is kifejezhető.

A konstans tag, vagyis a 100 a fix költséget jelenti. Az $50L$ tag a változó költség, vagyis minden 1 egységnyi munkaerő 50 egységgel növeli a költséget.