Geometric investigations in loop theory and in image processing

Geometriai kutatások a loopelméletben és a képfeldolgozában

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Tomán Henrietta

Témavezető: Dr. Hajdu András és

Dr. Nagy Péter Tibor

Debreceni Egyetem
Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2014.

Contents

1 Differentiable $n-$loops

A Lie group is smooth manifold which also carries a group structure whose multiplication and its inverse operation are smooth as maps of manifolds.

In this section, several concepts and results from the theory of Lie group are investigated for loops, i.e. for non-associative multiplication. [11], [12]

1.1 Basic concepts

We can consider a loop as an algebraic and as a differential geometric notion, as well. In algebraic sense, the loop can be defined as a quasigroup with unit element:

Definition. *Let H be a non-empty set with the multiplication $m\colon H^2 \to H$, let $e \in H$ be a given element. Then (H, e, m) is called* ***loop*** *with unit element e if*

1. $m(e, x) = m(x, e) = x$ *for all* $x \in H$,
2. *the equations* $m(a, x) = b$ *and* $m(y, a) = b$ *are uniquely solvable for all* $a, b \in H$.

Then x and y can be determined by the left and right divisions:

$$x = a \setminus b \quad \text{and} \quad y = b/a.$$

In the definition of $n-$loop, an $n-$ary multiplication has to satisfy similar properties as in the previous binary case:

Definition. *Let H be a non-empty set with the multiplication $m\colon H^n \to H$, let $e \in H$ be a given element. Then (H, e, m) is called $n-$**loop** with unit element e if*

1. $m(\overset{(1)}{e}, \dots, \overset{(i-1)}{e}, \overset{(i)}{a}, \overset{(i+1)}{e}, \dots, \overset{(n)}{e}) = a$ *for all* $a \in H$, $1 \le i \le n$, *where* $\overset{(i)}{x}$ *means that the* $i-$*th argument has the value* x,
2. *the equation* $m(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$ *is uniquely solvable for all* $a_i \in H, 1 \le i \le n$, $b \in H$.

Then x can be determined by the $i-$th division $\delta_i\colon H^n \to H$:

$$x = \delta_i(b; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

In special case, when n=2, we get the classical left and right divisions:

$$\delta_1(b;a) = a \setminus b \qquad \text{and} \qquad \delta_2(b;a) = b/a.$$

It follows from these definitions that a group ($n-$group) can be considered as an associative loop ($n-$loop).

In differential geometric sense, global or local $\mathcal{C}^k-$differentiable $n-$loop can be defined.

Definition. *Let H be a differentiable manifold of class $\mathcal{C}^k$, let $e \in H$ be a given element and let $m\colon H^n \to H$, $\delta_i\colon H^n \to H$ be differentiable maps of class $\mathcal{C}^k$, where $i = 1,\dots,n$. Then $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \dots, \delta_n)$ is called $\mathcal{C}^k-$**differentiable** $n-$**ary loop** (or shortly $n-$**loop**) with unit element e if the multiplication m and the $i-$th divisions δ_i $(i = 1,\dots,n)$ satisfy the following identities:*

1. *$m(\overset{(1)}{e}, \dots, \overset{(i-1)}{e}, \overset{(i)}{a}, \overset{(i+1)}{e}, \dots, \overset{(n)}{e}) = a$ for all $a \in H$, $1 \le i \le n$,*
2. *$m(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \delta_i(b; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n), a_{i+1}, \dots, a_n) = b$ for all $a_i \in H$, $1 \le i \le n, b \in H$,*
3. *$\delta_i(m(a_1, a_2, \dots, a_n); a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = a_i$ for all $a_i \in H$, $1 \le i \le n$.*

In the definition of a local $\mathcal{C}^k-$differentiable $n-$loop, that is very similar to the definition of $\mathcal{C}^k-$differentiable $n-$ary loop, the multiplication and the $i-$th divisions are defined only in a neighborhood of the unit element and the implicit function theorem provides the $\mathcal{C}^k-$differentiability of the $i-$th divisions locally around the unit element.

We now give the definition of $n-$web, that is fundamental concept in geometric loop theory.

Definition. *Let V be a manifold. A family of foliations $(F_1, \dots, F_n)$ on V in general position is called $n-$**web**.*

In other words: all foliations consist of leaves with the following properties:

1. there exists exactly one leaf through each point of V in each foliation,
2. $L_i \cap L_i' = \emptyset$ holds for all $L_i, L_i' \in F_i : L_i \neq L_i'$ $(i = 1,\dots,n)$ (for all different leaves L_i, L_i' from the same foliation F_i).

1.2 Canonical coordinate systems of $n-$loops

Definition. *Let $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ be a $\mathcal{C}^k-$differentiable local $n-$loop. A coordinate map $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^q$ of class $\mathcal{C}^k$ of the open neighbourhood $U \subset H$ of $e \in H$ into the coordinate space $\mathbb{R}^q$ is called* ***canonical coordinate system*** *of $\mathcal{H}$ if $\varphi(e) = 0$ and the coordinate function $M\colon \varphi(U) \times \cdots \times \varphi(U) \to \mathbb{R}^q$ of the multiplication map $m\colon H^n \to H$*

$$M = \varphi \circ m \circ (\varphi^{-1} \times \cdots \times \varphi^{-1})$$

satisfies

$$M(x, x, \ldots, x) = n\, x$$

for all $x \in \varphi(U)$.

Lemma. *Let ϕ be a local $\mathcal{C}^k-$diffeomorphism of $\mathbb{R}^q$ $(k, q \in \mathbb{N}, k \geq 2)$, keeping $0 \in \mathbb{R}^q$ fixed and is defined in some neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}^q$. Let $\phi_*|_{(0)}$ denote the tangent map of ϕ at $0 \in \mathbb{R}^q$, and we assume that ϕ satisfies $\phi_*|_{(0)} = \lambda id_{\mathbb{R}^q}$ with $\lambda \neq 0, 1, -1$. Then there exists a unique local $\mathcal{C}^k-$diffeomorphism ρ of $\mathbb{R}^q$ with the following properties:*

1. *it keeps $0 \in \mathbb{R}^q$ fixed,*
2. *$\rho \cdot \phi \cdot \rho^{-1} = \phi_*|_{(0)}$,*
3. *$\rho_*|_{(0)} = id_{\mathbb{R}^q}$.*

Lemma. *Let $\kappa : W \to R^q$ be a differentiable map of a star shaped neighbourhood $W \subset \mathbb{R}^p$ with $\kappa(0) = 0$. If there exists a real number $0 < r < 1$ such that $\kappa(r\, x) = r\, \kappa(x)$ holds for all $x \in W$, then κ is the restriction of a linear map.*

Theorem. *Let $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ be a $\mathcal{C}^k-$differentiable local $n-$loop with $k \geq 2$. Then there exists a canonical coordinate system for $\mathcal{H}$.*

If (U, φ) is a canonical coordinate system of $\mathcal{H}$ then for any linear map $\tau : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ the pair $(U, \tau \circ \varphi)$ is a canonical coordinate system of $\mathcal{H}$, as well.

If $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^q$ and $\psi\colon U \to \mathbb{R}^q$ are the coordinate maps of canonical coordinate systems of $\mathcal{H}$ defined on the same neighbourhood U then $\varphi \circ \psi^{-1}$ is the restriction of a linear map $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$.

Example. *The local loop-multiplication $f(x, y) = x + y + x^2 y(x - y)$ is non-associative (it is not a group multiplication) and it is defined in a canonical coordinate system.*

1.3 Exponential map

A Lie group G is a differentiable group, it consists of a group structure and a manifold structure such that the multiplication map and the inversion map are differentiable. The simplest Lie group is the additive group of the real numbers. A differentiable homomorphism of $(\mathbb{R}, +)$ into a given Lie group G is called a one–parameter subgroup of G.

For each $X \in T_eG$ we define $exp(X) = \phi_X(1)$, where ϕ_X is the unique one–parameter subgroup of G with X as its initial velocity vector. The map $exp : T_eG \to G : X \mapsto \phi_X(1)$ is called the exponential map of G.

Observe that $\mu_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \mu_c = c \cdot t$ is a Lie homomorphism, so $\phi_X \circ \mu_c$ is also a one–parameter subgroup of G. It follows from the chain rule of differentiation that $\phi_X \circ \mu_c = \phi_{cX}$, so $exp(tX) = \phi_{tX}(1) = \phi_X(t)$ holds for all $t \in \mathbb{R}$.

Since $exp : T_eG \to G$ is a local diffeomorphism, we can use the exponential map to define local coordinates for G.

There are several natural possibilities for the definition of the exponential map $W \to H$ with $0 \in W \subset T_eH$ of $\mathcal{C}^k$−differentiable local n−loops. One of them is analogous to the usual construction in Lie group theory, namely the map *exp* could be determined by the integral curves of vector fields defined by the i−th translations of tangent vectors at the unit element of the n−loop.

In binary Lie groups these curves are one–parameter subgroups, but for smooth loops it is not always the case. [3] Another disadvantage of such a construction is that one can expect only $\mathcal{C}^{k-1}$−differentiability of the map $W \to H$ with $0 \in W \subset T_eH$ which is determined by integral curves of $\mathcal{C}^{k-1}$−differentiable vector fields defined by the i−th translations of tangent vectors.

Definition. *Let $\gamma_v^i(t)$ be the integral curve of the differential equation*

$$\dot{\gamma}_v^i(t) = (\lambda^i_{\gamma(t)})_* v, \quad \textit{where} \;\; \gamma_v^i(0) = e, \quad \dot{\gamma}_v^i(0) = v$$

and λ^i_x denotes the i−th translation with x. Then $exp^{(i)} : T_eH \to H$, where

$$exp^{(i)}(v) = \gamma_v^i(1),$$

*is called i−**th exponential map**.*

An alternative natural possibility for the definition of the exponential map is given by using the construction of canonical coordinate systems studied in the previous section.

Theorem. *Let $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ be a $\mathcal{C}^k-$differentiable local $n-$loop with $k \geq 2$. There exists a unique local $\mathcal{C}^k-$diffeomorphism* $\exp\colon W \to H$, *where W is a neighbourhood of $0 \in T_eH$, such that the following conditions hold:*

(i) $\exp(0) = e$,

(ii) $\exp(n\,x) = m(\exp(x), \ldots, \exp(x))$,

(iii) $\exp_*|_0 = id_{T_eH}$.

Theorem. *Let $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ and $\mathcal{H}' = (H', e', m', \delta'_1, \ldots, \delta'_n)$ be $\mathcal{C}^k-$differentiable local $n-$loops. Let* $\exp\colon W \to H$, $\exp'\colon W' \to H'$ *be the corresponding exponential maps, where $W \subset T_eH$ and $W' \subset T_{e'}H'$.*
If $\alpha\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ is a continuous local homomorphism then the composed map $\exp'^{-1} \circ \alpha \circ \exp\colon W \to T_{e'}H'$ *is locally linear.*

2 Diffusion Tensor Imaging

In this section, it has been shown how useful the tools of differential geometry can be also in biomedical imaging. When the diffusion is anisotropic, a scalar diffusion measure is insufficient for describing diffusion properties. In this case, the diffusion can be described by a second-order diagonally symmetric tensor, called the diffusion tensor:

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}.$$

The six independent elements of the diffusion tensor can be estimated from a series of diffusion-weighted images. When diffusion weighted measurements are performed along N directions, the following matrix equation can be constructed:

$$B\vec{d}^{\,T} = \vec{A}^{\,T},$$

where

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \ln \frac{S_1}{S_0} & \ln \frac{S_2}{S_0} & \ldots & \ln \frac{S_N}{S_0} \end{pmatrix}$$

is the vector of the corresponding logarithmic signal ratios and

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vdots \\ \vec{b_N} \end{pmatrix}$$

includes the influences of all the encoding gradients. [6]

This tensor model of diffusion is able to get full description of the directional diffusion information. The diffusion displacement profile may be represented as an ellipsoid with the length of principal axes described by the eigenvalues of the diffusion tensor and the directions given by eigenvectors of the diffusion tensor.

Our aim in [9], [10] is to reconstruct the fiber tracts of the human brain from measurements of fiber orientation and visualize them on the image of the brain. Generally, the surface model clipped by orthogonal sections is shown. We are capable to visualize the surface model clipped by (even more than the usual three) planes having arbitrary directions.

3 Generalization of the majority voting scheme

In this section, we propose the generalization of the classical majority voting model by introducing values $0 \le p_{n,k} \le 1$ describing the probability of making a good decision, when we have exactly k good votes from the n voters. This generalization is motivated by object detection problems, where the members of the ensemble are image processing algorithms giving their votes as pixels in the image domain. In this scenario, the terms $p_{n,k}$ can be specialized by a geometric constraint. [1], [8]

Several theoretical results are achieved for independent voters in the current literature of classical majority voting, so in the first step, the classical scheme is generalized in this case.

3.1 The independent case

In the generalized model, a classifier D_i with accuracy p_i is considered as a random variable η_i of Bernoulli distribution:

$$P(\eta_i = 1) = p_i, \quad P(\eta_i = 0) = 1 - p_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Here $\eta_i = 1$ means correct classification by D_i. In particular, the accuracy of D_i is just the expected value of η_i, that is, $E\eta_i = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

Let $p_{n,k}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ be given real numbers with:

$$0 \le p_{j0} \le \cdots \le p_{jj} \le 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

and let the random variable ξ be such that:

$$P(\xi = 1) = p_{n,k} \quad \text{and} \quad P(\xi = 0) = 1 - p_{n,k},$$

where $k = |\{i \,:\, \eta_i = 1\}|$. That is, ξ represents the modified majority voting of the classifiers $D_1, \ldots, D_n$: if k out of the n classifiers give a correct vote, then we make a good decision (i.e. we have $\xi = 1$) with probability $p_{n,k}$.

Note that, in the special case, where:

$$p_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{if } k > \frac{n}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{if } k = \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1}$$

we get back the classical majority voting scheme.

As the very first step of the generalization, it is shown that similarly to the individual voters, ξ is of Bernoulli distribution, as well. We also provide its corresponding parameter q, that represents the accuracy of the ensemble in this model:

$$q = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \Bigg(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} p_i \prod_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} (1 - p_j) \Bigg). \tag{2}$$

The special case $p = p_1 = \ldots = p_n$ assuming equal accuracy for the classifiers received strong attention in the literature, so we investigate this case first. Then, (2) reads as:

$$q = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{3}$$

Thus, if n is odd then by the particular choice (1) for the values $p_{n,k}$, we get $q = P$, where

$$P = \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

is the system accuracy for the classical majority voting with independent classifiers.

In order to have this generalized majority voting model be more accurate than the individual decisions, we have to guarantee that $q \geq p$.

It is proved that if the probabilities $p_{n,k}$ increase uniformly (linearly): $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, then the ensemble has the same accuracy as the individual classifiers.

The next result helps us to compare our model constrained by $p_{n,k}$ with the classical majority voting scheme.

Theorem. *Suppose that* $p \geq \frac{1}{2}$ *and for any* k *with* $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ *we have:*

(i) $p_{n,k} + p_{n,n-k} \geq 1$,

(ii) $p_{n,n-k} \geq \frac{n-k}{n}$.

Let q *be given by* (3)*. Then,* $q \geq p$*, and consequently* $E\xi \geq p$*.*

As a specific case, we obtain the following corollary concerning the classical majority voting scheme. [5]

Corollary. *Suppose that* n *is odd,* $p \geq \frac{1}{2}$ *and :*

$$p_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{if } k > \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

holds for all $k = 0, 1, \ldots, n$*. Then* $q \geq p$*, and consequently* $E\xi \geq p$*.*

Of particular interest is the case, when the ensemble makes exclusively good decisions after t executions. That is, we are curious to know the conditions to have a system with accuracy 100%. Write $\xi^{\otimes t}$ for the random variable obtained by repeating ξ independently t times, and counting the number of one values (correct decisions) received, where t is a positive integer. Then, as it is well-known, $\xi^{\otimes t}$ is a random variable of binomial distribution with parameters (t, q) with q given by (3). Now we are interested in the probability $P(\xi^{\otimes t} = t)$. In case of using an individual classifier D_i (that is, a random variable η_i) with any $i = 1, \ldots, n$, we certainly have $P(\eta_i^{\otimes t} = t) = p^t$.

To make the ensemble better than the individual classifiers, the probabilities $p_{n,k}$ need to be chosen so that $P(\xi^{\otimes t} = t) \geq p^t$.

In fact, a much more general case can be characterized.

Theorem. *Let* t *and* s *be integers with* $1 \leq s \leq t$*. Then:*

$$P(\xi^{\otimes t} \geq s) \geq P(\eta_1^{\otimes t} \geq s),$$

if and only if, $q \geq p$*, i.e.* $E\xi^{\otimes t} \geq tp$*.*

3.2 The dependent case

In case of dependent classifiers, we have to decide how to measure the dependencies of the classifiers. The joint distribution of the random variables can be considered, that is one of the most obvious way to calculate the dependency. It can be shown that, similarly to the independent case, the overall performance of the system is equal to the individual accuracies if linear p_{nk} is considered.

Theorem. *Let* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *be an* $n-$*dimensional random variable, where* $E\eta_i = p$ $(i = 1, \ldots, n)$*. We consider the joint distribution of* $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *such that:*

$$c_{a_1,\ldots,a_n} = P(\eta_1 = a_1, \ldots, \eta_n = a_n),$$

where $a_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$*. Let* $p_{nk} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$*. Then we have* $E\xi = p$*.*

More realistically, the different classifiers in general make errors with different probabilities.

Remark. *If* $E\eta_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *for the random variables* η_i *of* η*, then we get that:*

$$E\xi = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n},$$

if $p_{nk} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$*.*

3.3 Extremal accuracies

Next, we investigate how dependencies among the voters influence the accuracy of the ensemble. For this purpose, we generalize some concepts that were introduced for classical majority voting to measure the extremal behavior (minimal and maximal accuracies) of an ensemble. First we consider *pattern of success* and *pattern of failure* [4] which are such realizations of the votes in a series of experiments that lead to the possible highest and lowest accuracy of the ensemble, respectively.

3.3.1 Pattern of success and pattern of failure

In this section, we suppose that the individual classifier accuracies coincide ($p = p_1 = \ldots = p_n$). Repeat the experiments $\eta_1, \ldots, \eta_n$ t times, with some positive integer t, and write $\eta_i^{(j)}$ for the j-th realization of η_i $(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, t)$. Suppose (as a rather strong, but standard assumption) that we have:

$$(4) \qquad |\{j \ : \ \eta_i^{(j)} = 1\}| = r \quad \text{for all } i = 1, \ldots, n.$$

Here r is a positive integer with $r = np$. We are interested in the behavior (accuracy) of ξ repeated t times, or in other words in the value $E\xi^{\otimes t}$, under the condition (4). Write $\xi^{(j)}$ for the j-th realization of ξ $(j = 1, \ldots, t)$. Then, we clearly have $E\xi^{\otimes t} = E\xi^{(1)} + \ldots + E\xi^{(t)}$.

For simplicity, the situation will be described by a table T of size $n \times t$: in the (i, j)-th entry $T(i, j)$ of T there is 0 or 1, according to the actual value of $\eta_i^{(j)}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t)$.

Then we have:

$$E\xi^{\otimes t} = \sum_{j=1}^{t} p_{n,u_j}, \tag{5}$$

where u_j is the number of ones in the j-th column of T. In order to describe the pattern of success (for the highest accuracy) and the pattern of failure (for the lowest accuracy), this quantity in (5) needs to be maximized and minimized, respectively.

The next result concerns the pattern of success.

Theorem. *Let the probabilities $p_{n,k}$ be arbitrary, up to $p_{n,0} = 0$. Let $k_1 \neq 0$ be an index such that $\frac{p_{n,k_1}}{k_1} \geq \frac{p_{n,k}}{k}$ for all $k = 1, \ldots, n$. Then:*

$$E\xi^{\otimes t} \leq \frac{nrp_{n,k_1}}{k_1}.$$

Furthermore, if $tk_1 = nr$, then the maximum can be attained.

Our next theorem describes the pattern of failure, in a similar fashion as the previous statement.

Theorem. *Let the probabilities $p_{n,k}$ be arbitrary, up to $p_{n,0} = 0$. Let $k_2 \neq 0$ be an index such that $\frac{p_{n,k_2}}{k_2} \leq \frac{p_{n,k}}{k}$ for all $k = 1, \ldots, n$. Then:*

$$E\xi^{\otimes t} \geq \frac{nrp_{n,k_2}}{k_2}.$$

Further, if $tk_2 = nr$, then the minimum can be attained.

Similarly to the independent case, we also investigate the case, when only good decision is made by the ensemble. In other words, we would like to describe the situation, where:

$$P(\xi^{\otimes t} = t) = \prod_{j=1}^{t} p_{n,u_j} \tag{6}$$

is maximal.

For the special case: $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$, we have the following result for the quantity in (6).

Theorem. *Let* $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ *for all* $k = 0, 1, \ldots, n$, *and assume that* $nr \geq t$. *Then* $P(\xi^{\otimes t} = t)$ *is maximal for the tables* T *in which:*

$$\left\lfloor \frac{nr}{t} \right\rfloor \leq u_j \leq \left\lceil \frac{nr}{t} \right\rceil \quad (1 \leq j \leq t),$$

where u_j *denotes the number of ones in the* j*-th column of* T. *Further, all these tables* T *can be explicitly constructed.*

The following result is proved for general values of $p_{n,k}$.

Theorem. *Let the probabilities* $p_{n,k}$ *be arbitrary, up to* $p_{n,0} = 0$ *and* $p_{n,k} > 0$ *for* $0 < k \leq n$. *Let* $k_0 \neq 0$ *be an index such that* $\frac{\ln p_{n,k_0}}{k_0} \geq \frac{\ln p_{n,k}}{k}$ *for all* $k = 1, \ldots, n$. *Then:*

$$P(\xi^{\otimes t} = t) \leq (p_{n,k_0})^{\frac{nr}{k_0}}.$$

Further, if $tk_0 = nr$ *then the maximum can be attained.*

3.3.2 Linear programming problem

In this section, we drop all the previous conditions (e.g.(4), independency), and give a compact tool (working without any technical restrictions) based on linear programming to calculate the minimal and maximal ensemble accuracies. In case of dependent classifiers, the joint distribution of the random variables is investigated to measure the dependencies of the classifiers:

$$c_{a_1,\ldots,a_n} = P(\eta_1 = a_1, \ldots, \eta_n = a_n),$$

where $a_i \in \{0, 1, *\}$. The star denotes any of the possible correctness values, that is, $* = 0$ or 1. [2] The problem to determine the combination of voters achieving the best/ the worst ensemble performance (q_{max}/q_{min}) is equivalent to maximize/minimize the function:

$$q(c_{a_1,\ldots,a_n}) = \sum_{k=0}^{n} \left(p_{n,k} \cdot \sum_{a_1+\ldots+a_n=k} c_{a_1,\ldots,a_n} \right)$$

under the following conditions:

$$\sum_{a_i=1} c_{*,\ldots,*,a_i,*,\ldots,*} = p_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$\sum_{a_1,\ldots,a_n} c_{a_1,\ldots,a_n} = 1,$$
$$c_{a_1,\ldots,a_n} \geq 0,$$

where $E\eta_i = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$ is the accuracy of the $i-$th classifier. Observe that this is just a linear programming problem for the variables $c_{a_1,\dots,a_n}$, which can be solved by standard tools.

In the special case, when $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ are totally independent, we have:

$$c_{a_1,\dots,a_n} = P(\eta_1 = a_1) \dots P(\eta_n = a_n).$$

That is, the entries of the contingency table can be determined by the probabilities $p_1, \dots, p_n$. In this case, the ensemble performance q is simply given by (2).

4 Application – optic disc detection

In this section, for the OD detection task, we start with showing how the general formulation considering the probabilities $p_{n,k}$ is restricted for this specific challenge using geometric constraints defined by anatomic rules.

In our application, the votes are required to fall inside a disc of diameter d_{OD} to vote together. For the calculation of the values $p_{n,k}$ in our proposed method, the k correct votes must fall inside the true OD region, and let us consider the decomposition $n - k = k_1 + \ldots + k_l$ of the number of the false candidates $n - k$, where all the false votes are covered by the l disjoint discs of diameter d_{OD}. We may assume that $k_1 \geq \ldots \geq k_l$, where k_i is the cardinality of the false votes covered by the $i-$th disc. We introduce the probability $P(n, k, k_1, \dots, k_l)$ for describing the good decision in case of a concrete realization of the n votes:

$$P(n, k, k_1, \dots, k_l) =$$
$$\frac{n!}{k!k_1!\dots k_l!} p_1 \dots p_k (1 - p_{k+1}) \dots (1 - p_n) \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)^{k_1} \dots \left(1 - \frac{lT_0}{T}\right)^{k_l},$$

where T_0 and T is the area of the OD and the ROI, respectively.

Applying the geometric constraint, false decision is made only in that case when $k_1 > k$. Consequently, $p_{n,k} = 0$ for $k_1 > k$, while $p_{n,k} = 1$ for $k > k_1$ should hold. The case $k_1 = k$ is broken randomly. Based on these considerations and summing for the possible distribution of the $n - k$ false votes among the discs, the corresponding values $p_{n,k}$ can be calculated as follows:

$$p_{n,k} = \sum_{k_1+\ldots+k_l=n-k, k>k_1} P(n, k, k_1, \dots, k_l) +$$
$$+\frac{1}{2} \sum_{k_1+\ldots+k_l=n-k, k=k_1} P(n, k, k_1, \dots, k_l).$$

4.1 An ensemble-based OD detector

To take advantage of the theoretical foundations of the previous sections for efficient OD detection, we have collected eight corresponding individual algorithms to create an ensemble from. Then, with a brute force approach (i.e. checking all the possible combinations) we select such an ensemble which gives the best accuracy of the combined system. Using the linear programming technique for the given individual accuracies for the selected ensemble representing the best system accuracy, we have the following minimal and maximal ensemble accuracies, respectively:

$$q_{min} = 0.899, \qquad q_{max} = 1.$$

Based on our experimental tests, the ensemble accuracy for our system has been found to be:

$$q = 0.981.$$

5 Modifications on the decision rule

We modify the final decision rule of the ensemble which will result in further improvement of the system accuracy. This generalization is based on the assignment of weights to the ensemble members (classifiers). [7]

We can assign weights to the classifiers within our generalized voting scheme, as well. If the classifiers $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ with respective accuracies $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ and weights $(b_1, \ldots, b_n)$ are considered, then the final decision is made by choosing the maximal sum of weights, where some additional constraints (e.g. a geometrical one for OD detection) have to be fulfilled by the classifier outputs.

We give the answer on how to select optimally the weights for independent classifiers in this generalized weighted majority voting model.

Theorem. *If independent classifiers* $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ *are given (conditional independence is assumed), then the optimal weight* b_i *for the classifier* D_i *with accuracy* p_i *can be calculated as:*

$$b_i \propto \log \frac{p_i}{(1-p_i)^2 r_i (1-r_i)},$$

where the probability $(1-p_i)r_i$ with $r_i \in [0,1]$ is considered for the $i-$th classifier meaning that the $i-$th classifier makes wrong classification and participates in making a bad decision.

1 Differenciálható $n-$loopok

A Lie–csoport egy sima sokaság, amelyen olyan csoportstruktúra adható meg, ahol a szorzásművelet és annak inverze is sima leképezések.

Ebben a részben számos, a Lie–csoport elméletéből ismert fogalmat és eredményt vizsgálunk meg a loopok szempontjából, ahol elhagyjuk a szorzás asszociatív tulajdonságát. [11], [12]

1.1 Alapfogalmak

Egy loopot definiálhatunk algebrai és differenciálgeometriai struktúraként is. Algebrai értelemben a loop egy egységelemes kvázicsoportnak tekinthető.

Definíció. *Legyen H egy nemüres halmaz, adott egy $e \in H$ H-beli elem, továbbá H-n értelmezve van egy $m\colon H^2 \to H$ szorzásművelet. Ekkor (H, e, m) egy* ***loop*** *az e egységelemmel, ha teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *$m(e, x) = m(x, e) = x$ minden $x \in H$ esetén,*
2. *az $m(a, x) = b$ és $m(y, a) = b$ egyenleteknek egyértelmű x, illetve y megoldása van minden $a, b \in H$ esetén.*

A fenti egyenletek egyértelmű x, illetve y megoldása kifejezhető a bal és jobb osztás segítségével:

$$x = a \setminus b \quad \text{és} \quad y = b/a.$$

Az $n-$loop definíciójában egy $n-$változós szorzásműveletnek kell hasonló tulajdonságokat kielégítenie, mint a loop definíciójában szereplő bináris műveletnek:

Definíció. *Legyen H egy nemüres halmaz, adott egy $e \in H$ H-beli elem, továbbá H-n értelmezve van egy $m\colon H^n \to H$ $n-$változós szorzásművelet. Ekkor (H, e, m) egy $n-$**loop** az e egységelemmel, ha teljesülnek a következő feltételek:*

1. *$m(\overset{(1)}{e}, \dots, \overset{(i-1)}{e}, \overset{(i)}{a}, \overset{(i+1)}{e}, \dots, \overset{(n)}{e}) = a$ minden $a \in H$ és $1 \leq i \leq n$ esetén, ahol $\overset{(i)}{x}$ azt jelöli, hogy az i. argumentum értéke x,*
2. *az $m(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = b$ egyenlet egyértelműen megoldható minden $a_i \in H, 1 \leq i \leq n$ és $b \in H$ esetén.*

Ekkor ez az egyértelműen létező x megoldás a $\delta_i\colon H^n \to H$ i. osztás segítségével fejezhető ki:

$$x = \delta_i(b; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Speciális esetben (n=2 esetén), a klasszikus bal és jobb oldali osztást kapjuk vissza:

$$\delta_1(b; a) = a \setminus b \qquad \text{és} \qquad \delta_2(b; a) = b/a.$$

Ezen definíciókból látható, hogy a csoport ($n-$csoport) asszociatív loopként ($n-$loopként) tekinthető.

Differenciálgeometriai értelemben definiálhatjuk a globális, illetve lokális $\mathcal{C}^k-$differentiálható $n-$loop fogalmát.

Definíció. *Legyen H egy $\mathcal{C}^k-$differenciálható sokaság, $e \in H$ egy adott H-beli elem és $m\colon H^n \to H$, $\delta_i\colon H^n \to H$ $(i = 1, \ldots, n)$ $\mathcal{C}^k-$differenciálható leképezések. Ekkor $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ $\mathcal{C}^k-$**differentiálható** $n-$**loop**, melynek e az egységeleme, ha az m szorzás és a δ_i i. osztások $(i = 1, \ldots, n)$ teljesítik a következő feltételeket:*

1. *$m(\overset{(1)}{e}, \ldots, \overset{(i-1)}{e}, \overset{(i)}{a}, \overset{(i+1)}{e}, \ldots, \overset{(n)}{e}) = a$ minden $a \in H$ és $1 \leq i \leq n$ esetén,*
2. *$m(a_1, \ldots, a_{i-1}, \delta_i(b; a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n), a_{i+1}, \ldots, a_n) = b$ minden $a_i \in H$, $1 \leq i \leq n$ és $b \in H$ esetén,*
3. *$\delta_i(m(a_1, \ldots, a_n); a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i$ minden $a_i \in H$ és $1 \leq i \leq n$ esetén.*

A lokális $\mathcal{C}^k-$differenciálható $n-$loop definíciójában szereplő m szorzás és a δ_i i. osztások $(i = 1, \ldots, n)$ csak az egységelem környezetében vannak definiálva és az implicit függvény tétel biztosítja az egységelem környezetében az i. osztások $\mathcal{C}^k-$differenciálhatóságát.

Ezután megadjuk az $n-$web definícióját, ami alapvető fogalom a geometriai loopelméletben.

Definíció. *Legyen V egy sokaság. A V-n értelmezett $(F_1, \ldots, F_n)$ fóliázások egy általános helyzetű családját $n-$**web**-nek nevezzük.*

Az általános helyzetű fóliázás azt jelenti, hogy minden fóliázás a következő tulajdonságokkal rendelkező leveleket tartalmaz:

1. minden egyes adott V-beli elemhez minden fóliázás esetén egyértelműen létezik olyan L levél, amely az adott V-beli elemen keresztül halad,
2. ha $L_i, L_i' \in F_i : L_i \neq L_i'$, akkor $L_i \cap L_i' = \emptyset$ ugyanazon F_i fóliázás különböző L_i és L_i' levelei esetén.

1.2 Az $n-$loopok kanonikus koordináta–rendszerei

Definíció. *Legyen* $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *egy lokális* $\mathcal{C}^k-$*differenciálható* $n-$*loop. Egy* $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^q$ $\mathcal{C}^k-$*osztályú koordinátatérképet, mely az* $e \in H$ *egységelem* $U \subset H$ *nyílt környezetét képezi le az* $\mathbb{R}^q$ *koordinátatérre, a* $\mathcal{H}$ ***kanonikus koordináta-rendszer****ének nevezzük, ha*

1. $\varphi(e) = 0$,
2. *az* $m \colon H^n \to H$ *szorzás* $M \colon \varphi(U) \times \cdots \times \varphi(U) \to \mathbb{R}^q$ *kooordináta-függvénye*
$$M = \varphi \circ m \circ (\varphi^{-1} \times \cdots \times \varphi^{-1})$$
rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:
$$M(x, x, \ldots, x) = n\, x$$
minden $x \in \varphi(U)$ *esetén.*

Lemma. *Legyen* ϕ *egy lokális* $\mathcal{C}^k-$*diffeomorfizmus* $(k \geq 2)$ *az* $\mathbb{R}^q$ *koordinátatéren, mely a* $0 \in \mathbb{R}^q$ *egy környezetében van definiálva és a* $0 \in \mathbb{R}^q$*-t fixen tartja, továbbá jelölje* $\phi_*|_{(0)}$ *a* ϕ *érintőleképezését a* $0 \in \mathbb{R}^q$ *pontban. Tételezzük fel, hogy* ϕ *teljesíti a következő feltételt:* $\phi_*|_{(0)} = \lambda id_{\mathbb{R}^q}$ $(\lambda \neq 0, 1, -1)$. *Ekkor egyértelműen létezik olyan* ρ *lokális* $\mathcal{C}^k-$*diffeomorfizmus* $\mathbb{R}^q$*-n, mely*

1. *a* $0 \in \mathbb{R}^q$*-t fixen tartja,*
2. $\rho \cdot \phi \cdot \rho^{-1} = \phi_*|_{(0)}$,
3. $\rho_*|_{(0)} = id_{\mathbb{R}^q}$.

Lemma. *Legyen* $\kappa : W \to \mathbb{R}^q$ *a* $W \subset \mathbb{R}^p$ *környezetnek* $\mathbb{R}^q$*-ba történő differenciálható leképezése, melyre* $\kappa(0) = 0$. *Ha létezik olyan* $0 < r < 1$ *valós szám, amelyre* $\kappa(r\, x) = r\, \kappa(x)$ *teljesül minden* $x \in W$ *esetén, akkor* κ *egy lineáris leképezés leszűkítése.*

Tétel. *Legyen* $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *lokális* $\mathcal{C}^k-$*differenciálható* $n-$*loop, ahol* $k \geq 2$. *Ekkor létezik kanonikus koordináta-rendszere* $\mathcal{H}$*-nak.*
Ha (U, φ) *kanonikus koordináta-rendszere* $\mathcal{H}$*-nak, akkor minden* $\tau : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ *lineáris leképezés esetén* $(U, \tau \circ \varphi)$ *is kanonikus koordináta-rendszere* $\mathcal{H}$*-nak.*
Ha $\varphi \colon U \to \mathbb{R}^q$ *és* $\psi \colon U \to \mathbb{R}^q$ *a* $\mathcal{H}$ *kanonikus koordináta-rendszereinek koordináta-leképezései, melyek ugyanazon* U *környezeten vannak definiálva, akkor* $\varphi \circ \psi^{-1}$ *egy* $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ *lineáris leképezés leszűkítése.*

1.3 Exponenciális leképezés

Egy G Lie–csoport differenciálható csoport, mely egyaránt rendelkezik csoport, illetve sokaság struktúrával, melyben a szorzás és annak inverz leképezése is differenciálható. A legegyszerűbb Lie–csoport a valós számok additív csoportja. Az $(\mathbb{R}, +)$ adott G Lie–csoportra történő differenciálható homomorfizmusát a G egy–paraméteres részcsoportjának nevezzük.

Minden, e egységbeli $X \in T_eG$ érintővektor esetén definiálhatjuk az $exp(X) = \phi_X(1)$ leképezést. Az $exp : T_eG \to G : X \mapsto \phi_X(1)$ leképezést G exponenciális leképezésének nevezzük.

A $\mu_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu_c = c \cdot t$ egy Lie– homomorfizmus. Így $\phi_X \circ \mu_c$ szintén egy–paraméteres részcsoportja G-nek, és a differenciálási lánc-szabályból következik, hogy $\phi_X \circ \mu_c = \phi_{cX}$. Így $exp(tX) = \phi_{tX}(1) = \phi_X(t)$ teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Mivel $exp : T_eG \to G$ egy lokális diffeomorfizmus, az exponenciális leképezést G-beli lokális koordináták definiálására használhatjuk.

Többféle természetes lehetőség is adódik a lokális $\mathcal{C}^k-$differenciálható $n-$loopok $W \to H$ $(0 \in W \subset T_eH)$ exponenciális leképezésének definiálására. Az egyik lehetséges definíció a Lie–csoportok elméletében gyakran használt konstrukcióval analóg, nevezetesen az exp leképezést az egységelembeli érintővektorok i. eltolásai által létrehozott vektormezők integrálgörbéi határozzák meg.

Bináris Lie–csoportok esetén ezek a görbék egy–paraméteres részcsoportok, de analitikus loopok esetén ez a tulajdonság nem mindig teljesül. [3] A fenti kostrukció másik hátránya, hogy a $W \to H$ $(0 \in W \subset T_eH)$ leképezés differenciálhatóságával kapcsolatban csak $\mathcal{C}^{k-1}-$differenciálhatóság garantálható, hiszen az exp leképezést az érintővektorok i. eltolásai által létrehozott $\mathcal{C}^{k-1}-$differenciálható vektormezők integrálgörbéi határozzák meg.

Definíció. *Legyen $\gamma_v^i(t)$ a $\dot{\gamma}_v^i(t) = (\lambda^i_{\gamma(t)})_* v$ differenciálegyenlet integrálgörbéje, ahol*

$$\gamma_v^i(0) = e, \quad \dot{\gamma}_v^i(0) = v$$

és λ_x^i jelöli az x elemmel történő i. eltolást. Ekkor az $exp^{(i)} : T_eH \to H$ leképezést, ahol

$$exp^{(i)}(v) = \gamma_v^i(1),$$

*az i. **exponenciális leképezés**nek nevezzük.*

Az exponenciális leképezés egy természetesen adódó, másik lehetséges definícióját az előbbiekben tárgyalt kanonikus koordináta-rendszer konstrukciója szolgáltathatja.

Tétel. *Legyen* $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ $\mathcal{C}^k-$*differenciálható lokális* $n-$*loop, ahol* $k \geq 2$. *Ekkor egyértelműen létezik olyan* $\exp\colon W \to H$ *lokális* $\mathcal{C}^k-$*diffeomorfizmus, ahol* W *a* $0 \in T_eH$ *egy környezete, és teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:*

(i) $\exp(0) = e$,

(ii) $\exp(n\,x) = m(\exp(x), \ldots, \exp(x))$,

(iii) $\exp_*|_0 = id_{T_eH}$.

Tétel. *Legyenek* $\mathcal{H} = (H, e, m, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ *és* $\mathcal{H}' = (H', e', m', \delta'_1, \ldots, \delta'_n)$ $\mathcal{C}^k-$*differenciálható lokális* $n-$*loopok,* $\exp\colon W \to H$ *és* $\exp'\colon W' \to H'$ *rendre ezek exponenciális leképezései, ahol* $W \subset T_eH$ *és* $W' \subset T_{e'}H'$. *Ekkor az* $\exp'^{-1} \circ \alpha \circ \exp\colon W \to T_{e'}H'$ *leképezés lokálisan lineáris minden* $\alpha\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ *folytonos lokális homomorfizmus esetén.*

2 Diffúziós tenzor képalkotás

Ebben a részben megmutatjuk, hogy a differenciálgeometria eszközei milyen hasznosak lehetnek akár az orvosi képalkotás terén is. Anizotropikus diffúzió esetén ugyanis a skalár diffúziós együttható már nem elegendő a diffúzió tulajdonságainak leírására. Ebben az esetben a diffúziót egy másodrendű, szimmetrikus tenzorral lehet jellemezni, melyet diffúziós tenzornak nevezünk:

$$D = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}.$$

A diffúziós tenzor hat független elemét diffúziós súlyozott képek segítségével tudjuk megbecsülni.

Ha N irány mentén végzünk diffúziós súlyozott méréseket, a következő mátrix egyenlet írható fel:

$$B\vec{d}^{\,T} = \vec{A}^{\,T}\ ,$$

ahol

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \ln\frac{S_1}{S_0} & \ln\frac{S_2}{S_0} & \ldots & \ln\frac{S_N}{S_0} \end{pmatrix}$$

a megfelelő logaritmikus jel arányok vektora,

$$B = \begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{b_2} \\ \vdots \\ \vec{b_N} \end{pmatrix}$$

a diffúziós gradiens paramétereit jellemzi. [6]

Ez a diffúziós tenzor modell a diffúziós irányra vonatkozó információk teljes leírását nyújtja.

A diffúziós elmozdulást egy ellipszoid segítségével jellemezhetjük, ahol a főtengelyek hosszát a diffúziós tenzor sajátértékei, míg az irányukat a diffúziós tenzor sajátvektorai írják le.

Az agy rostszálainak rekonstruálása és képi megjelenítése volt a célunk. A modellezés során általában csak három ortogonális síkkal történő metszeteket mutatnak, mely tetszőleges számú és állású vágósíkkal is elvégezhető. [9], [10]

3 A többségi szavazás általánosítása

Ebben a fejezetben a klasszikus többségi szavazómodellt általánosítjuk a $0 \leq p_{n,k} \leq 1$ valószínűségi értékek bevezetésével, melyek a jó döntés valószínűségét írják le, amennyiben az n (összes) szavazat között pontosan k helyes található. Ezt az általánosítást olyan detektálási probléma motiválta, ahol az összetett rendszer tagjai képfeldolgozó algoritmusok, melyek szavazatként az adott kép egy pixelét adják vissza. Ebben az esetben a $p_{n,k}$ valószínűségi értékek bizonyos geometriai feltételektől függenek. [1], [8]

A klasszikus többségi szavazással kapcsolatban számos elméleti eredmény független osztályozókra vonatkozik, így az általánosítást ezzel az esettel kezdjük.

3.1 Független osztályozók

Az általánosított modellben a p_i pontosságú D_i osztályozót η_i Bernoulli-eloszlású valószínűségi változóként tekintjük, azaz:

$$P(\eta_i = 1) = p_i, \quad P(\eta_i = 0) = 1 - p_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol az $\eta_i = 1$ a D_i általi helyes osztályozást jelöli. Ekkor a D_i osztályozó pontossága az η_i valószínűségi változó várható értéke: $E\eta_i = p_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

A $p_{n,k}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$ adott valós számok, ahol

$$0 \leq p_{j0} \leq \dots \leq p_{jj} \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n),$$

és a ξ valószínűségi változót a következőképpen definiáljuk:

$$P(\xi = 1) = p_{n,k} \quad \text{és} \quad P(\xi = 0) = 1 - p_{n,k},$$

ahol $k = |\{i \ : \ \eta_i = 1\}|$. Ekkor a $D_1, \dots, D_n$ osztályozókhoz tartozó módosított többségi szavazást a ξ valószínűségi változó reprezentálja: ha az

n osztályozó közül k esetében valósult meg helyes osztályozás, akkor az általánosított többségi szavazást alkalmazva $p_{n,k}$ valószínűséggel hozunk helyes döntést (azaz $\xi = 1$).

Ezen általánosított modell a

$$p_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ k > \frac{n}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } \ k = \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \tag{7}$$

választással a klasszikus többségi szavazást adja vissza.

Ekkor ξ Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó, melynek q paramétere az összetett rendszerünk pontosságát írja le, melyre

$$q = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \Bigg(\sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} p_i \prod_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus I} (1 - p_j) \Bigg). \tag{8}$$

Először azt a klasszikus többségi szavazásnál már gyakran vizsgált speciális esetet tekintjük, mikor $p = p_1 = \ldots = p_n$, azaz az osztályozók azonos pontosságúak. Ekkor

$$q = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{9}$$

Így páratlan n esetén és a $p_{n,k}$ (7)$-$ben adott választása esetén $q = P$ adódik, ahol

$$P = \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

független osztályozók esetén a klasszikus többségi szavazás rendszerpontossága.

Az új modell bevezetésének egyik célja, hogy az általánosított többségi szavazómodell minden egyedi osztályozónál pontosabb legyen. Ehhez a $q \geq p$ feltételnek kell teljesülnie.

Első lépésként bebizonyítható, hogy ha a $p_{n,k}$ valószínűségi értékek lineárisan változnak, azaz $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, akkor az összetett rendszer ugyanolyan pontosságú lesz, mint az egyedi osztályozók $(q = p)$.

A következő eredmény abban segít, hogy a $p_{n,k}$ valószínűségi értékekkel adott általánosított többségi szavazómodell pontosságát össze tudjuk hasonlítani a klasszikus többségi szavazómodelléval.

Tétel. *Ha $p \geq \frac{1}{2}$ és minden k esetén, ahol $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$:*

(i) $p_{n,k} + p_{n,n-k} \geq 1$,

(ii) $p_{n,n-k} \geq \frac{n-k}{n}$

teljesül, akkor $q \geq p$, és így $E\xi \geq p$.

Speciális esetben a következő, klasszikus többségi szavazómodellre vonatkozó állítást kapjuk. [5]

Állítás. *Ha n páratlan, $p \geq \frac{1}{2}$ és:*

$$p_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{ha } k > \frac{n}{2}, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

teljesül minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén, akkor $q \geq p$, és így $E\xi \geq p$.

Jelölje $\xi^{\otimes t}$ azt a valószínűségi változót, amely a ξ t-szer függetlenül történő végrehajtása során hozott helyes döntések számát írja le. Ekkor közismert, hogy $\xi^{\otimes t}$ binomiális eloszlású valószínűségi változó (t, q) paraméterrel, ahol q-t a (9) definiálja.

Következő lépésként azt a különleges esetet vizsgáltuk meg, mikor az összetett rendszerünk minden esetben helyes döntést eredményez, azaz 100% pontosságú ($\xi^{\otimes t} = t$). Minden D_i osztályozó esetén $P(\eta_i^{\otimes t} = t) = p^t$, ahol $i = 1, \ldots, n$.

Ahhoz, hogy az összetett rendszerünk minden egyedi osztályozónál pontosabb legyen, a $p_{n,k}$ valószínűségi értékeket úgy kell megválasztani, hogy $P(\xi^{\otimes t} = t) \geq p^t$ teljesüljön.

Nem csak ezt, de egy ennél általánosabb esetet is jellemezni tudunk egy szükséges és elegendő feltétel segítségével.

Tétel. *Legyenek t és s olyan egész számok, ahol $1 \leq s \leq t$. Ekkor*

$$P(\xi^{\otimes t} \geq s) \geq P(\eta_1^{\otimes t} \geq s)$$

akkor és csak akkor, ha $q \geq p$, azaz $E\xi^{\otimes t} \geq tp$.

3.2 Függő osztályozók

Függő osztályozók esetén az egyik legkézenfekvőbb megoldás az osztályozók függőségének jellemzésére, hogy a valószínűségi változók együttes eloszlását tekintjük.

A független esethez hasonlóan belátható, hogy az összetett rendszer pontossága függő esetben is megegyezik az egyedi pontosságokkal, ha a p_{nk} valószínűségi értékek lineárisan változnak.

Tétel. *Legyen* $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ *egy* $n-$*dimenziós valószínűségi változó, ahol* $E\eta_i = p$ $(i = 1, \dots, n)$. *Tekintsük az* $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ *együttes eloszlását, azaz*

$$c_{a_1,\dots,a_n} = P(\eta_1 = a_1, \dots, \eta_n = a_n),$$

ahol $a_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \dots, n)$. *Legyen* $p_{nk} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$. *Ekkor* $E\xi = p$.

Az egyedi osztályozók pontossága általában nem egyezik meg. Hasonló eredmény fogalmazható meg akkor is, ha eltekintünk az azonos pontosság feltételétől.

Megjegyzés. *Ha az* η_i *valószínűségi változók várható értékére* $E\eta_i = p_i$ *teljesül* $(i = 1, \dots, n)$, *akkor*

$$E\xi = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n},$$

ha $p_{nk} = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$.

3.3 A rendszerpontosság extrémumai

Ezután megvizsgáltuk, hogy az osztályozók függősége mennyire befolyásolja az összetett rendszer pontosságát. Ezért általánosítottuk azokat a klasszikus többségi szavazással kapcsolatos fogalmakat, melyek az összetett rendszer pontosságának maximumát (*pattern of success*), illetve minimumát (*pattern of failure*) jellemzik.

3.3.1 Pattern of success és pattern of failure

Jelölje $\eta_i^{(j)}$ az η_i valószínűségi változó j. realizációját az η_i t-szer függetlenül történő végrehajtása során, ahol $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, t$. Ekkor

$$|\{j \ : \ \eta_i^{(j)} = 1\}| = r \quad \text{minden } i = 1, \dots, n,$$

ha $r = np$, ahol $E\eta_i = p$.

Ekkor az összetett rendszer pontosságát $E\xi^{\otimes t} = E\xi^{(1)} + \ldots + E\xi^{(t)}$ adja meg.

Ezt az esetet legegyszerűbben egy $n \times t$ méretű T táblázattal lehet leírni: a T táblázat (i, j). eleme, a $T(i, j)$ értéke 0 vagy 1 lehet, mely megegyezik az $\eta_i^{(j)}$ értékével $(1 \le i \le n, 1 \le j \le t)$.

Ekkor

$$E\xi^{\otimes t} = \sum_{j=1}^{t} p_{n,u_j}, \tag{10}$$

ahol u_j a táblázat j. oszlopában található egyesek száma.

Így a pattern of success (maximális pontosság), illetve a pattern of failure (minimális pontosság) jellemzéséhez ezt a (10)−ben adott kifejezést kell maximalizálni, illetve minimalizálni.

Tétel. *Legyenek a $p_{n,k}$ tetszőleges valószínűségi értékek, ahol $p_{n,0} = 0$. Legyen $k_1 \neq 0 : \frac{p_{n,k_1}}{k_1} \geq \frac{p_{n,k}}{k}$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$E\xi^{\otimes t} \leq \frac{nrp_{n,k_1}}{k_1}.$$

Továbbá ha $tk_1 = nr$, akkor ezt a maximumot el is éri.

Tétel. *Legyenek a $p_{n,k}$ tetszőleges valószínűségi értékek, ahol $p_{n,0} = 0$. Legyen $k_2 \neq 0 : \frac{p_{n,k_2}}{k_2} \leq \frac{p_{n,k}}{k}$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$E\xi^{\otimes t} \geq \frac{nrp_{n,k_2}}{k_2}.$$

Továbbá ha $tk_2 = nr$, akkor ezt a minimumot el is éri.

A független esethez hasonlóan, most is megvizsgáljuk, hogy mi a feltétele annak, hogy az összetett rendszerünk minden esetben helyes döntést eredményezzen, azaz

$$P(\xi^{\otimes t} = t) = \prod_{j=1}^{t} p_{n,u_j} \tag{11}$$

maximális legyen.

Abban a speciális esetben, ha $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ $(k = 1, \ldots, n)$, a (11)−ben adott kifejezésre a következő eredmény fogalmazható meg.

Tétel. *Legyen $p_{n,k} = \frac{k}{n}$ minden $k = 0, 1, \ldots, n$ esetén és $nr \geq t$. Ekkor $P(\xi^{\otimes t} = t)$ maximális, ha*

$$\left\lfloor \frac{nr}{t} \right\rfloor \leq u_j \leq \left\lceil \frac{nr}{t} \right\rceil \quad (1 \leq j \leq t).$$

Tetszőleges $p_{n,k}$ valószínűségi értékek esetén a (11)−ben adott kifejezésre a következő tételt kapjuk.

Tétel. *Legyenek a $p_{n,k}$ tetszőleges valószínűségi értékek, ahol $p_{n,0} = 0$ és $p_{n,k} > 0$, ha $0 < k \leq n$. Legyen $k_0 \neq 0 : \frac{\ln p_{n,k_0}}{k_0} \geq \frac{\ln p_{n,k}}{k}$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Ekkor*

$$P(\xi^{\otimes t} = t) \leq p_{n,k_0}^{\frac{nr}{k_0}}.$$

3.3.2 Lineáris programozási probléma

Az előzőekben használt megkötések (pl. azonos pontosság, függetlenség) elhagyhatóak, ha egy olyan átfogó, komplex eszközt alkalmazunk a maximális/minimális pontosságú összetett rendszer feltérképezésére, mely ezt a problémát egy lineáris programozási feladat megoldásaként valósítja meg. Az osztályozók függőségének jellemzésére a valószínűségi változók együttes eloszlását

$$c_{a_1,\ldots,a_n} = P(\eta_1 = a_1, \ldots, \eta_n = a_n)$$

tekintjük, ahol $a_i \in \{0, 1, *\}$ és $* = 0$ vagy 1. [2]

Ahhoz, hogy meghatározzuk a legjobban/legrosszabbul teljesítő összetett rendszert, illetve annak pontosságát (q_{max}/q_{min}), maximalizálni/minimalizálni kell a következő függvényt:

$$q(c_{a_1,\ldots,a_n}) = \sum_{k=0}^{n} \left(p_{n,k} \sum_{a_1+\ldots+a_n=k} c_{a_1,\ldots,a_n} \right)$$

a következő feltételek mellett:

$$\begin{aligned}
&\sum_{a_i=1} c_{*,\ldots,*,a_i,*,\ldots,*} = p_i \quad (i = 1, \ldots, n), \\
&\sum_{a_1,\ldots,a_n} c_{a_1,\ldots,a_n} = 1, \\
&c_{a_1,\ldots,a_n} \geq 0,
\end{aligned}$$

ahol $E\eta_i = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ az i. osztályozó pontossága.

Abban az esetben, ha az $\eta_1, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$c_{a_1,\ldots,a_n} = P(\eta_1 = a_1) \ldots P(\eta_n = a_n).$$

Ekkor a kontingencia táblázat elemeit a $p_1, \ldots, p_n$ valószínűségek határozzák meg. Így az összetett rendszer q pontosságát (8) írja le.

4 Alkalmazás – OD detektálás

Ebben a fejezetben az OD detektálási probléma kapcsán bemutatjuk, hogy a $p_{n,k}$ valószínűségi értékeket hogyan befolyásolják az előírt geometriai feltételek.

Ebben az alkalmazásban a szavazatoknak egy d_{OD} átmérőjű körlapon belülre kell esniük, hogy együtt szavazhassanak. A $p_{n,k}$ valószínűségi értékek meghatározásához k helyes szavazatnak az igazi OD területére kell esnie, míg a helytelen szavazatok számára: $n-k=k_1+\ldots+k_l$, ahol minden helytelen szavazat az l diszjunkt d_{OD} átmérőjű körlap valamelyikével van lefedve. Feltehetjük, hogy $k_1 \geq \ldots \geq k_l$, ahol k_i az i. körlapba eső helytelen szavazatok száma. Ekkor a helyes döntést jellemző $P(n,k,k_1,\ldots,k_l)$ valószínűségre:

$$P(n,k,k_1,\ldots,k_l) =$$
$$\frac{n!}{k!k_1!\ldots k_l!}p_1\ldots p_k(1-p_{k+1})\ldots(1-p_n)\left(1-\frac{T_0}{T}\right)^{k_1}\ldots\left(1-\frac{lT_0}{T}\right)^{k_l}$$

adódik, ahol T_0 és T rendre az OD és a ROI területét jelöli.

A geometriai feltétel alkalmazásával csak akkor születik rossz döntés, ha $k_1 > k$. Így $p_{n,k}=0$, ha $k_1 > k$, míg $p_{n,k}=1$, ha $k > k_1$ teljesül. A $k_1 = k$ esetben véletlenszerűen választunk a két, azonos számú jelöltet tartalmazó körlap közül. Ezek alapján a következőképpen határozhatjuk meg az erre vonatkozó $p_{n,k}$ valószínűségi értékeket:

$$p_{n,k} = \sum_{k_1+\ldots+k_l=n-k,k>k_1} P(n,k,k_1,\ldots,k_l)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1+\ldots+k_l=n-k,k=k_1} P(n,k,k_1,\ldots,k_l).$$

4.1 OD detektálás összetett rendszerrel

A minél hatékonyabb OD detektálásért nyolc egyedi algoritmust választottunk ki, melyekből összetett rendszert hoztunk létre. Minden lehetséges részrendszert leellenőrizve választottuk ki közülük azt, amely a legjobb összetett rendszerpontosságot eredményezte.

A kiválasztott algoritmusok adott egyedi pontosságait tekintve, a lineáris programozási feladat megoldásával megkaptuk ezen összetett rendszerre vonatkozóan a minimális, illetve a maximális rendszerpontosságot:

$$q_{min} = 0.899, \qquad q_{max} = 1$$

A mi általunk kiválasztott összetett rendszer pontossága a tesztek alapján:

$$q = 0.981.$$

5 A döntési szabály módosítása

Ezt követően módosítjuk a végső döntés meghozatalára vonatkozó szabályt, mely további javulást eredményez az összetett rendszer pontosságában. Az általánosítás arra épül, hogy az osztályozókhoz súlyokat rendelünk. [7]

Az általánosított többségi szavazómodell esetén is lehetőségünk van arra, hogy a rendre $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pontosságú $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ osztályozókhoz $(b_1, \ldots, b_n)$ súlyokat rendeljünk. Ekkor a végső döntés a bizonyos (pl. geometriai) feltételeknek eleget tevő maximális összsúlyú szavazatok kiválasztásával történik.

Végül választ adunk arra a kérdésre, hogy független osztályozókat tekintve, az általánosított súlyozott többségi szavazás esetén hogyan lehet a súlyokat optimálisan megválasztani (a maximális rendszerpontosság elérése érdekében).

Tétel. *Független $(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ osztályozók esetén, a p_i pontosságú D_i osztályozóhoz az optimális b_i súlyra teljesül, hogy*

$$b_i \propto \log \frac{p_i}{(1-p_i)^2 r_i (1-r_i)},$$

ahol a $(1-p_i)r_i$ $(r_i \in [0,1])$ érték annak a valószínűségét jellemzi, hogy az i. osztályozó helytelen osztályozás esetén részt vesz a végső helytelen döntés meghozatalában.

6 List of talks

1. *Diversity measures for majority voting in the spatial domain*, 8th International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems, Salamanca, September 11-13, 2013.

2. *Generalized weighted majority voting with an application to algorithms having spatial output*, 7th International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems, Salamanca, March 28-30, 2012.

3. *Az orvosi képfeldolgozás és a geometria, avagy mit tudhat egy körlap a diabéteszről*, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Geometria Tanszék Szemináriuma, Budapest, December 11, 2012.

4. *A generalization of majority voting scheme for medical image detectors*, 6th International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems, Wroclaw, May 23-25, 2011.

5. *Általánosított többségi szavazás alkalmazása retinaképek elemzésében*, 14. Gyires Béla Informatikai Nap, Debrecen, December 16, 2011.

6. *Bol reflection*, XIth Conference Geometry and Graphics, Ustron, June 28-30, 2010.

7. *Detecting digital intersections using line approximation*, 8th International Conference on Applied Informatics, Eger, January 27-30, 2010.

8. *Thickness-based binary morphological improvement of distorted digital line intersections*, 5th Hungarian Conference on Computer Graphics and Geometry, Budapest, January 26-27, 2010.

9. *New DTI visualization methods*, 13th International Conference on Geometry and Graphics, Dresden, August 4-8, 2008.

10. *New visualization methods in radiology*, 12th Colloquium of Croatian Society for Geometry and Graphics, Vukovar, September 16-20, 2007.

11. *On Bol closure condition*, Loops 07, Prague, August 19-25, 2007.

12. *On n-loops and (n+1)-webs*, 26th Conference on Geometry and Computer Graphics, Nové Mesto na Morave, September 11-15, 2006.

13. *Exponential maps and canonical coordinate-systems of differentiable n-loops*, 9th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, Prague, August 30 - September 3, 2004.

14. *Exponential maps of differentiable n-loops*, 3rd Workshop on Differential Geometry, Olomouc, October 16 - 18, 2003.

15. *Exponential maps of n-ary differentiable loops*, Loops 03, Prague, August 11-17, 2003.

16. *On the differentiability of n-loops*, 4th Conference on Geometry and Topology of Manifolds, Krynica, April 29 - May 4, 2002.

17. *Experiences about the mathematical and geometrical courses for the students on faculty of informatics*, 5th International Conference on Applied Informatics, Eger, January 28 - February 3, 2001.

7 List of publications

1. Hajdu, A., Hajdu, L., Jónás, Á., Kovács, L., Tomán, H.: Generalizing the Majority Voting Scheme to Spatially Constrained Voting, IEEE Trans. on Image Processing 22(11)(2013), 4182-4194, IF=3.042.

2. Hajdu, A., Hajdu, L., Kovács, L., Tomán, H.: Diversity Measures for Majority Voting in the Spatial Domain, Lecture Notes in Artificial Intelligence 8073 (2013), 314-323.

3. Tomán, H., Kovács, L., Jónás, A., Hajdu, L., Hajdu, A.: Generalized Weighted Majority Voting with an Application to Algorithms Having Spatial Output, Lecture Notes in Artificial Intelligence 7209 (2012), 56-67.

4. Tomán, H., Kovács, L., Jónás, A., Hajdu, L., Hajdu, A.: A Generalization of Majority Voting Scheme for Medical Image Detectors, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6679/2 (2011), 189-196.

5. Tomán, H.: Canonical Coordinate Systems and Exponential Maps of n-loop, Note di Matematica 24/2 (2005), 1-7.
   MR2223649 (2007g:20063)
   Zbl 1113.22003

6. Tomán, H., Tornai, R., Zichar, M.: Complex Fiber Visualization, Ann. Math. Inform. 34 (2007), 103-109.
   Zbl 1135.68604

   független hivatkozások:

   Wu, Z., Chen, C., Gao, M., Zhu, S.: Segmentation of Diffusion Tensor Image of Brain White Matter Tissues Based on Tensorial Morphological Gradient and Image Forest Transformation Watershed Algorithm, Space Medicine & Medical Engineering, Issue 2 (2011), 139-142.

   Wu, Z., Zhu, S., He, B.: Segmentation of Brain Corpus Callosum Using Graph Cuts Algorithm Based on Diffusion Tensor Imaging, Journal of Zhejiang University (Engineering Science) 45(1)(2011), 163-167.

   Megyesi, Z. et al: GPU Based Techniques in Medical Imaging, 13th International Conference on Geometry and Graphics, Drezda, 2008 (7 pages)

7. Tomán, H., Tornai, R., Zichar, M.: New DTI Visualization Methods, 13th International Conference on Geometry and Graphics, Drezda, 2008, 1-6., ISBN 978-3-86780-042-6

8. Tomán, H.: On n-loops and (n+1)-webs, 26th Conference on Geometry and Computer Graphics, Nové Mesto na Morave, 2006, 259-264.

9. Szeghalmy, Sz., Tomán, H., Hajdu, A.: Detecting Digital Intersections Using Line Approximation, 8th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2010, 161-171.

10. Tomán, H., Hajdu, A., Szakács, J., Hornyik, D., Csutak, A., Pető, T.: Thickness-based Binary Morphological Improvement of Distorted Digital Line Intersections, 5th Hungarian Conference on Computer Graphics and Geometry, Budapest, 2010, 133-139.

11. Papp, I., Tomán, H.: Experiences about the Mathematical and Geometrical Courses for the Students on Faculty of Informatics, 5th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2001, 225-228.

References

[1] Hajdu, A., Hajdu, L., Jónás, Á., Kovács, L., Tomán, H.: Generalizing the Majority Voting Scheme to Spatially Constrained Voting, IEEE Trans. on Image Processing 22(11)(2013), 4182–4194.

[2] Hajdu, A., Hajdu, L., Kovács, L., Tomán, H.: Diversity Measures for Majority Voting in the Spatial Domain, Lecture Notes in Artificial Intelligence 8073 (2013), 314–323.

[3] Kozma, J.: Loops With and Without Subloops, Acta Sci. Math. (Szeged) 55 (1991), 21–31.

[4] Kuncheva, L.I.: Combining Pattern Classifiers, Methods and Algorithms. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey (2004)

[5] Kuncheva, L. I., Whitaker, C. J., Shipp, C. A.: Limits on the Majority Vote Accuracy in Classifier Fusion, Pattern Analysis and Applications 6 (2003), 22–31.

[6] Papadakis, N. G., Xing, D., Huang, C. L., Hall, L. D., Carpenter, T. A.: A Comparative Study of Acquisition Schemes for Diffusion Tensor Imaging Using MRI, J. Magn. Reson. 137 (1999), 67–82.

[7] Tomán, H., Kovács, L., Jónás, Á., Hajdu, L., Hajdu, A.: Generalized Weighted Majority Voting with an Application to Algorithms Having Spatial Output, Lecture Notes in Artificial Intelligence 7209 (2012), 56–67.

[8] Tomán, H., Kovács, L., Jónás, Á., Hajdu, L., Hajdu, A.: A Generalization of Majority Voting Scheme for Medical Image Detectors, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6679/2 (2011), 189–196.

[9] Tomán, H., Tornai, R., Zichar, M.: Complex Fiber Visualization, Ann. Math. Inform. 34 (2007), 103–109.
Zbl 1135.68604

[10] Tomán, H., Tornai, R., Zichar, M.: New DTI Visualization Methods, 13th International Conference on Geometry and Graphics, Dresden, 2008, 1–6., ISBN 978-3-86780-042-6

[11] Tomán, H.: Canonical Coordinate Systems and Exponential Maps of n-loop, Note di Matematica 24/2 (2005), 1–7.
MR2223649 (2007g:20063)
Zbl 1113.22003

[12] Tomán, H.: On n-loops and (n+1)-webs, 26th Conference on Geometry and Computer Graphics, Nové Mesto na Morave, 2006, 259–264.