



# **Kvantummechanikai potenciálproblémák szuperszimmetriája**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Soltész Tibor

Témavezető: Dr. Lévai Géza

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács  
Fizikai Tudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2026



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács, Fizikai Tudományok Doktori Iskola Magfizika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2026. február 25.

.....

Soltész Tibor  
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Soltész Tibor doktorjelölt 2024-2026 között a fent megnevezett Doktori Iskola Magfizika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2026. február 24.

.....

Dr. Lévai Géza  
témavezető



## **Kvantummechanikai potenciálproblémák szuperszimmetriája**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a Fizika tudományágban

Írta: Soltész Tibor fizikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolája  
Magfizika programja keretében

Témavezető: Dr. Lévai Géza

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20... . . . . .



# Tartalom

1. Bevezetés.....	8.o.
2. Módszerek áttekintése.....	11.o.
2.1 A Szuperszimmetrikus Kvantummechanika (SUSYQM).....	11.o.
2.1.1 Szuperszimmetrikus Kvantummechanika alapjai .....	11.o.
2.1.2 A szuperszimmetria spontán sérülése .....	13.o.
2.1.3 A bozonikus és fermionikus elnevezés eredete .....	14.o.
2.1.4 Az egy dimenziós Schrödinger-egyenlet és a szuperalgebra koordináta realizációja .....	17.o.
2.1.5 Alakinvariáns potenciálok.....	28.o.
2.1.6 Radiális időfüggetlen Schrödinger-egyenlet és szuperszimmetrikus vonatkozásai.....	31.o.
2.2 Transzformációs módszer.....	35.o.
2.2.1 A Schrödinger-egyenlet megoldása ismert másodrendű differenciálegyenletbe történő transzformálásával .....	35.o.
2.2.2 Polinomok megjelenése és a Natanzon-féle osztály.....	38.o.
3. Saját eredmények .....	45.o.
3.1 A radiális harmonikus oszcillátor szuperszimmetrikus transzformáltja .....	45.o.
3.1.1 A radiális harmonikus oszcillátor és racionális kiterjesztése.....	45.o.
3.1.2 Transzformációk sértetlen és sértett szuperszimmetria esetén.....	47.o.
3.2 A PI potenciálosztály szuperszimmetrikus transzformációi.....	57.o.
3.2.1 A PI potenciálosztály és racionális kiterjesztése.....	57.o.
3.2.2 Az általános PI potenciálosztály szuperszimmetrikus transzformációi.....	62.o.
3.2.3 Alkalmazás a PI potenciálosztály három tagjára.....	68.o.
3.3. Az $X_1$ – típusú kivételes Laguerre- és Jacobi-polinomok, mint Heun-típusú differenciálegyenletek megoldásai.....	97.o.
3.3.1 A konfluens Heun-egyenlet polinom megoldásai.....	99.o.
3.3.2 A Heun-egyenlet polinom megoldásai.....	102.o.
4. Összefoglaló/Summary .....	106,108.o.
5. Köszönetnyilvánítás.....	110.o.
6. Publikációk, felhasznált irodalom, hivatkozások listája .....	111.o.
7. Függelék.....	115.o.

# 1. Bevezetés

A kvantumfizikai jelenségek leírásában igen hasznosnak bizonyultak a különféle potenciálokra alkalmazott modellek. Az ilyen célú feladatokat legtöbbször numerikus módszerek segítségével oldják meg, de egyes modellproblémák esetében lehetséges az egzakt analitikus megoldás is. Ez utóbbi esetek vizsgálata több szempontból is nagy jelentőséggel bír. Az egzakt megoldások matematikai formalizmusa lehetővé teszi a potenciálproblémák osztályozását, illetve az egymáshoz képesti viszonyuk feltárását. Emellett gyakran kapcsolódnak valamilyen szimmetriához, ami általában jellegzetes módon mutatkozik meg az energiaspektrum szerkezetében. Technikai szempontból az egzaktul megoldható problémák nagyban segítik a numerikus módszerek fejlesztését, mivel alkalmasak azok tesztelésére, illetve kiegészítésére. Mindezek alapján érthető, hogy az egzaktul megoldható potenciálfeladatok keresése és vizsgálata a kvantummechanika egy évszázados története során végig aktív kutatási téma volt és még ma is hoz új eredményeket.

A doktori értekezés témája és feladata az egydimenziós, időtől független Schrödinger-egyenlet egzakt megoldásainak kutatása. Ehhez néhány bevált módszer alkalmazása adott segítséget. Ilyen az a *transzformációs eljárás*, amellyel a Schrödinger-egyenlet a matematikai fizika valamely másodrendű differenciálegyenletébe alakítható megfelelő változó- és egyéb  $T_1, T_2, T_3, T_4$  transzformációkkal. Ez egyben az így előállított egzaktul megoldható potenciálok osztályozását is lehetővé teszi a felhasznált differenciálegyenletek, illetve a dolgozatban alkalmazott  $\chi(r), \chi(x)$  transzformációs függvény alapján.

Négy transzformációnk lehet  $r$  és  $\chi(r)$  különböző választásaival:

<b>Transzformációk</b>	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r), r \in [0, \infty[$ $\gamma \in \mathbf{Z}^+$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$
$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r)$	konvergens	divergens	divergens	konvergens
Spektrum megváltozása és $\varepsilon$ :faktorizációs energia	az alapállapotenergia eltűnik $\varepsilon = E_0^-$	új alapállapotenergia, $\gamma > 0$ $\varepsilon < E_0^-$	nincs változás $\varepsilon < E_0^-$	nincs változás $\varepsilon < E_0^-$

Szingularitás megváltozása	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$
----------------------------	---------------------	------------------	---------------------	------------------

A legismertebb esetben a *Natanzon osztályú* potenciálok kaphatók meg a *hipergeometrikus* és a *konfluens hipergeometrikus* függvény transzformációiból. A kötött állapotok ilyenkor klasszikus ortogonális polinomokkal, konkrétan *Jacobi-* illetve *általánosított Laguerre-polinomokkal* fejezhetők ki. Így állíthatók elő a dolgozatban taglalt legismertebb néhány egzaktul megoldható potenciál (*Radiális harmonikus oszcillátor, Pöschl-Teller - potenciál, Scarf-potenciálok*) kötöttállapotú hullámfüggvényei és energiaszintjei is.

Egy további módszer a *Szuperszimmetrikus Kvantummechanika* módszereinek alkalmazása, amivel új, egzaktul megoldható potenciálok nyerhetők egy ismert, megoldható potenciálból kiindulva. Oly módon, hogy a két potenciál energiaspektruma lényegében azonos. Ez utóbbi eredmény annak köszönhető, hogy a két potenciált tartalmazó *Hamilton-operátort* egy hasonló *mátrix alakú Hamilton-operátorban* egyesítő *Szuperszimmetrikus Hamilton-operátor* egy *szuperalgebrát* alkot vele felcserélhető mátrix alakú, úgynevezett *töltésoperátorokkal*, lásd (1),(2),(3) egyenletek bevezetését.

A kutatási témámban a vizsgálatok a *Natanzon osztályú potenciálok* körére, illetve azon kívülre terjedtek ki. Ez utóbbi esetben elsősorban a *Heun-féle differenciálegyenlet* variánsaira alkalmaztuk a fentebb leírt transzformációs eljárást. E differenciálegyenletek megoldásai sokkal kevésbé ismertek, mint a (*konfluens*) *hipergeometrikus függvények*, ami azt is jelentette, hogy új technikai részletek alkalmazására kellett sort keríteni annak érdekében, hogy korábban nem vizsgált egzaktul megoldható potenciálproblémák legyenek azonosíthatóak.

A *Heun-féle differenciálegyenlet* különféle alakjai speciális esetként tartalmazzák a (*konfluens*) *hipergeometrikus differenciálegyenletet*, ami lehetővé tette egyes *Natanzon osztályú potenciálok* általánosítását is.

Különös figyelemmel fordultunk a *Heun-féle differenciálegyenletek polinom típusú megoldásai* felé, mert ezek egyes speciális esetei visszaadták a *Natanzon osztályú potenciálok* polinom alakú megoldásait. Az ismert példák: az úgynevezett *Kivételes Jacobi-*, illetve *Kivételes Laguerre-polinomok* differenciálegyenlete megkapható a *Heun-féle differenciálegyenletek* speciális eseteként. Ez utóbbi polinomok abban térnek el a klasszikus ortogonális polinomoktól, hogy egyes zérushelyeik az ortogonálitási tartományon kívülre esnek, ezért a legalacsonyabb fokszámuk, nódusuk nem nulla. Mindezek ellenére más szempontból ugyanúgy viselkednek, mint a klasszikus ortogonális polinomok. Az említett kivételes polinomok megjelennek olyan potenciálok megoldásaiként, amelyek egyes *Natanzon osztályú potenciálok*

általánosításaiként állnak elő, például a dolgozatomban érintett *Racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor*, [1] illetve a közös PI potenciálosztályba tartozó Scarf II, II és az általánosított Pöschl-Teller potenciálok racionális kiterjesztései [2].

További lehetőségként vizsgáltuk a *Heun-féle differenciálegyenlet*ből származtatható potenciálok és a *Natanzon osztályú* potenciálok összekötését a *Szuperszimmetrikus Kvantummechanika* módszereivel. Erre egy megjelent publikációnkból hozható példa az említett *Racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor* előállítható a radiális harmonikus oszcillátor *szuperszimmetrikus transzformáltjaként*: [1], csakúgy, mint ahogy a fentebb említett PI osztályú potenciálokból származtatható a racionális kiterjesztésük [2].

A kutatás célja volt új egzaktul megoldható potenciálok keresése a *Natanzon potenciálosztályon* belül, illetve azon túl, továbbá a kapcsolatuk feltárása ismert potenciálokkal: [1,2].

Emellett vizsgáljuk a racionálisan kiterjesztett potenciálok megoldásait szolgáltató  $X_1$ -típusú kivételes Laguerre, illetve Jacobi polinomok származtatását. Bemutatjuk, hogy ezek előállnak a konfluens Heun, illetve a Heun differenciálegyenlet polinom típusú megoldásaiként [3].

---

## 2. Módszerek áttekintése

Az alábbiakban két, a dolgozatban alkalmazott módszert mutatunk be. A 2.1 részben ismertetett szuperszimmetrikus kvantummechanika formalizmusa lehetővé teszi azt, hogy egy ismert egzaktul megoldható potenciálból egy másik egzaktul megoldható potenciált származtassunk. A 2.2 részben leírt módszerrel pedig egzaktul megoldható potenciálok származtathatók a matematikai fizika másodrendű differenciálegyenletéből. A két módszer alkalmazására a dolgozat 3. fejezetében kerül sor.

### 2.1 A Szuperszimmetrikus Kvantummechanika (SUSYQM)

#### 2.1.1 A Szuperszimmetrikus Kvantummechanika alapjai

Bevezetjük a  $Q$  és  $Q^+$  töltésoperátorokat (értelmezés: (7)) illetve a  $\hat{H}$  szuperszimmetrikus Hamilton-operátort a következő  $N=2$ , ( $2 \times 2$ -es mátrix) struktúrában: [10,11]. Vannak más, bővebb SUSYQM konstrukciók is  $N > 2$  esetre is, de az  $N=2$  választás is sokrétű eredményre vezet itt.

Az említett operátorok együtt közösen kielégítik az alábbi relációkat:

$$\{Q, Q^+\} = \hat{H} \text{ és } Q^2 = (Q^+)^2 = 0 \quad (1)$$

$Q^2 = 0$  már maga után vonja (2) teljesülését,

Antikommutálnak a töltésoperátorok

$$\{Q, Q\} = \{Q^+, Q^+\} = 0 \quad (2)$$

A töltésoperátorok és a  $\hat{H}$  szuperszimmetrikus Hamilton-operátor kommutál:

$$[Q, \hat{H}] = [Q^+, \hat{H}] = 0 \quad (3)$$

Az (1) egyenlet alapján azt mondjuk a töltésoperátor *nilpotens*. A (3) egyenlet szerint pedig a töltésoperátor és a Hamilton-operátor *kommutálnak*, vagyis felcserélhetőek. Ezzel szemben a (2) egyenlet szerint a töltésoperátorok *antikommutálnak*. Mivel a zárt rendszer kommutátorokat és antikommutátorokat is tartalmaz, szuperalgebráról beszélhetünk.

A szuperalgebra felépíthető az alábbi 2x2 -es mátrix alakban, de emellett más realizációk is léteznek:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

A és  $A^+$  alakja később felírásra kerül a differenciáloperátorokkal történő megvalósítással a (14) és (15) egyenletekben.

Az (1) és egyenletek (4) alapján  $\widehat{H}$ :a szuperszimmetrikus Hamilton-operátor megkonstruálható. A diagonálisban szereplő  $H_-$  és  $H_+$  közöséges Hamilton-operátorokat hagyományosan *bozonikus* és *fermionikus* komponenseknek nevezik. A  $H_-$ ,  $H_+$  szuperszimmetrikus partnerek a következő alakban állnak elő:

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} A^+A & 0 \\ 0 & AA^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$H_- = A^+A \quad \text{és} \quad H_+ = AA^+ \quad (6)$$

A sajátállapotaik a szokásos elnevezéssel a *bozonikus*  $\Psi^{(-)}$ , illetve a *fermionikus*:  $\Psi^{(+)}$  komponensek. Az elnevezés eredete az egydimenziós harmonikus szuperszimmetrikus tárgyalásából következik: [4], mit a 2.1.4 alfejezetben ismertetünk.

A töltésoperátorok a következő módon kapcsolják össze a két komponenst:

$$Q \begin{pmatrix} \Psi^{(-)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\Psi^{(-)} \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad Q^+ \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi^{(+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^+\Psi^{(+)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

A sajátértékegyenletek alakja

$$H_- \Psi^{(-)} = E^{(-)} \Psi^{(-)} \quad (8)$$

illetve

$$H_+ \Psi^{(+)} = E^{(+)} \Psi^{(+)} \quad (9)$$

A (6) és (8) egyenletekből következik, hogy

$$H_+ (A\Psi^{(-)}) = AA^+ (A\Psi^{(-)}) = A H_- \Psi^{(-)} = E^{(-)} A \Psi^{(-)} \quad (10)$$

Látszik, hogy  $E^{(-)}$  sajátértéke a  $H_+$  partnernek is, vagyis a partner Hamilton-operátorok *izospektrálisak*, a megfelelő normált sajátalapállapoti hullámfüggvény pedig

$$\Psi^{(+)} = (E^{(-)})^{-\frac{1}{2}} A \Psi^{(-)}.$$

Ha a bozonikus függvényre igaz, hogy:  $A \Psi^{(-)} = 0$ , akkor  $\Psi^{(+)}$  nem értelmezhető. Fordított esetben,  $H_-$  és  $H_+$  szerepét felcserélve (5), (6) és (8)

behelyettesítésével, látszik, hogy  $E^{(+)}$  energiasajátértéke  $H_-$ -nak is:

$$H_- (A^+ \Psi^{(+)}) = A^+ A (A^+ \Psi^{(+)}) = A^+ H_+ \Psi^{(+)} = E^{(+)} A^+ \Psi^{(+)}. \quad (11)$$

A normált hullámfüggvény ilyenkor

$$\Psi^{(-)} = (E^{(+)})^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi^{(+)}. \quad (11)$$

### 2.1.2 A szuperszimmetria spontán sérülése

Az alapállapoti sajátfüggvény különösen fontos szerepet játszik. Ha  $\Psi_0$  a szuperszimmetrikus Hamilton-operátornak és a töltésoperátornak is sajátállapota, mégpedig 0 sajátértékkal, vagyis teljesül, hogy

$$\hat{H} \Psi_0 = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0^- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_- \Psi_0^- \\ 0 \end{pmatrix} = E_0^- \Psi_0 = 0,$$

$$Q \Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0^- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A \Psi_0^- \end{pmatrix} = 0,$$

$\Psi_0$ : a kétkomponensű állapotot magába foglaló alapállapoti (kötött állapot) saját/hullámfüggvény,

akkor a rendszer szuperszimmetriája *sértetlen*.

A (10) egyenlet alapján belátható, hogy *sértetlen* SUSY esetében  $H_+$  spektrumában nincs nulla.

Ha a  $\Psi_0 \neq 0$ , akkor az alapállapot továbbra is sajátfüggvénye a  $\hat{H}$  szuperszimmetrikus Hamilton-operátornak, de 0-tól eltérő sajátértékkal. Ugyanakkor a  $Q$  töltésoperátornak már nem sajátállapota. Ezesetben a szuperszimmetria *spontán sérüléséről* beszélünk:

$$\hat{H} \Psi_0 = E_0^- \Psi_0$$

$$Q\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ A\Psi_0^- \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} \neq cQ\Psi_0 .$$

### 2.1.3 A bozonikus és fermionikus elnevezések eredete

Az egyik legfontosabb és még egyszerűbbnek tekinthető kvantummechanikai rendszer a közönséges, *bozonikus harmonikus oszcillátor* tárgyalása a Hamilton-operátorral. Az alábbiakban a [4] munkát követve mutatom be a harmonikus oszcillátor szuperszimmetrikus tárgyalását.

A *bozonikus* elnevezés eredete megtalálható Goldstone,J.;Salam, Abdus;Weinberg,Steven (1962)Broken Symmetry.Physical Review.127 (3):965-970.doi:10.1103/PhysRev.127.965 és Witten [10,37] 1981-es munkájában.

A szokványos *bozonikus* tárgyalásban a Hamilton-operátor alakja

$$H_B = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_B^2q^2 \quad (2.1)$$

A  $p$  lendület és  $q$  koordináta kanonikus kommutátora  $[q,p]=i$ . Bevezetjük az  $a$  bozon *eltüntető* operátort, és kanonikus párját az  $a^+$  bozon *keltő\** operátort:

$$a = \left(\frac{1}{2\omega_B}\right)^{\frac{1}{2}}(p - i\omega_Bq) \quad a^+ = \left(\frac{1}{2\omega_B}\right)^{\frac{1}{2}}(p + i\omega_Bq) \quad (2.2)$$

\* Bozon keltésről (vagy állapotkeltésről) és eltüntetéséről lásd függelék 1. ábra

Fennállnak rájuk nézve a következő kommutációs relációk:

$$[a, a^+] = 1 \quad , \quad (2.3.a)$$

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0 \quad (2.3.b)$$

A Hamilton-operátor most a következő alakba írható:

$$H_B = \frac{\omega_B}{2} \{a^+, a\} \quad , \quad (2.4.)$$

ahol az antikommutátor:  $\{a, a^+\} = aa^+ + a^+a$ . Felhasználva (2.3.a) és (2.3.b) egyenleteket, az energia-sajátértékek:

$$E_B = \omega_B \left(n_B + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n_B = 0,1,2, \dots \quad (2.5.)$$

Itt  $n_B$  az  $a^+a$  bozonszám-operátor sajátértéke. Ekkor megkapjuk a jól ismert, egyenközü energiaszinteket az alapállapot  $+\frac{1}{2}\omega_B$  energiaértékkel.

Most alkossuk meg a *fermionikus harmonikus oszcillátort*. A *fermionok* eleget tesznek a Pauli-elvnek, ami összefügg azzal, hogy a keltő és eltüntető operátoraik kommutációs helyett *antikommutációs* relációkat elégítenek ki. Bevezetjük a  $b$  fermion eltüntető operátort és a megfelelő pártját, a  $b^+$ : (fermion) keltő operátort. Annak érdekében, hogy szimmetria legyen bozonok és fermionok (szabadsági fokaik) között, új operátoroknak antikommutációs relációkat kell teljesíteniük:

$$\{b, b^+\} = 1 \quad , \quad (2.6.a)$$

$$\{b, b\} = \{b^+, b^+\} = 0 \quad . \quad (2.6.b)$$

Az utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy két fermion nem lehet ugyanabban az állapotban.

Ismét a bozonok és a fermionok közötti szimmetria követelményéből kiindulva megkapjuk az új fermionikus Hamilton-operátort a bozonikus Hamilton-operátorból a kommutátor és antikommutátor kicserélésével:

$$H_F = \frac{\omega_F}{2} [b^+, b]. \quad (2.7.)$$

A (2.6a) egyenletből az antikommutátort használva megkapjuk a fermionikus energia-sajátértékeket:

$$E_F = \omega_F (n_F - \frac{1}{2}) \quad , \quad (2.8.a)$$

ahol most  $n_F = 0$  és  $1$  a  $b^+b$  fermionszám-operátor sajátértékeinek a lehetséges száma.

A fermionikus oszcillátor alapállapot energiája negatív:  $-\frac{1}{2}\omega_F$ , ami fontossá válik majd a SUSY elméletekben.

Vizsgáljuk most a bozonikus és fermionikus oszcillátorok együttes rendszerét a szuperszimmetrikus Hamilton-operátorral:

$$\hat{H} = H_B + H_F = \omega_B a^+a + \omega_F b^+b \quad (2.8.b)$$

Ennek energia-sajátértékeit az (2.5) és (2.8) összegeként adhatjuk meg, azaz

$$E = E_B + E_F \quad (2.8.c)$$

Általában a két oszcillátor frekvenciái különböznek, ami kevésbé szabályszerű spektrumot eredményez. De abban a speciális esetben, amikor  $\omega_B = \omega_F = \omega$  és a szuperszimmetrikus Hamilton-operátor alakja

$$H = \omega(a^+a + b^+b), \quad (2.8.d)$$

együttes energiszintek egyszerűsödnek:

$$E = \omega(n_B + n_F), \quad (2.9)$$

Az energiaszintek mind kétszeresen degeneráltak, kivéve az alapállapotot, ahol  $n_B = n_F = 0$  és így zéró az energia. Az első gerjesztett állapot előállhat az  $n_B=1, n_F=0$ , illetve az  $n_B=0, n_F=1$  kvantumszámokkal is. Mindkét esetben egy részecskénk van, ami az első esetben bozon, a másodikban fermion.

A degeneráció a kvantummechanikában a Hamilton-operátor szimmetriájának, vagyis egy másik operátorral való felcserélhetőségének a következménye. Közismert példa egy részecske mozgása gömbszimmetrikus potenciálban. Minden energiaszint, amely az  $(l)$  perdület kvantumszámmal jellemezhető,  $(2l+1)$ -szeresen degenerált. Az ilyen multipleten belüli szintek az  $L_+$  és  $L_- = L_+^\dagger$ , léptetőoperátorral vannak összekapcsolva, amelyek a rendszer szimmetrikus forgatásait is generálják,  $[L_\pm, H] = 0$ .

A jelen esetben a *kombinált*, azaz bozonikus és fermionikus oszcillátor szimmetriája a *szuperszimmetria* következménye. A degeneráció egy bozon eltüntetésével  $n_B \rightarrow n_{B-1}$  és vele egyszerre egy fermion keltésével  $n_F \rightarrow n_{F+1}$  jár, illetve ugyanennek a folyamatnak a fordítottjával. A részecskeszámot megőrző szimmetriagenerátorok szerepét a már ismert töltésoperátorok játsszák:

$Q$  legyen a töltésoperátor (*hasonlóak, mint a Pauli-matrixok*)

$$Q = (2\omega)^{\frac{1}{2}} a^\dagger b, \quad \bar{Q} = (2\omega)^{\frac{1}{2}} a b^\dagger \quad (2.10)$$

A *szuperszimmetrikus harmonikus oszcillátorra* pedig érvényes, hogy

$$[Q, H] = [\bar{Q}, H] = 0, \quad (2.11)$$

Másrészt pedig az antikommutátorokkal fennáll, hogy

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2H, \quad (2.12)$$

Ezen egyenletek központi szerepet játszanak minden szuperszimmetrikus elméletben. Itt általuk megvalósult az (1), (2), (3)  $N=2$  szuperalgebra.

Míg a bozonikus keltő és eltüntető operátorok a kanonikus változók  $q$  és  $p$  segítségével reprezentálhatók, mint (2.2)-ben, a megfelelő fermionikus operátorokat a Pauli-matrixokkal reprezentálhatjuk.

$$b = \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$b^\dagger = \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14.)$$

Ez a reprezentáció kielégíti a (2.6.a) és (2.6.b) kanonikus antikommutációs relációkat.

A (2.9.) egyenletből a szuperszimmetrikus Hamilton-operátor így írható

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 + \frac{1}{2} \omega \sigma_3 \quad (2.15.)$$

vagyis olyan, mint egy bozonikus oszcillátor , amelyhez  $-1/2$  spinű részecske kapcsolódik egy meghatározott  $\omega$  erősségű mágneses térben.

---

#### 2.1.4 Az egy dimenziós Schrödinger-egyenlet és a szuperalgebra koordináta realizációja

A Hamilton-operátor,  $\hat{H}$  diagonálisában szereplő két „közönséges” Hamilton-operátort azonosítjuk az egydimenziós Schrödinger-egyenletre vezető operátorokkal. Vagyis egy másodrendű (kinetikus és potenciál tagot tartalmazó) differenciáloperátort kell származtatnunk az eddigi „absztrakt” (6) kifejezésekből. A SUSY hatással lesz arra, hogy a két potenciál milyen viszonyban áll egymással.

A  $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x)$  sajátérték-egyenletből származtatható a Schrödinger-egyenlet, ami egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet, és időfüggetlen, stacionárius állapotokra a következő alakot veszi fel (a  $\hbar/2\pi = 2m=1$  egységekben):

$$-\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Az alábbiakban az  $x \in ]-\infty; \infty[$  értelmezési tartományon tekintjük, de megfogalmazható más tartományon is, például  $x \in [0; \infty[$  esetén radiális potenciálként, vagy az  $x \in [a, b]$  véges tartományon.

Az alapállapot hullámfüggvény  $\Psi_0(x)$  sehol sem nulla véges  $x$  értékre és eltűnik a határokon, itt  $\pm\infty$ -ben. Tegyük fel, hogy az alapállapot energiája  $E_0 = 0$ , ami megtehető, mivel ezzel csak az energia skála zéruspontját választjuk meg egy lehetséges módon. A

$$-\frac{d^2\Psi_0(x)}{dx^2} + V(x)\Psi_0(x) = 0,$$

egyenletet átrendezve és a zérusmentes alapállapot hullámfüggvénnyel osztva megkaphatjuk a potenciált az alapállapot hullámfüggvénnyel kifejezve:

$$V(x) = \frac{\frac{d^2\Psi_0(x)}{dx^2}}{\Psi_0(x)} = \frac{\Psi_0(x)''}{\Psi_0(x)}.$$

Ezt az elrendezést azonosíthatjuk a  $H_-$  bozonikus problémával sértetlen szuperszimmetria esetén.

A partner Hamilton-operátorok *faktorizációja* lehetséges úgy, hogy a másodrendű differenciáloperátorokat két elsőrendű differenciáloperátor szorzatára bontjuk az alábbiak szerint:

$$H_- = -\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) = A^+A \quad \text{és} \quad H_+ = AA^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \quad (12)$$

$$H_+\Psi^{(+)}(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x)\right)\Psi^{(+)}(x) = E^{(+)}\Psi^{(+)}(x) \quad (13.a)$$

$$H_-\Psi^{(-)}(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x)\right)\Psi^{(-)}(x) = E^{(-)}\Psi^{(-)}(x) \quad (13.b)$$

ahol

$$A = \frac{d}{dx} + W(x) \quad (14)$$

és

$$A^+ = -\frac{d}{dx} + W(x) \quad (15)$$

*A, A<sup>+</sup> szemléletes hatása lásd Függelék 1. ábrája*

$V_-(x)$  és  $V_+(x)$  *szuperszimmetrikus partnerpotenciálok* és a következő módon fejezhetők ki a  $W(x)$  szuperpotenciállal:

$$V_+(x) = W^2(x) + \frac{d}{dx}W(x), \quad (16.a)$$

$$V_-(x) = W^2(x) - \frac{d}{dx}W(x). \quad (16.b)$$

Ezek alapján a két partnerpotenciál között a következő összefüggés áll fenn:

$$V_+(x) = V_-(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\Psi_0^{(-)}(x). \quad (17)$$

$W(x)$  *szuperpotenciál* szempontjából úgy is értelmezhetjük a (16.a) és (16.b) egyenleteket, hogy a  $W(x)$  *Riccati-egyenletet* elégíti ki. Megjegyzendő, hogy a szuperszimmetrikus partnerpotenciálok egyértelműen származtathatók a  $W(x)$  szuperpotenciálból, de fordítva ez nem teljesül. A Riccati-egyenletek más, többféle  $W(x)$  esetén is vezethetnek ugyanazokra a partnerpotenciálokra.

( $W(x)$  általános alakja (19)-ben)

A szuperszimmetria formalizmusa meghatározza  $W(x)$  és  $\Psi_0^{(-)}(x)$  kapcsolatát is. A (12) egyenletből a

$$H_-\Psi_0^{(-)}(x) = A^+A\Psi_0^{(-)}(x) = 0$$

feltétel teljesüléséhez elegendő  $A\Psi_0^{(-)}(x) = 0$  teljesülése. A (14) egyenlet alapján

$$A\Psi_0^{(-)}(x) = \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right)\Psi_0^{(-)}(x)$$

vagyis

$$W(x) = \frac{-\frac{d}{dx}\Psi_0^{(-)}(x)}{\Psi_0^{(-)}(x)} = -\frac{\Psi_0^{(-)}(x)'}{\Psi_0^{(-)}(x)}, \quad (18)$$

kompaktabb formában pedig

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(-)}(x). \quad (19)$$

Ebből következik a fordított összefüggés:

$$\Psi_0^{(-)}(x) = N_0 \exp\left(-\int_{-}^x W(y) dy\right), \quad (20)$$

ahol,  $N_0$  a normálási együttható. (21)

Tekintsük át, hogy miképpen valósul meg a sértett és sértetlen szuperszimmetria a (12) alakú Hamilton-operátorok esetében. A szuperszimmetrikus  $V_+(x)$ ,  $V_-(x)$  partnerpotenciálok spektrumai között szoros összefüggés van, mivel a  $H_-$  és  $H_+$  között is korreláció van. Tegyük fel, hogy a bozonikus rendszernek rendelkezik legalább egy kötött állapottal úgy, hogy az alapállapot energiája  $E_0^- = 0$ . Ekkor  $H_-$  és  $H_+(x)$  energia-sajátértékei nem negatívak és a (12) egyenlet alapján fennállnak az alábbi összefüggések:

$$H_+(A\Psi_n^{(-)}(x)) = AA^+A\Psi_n^{(-)}(x) = E_n^-(A\Psi_n^{(-)}(x)) \quad (22),(23) \quad (24)$$

$$H_-(A^+\Psi_n^{(+)}(x)) = A^+AA^+\Psi_n^{(+)}(x) = E_n^+(A^+\Psi_n^{(+)}(x)) \quad (25) \quad (26)$$

Látható, hogy  $H_+$ -nak  $A\Psi_n^{(-)}(x)$  sajátfüggvénye az  $E_n^{(-)}$  sajátértékekkel, illetve  $H_-$ -nak  $A^+\Psi_n^{(+)}(x)$  sajátfüggvénye az  $E_n^{(+)}$  sajátértékekkel. Tehát a partner Hamilton-operátorok spektrumai ugyanazokat az energia-sajátértékeket tartalmazzák, vagyis izospektrálisak, ami a szuperszimmetria következménye.

A (24) és (26) egyenletek  $n>0$  esetén mindig fennállnak. Ellenben  $n=0$  esetén a (24) egyenlet nem értelmezhető, mivel  $A\Psi_0^{(-)}(x)=0$  teljesül, tehát az  $E_0^{(-)}=0$  sajátérték hiányzik  $H_+$  spektrumából. Emiat a szuperszimmetrikus partnerpotenciálok spektruma az alábbiak szerint függ össze:

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}, \quad E_n^{(-)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ez a sértetlen SUSY esete.

A hullámfüggvények normáltságáról megállapíthatjuk a következőket.

$$\Psi_n^{(+)}(x) = (E_{n+1}^-)^{-\frac{1}{2}} A \Psi_{n+1}^{(-)}(x) \quad (27)$$

illetve

$$\Psi_{n+1}^{(-)}(x) = (E_n^+)^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi_n^{(+)}(x) \quad (28)$$

alapján , látható  $A, A^+$  hatása:

(24), (26) egyenletekben:  $H_+ \rightarrow E^-_n$  és  $H_- \rightarrow E^+_n$  sajátértékekkel rendelkezik.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{(-)}_{n+1}(x)^* \Psi^{(-)}_{n+1}(x) dx = 1 \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^{(+)}_n(x)^* \Psi^{(+)}_n(x) dx = 1 \quad (30)$$

teljesül.

*Összefoglalva:* a *sértetlen SUSY* esetben  $H_+$  spektrumából hiányzik a 0 sajátérték. Ilyenkor a  $W(x)$  szuperpotenciál és így a partnerpotenciálok a bozonikus Hamilton-operátor  $H_-$  alapállapot  $\Psi^{(-)}_0(x)$  hullámfüggvényéből származtathatóak, amely az  $E_0^{(-)} = 0$  energia-sajátértékhez tartozik, normálható és nincs véges zérushelye. Ez utóbbi azt biztosítja, hogy a partnerpotenciáloknak nem lesznek szingularitásaik (legfeljebb a határokon).

Megjegyzendő, hogy a  $W(x)$  szuperpotenciált származtathatjuk gerjesztett állapot  $\Psi^{(-)}_n(x)$  hullámfüggvényéből, de ezesetben a (18) egyenlet alapján  $W(x)$  és következésképpen a partnerpotenciálok is szingularitással rendelkeznek  $\Psi^{(-)}_n(x)$  zérushelyeinél, amelyek diszjunkt részekre vágják az értelmezési tartományt. Ez általában nemkívánatos, ezért ettől a lehetőségtől eltekintünk. Ugyanakkor ez az eredmény rámutat a zérusmentes megoldások fontosságára, illetve arra is, hogy az alapállapot  $E_0^{(-)}$  mellett más energiához tartozó megoldások is beilleszthetők az elméletbe. Ez elvezet a sértett szuperszimmetriához.

A szuperszimmetrikus partner potenciálok  $H_-$  *nemfizikai megoldásaiból* is származtathatók: [29] Tekintsük a  $\theta(x)$  megoldást, ([2]-ben  $\chi(x)$ ) , amely az  $\varepsilon$  energia-sajátértékhez tartozik, amit faktorizációs energiának neveznek [47]:

$$H_- \theta(x) \equiv A^+ A \theta(x) = \varepsilon \theta(x) \quad (31)$$

A (16.a) egyenlet alapján a potenciál

$$V_-(x) = \frac{(\theta(x))''}{\theta(x)} + \varepsilon = \left(-\frac{\theta(x)'}{\theta(x)}\right)^2 - \left(-\frac{\theta(x)'}{\theta(x)}\right)' + \varepsilon \quad , \quad (32)$$

ami  $x$  folytonos függvénye, feltéve hogy  $\theta(x)$  zérusmentes. A (16.a), (16.b) és (19) egyenletek megfelelői ekkor

$$V_{\pm}(x) = \tilde{W}^2(x) \pm \frac{d}{dx} \tilde{W}(x) + \varepsilon \quad (33)$$

és

$$\tilde{W}(x) = -\frac{d}{dx} \ln \theta(x) \quad (34)$$

Gyakran lehetséges a  $\theta(x)$  függvényt felbontani a következő alakban:

$$\theta(x) = \psi_0^{(-)}(x)\xi(x), \quad (35)$$

Eszerint a (34) szuperpotenciál a következő módon fejezhető ki a (19) egyenletben szereplő szuperpotenciállal:

$$\tilde{W}(x) = W(x) - \frac{d}{dx} \ln \xi(x) \quad (36)$$

Az  $\varepsilon=0$  választás visszaadja a sértetlen SUSY  $\theta(x)=\psi_0^{(-)}(x)$  esetét, míg az  $\varepsilon \neq 0$  esetben a szuperszimmetria sértett. Ilyenkor az  $E=E_0^{(-)} > 0$  sajátérték szerepel  $H_+$  spektrumában is.

Ezen kívül sértett szuperszimmetria valósul meg akkor is, amikor  $H_-$  alapállapot energiája pozitív,  $E_0^{(-)} > 0$  és  $H_+$  spektrumában egy új alapállapotot keltünk nulla energián alapállapotot. Ez a sértetlen eset megfordítása. Megjegyzendő, hogy a sértett szuperszimmetriához tartozó transzformációkhoz szükséges zérusmentes nemfizikai állapotok azonosíthatók  $H_-$  negatív sajátenergiákhoz tartozó megoldásaival. Ezek a határok legalább egyikén nem végesek és ezért nem is normálhatók.

A fentiek alapján vizsgálhatjuk a szuperszimmetrikus transzformációk inverzeit is. A (27) és (28) egyenletekből látható, hogy az  $A$  és  $A^+$  operátorok egymással ellentétesen léptetnek  $H_-$  és  $H_+$  azonos energiájú állapotai között. Ugyanakkor a (14) és (15) egyenletek azt mutatják, hogy e két operátor (egy előjeltől eltekintve) megkapható egymásból, ha a  $W(x)$  szuperpotenciált előjelét felcseréljük, vagyis a  $-W(x)$  alakra cseréljük. (A fellépő előjelek a partner Hamilton-operátorokban nem jelentkeznek, csak a (27) és (28) egyenletekben.) Ez az előjelcsere a (20) és (15) egyenletek szerint egy megoldást a saját inverzébe visz, ami akkor vezet értelmezhető eredményre, ha a megoldás zérusmentes.

### **Sértett és sértetlen SUSY esete (részletesebb magyarázattal)**

*A témához szükséges összefoglalást veszem itt sorra az [5,11] irodalom felhasználásával a (37)-(55) egyenletekkel.*

Azt találtuk, hogy  $H_-$  megoldásainak ismeretében egy másik  $H_+$  Hamilton-operátor energiasajátértékeit és sajátfüggvényeit is megkaphatjuk analitikusan.

A normált alapállapot hullámfüggvény

$\Psi_0^{(-)}(x)$ -nek nincs párja  $H_+$  sajátfüggvényei között, viszont  $A$  és  $A^+$  operátor a két sajátfüggvény-rendszer közt egyértelmű megfeleltetést jelent, lásd (4).

$$\Psi^{(+)} = (E^{(+)}_0)^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi^{(+)}_0, \quad (37)$$

amikor  $A^+ \Psi^{(+)}_0 = 0$  akkor teljesül  $0 = Q\Psi_0 = Q^+\Psi_0$

$A^+ \Psi^{(+)}_0 = 0$  *sértetlen* SUSY esetben:

A *sértetlen* SUSY esetben  $H_+$  spektrumában nincs nulla sajátérték.

Kritériumok:

- A kiindulási  $H_-$  Hamilton operátorhoz tartozó  $\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})$  hullámfüggvénynek normalizálhatónak kell lennie (fizikai értelmezhetőségért) és sehol sem lehet nulla (biztosítja a szuperpotenciál nem-szingularitását) lásd (18)  $W = \dots$
- $E_0^{(-)}$  nulla kell legyen!  $E_0^{(-)} = 0$

A feltételektől függetlenül teljesül  $[\hat{H}, Q]\Psi_0 = 0$  és  $[\hat{H}, Q^+]\Psi_0 = 0$

Ugyanis a szimmetria miatt:  $[\hat{H}, Q] = 0$  és  $[\hat{H}, Q^+] = 0$

*Sértett* SUSY-ról beszélünk, ha sérülnek a teljesülés feltételei, ilyenkor *nem fizikai megoldások* is szerephez jutnak.

A kiindulás ne  $H_-$  vagy  $V_-$  ismerete legyen, hanem tegyük fel, hogy adott egy ismert  $W(\mathbf{x})$  potenciál, amiből  $\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})$  előállítható:

A szuperpotenciálból nyerhetőek a partnerpotenciálok:

$$(W(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi_0^{(-)}(\mathbf{x}) \rightarrow V_-(x), V_+(x))$$


---

Kiindulva a szuperpotenciálból:

$$W(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dx} \ln \Psi_0^{(-)}(\mathbf{x}) \text{ -ből:}$$

$$\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x}) = N_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^x W(y) dy\right) \quad (38), \quad N_0: \text{normálási együttható}$$

Ez konvenció, hasonlóképpen  $\Psi^{(+)}_0(\mathbf{x})$  is előállítható lehet így.

SUSY akkor teljesül, ha fennáll teljesülése  $[\hat{H}, Q]\Psi_0=0$ -nak :

$$[\hat{H}, Q]\Psi_0 = (Q Q^+ Q + Q^+ Q Q - Q Q Q^+ - Q Q^+ Q) \Psi_0 = (Q^+ Q Q - Q Q Q^+) \begin{pmatrix} \Psi^{(-)}_0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (39)$$

és teljesül az algebrából  $[\hat{H}, Q^+] = 0$ , így

teljesül:

$$[\hat{H}, Q^+]\Psi_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} [\hat{H}, Q^+]\Psi_0 &= (Q Q^+ Q^+ + Q^+ Q Q^+ - Q^+ Q Q^+ - Q^+ Q^+ Q) \Psi_0 = \\ &= (Q Q^+ Q^+ - Q^+ Q^+ Q) \begin{pmatrix} \Psi^{(-)}_0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbf{n} \text{ igazítása } \Psi^{(-)} \text{ - hoz történjen} \end{aligned}$$

(40)

A fentiek szerint látszik (keltés/eltüntetés **A** : léptetőoperátor szerepe), hogy ha az egyik tag nulla, akkor ennek következtében a másiknak is el kell tűnnie.

Ha a fentiek fennállnak, sértetlen SUSY esettel állunk szemben, azaz ekkor  $E_0^{(-)} = 0$  :

$$Q^+ Q^+ Q \begin{pmatrix} \Psi^{(-)}_0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} \rightarrow A^+ A^+ A \Psi^{(-)}_0(\mathbf{x}) = E_0^{(-)}(A^+ \Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})) = 0 \quad (41)$$

valamint

$$Q Q^+ Q^+ \begin{pmatrix} \Psi^{(-)}_0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} \rightarrow A A^+ A^+ \Psi^{(+)}_0(\mathbf{x}) = H_+(A^+ \Psi_0^{(+)}(\mathbf{x})) = 0 \quad (42)$$

a fenti esetben a következő felcserélésével azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} Q^+ Q Q \begin{pmatrix} \Psi^{(-)}_0 \\ \Psi^{(+)}_0 \end{pmatrix} &\rightarrow A^+ A A \Psi^{(-)}_0(\mathbf{x}) = H_-(A \Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})) = \\ &= A A^+ \Psi^{(+)}_0(\mathbf{x}) = A (H_+ \Psi_0^{(+)}(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (43)$$

A sértetlen SUSY esetén tudjuk, hogy  $H_+$  spektrumában nincsen nulla, így a második eset csak akkor állhat fenn, ha a belső függvény nulla:

$$A^+ \Psi_0^{(+)}(\mathbf{x}) = 0.$$

Azaz az teljesül sértetlen SUSY esetén, hogy  $Q\Psi_0 = Q^+\Psi_0 = 0$

A fentiekből látható, hogy ha a feltétel nem teljesül, attól függetlenül

teljesül  $[\hat{H}, Q]\Psi_0 = 0$  és teljesül  $[\hat{H}, Q^+]\Psi_0 = 0$ .

Azaz:

$$A^+ H_-(\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})) = H_+(A^+ \Psi_0^{(+)}(\mathbf{x})) \text{ illetve} \quad (44)$$

$$H_-(A \Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})) = A (H_+ \Psi_0^{(+)}(\mathbf{x})) \quad (45)$$

*Tegyük fel, hogy:*

$W(\mathbf{x})$  hatványfüggvény alakban jelenik meg:

([5] :24-27.p. (3.45)-(3.56).)

$$W(\mathbf{x}) = t x^n \quad (46)$$

itt  $x \in ]-\infty; \infty[$

Az  $n$  exponens esetei:

-ha  $n$  páros,  $\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})$  alapállapotú hullámfüggvény nem normálható megoldást ad

-ha  $n$  páratlan  $\Psi_0^{(-)}(\mathbf{x})$  mindig normálható.

Itt igyekeztem/igyekszem bemutatni, ami a koordináta reprezentáció keretében újdonság. Itt már részletezhető a potenciálról, hullámfüggvényről, a hullámfüggvény matematikai tulajdonságairól tudhatók. Vagyis, hogy a kötöttállapotú hullámfüggvény hogyan viselkedik a határokon (vagy azokat közelítve), hogy normálható,(27),(28) hogy van-e zérushelye.

Sértetlen SUSY-t kapunk, ha  $W(\mathbf{x})$  előjele pozitív és negatív végtelenhez közelítve ellentétes, az alapállapotú hullámfüggvény normálható.

Sértett SUSY esetét kapjuk, ha a két határnál az előjel azonos.

*Sértett esetben a partnerpotenciálok energiaspektruma teljesen degenerált (több sajátfüggvény).*

(Degenerált esetben több alapállapot létezik és nem csak alapállapot esetén létezik degeneráció. Ha egynél több alapállapot létezik, akkor azt degeneráltak (elfajult) nevezik. Számos rendszer alapállapota degenerált. Degeneráltság akkor jelentkezik, amikor létezik olyan unitér operátor, amely nem triviálisan hat az alapállapotra és *kommutál* a rendszer Hamilton-operátorával.

Ekkor az  $A, A^+$  operátorok hatása „semmit”, nem változtatják meg  $n$ -t, a zérushelyek számát. Ekkor az alábbi összefüggések érvényesek a sajátfüggvények között:

$$E_n^+ = E_n^- \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(0 is benne van, de mivel  $E_0$  nem zérus, lehet vele osztani (47)-ben.)

$$\Psi_n^{(+)}(x) = (E_n^-)^{-\frac{1}{2}} A \Psi_n^{(-)}(x) \quad (47)$$

$$\Psi_n^{(-)}(x) = (E_n^+)^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi_n^{(+)}(x) \quad (48)$$

ezenkívül *sértett* SUSY eset mikor  $H_-$  alapállapot energiája pozitív,  $E_0^{(-)} > 0$  és  $H^+$  spektrumában keltünk egy nulla energiájú alapállapotot, vagyis a sértetlen eset megfordítása.

Találni kell egy olyan eljárási módszert, amely esetén, egy általános, nem divergens/ nem szinguláris  $\widetilde{V}(x)$  potenciálból, amelynek sajátértékei  $E_n$  és sajátfüggvényei  $\Psi_n$ , a  $\widetilde{W}(x)$  legáltalánosabb szuperpotenciált állíthatjuk elő úgy, hogy visszaadja  $\widetilde{V}(x)$ -et egy additív konstans erejéig. Ez azért lesz igen hasznos mert a konstans megfelelő megválasztásával visszakaphatjuk a sértetlen SUSY esetét, de emellett a sértett, nemfizikai esetek is vizsgálhatók maradnak.

A Schrödinger egyenlet  $\widetilde{V}(x)$ -re felírható,  $\Phi$ -vel, ami normálható, azaz fizikai megoldásokat takaró hullámfüggvény megoldás

$$-\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \widetilde{V}(x) \Phi = \varepsilon \Phi \quad (49)$$

most megengedünk nem fizikai megoldásokat is.

Ebben az esetben  $\varepsilon$  egy konstans, amit később választunk meg pontosan. Az általánosság sértése nélkül olyannak választjuk  $\Phi$ -t, hogy  $-\infty$  esetén eltűnik.

Abban az esetben, ha  $\varepsilon$  értékét egy  $E_n$  sajátértéknek választjuk meg, akkor  $\Phi$  egyértelműen  $\Psi_n$ -nel lesz egyenlő. ( $\varepsilon = E_n \rightarrow \Phi = \Psi_n$ )

Az általános szuperpotenciál előállhat így:

$$W_\Phi = -\frac{\Phi'}{\Phi} \quad (50)$$

Ekkor a partnerpotenciálok:

$$V_\Phi^+ = W_\Phi^2 + W_\Phi' \quad (51)$$

$$V_\Phi^- = W_\Phi^2 - W_\Phi' = \frac{\Phi'^2}{\Phi^2} = \frac{\Phi''\Phi - \Phi'^2}{\Phi^2} = \frac{\Phi''}{\Phi}$$

A Schrödinger -egyenlettel kapjuk:

$$V_\Phi^- = \frac{\Phi''}{\Phi} = \tilde{V}(x) - \varepsilon$$

Sajátértéke  $V_\Phi^-$  -nak:

$$E_{n\Phi}^- = E_n - \varepsilon$$

Ha  $\varepsilon$  -t  $E_0$ -nak választjuk, akkor  $n=0$ ,  $E_{n\Phi}^- = E_{0\Phi}^- = 0$ , *fizikai megoldás*

$$\Phi = \Psi_0$$

ezzel (46)-ból:

$$V_\Phi^- = \frac{\Psi_0''}{\Psi_0} = \tilde{V}(x) - \varepsilon, \text{ szorozva } \Psi_0 \text{-lal}$$

$$\begin{aligned} \Psi_0 V_\Phi^- &= \Psi_0'' = (\tilde{V}(x) - \varepsilon) \Psi_0 && \text{amiből előáll a} \\ -\Psi_0'' + V_\Phi^- \Psi_0 &= 0 \Psi_0 && \text{a sértetlen SUSY esete} \end{aligned} \quad (52)$$

A *sértetlen* szuperpotenciál ekkor, lásd (17),(22):

$$W_\Phi = -\frac{\Psi_0'}{\Psi_0} = W_0, \text{ előjele változik} \quad (53)$$

$\Psi_0$ -nak nincs zérushelye,  $\Psi_0$  deriváltjának lehet (van), azaz  $W$ -nek is van, tehát változik az előjele.

Mivel  $\Psi_0$  a fizikai megoldáshoz tartozik, így normálható, valamint zérushelye nincs, így

$W_\Phi$  nem szinguláris sehol sem.

$V_\Phi^+$  -nak nincs sajátfüggvénye amely 0 energiához tartozna, mivel a sértett SUSY-nál fennálló összefüggéshez hasonlóan:

$$\Psi_0^+ \sim A_0 \Psi_0 = \left( \frac{d}{dx} + W_0 \right) \Psi_0 = \Psi_0' - \Psi_0' = 0. \quad (54)$$

A sértett és sértetlen esetek ilyen formában történő előállításuk alkalmas a sértett esetek további vizsgálatára.

Abban az esetben, ha  $\varepsilon < E_0$ ,  $E_{n\Phi}^-$  értékek pozitívak, és mivel  $V_\Phi^-$  egy fizikai megoldással rendelkező potenciál  $\varepsilon$  konstanssal eltolja, a spektrum pedig pozitív, így a hozzá tartozó  $\Phi$  alapállapotú hullámfüggvénynek nincs zérushelye (mint egy fizikai megoldás esetében, csak itt a normálhatóság nem áll fenn).

Továbbra is a különbséget az jelenti a *sértetlen* és a *spontán sértetteset* között, hogy az  $A \Psi_0^{(-)} = 0$  teljesül-e, vagy nem. Ez magával hozza azt is, hogy  $E_0^{(-)}$  zérus-e, vagy nem.

Ha zérus, akkor az alapállapotú hullámfüggvénnyel van dolgunk, ami normálható (eltűnik a határokon) és zérusmentes. A későbbi jelölésben ez  $\varepsilon = 0$ .

Ha  $\varepsilon > 0$ , akkor gerjesztett állapotokkal (is) lehet dolgunk, amelyeknek van zérushelye, ami miatt a származtatott potenciálok szingulárisak lesznek, ezért érdektelenek számunkra.

Ha  $\varepsilon < 0$ , akkor zérusmentes, de nem normálható megoldásokat kapunk. A potenciáloknak tehát nem lesznek szingularitásaik, de a megoldás nem fizikai.

Így ha  $W_\Phi$  nem szinguláris. Ebben az esetben  $V_\Phi^-$  és  $V_\Phi^+$  spektruma és hullámfüggvényei között

$$E_n^+ = E_n^- \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Psi_n^{(+)}(x) = (E_n^-)^{-\frac{1}{2}} A \Psi_n^{(-)}(x)$$

$$\Psi_n^{(-)}(x) = (E_n^+)^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi_n^{(+)}(x) \quad (55)$$

összefüggések állnak fenn, mintha csak fizikai megoldások lennének.

Abban az esetben viszont, ha  $\varepsilon > E_0$ ,  $E_{0\Phi}^-$  negatív lesz, így  $\Phi$ -nek lesz már zérushelye, ennek következtében a hozzá tartozó szuperpotenciál szinguláris, ezáltal a partnerpotenciálok is szingulárisak lesznek.

Ha  $\varepsilon - t$  a  $H_-$  Hamilton-operátor alapállapota alatt választjuk meg, akkor *nemfizikai*, de *nóduszmentes* megoldást kapunk.

## 2.1.5 Alakinvariáns potenciálok

A szuperszimmetrikus kvantummechanika formalizmusa lehetővé tesz egy hasznos fogalom, a potenciálok *alakinvarianciájának* bevezetését.

*Két SUSY partnerpotenciál  $V_1, V_2$  alakinvariáns, ha alakjuk matematikailag megegyezik és csak a bennük megjelenő paraméterekben különböznek.*

*Ebben az alfejezetben  $V_-$  és  $V_+$  helyett a  $V_1$  és  $V_2$  jelölést alkalmazom mert a SUSY transzformáció iterációjához ez a jelölés alkalmasabb.*

Igy írhatjuk:

$$V_2(\mathbf{x}; a_1) = V_1(\mathbf{x}; a_2) + R(a_1), \quad (56)$$

$a_1$  : paraméterek egy sorozata,  $a_2$  paraméterek pedig  $a_1$  paraméterek egy függvénye,

$$a_2 = f(a_1), \quad (57)$$

$R(a_1)$  pedig  $x$ -től független.

Ez teljesülve, mondhatjuk  $V_1, V_2$  alakinvariánsok.

A korábban ismertetett eljárás alapján egy  $H_1$  Hamilton-operátor kötöttállapot energiáinak és hullámfüggvényeinek ismeretében egy másik  $H_2$  Hamilton-operátor lelhető, amelynek energiáit és hullámfüggvényeit is elő tudjuk állítani. A *faktorizáció* során ([12]) bevezetett  $A_1, A_1^\dagger$  operátorokkal és  $W_1$  szuperpotenciállal előállítható az újabb  $H_2$ . Ezt ismételtjük újabb

faktorizációval, ezután előállíthatjuk a kapott  $H_2$  ismeretében  $H_3$  -at,  $A_2, A_2^+$  operátorokkal és  $W_2$ . Az így előállított újabb Hamilton-operátornak mindig egyel kevesebb kötött állapota lesz, így az újabb Hamilton-operátorok előállítása addig folytatható, míg  $H_1$  kötött állapotai el nem fogynak, azaz ha  $H_1$  k darab kötött állapottal rendelkezik, akkor előállítható (k-1) tagból álló egzaktul megoldható Hamilton-operátorok sorozata.  $H_1$  alapállapoti energiája  $E_0^1$  és alapállapoti hullámfüggvénye  $\Psi_0^1(x)$  után általános an írható:

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (58.a)$$

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) ; \quad A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (58.b)$$

$$W_1(x) = -\frac{d}{dx} \ln(\Psi_0^1(x)) \quad (59.a)$$

$$V_1(x) = W_1^2(x) - \frac{d}{dx} W_1(x) + E_0^1. \quad (59.b)$$

$H_m$  energiaspektruma azonos  $H_1$ -gyel, csak az első (m-1) energiasajátérték hiányzik  $H_m$  spektrumából.

$$\text{Sértetlen SUSY esetben : } E_0^2 = E_1^1 \quad (60)$$

$$E_{n+1}^1 = E_0^2 ;$$

$$\Psi_n^2(x) = (E_{n+1}^1 - E_0^1)^{-\frac{1}{2}} A_1 \Psi_{n+1}^1(x) = \dots \text{folytatva } \Psi_n^m(x) = \dots \quad (61)$$

*Általánosán pedig  $H_m$ :  $n = 1, 2, 3, \dots, m$*

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (62)$$

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x) ; \quad A_m^+ = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \quad (63)$$

$$W_m(x) = -\frac{d}{dx} \ln(\Psi_0^m(x)) \quad (64)$$

Az általános összefüggés az energiatagok és a hullámfüggvények között:

$$E_n^m = E_{n+1}^m = \dots = E_{n+m+1}^1 \quad (65)$$

$$\Psi_n^m(\mathbf{x}) = (E_{n+m-1}^1 - E_{m-2}^1)^{-\frac{1}{2}} \dots (E_{n+m-1}^1 - E_0^1)^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \Psi_{n+m-1}^1(\mathbf{x}). \quad (66)$$

A potenciál pedig:

$$V_m(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\Psi_0^1(\mathbf{x}) \dots \Psi_0^{m-1}(\mathbf{x})) \quad (67)$$

Ha ismerjük tehát egy Hamilton-operátor sajátenergiáit és hullámfüggvényeit, akkor több egzaktul megoldható Hamilton-operátort is elő tudunk állítani. Fontos kérdés így az, hogy a kiindulási Hamilton-operátor sajátenergiáját és saját hullámfüggvényeit meghatározzuk analitikusan. Ennek érdekében vezessük be az alakinvariáns (SIP= Shape-Invariance Potentials) potenciálok osztályát, amely tartalmazza a legtöbb ismert analitikusan megoldható potenciált, lásd., **2.táblázat**. Az alakinvariancia feltétele segítségével egy potenciál energiaspektrumát, valamint sajátenergiáit könnyen megkaphatjuk a sértetlen SUSY esetre érvényes formalizmus alapján.

Az alábbiakban a (65), (66) és (67) összefüggések bizonyítását mutatjuk be. Az energiaspektrum.[5]

Az *energiaspektrum meghatározásához* a bevezetett Hamilton-operátorok sorozatát használjuk fel, ahol a sorozatban szereplő Hamilton-operátorok potenciáljai között alakinvariancia áll fenn és sértetlen SUSY esetben

teljesülnek:

$$E_n^+ = E_{n+1}^- ; E_n^- = 0 , n = 1,2,3,\dots \quad (68)$$

$$W(\mathbf{x}) = - \frac{d}{dx} \ln \Psi^{(-)}_0(\mathbf{x}) \rightarrow \quad (69)$$

$$\Psi^{(-)}_0(\mathbf{x}) = N_0 \exp(- \int_{-}^x W(y) dy) \quad (70)$$

Innen írható, hogy :

$$E_0^1(a_1) = 0 ; \quad \Psi_0^1(\mathbf{x}; a_1) = N_0 \exp(- \int_{-}^x W_1(y, a_1) dy) \quad (71)$$

Az s-esik alakinvariáns Hamilton-operátor:  $H_s$  írható így:

$H_s = - \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{l=1}^{s-1} R(a_l)$ ,  $a_s$  megkapható a paraméter-sorozatokat összekötő függvény s-1 alkalommal haddatva  $a_1$  paraméterek sorozatára,

$$a_2 = f(a_1), \text{ itt } a_2 = f^{s-1}(a_1)$$

$H_{s+1}$  ehhez hasonlóan:

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{l=1}^s R(a_l) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{l=1}^{s-1} R(a_l)$$

Mivel  $H_{s+1}$  és  $H_s$  SUSY partnerek, így a spektrumuk megegyezik, csak  $H_s$  alapállapotú sajátenergiája hiányzik  $H_{s+1}$  spektrumából. Így  $H_s$  alapállapotú energiája azonosítható  $H_s$  fenti kifejezéséből, kihasználva, hogy  $E_0^1(a_1) = 0$ .

$$E_0^s = \sum_{l=1}^{s-1} R(a_l)$$

Használjuk fel, hogy  $H_1$  alapállapotú energiája nulla, és bármely  $n$ -edik sajátenergiája a  $H_n$  alapállapotú energiája, így  $H_1$  spektruma:

$$E_n^1(a_1) = \sum_{l=1}^{s-1} R(a_l) ; \quad E_0^1(a_1) = 0 \quad (72)$$

A kötöttállapotú hullámfüggvények:

kihasználjuk, hogy a Hamilton-operátorsorozat elemei partnerpotenciálok a szomszédos taggal, így kiindulva  $H_s$  operátorból

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{l=1}^{s-1} R(a_l) \quad (73)$$

Ennek alapállapotú energiája meghatározható

A következő fejezetben látható konkrét esetben, a radiális időfüggetlen Schrödinger-egyenletben hogyan realizálódnak a fentiek fizikai és nem fizikai megoldások keresésében.

### 2.1.6 Radiális időfüggetlen Schrödinger-egyenlet és szuperszimmetrikus vonatkozásai

Eddig a teljes  $x$  tengelyen értelmezett potenciálokat vizsgáltam, de fontos szerepet játszanak a radiális Schrödinger-egyenlet adta eredmények, ami a szögváltozók szeparálása után adódik. Itt mások a határfeltételek, ezért érdemes ezeket külön megvizsgálni a SUSYQM szempontjából.

Térbeli forgásszimmetrikus rendszerek esetén felírható az ún. radiális Schrödinger-egyenlet. Forgásszimmetria esetén a hullámfüggvény szeparált alakban keresendő, azaz polárkoordináta-rendszerben a hullámfüggvény egy  $r$  és egy  $\theta, \Phi$  szögektől függő függvények szorzataként állítható elő.

$$\psi(r, \theta, \Phi) = R(r) Y_l^m(\theta, \Phi) , \quad (74)$$

$Y_l^m(\Theta, \Phi)$ : a gömbfüggvény, amely az impulzusnyomaték négyzetének és z-komponensének a sajátfüggvénye, és  $l$  és  $m$  kvantumszámoktól is függ.  $l=0,1,2,\dots$ ;  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $|m| \leq l$ ;  $R(r)$ : radiális sajátfüggvény.

Felhasználva a  $\frac{\rightarrow^2}{L}$  pályaimpulzusmomentum-négyzet operátor polárkoordinátákkal felírt alakjából kifejezett kinetikus energia összefüggést ([72]:Marx: *Km., Műszaki, 1964.,Bp. 83.o (12.20)*) és felhasználva, hogy időfüggetlen esetben energiasajátfüggvény  $\psi(r, \Theta, \Phi)$  kaphatjuk:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] \Xi(r) = E \Xi(r) \quad (75)$$

$\Xi(r) = \Psi(r)$ , itt legyen:  $\text{kszi}(r) = \text{Pszí}(r)$ ;

nevezzük át:

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) = v(r) \quad (76)$$

Az így kapott radiális Schrödinger-egyenlet alakja:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + v(r) \right] \Psi(r) = E \Xi(r) = E \Psi(r) \quad (77)$$

A SUSYQM módszere alkalmazható erre az egyenletre is,  $x$  értelmezési tartománya itt a pozitív féltengelyre redukálódik,  $x \in \mathbf{R}^+$ . A próbafüggvényünkről  $\Psi(r) - r^t$ ól, tételezzük fel, hogy a nullában  $r^t$  szerint viselkedik. Legyen  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$ , átrendezve, osztva az oldalakat  $\Psi(r) - vel$ .

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + v(r) \right] \Psi(r) = E \Psi(r)$$

$$-\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + v(r) \Psi(r) = E \Psi(r) \quad (78)$$

$$v(r) \Psi(r) - E \Psi(r) = \frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} = \Psi''(r) \quad (79)$$

Itt fel kell tételezni, hogy  $V(r)$ -nek nincs  $1/r^2$  jellegű tagja. Ha van, akkor összekeveredik a centrifugális taggal.

$$v(r) - E = \frac{\psi''(r)}{\psi(r)}, \quad (80)$$

(Analógia az irodalomból tudjuk, hogy  $V(r) = -\frac{e^2}{r^1} = -r^{-1}$ , ( $V(r) \equiv V_-(r)$ ):Coulomb-potenciál, ami  $r$ -rel fordítottan arányos és a radiális harmonikus oszcillátor, amely első tagjában a távolság négyzetével arányos.

Írhatjuk, hogy:  $V(r) = \frac{1}{4} \omega^2 r^2 + v(r)$ , ahol  $v(r)$  a *centrifugális tag*

Vegyük a hullámfüggvény második deriváltjának és a hullámfüggvénynek a hányadosát, amit tovább írhatunk így:

$$\frac{\psi''(r)}{\psi(r)} = \frac{t(t-1)r^{t-2}}{r^t} = \frac{t(t-1)}{r^2} \quad (81)$$

Ha  $\psi(r) \sim r^t$  az origó körül, akkor  $t = l+1$  a *fizikai* megoldás ,

Feltéve, hogy  $V(r)$ -nek nincs  $1/r^2$  jellegű komponense.

a  $t = -l$  a *nem fizikai* megoldás

Ha  $v(r)$  potenciál a centrifugális tagon kívül nem tartalmaz több  $r^{-2}$  tagot, akkor a ( $t = l+1$ ) helyettesítéssel visszkapjuk a taszító centrifugális tagot. Ekkor  $\psi(r)$  nulla közelében  $r^{l+1}$  szerint fog viselkedni.

Abban az esetben, ha

$0 < t < 1$ ,  $v(r)$  a nullában vonzó szingularitásként lép fel, ami matematikai és fizikai problémákat okoz, ezért az egyes megoldásoknál mindig:

$r^{l+1} > 0$  lesz a nullában való normálhatóság kritériuma

Korábban láthattuk, hogy a sértett SUSY esetben (76,77),(80) a  $\tilde{V}(x)$  potenciálból kiindulva előállítható egy  $V_{\Phi^-}$  potenciál, így:

$$V_{\Phi^-} = \frac{\Phi''}{\Phi} = \tilde{V}(x) - \varepsilon \quad (82)$$

**a)** az ehhez tartozó megoldás, *fizikai megoldás*, ha  $\varepsilon = E_0$ , ekkor *sértetlen* SUSY esetével állunk szemben.

**b)** ha  $\varepsilon < E_0$ , akkor a  $\Phi(x)$  megoldásai *nem fizikai megoldások* lesznek, mert  $\Phi(x)$  normálhatósága nullában, végtelenben, vagy mindkettő határesetben sérülhet.[1]

A vizsgáldással *más-más határfeltételekkel* négy ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ) *paramétertranszformációt* kaphatunk (1.táblázat),[1] amelyből meghatározhatók a különböző transzformációkhoz tartozó partnerpotenciálok. A transzformációkból majd jól látható, hogy a nullában,

valamint a végtelenben való viselkedését fogja meghatározni a partnerpotenciálok alapállapotú hullámfüggvényének.

- ❖ A  $T_1$  transzformáció sértetlen SUSY és fizikai megoldást szolgáltat.
- ❖ A  $T_2, T_3, T_4$  transzformációk pedig sértett SUSY, nem fizikai megoldásaihoz vezetnek

### A négy változótranszformáció és tulajdonságai

Transzformáció	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$\varepsilon$	$\varepsilon = E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$
$\lim_{r \rightarrow 0} \chi(r)$	$r^{\gamma+1},$ $\gamma \in \mathbf{Z}^+$	$r^{-\gamma}$	$r^{\gamma+1}$	$r^{-\gamma}$
$\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(r)$	konvergens	divergens	divergens	konvergens
Spektrum megváltozása	az alapállapotenergia eltűnik	új alapállapotú energia, $\gamma > 0$	nincs változás	nincs változás
Szingularitás megváltozása	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$	$(\gamma+1) r^{-2}$	$-\gamma r^{-2}$

**1.táblázat** Ez a teljesül a radiális potenciálok esetén, ennek tárgyalása az alábbiakban következik,  $r \in [0, \infty[$

*A továbbiakban a Eur.J.Phys.* **41** (2020)025403 [1,29,30] *cikkek*

*jelöléseit, gondolatmenetét követve tekintsük át, összefoglalva az algoritmusát, hogyan juthatunk el a radiális harmonikus oszcillátor szuperpotenciáljához, potenciálpárnereikhez, alapállapotú hullámfüggvényéhez és ezek racionális kiterjesztéséhez.*

$H_-$  most hasson több általános, nem feltétlen csak fizikai megoldásokat adó  $kh_i$  függvényre, az alábbiak szerint: normálható

$H_{\pm} \Psi^{\pm}(r) = E_{\pm} \Psi^{\pm}(r)$  alapján, ha  $\chi(r)$  normálható mindkét határesetben:

$H_-\chi(r) = \varepsilon\chi(r)$  , ahonnan kaphatjuk a potenciálpárnereket:

$V_-(r) = \frac{\chi(r)''}{\chi(r)} + \varepsilon = \left(-\frac{\chi(r)'}{\chi(r)}\right)^2 + \left(-\frac{\chi(r)'}{\chi(r)}\right)' + \varepsilon$ . illetve felhasználva általános esetre (45)-(47.....) ből, korábbról:

$$V_{\pm}(r) = \tilde{W}(r)^2 \pm \frac{d}{dr} \tilde{W}(r) + \chi(r) + \varepsilon, \quad (83)$$

ahol a  $\chi(r)$  tartozó szuperpotenciál:

$$\tilde{W}(r) = -\frac{d}{dr} \ln \chi(r). \quad (84)$$

Általában, ha  $\varepsilon \neq 0$   $\tilde{W}(r) \neq W(r) = -\frac{d}{dr} \ln \Psi_0^-(r)$ .

Valójában ilyen alakban írva az alapállapot hullámfüggvénnyel normálható  $\chi(x)$  -en, egy dimenzióban ( $\mathbf{x}$ ):

$\chi(x) = \Psi_0^-(x) \xi(x)$ , eszerint pedig  $\tilde{W}(r)$  így írható:

$$\tilde{W}(r) = W(r) - \frac{d}{dr} \ln \xi(r). \quad (85)$$

- ❖ Amikor az  $\varepsilon$  faktorizációs energia zéró, speciális esetében  $\chi(r) = \Psi_0^-(r)$  , ez a 1.táblázat belüli  $T_1$  transzformáció, *sértetlen* esete.
- ❖ Ha  $\varepsilon \neq 0$  *sértett* esetről beszélünk, ez az 1.,2. táblázatbeli többi transzformációja : $T_2, T_3, T_4$ .

## 2.2 Transzformációs módszer

Ebben az alfejezetben azt ismertetem, hogy miként lehet egzaktul megoldható potenciálokat generálni egy *változótranszformációval*.

### 2.2.1 A Schrödinger-egyenlet megoldása ismert másodrendű differenciálegyenletbe történő transzformálásával

A matematikai fizikában számos másodrendű differenciálegyenlet ismert [8]. Ezek felhasználhatók arra, hogy egzaktul megoldható potenciálokat állítsunk elő. A kvantummechanikában leggyakrabban a hipergeometrikus és a konfluens hipergeometrikus függvény jut szerephez, illetve az ezekből is származtatható klasszikus ortogonális polinomok (Jacobi, Laguerre, Hermite).

Az alábbiakban a [35,36] cikkekben leírt módszert ismertetjük.

$$\frac{\hbar^2}{2m} = 1, \quad \hbar / 2\pi = 2m = 1 \text{ skálázással}$$

az egydimenziós Schrödinger-egyenlet:

$$\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \quad (86)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - V(x))\Psi(x) = 0 \quad (87)$$

a radiális potenciálra a pozitív valós tengelyre definiáltuk  $x \in [0, \infty[$ , most a teljes valós tengelyre ( $x \in ]-\infty; \infty[$  illetve  $[a, b]$ ) definiált megoldásokat keresünk

$$\Psi(x) = f(x) F(z(x)) \quad (88)$$

speciális alakban keresve a hullámfüggvény megoldást

(86) és (87)-ből a kiinduló, közönséges, másodrendű differenciálegyenlet alakja:

$$\frac{d^2F}{dz^2} + Q(z) \frac{dF}{dz} + R(z) F(z) = 0 \quad (89)$$

minden speciális függvényre jellemző [8]. Esetünkben ezek alakja ugyanakkor kifejezhető a (86) és (87) egyenletekben szereplő mennyiségekkel:

ahol  $Q(z)$  és  $R(z)$  speciális függvény [8], formája általánosan itt:

$$\frac{z''}{(z')^2} + \frac{2f'}{z'f} = Q(z(x)) \quad (90)$$

$$\frac{f''}{(z')^2 f} + \frac{E - V(x)}{(z')^2} = R(z(x)) \quad (91)$$

Kifejezve E- V (x) tagot, kapjuk:

$$E - V(x) = (z'(x))^2 R(z(x)) - \left( \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)^2 + \frac{d}{dx} \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right) \right) =$$

$$= \left\{ \frac{z'''(x)}{2 z'(x)} - \frac{3}{4} \left( \frac{z''(x)}{z'(x)} \right)^2 \right\} + (z'(x))^2 \left( R(z(x)) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dz} - \frac{1}{4} Q^2(z(x)) \right). \quad (92)$$

{z, x} tag : a *Schwartz-féle derivált*

A hullámfüggvény egzakt alakja a normalizációs konstans nélkül:

$$\Psi(x) \sim (z'(x))^{-\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{1}{2} \int_{-}^{z(x)} Q(z) dz \right) F(z(x)). \quad (93)$$

A módszer összekapcsolható a SUSYQM formalizmusával is, ami lehetővé teszi a W(x) szuperpotenciál kifejezését az alábbi alakban:

(A (94) nem teljesül általánosan.)

$$E - V(x) = -W^2(x) + \frac{dW}{dx} \quad (94)$$

ahol W(x) alakja

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln f(x) = -\frac{1}{2} Q(z(x)) z'(x) + \frac{1}{2} \frac{z''(x)}{z'(x)}. \quad (95)$$

A (92) egyenletből látható, hogy a bal oldalon szereplő E konstansnak a jobb oldalon is lennie kell egy megfelelőjének, ami általános esetben a Q(x) és R(x) függvényeket tartalmazó tagból választható. Így tehát bevezethetjük, a

összefüggést, ami egyben egy differenciálegyenletet szolgáltat a z(x) függvényre, definiálva azt.

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \Phi(z) = C.$$

Itt az általános formalizmust alkalmazzuk a hypergeometrikus és konfluens hipergeometrikus függvényekre:[8] amely eljárás a Natanzon, illetve Natanzon konfluens potenciálosztályt adja eredményül:[15,16,62]

A speciális függvények kötöttállapotú megoldásokban a Jacobi, illetve az általánosított Laguerre polinomokra redukálódnak (Abramowitz[8]).

$$\text{egyszerűbb jelöléssel, innen: } (z')^2 = C / \Phi(z) \quad (96)$$

melyhez direkt integrálással írhatjuk, hogy  $\int \Phi^{\frac{1}{2}}(z) dz = C^{\frac{1}{2}} x + x_0$ ,

$x_0$ : integrációs konstans

Ha csak az implicit  $x(z)$  függvény elérhető, akkor az implicit potenciálról beszélünk.

(változótranszformációval....nincs garancia, hogy zárt alakban megkapjuk  $z(x)$ -et  $x(z)$ -ből vagy fordítva,  $z(x)$ .... $x(z)$  inverz alakra váltva.[1,2,36])

Az alábbi alakítással láthatóvá válhatnak a keresett tagjaink:

$$\begin{aligned} E - V(x) &= \frac{1}{2} \{z, x\} + (z'(x))^2 \left( R(z(x)) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dz} - \frac{1}{4} Q^2(z(x)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{C}{\Phi(z(x))} \left( R(z(x)) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dz} - \frac{1}{4} Q^2(z(x)) \right). \end{aligned} \quad (97)$$

ahol  $\{z, x\}/2$  a már ismert Schwartz-féle derivált.

## 2.2.2 Polinomok megjelenése és a Natanzon-féle osztály

$F(z) = P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  választás meghatározza  $Q(z)$  és  $R(z)$  alakját [8]:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + Q(z) \frac{dF}{dz} + R(z) F(z) = 0 \quad (89)\text{-ből:}$$

ahol  $Q(z)$  és  $R(z)$  speciális függvény, formája [8] általánosan itt:

$$Q(z) = \frac{(\alpha + \beta + 2)z + (\alpha - \beta)}{1 - z^2}, \quad (98)$$

$$R(z) = -\frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{1 - z^2}. \quad (99)$$

A formalizmust egyszerűsíthetjük a

(100)

(101)

átparaméterezéssel.

$$\omega = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \rho = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (100), (101)$$

Az aktuális formája E-V(x) egyenletünknek (97)-ből:

$$E - V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{1}{(1-z^2(x))^2} (z'(x))^2 \left[ \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] (1 - z^2(x) + p_{II} + p_{III} z(x)), \quad (102)$$

$$p_I = \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}, \quad (103)$$

$$p_{II} = 1 - \omega^2 - \rho^2 \quad (104)$$

$$p_{III} = 2\omega\rho z(\mathbf{x}). \quad (105)$$

Korábbi kiinduláshoz hasonlóan:

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 \Phi(z(\mathbf{x})) = C \quad (106)$$

$$(z'(x))^2 \frac{\varphi(z(x))}{(z^2(x)-1)^2} = C, \quad (107) \quad \text{összefüggésből } z, x \text{ szerinti deriváltja:}$$

Itt megteremtődik a kapcsolat x-z- $\varphi$  változók közt:

$$\frac{dz}{dx} = z(\mathbf{x})' =$$

$$C^{\frac{1}{2}} (z^2(x) - 1) [\varphi(z(x))]^{-\frac{1}{2}} \quad (108), (109) \text{ ahol,}$$

mivel ugyanezek a komponensek fordulnak elő a (97) egyenlet jobb oldalán, amelyek közül az E-nek megfelelő konstans tagot megválasztjuk.

$$\varphi(z(x)) = p_I (1 - z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x), \quad (110)$$

(107) -ből és

$$(106)\text{-ből kifejezve } V(\mathbf{x}) \text{-et a fentiekkel felírva: } \pm \frac{C}{\varphi(z(x))} = - \frac{(z'(x))^2}{(z^2(x)-1)^2} = \frac{(z'(x))^2}{(1-z^2(x))^2}$$

(102) egyenletből és  $\varphi(z(x))$  (110) egyenletekből kapjuk V(x) új alakját(111)-ben

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{C}{\varphi(z(x))} \left[ s_I (1 - z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x) \right], \quad (111)$$

behelyettesítve a nevezőbe :  $\varphi(z(x))$ -t:

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{C}{p_I (1-z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)} \left[ s_I (1 - z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x) \right], \quad (112)$$

Egyszerű átalakításokkal a következő egyenlethez jutunk: (117)

(102) egyenletbe írva  $V(x)$  (183)(112) alakját kapjuk:

$$E - V(x) = \frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{1}{(1-z^2(x))^2} (z'(x))^2 \left[ \left( \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x) + p_{II} + p_{III}) \right], \quad (113)$$

\*\*\*\*\*

$$E + \frac{1}{2} \{z, x\} - \frac{C [s_I (1-z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x)]}{p_I (1-z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)} = \frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{1}{(1-z^2(x))^2} (z'(x))^2 \left[ \left( \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x) + p_{II} + p_{III}) \right], \quad (114)$$

$\frac{1}{2} \{z, x\}$  eltűnik, osztva mindkét oldalt  $(C/\varphi)$ -vel

$$E - \frac{C [s_I (1-z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x)]}{p_I (1-z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)} = \frac{c}{\varphi(z(x))} \left[ \left( \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x) + p_{II} + p_{III}) \right], \quad (115)$$

$$E / \left( \frac{c}{\varphi(z(x))} \right) - [s_I (1 - z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x)] = \left[ \left( \left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x) + p_{II} + p_{III}) \right], \quad (116)$$

$\varphi(z(x)) = p_I (1 - z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)$  beírva a bal nevezőbe:

$$E / \left(\frac{c}{\varphi(z(x))}\right) = E / \left(\frac{c}{p_I(1-z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)}\right) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{E}{c} (p_I (1 - z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x)) = \\ & = [s_I (1 - z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x)] + \left[ \left( (n + \omega + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x) + p_{II} - p_{III}) \right] \quad (117) \end{aligned}$$

A három (1),(2),(3) független tag együtthatóit összegyűjtve három (1),(2),(3) egyenlethez jutunk:

$$\left( n + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + s_I - \frac{E}{c} p_I = 0 \quad , \quad (1) \quad (118)$$

$$\frac{E}{c} p_{II} = s_{II} + p_{II}$$

$$p_{II} + s_{II} - \frac{E}{c} p_{II} = 0$$

$$1 - \omega^2 - \rho^2 + s_{II} - \frac{E}{c} p_{II} = 0 \quad (2) \quad (120)$$

$$\frac{E}{c} p_{III} z(x) = s_{III} z(x) - p_{III}$$

$$-2\omega\rho z(x) + s_{III} z(x) - \frac{E}{c} p_{III} z(x) = 0 \quad / : z(x)$$

$$-2\omega\rho + s_{III} - \frac{E}{c} p_{III} = 0 \quad (3) \quad (121)$$

A három egyenlet kapcsolatot teremt  $p_i$  paraméterek, a (111) egyenletben megjelenő potenciál csatolási együtthatói és az  $E$  energia között a Jacobi-polinomok esetén.

Az **2. táblázat**ban szereplő PI potenciálosztály esetén a paraméterek értékei:

(110)-ből:

$$\varphi(z(x)) = p_I (1 - z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x) \text{ így egyszerűsödik,}$$

$$p_I = 1 ,$$

$$p_{II} = p_{III} = 0 , \text{ választással:}$$

$$\varphi(z(x)) = (1 - z^2(x)). \quad (122)$$

itt (118)-ból: ha  $p_I = 1$ ,  $s_I = \frac{1}{4}$  energiaskálaeltolás mellett kapjuk az

E: energia-sajátértéket

$$\begin{aligned} \left(n + \omega + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + s_I - \frac{E}{C} &= 0 \\ \left(n + \omega + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &= \frac{E}{C}, \end{aligned} \quad (123)$$

$$E_n = C\left(n + \omega + \frac{1}{2}\right)^2 = C\left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2. \quad (124)$$

Továbbá  $p_{II}=p_{III}=0$ , miatt,

(A 191)(120) és (192)(121) -ből a kapcsolatteremtő  $s_i$  csatolási együtthatók adódnak:

$$1 - \omega^2 - \rho^2 + s_{II} = 0 \quad (125)$$

$$s_{II} = \omega^2 + \rho^2 - 1 \quad \text{és} \quad s_{III} = 2\omega\rho. \quad (126),(127)$$

A  $PI$  potenciál- (/differenciálegyenlet-) osztály általános alakját jelen esetre fel tudjuk írni, ha (180)(109) -ből indulunk ki, ahogy az **2. táblázat**ban láthatjuk:

*pl. a Scarf I., Pöschl-Teller potenciál*

$$(z'(x))^2 \frac{\varphi(z(x))}{(z^2(x)-1)^2} = C \quad \text{és most } \varphi(z(x)) = (1 - z^2(x)). \quad (128)$$

ezért:

$$(z'(x))^2 \frac{1-z^2(x)}{(z^2(x)-1)^2} = C, \quad \text{azonosságok behelyettesítésével, egyszerűsítéssel:}$$

$$\frac{(z'(x))^2}{(1-z(x)^2)} = C_{PI} \quad (129)$$

-----  
A (112) egyenletből, a paraméterek ismeretében, behelyettesítve kapjuk a potenciál alakját:

$$\omega = \frac{\alpha+\beta}{2}, \rho = \frac{\alpha-\beta}{2}, -\frac{1}{2}\{z, x\} \text{ megfelel } \frac{3C}{1-z^2(x)} - \frac{C}{4},$$

$$V(\alpha, \beta; x) = \frac{C}{(1-z^2(x))} \left[ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \quad (130)$$

Az kötöttállapotú hullámfüggvény[2] pedig a fentiekből az alábbi alakot ölti:

$$\Psi_n(\alpha, \beta; x) = C_n^{(\alpha, \beta)} (1-z(x))^{\frac{\alpha+1}{2}+\frac{1}{4}} (1+z(x))^{\frac{\beta+1}{2}+\frac{1}{4}} P_n^{(\alpha+\beta)}(z(x)), \quad (131)$$

További potenciálosztályokhoz jutunk  $\varphi(z)$  egyéb megválasztásával.

$p_{II}=p_{III}=1$  választással, a PII. potenciálosztályt találjuk (Lsd 1.táblázat) mely tartalmaz három potenciált, a három alkalmasan választott  $z(x)$  függvény mellett. Ezek a Rosen-Morse I. és II. potenciálok, illetve az Eckart potenciál.

PIII. potenciálosztály implicit potenciálokat tartalmaz, olyan értelemben, hogy  $x(z)$  fordítva nem kölcsönösen egyértelműen kapható meg az explicit  $z(x)$ -ből. Mégis releváns mennyiségek egzaktul kiszámíthatóak. További potenciálok származtathatóak  $p_i$  paraméterek nullától különböző alkalmas/helyes megválasztásával. Például a Ginocchio [54,55] és az általános Ginocchio potenciál 1985 (az egy- és háromdimenziós Schrödinger egyenletből) valamint a DKV (Dutt-Khare-Varshni 1995) potenciál, speciális eseteiként a **PI.**, és a PII. potenciálosztályoknak (Jacobi polinomokkal).[73]

**Az előző fejezetből kaphatók meg a 2.táblázatban feltüntetett potenciálok az alábbi formákban :[36]**

$$F(z) \rightarrow L_n^{(\alpha)}(z), F(z) \rightarrow P_n^{(\alpha, \beta)}(z), \text{ majd } z(x) \text{ alkalmas választásával}$$

**P: Jacobi-féle polinomosztály**

**L: Laguerre-féle polinomosztály**

**H:Hermite-féle polinomosztály**

$$\left( \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \right)$$

**Az alábbi táblázat tartalmazza a megfelelő speciális:** trigonometrikus és hyperbolikus  $z(x)$  függvények választása mellett, milyen potenciátagokat kaphatunk meg a megfelelő (92), (97) egyenletekből, a Jacobi, Laguerre, stb. polinomoknak megfelelő  $Q(z)$  és  $R(z)$  függvények behelyettesítésével:

<b>z(x)=</b>	<b>diff.e. osztály</b>	<b>V(x)</b>	<b>név</b>
<i>Pl:Jacobi I.osztály</i>	$\frac{(z')^2}{(1-z^2)} = C, \text{ (PI)}$		
i sinh (ax)	$C = -a^2$	$A^2 + (B^2 - A^2 - Aa) \operatorname{sech}^2(ax) + B(2A+a) \operatorname{sech}(ax) \tanh(ax)$	Scarf II.
cosh (ax)	$C = -a^2$	$A^2 + (B^2 + A^2 + Aa) \operatorname{cosech}^2(ax) - B(2A+a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax)$	általános Pöschl-Teller
cosh (2ax)	$C = -4a^2$	$(A-B)^2 - A(A+a) \operatorname{sech}^2(ax) + B(B-a) \operatorname{cosech}^2(ax)$	Pöschl-Teller II.
cos (ax)	$C = a^2$	$-A^2 + (B^2 + A^2 - Aa) \frac{1}{\sin^2(ax)} - B(2A-a) \frac{1}{\sin^2(ax)} \cos(ax).$	Scarf I.
cos (2ax)	$C = 4a^2$	$-(A+B)^2 + A(A-a) \operatorname{sech}^2(ax) + B(B-a) \operatorname{cosech}^2(ax)$	Pöschl-Teller I.
	$\frac{(z')^2}{(1-z^2)^2} = C, \text{ (PII)}$		
tanh (ax)	$C = a^2$	$A^2 + B^2 / A^2 + 2B \tanh(ax) - A(A+a) \operatorname{sech}^2(ax)$	Rosen-Morse II.
coth (ax)	$C = a^2$	$A^2 + B^2 / A^2 - 2B \coth(ax) + A(A-a) \operatorname{cosech}^2(ax)$	Eckart
-i cot (ax)	$C = -a^2$	$-A^2 + B^2 / A^2 - 2B \cot(ax) + A(A+a) \operatorname{cosec}^2(ax)$	Rosen-Morse I.
<i>Laguerre I.,II. osztály</i>	$(z')^2 / z = C, \text{ (LI)}$		
$\frac{\omega}{2} x^2$	$C = 2\omega$	$\frac{1}{4} \omega^2 x^2 + \frac{l(l+1)}{x^2} - (l + \frac{3}{2}) \omega$	radiális harmonikus oszcillátor
	$(z')^2 = C, \text{ (LII)}$		
$\frac{e^2}{n+l+1} x$	$C = \frac{e^4}{(n+l+1)^2}$	$\frac{e^4}{4(l+1)^2} - \frac{e^2}{x} + \frac{l(l+1)}{x^2}$	Coulomb
	$(z')^2 / z^2 = C, \text{ (LIII)}$		
$\frac{2B}{a} \exp(-ax)$	$C = a^2$	$A^2 - B(2A+a) \exp(-ax) + B^2 \exp(-2ax).$	Morse
HI:Hermite-f.osztály	$(z')^2 = C, \text{ (HI)}$		
$(\frac{\omega}{2})^{\frac{1}{2}} (x-2b/a)$	$C = \omega/2$	$-\frac{1}{2} \omega + \frac{1}{4} \omega^2 + x^2$	1Ds h.o.

- Amikor  $F(z)$ -t a  ${}_2F_1(a;b;c;z)$  *hipergeometrikus függvény (HF)* családból választjuk ki, akkor a keresett potenciál *Natanzon típusú potenciálosztályba* tartozó lesz, az ide tartozó potenciálok kötöttállapotú megoldásait írjuk fel a  $F(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$  Jacobi polinomosztály tagjaiként és a hozzárendelt  $Q(z(x))$ ,  $R(z(x))$  -eket, a (90),(91)-ből és alább (169),(170)-ből. Ezekhez jutunk a hypergeometrikus függvényből, megfelelő paraméter/változóválasztással :  $a=-n$  vagy  $b=-n$  : [8].
- Hasonlóan, amikor  $F(z)$ -t a  ${}_1F_1(a;c;z)$  konfluens hypergeometrikus függvény (CHF) családból választjuk, akkor a keresett potenciál *Konfluens Natanzon típusú potenciálosztályba* tartozó lesz.  ${}_1F_1(a;c;z)$  redukálódik  $a=-n$ , választással: [8], általánosított Laguerre-típusú polinomosztályba tartozó tagra:  $F(z) = L_n^{(\alpha)}(z)$  és a nekik megfelelő  $R(z(x))$ ,  $Q(z(x))$  függvények együttesére.

### 3. Saját eredmények

#### 3.1 A radiális harmonikus oszcillátor szuperszimmetrikus transzformáltja

Ez az alfejezet az [1] cikkben foglalt eredmények összefoglalója. A vizsgált potenciálok ismertetése után megkonstruáljuk az 1. Táblázatban leírt négy általános szuperszimmetrikus transzformációt és vizsgáljuk hatásukat az adott konkrét esetben.

##### 3.1.1 A radiális harmonikus oszcillátor és racionális kiterjesztése

A szögváltozók szeparálása után a *háromdimenziós harmonikus oszcillátor* potenciál  $r$ -függő része, amit így írhatunk:

$$V(l, \Delta; r) = \frac{\omega^2}{4} r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \Delta, \quad (3.1.1)$$

A (98)(3.1.1) potenciált a 2. Táblázatban szereplő LI esetként azonosíthatjuk, amit a 2.2 fejezetben leírt módszerrel kaphatunk meg, ha azt az általánosított

Laguerre polinom differenciálegyenletére [8] alkalmazzuk. Ebben az esetben a (89) egyenletben  $Q(z)=(\alpha+1)/z-1$ , illetve  $R(z)=n/z$ , ahol a jelen esetben  $\alpha=1+1$ .

Ennek megfelelően a kötöttállapotú hullámfüggvények alakja (3.1.2):

$$\Psi_n (l;r) = C_n^{(l)} r^{l+1} \exp \left( -\frac{\omega}{4} r^2 \right) L_n^{(l+\frac{1}{2})} \left( \frac{\omega}{2} r^2 \right), \quad (3.1.2)$$

ahol  $C_n^{(l)}$ :

$$C_n^{(l)} = \left[ \frac{\omega^{l+\frac{3}{2}} n!}{2^{l+\frac{1}{2}} (n+l+\frac{1}{2})!} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.1.3)$$

Itt a  $\Delta$  konstant egy technikailag szükséges *energiaeltolás*. Ezt a potenciált a 2.2.1 részben ismertetett eljárás általánosított Laguerre-polinomokra történő alkalmazásával kaphatjuk meg.

Ebben az esetben a (89) egyenletben a  $Q(z)$  és  $R(z)$  függvények a következő módon választandók [8]:

$$Q(z) = \frac{(\alpha+1)}{z-1} \quad (3.1.4a)$$

$$R(z) = \frac{n}{z} \quad (3.1.4b)$$

az  $\alpha=1+1$  helyettesítéssel.

a megfelelő energia-sajátértékeket pedig (az említett energiaeltolás figyelembevételével) a

$$E_n ( l, \Delta ) = \omega \left( 2n + l + \frac{3}{2} \right) + \Delta \quad (3.1.5)$$

egyenlet szolgáltatja.

\*\*\*\*\*

A (98)(3.1.1) potenciál racionális kiterjesztése (Qu08) [6] két taggal kiegészül,

[6](Quesne C.,2008 *J.Phys. A:Math.Theor.***41**) a négyzetes és a centrifugális tag mellett:

$$\widehat{V}(l, \Delta; r) = \frac{\omega^2}{4} r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{4\omega}{2l+1+\omega r^2} - \frac{8\omega(2l+1)}{(2l+1+\omega r^2)^2} + \Delta. \quad (3.1.6)$$

(Ez a potenciál is megkapható a 2.2.1 részben leírt módszerrel, ha azt az  $X_1$  - típusú Laguerre-polinomok differenciálegyenletére alkalmazzuk: [23,24])

A hullámfüggvény kifejezhető a kivételes  $X_1$  - típusú Laguerre ortogonális polinommal ilyen formában:

Szemléltetés: lásd **Függelék 2. ábra**

$$\widehat{\Psi}_n(l; r) = \widehat{C}_n^{(l)} \frac{r^{l+1}}{2l+1+\omega r^2} \exp\left(-\frac{\omega}{4} r^2\right) L_{n+1}^{(l+\frac{1}{2})}\left(\frac{\omega}{2} r^2\right) \quad (3.1.7), \text{ ahol}$$

$$\widehat{C}_n^{(l)} = \left[ \frac{\omega^{l+\frac{3}{2}} n!}{2^{l-\frac{3}{2}} (n+l-\frac{1}{2})!(n+l+3/2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.8)$$

A kivételes ortogonális polinomok két általánosított Laguerre-polinom lineárkombinációjából az alábbi módon megkonstruálható,  $z$  változóval: [1], [23], [24]

$$L_n^{(\alpha)}(z) = -(\alpha + 1 + z) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) + L_{n-2}^{(\alpha)}(z). \quad (3.1.9)$$

Az energia-sajátértékek kifejezése pedig azonos a közös harmonikus oszcillátoréval

$$\widehat{E}_n(l, \Delta) = \omega \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) + \Delta. \quad (3.1.10)$$

### 3.1.2 Transzformációk sértetlen és sértett szuperszimmetria esetén

Az alábbiakban előállítjuk az 1. táblázatban leírt négy SUSY transzformációt a radiális harmonikus oszcillátor és a racionális kiterjesztése esetére.

Kiindulás a  $\chi(r)$  folytonos és normálható ( $r \in (0, \infty)$ ) próbafüggvényünk a 6 paraméterével, ilyen formában

$$\chi(r) = r^t \exp\left(s \frac{\omega}{4} r^2\right) \frac{(p + \omega r^2)^k}{(q + \omega r^2)^j}, \quad (3.1.11)$$

$\omega > 0, p > 0, q > 0, s = \pm 1, k, j$  nem negatív

ebben az esetben a próbafüggvényünk olyan szuperpotenciált és belőle olyan partnerpotenciált szolgáltat, amely nem zérus, nem szinguláris.

változó/paraméter, ha  $p=q, j=0$ , akkor  $k \rightarrow k$ , speciális transzformáció, ha paraméterek argumentumbeli változása a szuperpotenciál előjelváltását, tükrözését eredményezi:

$W(r) = -W(r)$  ( $t, s, k, j, p, q$ )  $\rightarrow$  ( $-t, -s, j, k, q, p$ ) esetben, (3.1.12)-ben.

Közvetlen deriválással belátható, hogy a (3.1.12) függvény megoldása egy olyan általános potenciálnak, amely a paraméterek megfelelő megválasztásával ( $s = +1/-1, t=(l+1)/(-1)$ ) a (3.1.1), illetve a (3.1.6) alakra hozható, valamint biztosítható, hogy ne legyen zérusa, illetve szingularitása ( $p, q > 0$ ). Az energia-sajátérték a paraméterválasztás függvénye.

A szuperpotenciál fontos szerepet kap a partnerpotenciálok előállításában, később (3.1.12)-(3.1.14).

Tudjuk, hogy  $W(r) = -\frac{d}{dr} \ln \chi(r)$  -ből a szuperpotenciál:

$$W(r) = -s \frac{\omega}{2} r - \frac{t}{r} - \frac{2kr\omega}{p + \omega r^2} + \frac{2j\omega r}{q + \omega r^2}. \quad (3.1.12)$$

mivel a partnerpotenciálok :  $V_{\pm}(r) = \tilde{W}(r)^2 \pm \frac{d}{dr} \tilde{W}(r) + \chi(r) + \varepsilon$ , így, ha  $p \neq q$ :

$$V_{-}(r) - \varepsilon = \frac{\omega^2}{4} r^2 + \frac{t(t-1)}{r^2} + \frac{2k\omega}{p + \omega r^2} \left(2k - sp + 2t - 1 - \frac{4jp}{p-q}\right) - \frac{4p\omega k(k-1)}{(p + \omega r^2)^2} +$$

$$+ \frac{2j\omega}{q + \omega r^2} \left(2j + sq - 2t + 1 + \frac{4kq}{p-q}\right) - \frac{4q\omega j(j+1)}{(q + \omega r^2)^2} + s\omega \left(2k + t - 2j + 1/2\right), \quad (3.1.13) \quad \text{és}$$

$$V_+ (r) - \varepsilon = \frac{\omega^2}{4} r^2 + \frac{t(t+1)}{r^2} + \frac{2k\omega}{p+\omega r^2} \left(2k-sp+2t+1 - \frac{4jp}{p-q}\right) - \frac{4p\omega k(k+1)}{(p+\omega r^2)^2} +$$

$$+ \frac{2j\omega}{q+\omega r^2} \left(2j+sq-2t-1 + \frac{4kq}{p-q}\right) - \frac{4q\omega j(j-1)}{(q+\omega r^2)^2} + s\omega (2k+t-2j-1/2) . \quad (3.1.14)$$

Ha a (110)(3.1.13)  $V_-(r)$  potenciált úgy választjuk meg, hogy ne tartalmazzon additív konstans, akkor a faktorizációs energia (112)(3.1.15)

ez esetben a (111)  $V_+(r)$  potenciálban szereplő additív konstans  $-s\omega$  lesz.

$$\varepsilon = -s\omega \left(2k + t - 2j + \frac{1}{2}\right) \text{ és } \varepsilon = -s\omega * 1. \quad (3.1.15)$$

**Az alábbiakban tekintsünk néhány speciális esetet, megfelelő paraméterek választása mellett.**

**$k=j = 0$ .**

Ebben az esetben (3.1.13) és (3.1.14) a közönséges radiális harmonikus oszcillátorra (3.1.6) egyszerűsödik. Az egyes  $T_i$  SUSY transzformációk a következő választással kaphatók meg.

**$T_1: t>0, s=-1$**

(110,111)-ből a partnerpotenciálok  $t > 0, s = -1$

$$V_-(r) = V(t-1, 0; r), \quad (3.1.16)$$

$$V_+(r) = V(t, \omega; r), \quad (3.1.17)$$

A faktorizációs energiát kifejezve ((3.1.15)-ből), kapjuk:

$$\varepsilon = \omega \left(t + \frac{1}{2}\right). \quad (3.1.18)$$

A  $t = l+1 > 0$  választással visszakapjuk a radiális harmonikus oszcillátor szokásos alakját, illetve adódik, hogy:

$\varepsilon = \omega \left(l+1 + \frac{1}{2}\right) = \omega \left(l + \frac{3}{2}\right)$  hasonlóan a  $V_-(r)$  alapállapot energiájához. Ez a **sértetlen** SUSYQM esete, ahol az energiaspektrum sémájában

$$E_n(l, \Delta) = \omega \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) + \Delta, \quad (3.1.5) \text{ összefüggésből:} \quad (3.1.19)$$

$$E_{n+1}^- = E_{n+1}(l, 0) = E_n(l+1, \omega) = E_n^+ \quad (3.1.20)$$

A  $V_-(r)$  és  $V_+(r)$  kötöttállapotú hullámfüggvényei kifejezhetők a (3.1.3) függvényekkel és

megoldásához tartozó hullámfüggvénnyel és

(27) alkalmazásával a következő összefüggést kapjuk közöttük:

$$A\Psi_{n+1}(l,r) = -\omega \frac{C_{n+1}^l}{C_n^{l+1}} \Psi_n(l+1,r) = -(E_{n+1}(l,0) - \varepsilon)^{1/2} \Psi_n(l+1,r), \quad (3.1.21)$$

(felhasználva az általánosított Laguerre-polinomra felírt rekurziós formulát [8]-ből)

**$T_2: t < 0, s = +1$**

Ilyenkor :

$$V_-(r) = V(-t, 0; r), \quad (3.1.22)$$

$$V_+(r) = V(1-t, -\omega; r), \text{ a faktorizációs energia pedig:} \quad (3.1.23)$$

$$\varepsilon = -\omega \left(t + \frac{1}{2}\right). \quad (3.1.24)$$

Az 1. táblázat alapján,  $t = -l < 0$  választással:

$$\varepsilon = -\omega \left(-l + \frac{1}{2}\right) = \omega l - \frac{1}{2} \omega = \omega \left(l - \frac{1}{2}\right) = E_0^- - 2\omega < E_0 \quad (3.1.25)$$

az energiaspektrum sémájában a **sértett** SUSYQM esete ez

$$E_n^- = E_n(l, 0) = E_{n+1}(l-1, -\omega) = E_{n+1}^+ \quad (3.1.26)$$

Új kötöttállapotú energia jelenik meg  $V_+(r)$  spektrumában  $\varepsilon$ -nal.

A hullámfüggvényeket most a

(3.1.27)

egyenlet kapcsolja össze.

$$A\Psi_n(l, r) = 2(n+1) \frac{C_n^l}{C_{n+1}^{l-1}} \Psi_{n+1}(l-1, r) = (E_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \Psi_{n+1}(l-1, r). \quad (3.1.27)$$

Itt  $T_2$  transzformáció éppen  $T_1$  inverze. Ez belátható a  $t = -l - 1$  választást tekintve ( $t = -1$  helyett), mivel ilyenkor  $\chi(r)$  a  $T_1$  esetben alkalmazott függvény inverze lesz és  $A$  hatása hasonló lesz, mint  $A^+$  hatása a  $T_1$  esetben.

**T<sub>3</sub> : t > 0, s = +1**

$$V_-(r) = V(t-1, 0; r), \quad (3.1.28)$$

$$V_+(r) = V(t, -\omega; r), \text{ a faktorizációs energia:} \quad (3.1.29)$$

$$\varepsilon = -\omega(t + \frac{1}{2}). \quad (3.1.30)$$

Ha  $t=l+1 > 0$

$$\varepsilon = -\omega(t + \frac{1}{2}) = -\omega(l+1 + \frac{1}{2}) = -\omega(l + \frac{3}{2}) < E_0^-, \quad (3.1.31) \quad \text{sértett SUSY esete}$$

A partnerpotenciálok energiaspektruma *azonos*:

$$E_n^- = E_n(l, 0) = E_n(l+1, -\omega) = E_n^+ \quad , (3.1.32)$$

és a megegyező hullámfüggvénytranszformációval kapjuk:

$$A\Psi_n(l, r) = -\omega \frac{c_n^l}{c_n^{l+1}} \Psi_n(l+1, r) = -(E_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \Psi_n(l+1, r). \quad (3.1.33)$$

**T<sub>4</sub>: t < 0, s = -1**

$$V_-(r) = V(t-1, 0; r), \quad (3.1.34)$$

$$V_+(r) = V(1-t, -\omega; r), \quad (3.1.35) \quad \text{a faktorizációs energia itt:}$$

$$\varepsilon = -\omega(t - \frac{1}{2}). \quad (3.1.36)$$

Ha  $t=-l < 0$

$$\varepsilon = -\omega(t - \frac{1}{2}) = -\omega(l - \frac{1}{2}) = -\omega(l + \frac{3}{2}) < 0 \quad (3.1.37)$$

ismét a T<sub>2</sub> esethez hasonlóan *sértett SUSY esete*

A partnerpotenciálok energiaspektruma a T<sub>3</sub> esethez hasonlóan *azonos*:

$$E_n^- = E_n(l, 0) = E_n(l-1, \omega) = E_n^+ \quad (3.1.38)$$

és a megegyező A operátor hatására a hullámfüggvénytranszformációval hasonlóan kapjuk, de (l-1) változóval :

$$A\Psi_n(l, r) = (2n + 2l + 1) \frac{c_n^l}{c_n^{l-1}} \Psi_n(l-1, r) = (E_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \Psi_n(l-1, r). \quad (3.1.39)$$

A T<sub>3</sub>, T<sub>4</sub> trafók egymás inverzei, mint ahogy az első kettő transzformációnál korábban láthattuk.

**ha:  $j=0$**

**$T_1: t>0, s=-1$  esetben**

$V_-(r)$  a (3.1.1) alakra hozható a  $k=1, t=1+1$  és  $p=-(2l+3)$  választással. Ilyenkor  $V_+(r)$  felveszi a (3.1.6) alakot, viszont  $p<0$  miatt szinguláris lesz. Így arra következtethetünk, hogy ez az eset nem vezet megalapozott SUSY transzformációhoz.

**$T_2: t<0, s=+1, j=0$**

A helyzet az előzőhöz hasonló.  $V_-(r)$  a (3.1.1) alakra hozható a  $t=-1$  és  $k=1$  választással, de ez negatív  $p$  értékhez vezet, ami a  $V_+(r)$  potenciált szingulárisrá teszi. Emiatt ezt az eset is elvetendő.

**$k=1$  választással  $(p + \omega r^2)^{-2}$  eltűnik, hasonló a helyzet a fenti  $T_1$  esethez**

visszakapjuk a radiális harmonikus oszcillátor potenciált, ahogy a... táblázatban a  $T_2$  transzformációnál láthatjuk

ha most  $t = -l$  ahol  $l < 0$  és  $p = (2t+1)$ :

Ekképpen:

$$V_-(r) - \varepsilon = \frac{\omega^2}{4} r^2 + \frac{t(t-1)}{r^2} + \frac{2\omega}{p+\omega r^2} (2-p+2t-1) + s\omega (t+5/2) = \quad (3.1.40)$$

$$v_-(r) = \frac{2\omega}{p+\omega r^2} (2-p+2t-1) = \frac{2\omega}{p+\omega r^2} (2t+1-p) = \frac{2\omega}{p+\omega r^2} (p-p) = 0. \quad (3.1.41)$$

$$\varepsilon = -\omega (t+5/2). \quad (3.1.42)$$

**$T_3: t>0, s=+1$**

**$k=1$  választással és  $p = (2t+1)$ :**

fentiekhez hasonlóan behelyettesítve kapjuk:

:

$V_-(r) = V(l, 0; r),$  (3.1.43) visszakapjuk ismét a radiális harmonikus oszcillátort, de

$t=l+1$

$$V_+(r) = \hat{V}(l+1, -\omega; r), \quad (3.1.44)$$

A faktorizációs energiatag:

$$\varepsilon = -\omega \left(l + \frac{7}{2}\right) \quad (3.1.45)$$

$$\varepsilon < E_0^-$$

Ez a transzformáció így a radiális harmonikus oszcillátorból generálja annak racionális kiterjesztésének esetét, cserélve  $l$ -et  $(l+1)$ -re, a két partnerpotenciál megegyező energiaspektrumával, az 1.táblázattal összhangban.

A (3.1.15) és (3.1.10) energiakifejezések alapján

$$E_n^- = E_n(l, 0) = \widehat{E}_n(l+1, -\omega) = E_n^+ \quad (3.1.46)$$

Az  $A$  operátor most összeköti a *radiális* harmonikus oszcillátor hullámfüggvényét és a belőle racionálisan kiterjesztett változatának hullámfüggvényét az alábbi módon:

$$A\Psi_n(l, r) = (2\omega) \frac{c_n^l}{c_n^{l+1}} \widehat{\Psi}_n(l+1, r) = (E_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \widehat{\Psi}_n(l+1, r). \quad (3.1.47)$$

**$T_4: t < 0, s = -1$**

$k+1$  és  $p = -(2t+1)$  választással  $V_-(r)$  visszaadja a radiális harmonikus oszcillátort

Ha  $t = -1 < 0$  ahol  $l > 0$  hozzájutunk:

$$V_-(r) = V(l, 0; r) \text{-hez és} \quad (3.1.48)$$

$V_+(r) = \widehat{V}(l-1, \omega; r)$ , felveszi a racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor (3.1.6) alakját,

a faktorizációs energia pedig:

$$\varepsilon = -\omega \left(l - \frac{5}{2}\right) < E_0^-, \quad (3.1.49) \quad l > 0$$

*Az energiaspektrum ismét megegyező:*

$$E_n^- = E_n(l, 0) = \widehat{E}_n(l-1, \omega) = E_n^+, \quad (3.1.50)$$

ez a sértett SUSY esete, hasonlóképpen, mint a  $T_3$  esetben, de az argumentumban:  $l-1, \omega$

Az  $A$  operátor a megfelelő hullámfüggvényeket összekapcsolja:

$$\begin{aligned} A\Psi_n(l, r) &= (-2)(2n + 2l - 1) \frac{c_n^l}{c_n^{l-1}} \widehat{\Psi}_n(l-1, r) = \\ &= - (E_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \widehat{\Psi}_n(l-1, r). \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

a hullámfüggvény argumentumában  $l$ -ről  $(l-1)$ -re vált.

A részletes számításokat mellőzve megjegyezzük, hogy a  $k=0$  esetben a  $j=0$  esetben leírt transzformációk inverzéhez jutunk, vagyis ilyenkor  $V_+$  és  $V_-$  szerepe felcserélődik.

### **Következő eset, amikor $k \neq 0$ és $j \neq 0$**

Ebben az esetben  $V_-(r)$  és  $V_+(r)$  is a racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor (3.1.6) alakjára hozható a paraméterek megfelelő megválasztásával.

#### **$T_1 : t > 0, s = -1$**

Legyen  $t = l+1, k=1, j=1, p=2l+3, q=2l+1$ , akkor

$$V_-(r) = \widehat{V}(l, 0; r), \quad (3.1.52) \text{ a partner pedig:}$$

$$V_+(r) = \widehat{V}(l+1, \omega; r), \quad (3.1.53)$$

$$\varepsilon = \omega(l+3/2) = E_0^-, \quad (3.1.54) \text{ tehát sértetlen SUSY}$$

A spektrum:

$$E_{n+1}^- = \widehat{E}_{n+1}(l, 0) = \widehat{E}_n(l+1, \omega) = E_n^+, \text{ sértetlen} \quad (3.1.55)$$

A hullámfüggvények:

$$A\widehat{\Psi}_n(l, r) = (-\omega) \frac{c_n^l}{c_n^{l+1}} \widehat{\Psi}_{n-1}(l+1, r) = - (\widehat{E}_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \widehat{\Psi}_n(l+1, r). \quad (3.1.56)$$

Az alakinvariancia teljesül a racionális kiterjesztésű harmonikus oszcillátor potenciálra.

#### **$T_2 : t > 0, s = +1$**

ekkor a paraméterek:

Legyen  $t = -l, k=1, j=1, p=2l-1, q=2l+1$ , akkor

$$V_-(r) = \widehat{V}(l, 0; r), \text{ mint fent } T_1\text{-nél} \quad (3.1.57)$$

$$V_+(r) = \widehat{V}(l-1, \omega; r), \quad (3.1.58)$$

$$\varepsilon = \omega(l-1/2) < E_0^- \quad (3.1.59)$$

$$E_n^- = \widehat{E}_{n+1}(l, 0) = \widehat{E}_{n+1}(l-1, -\omega) = E_{n+1}^+ \quad n+1 \text{ léptetés} \quad (3.1.60)$$

$$\begin{aligned}
A\widehat{\Psi}_n(l, r) &= 2(n+1) \frac{\widehat{C}_n^l}{\widehat{C}_{n+1}^{l-1}} \widehat{\Psi}_{n+1}(l-1, r) = \\
&= (\widehat{E}_n(l, 0) - \varepsilon)^{1/2} \widehat{\Psi}_{n+1}(l-1, r). \tag{3.1.61}
\end{aligned}$$

Ugyanúgy lesz itt ismét, ahogy a  $k=j=0$  esetben, a  $T_2$  transzformáció pont  $T_1$  inverzét adja. Az  $A$  operátor hatása lényegében ugyanaz a  $T_2$  -re, mint  $A^+$  hatása  $T_1$  -re. A  $t = -l-1$  választással  $t = -1$  helyett szolgáltatja  $\chi(r)$  függvény  $T_2$  béli viselkedését,  $T_1$ -ben. A megfelelő  $W(r)$  szuperpotenciál pedig csak, az irodalomban látottak szerint, előjelben fog különbözni. Megjegyzendő, hogy ez az eredmény csak a faktorizációs energia speciális, (3.1.64) választása esetén érvényes. Más választás esetén a formalizmus jelentősen elbonyolódna.

### **$T_3: t > 0, s = +1$**

Belátható, hogy a  $V_-(r)$  és  $V_+(r)$  potenciálok nem hozhatók egyszerre a racionálisan kiterjesztett harmonikus oszcillátor (3.1.6) alakjára, ezért ilyenkor nem kapunk értelmezhető SUSY transzformációt.

Az általános (3.1.40)-(3.1.41) alakból  $V_-(r)$ -ből a harmonikus oszcillátor racionális kiterjesztése adódik itt.

$$V_-(r) = \widehat{V}(l, 0), \tag{3.1.62} \quad \text{mivel a paraméterek megválasztása:}$$

$$k=1, j=1, t=l+1, q=2l+1, \text{ így}$$

*viSSzakapjuk a centrifugális és a  $(2l+1 + \omega r^2)^{-2}$  tagot.*

$(2l+1 + \omega r^2)^{-1}$  tag és  $(p + \omega r^2)^{-1}$  nem megfelelő a várt  $4\omega$  és  $0$  választáshoz,

*A  $T_3$  típusú SUSYQM transzformáció nem szolgáltat ilyen alakú függvény mellett értelmes megoldást.*

### **$T_4: t < 0, s = -1$**

A szituáció hasonló az előző esethez

$k=1, j=1, t=-l, q=2l+1$  a tagok többsége helyesen adódik, de a

$(2l+1 + \omega r^2)^{-1}$  tag és  $(p + \omega r^2)^{-1}$  tagok elvárt együtthatói egyszerre nem reprodukálhatók.

$T_4$  transzformációban nem ad megfelelő megoldást  $\chi(r)$  függvényünkre.

*Táblázatba foglalom a kapott eredmények lényeges elemeit.*

## Speciális esetek a 6 paraméter esetén: s,t,j,k,p,q

### Összefoglalás

		$k=j=0$		$j=0, k=1$	$k=1, j=1$
$T_1$	$t = l + 1 > 0$ $s = -1$	$\varepsilon = \omega \left( t + \frac{1}{2} \right)$ $t = l + 1 > 0$ $\varepsilon, E_0$ -hoz...	0-ban nincs	nem értelmezhető	$\varepsilon = \omega \left( l + \frac{3}{2} \right)$ $\varepsilon = E_0$
$T_2$	$t = -l < 0$ $s = 1$	$\varepsilon = -\omega \left( t + \frac{1}{2} \right)$ $t = -l < 0$	0-ban divergál	<u>nem</u> <u>értelmezhető</u> $p = 2t + 1 > 0$ $t = -l$	$t = -l, k = 1,$ $j = 1, p = 2l - 1,$ $q = 2l + 1$ $\varepsilon = \omega \left( l - \frac{1}{2} \right)$ $\varepsilon < E_0$
$T_3$	$t = l + 1 > 0$ $s = 1$	$\varepsilon = -\omega \left( t + \frac{1}{2} \right)$ $t = l + 1 > 0$	egymás inverzei $T_4$ -gyel	$k = 1$ $p = 2t + 1$ ( $p > 0$ ) $t = l + 1,$ $\varepsilon$ $= -\omega \left( l + \frac{7}{2} \right)$ $\varepsilon < E_0$	nem értelmezhető
$T_4$	$t = -l < 0$ $s = -1$	$\varepsilon = -\omega \left( t - \frac{1}{2} \right)$  $t = -l < 0$  $V_-(r), V_+(r):$ (3.1.1)-lesz $V(r, l)$		$\varepsilon$ $= -\omega \left( l - \frac{5}{2} \right)$ ( $p > 0$ )  $\varepsilon < E_0$ $V_+(r) = \hat{V}(\mathbf{l}, \mathbf{r})$ (3.1.6)-lesz  $V_-(r): V(r, l)$ (3.1.1)-lesz	nem értelmezhető

**3. táblázat**

## 3.2 A PI potenciálosztály szuperszimmetrikus transzformációi

Ez az alfejezet az [2] cikkben foglalt eredmények összefoglalója. A vizsgált potenciálok ismertetése után megkonstruáljuk az 4. Táblázatban leírt négy általános szuperszimmetrikus transzformációt és vizsgáljuk hatásukat az adott potenciálokra, összefoglalva eredményeinket az 5., 6., 7. Táblázatban.

Itt egyszerre három potenciál esetében (*általánosított Pöschl-Teller* potenciál, a *Scarf I.* és a *Scarf II.* potenciálok, valamint a racionálisan kiterjesztett verzióik) vizsgálom, amit a 3.1 részben és mindhárom különböző értelmezési tartományában.

### 3.2.1 A PI potenciálosztály és racionális kiterjesztése

Itt összegyűjtöm a fejezetben tárgyalt potenciálok lényeges összefüggéseit, mind általános PI osztályú potenciálként [36,69] mind pedig a három konkrét esetre meghatározott formájukban. Azaz az *általánosított Pöschl-Teller* potenciált, a *Scarf I.* és a *Scarf II.* potenciálokat, valamint a racionálisan kiterjesztett verzióikat.

Az eljárás leírásra került a 2.2.2 fejezetben, amellyel ezen potenciálok általános alakját transzformálással nyerjük ki a *Jacobi-polinomok* és az  $X_1$  – típusú *kivételes Jacobi-polinomok* differenciálegyenletéből.

Az általános PI típusú potenciálok kifejezése a következő [36,69] :

$$V(\alpha, \beta, x) = \frac{C}{(1-z^2(x))} \left[ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) . \quad (3.2.1)$$

A kötöttállapotú hullámfüggvényeket adó alak,

$$\Psi_n(\alpha, \beta; x) = C_n^{(\alpha, \beta)} (1-z(x))^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} (1+z(x))^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} P_n^{(\alpha, \beta)}(z(x)), \quad (3.2.2)$$

és az energia sajátértékeket szolgáltató összefüggés pedig:

$$E_n = C \left( n + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right)^2 \quad (3.2.3)$$

Itt  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  egy Jacobi-polinom [8].

A megfelelő határokon a normalizálhatóság és a regularitás feltételei a határfeltételekből következnek, amelyek csak a  $z(x)$  függvény és az értelmezési

tartománya megadása után definiálhatók. A 2.2.2 majd később a 3.2.3 fejezetben három konkrét megoldás tartozik a PI potenciálok osztályába, mindegyikük eltérő értelmezési tartománnyal.

Az általánosított Pöschl-Teller potenciál  $z(x)=\cosh(ax)$  esetén választható,

$C = -a^2$  mellett, a pozitív valós tengelyen  $x \in [0, \infty[$  megfelelő  $z$ -vel,  $z \in [1, \infty[$ .

A Scarf I. potenciál az általánosított Pöschl-Teller potenciál trigonometrikus verziója véges tartományon definiált:  $z(x)=\cos(ax)$ ,  $C = a^2$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{a}]$ ,  $z \in [-1, 1]$ .

Ez a potenciál gyakran a  $x \in [-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}]$  tartományon definiált  $z(x)=\sin(ax)$  függvényből származik, de ez csupán az eltoló változata az eredeti potenciálnak.

Végül a Scarf II. potenciál a  $z(x)=i \sinh(ax)$ , behelyettesítés választásával

$C = -a^2$ ,  $x \in ]-\infty, \infty[$ , ahol  $z$  pedig a teljes képzetes tengelyen fut.

Figyelembe véve, hogy  $z(x)$  képzetes/komplex függvény, potenciál (3.2.1)

valós lesz az  $\alpha, \beta$ , megfelelő megválasztása esetén, akár csak a (3.2.2) kötöttállapotú hullámfüggvények egy jelentéktelen fázistól eltekintve.

Ezenkívül van még két potenciál, név szerint a Pöschl-Teller I. és II. potenciál, amelyeket hagyományosan különállónak tekintünk, de ezek leszarmaztathatóak a Scarf I. és Pöschl-Teller potenciálokból egy triviális  $x \rightarrow \frac{x}{2}$  leképezéssel, [5].

### **A PI potenciálosztály racionális kiterjesztésének ismertetése: [2]**

Hasonló procedurát követve, mint az előző fejezetben, most 5 egyenletből álló egyenletrendszerhez juthatunk, ha az

$X_1$ -típusú kivételes Jacobi-polinomokat feleltetjük meg

$F(z)$ -nek:

$$F(z) = P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$$

és alábbi  $Q(z)$ ,  $R(z)$  választással (92) egyenlethez:  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi-polinomokat választunk

$$\begin{aligned} \dots E - V(x) &= \frac{1}{2} \{z, x\} + \\ &+ (z'(x))^2 \left[ R(z(x)) - \frac{1}{2} \frac{dQ}{dz} - \frac{1}{4} Q^2(z(x)) \right]. \end{aligned} \quad (\text{lásd(A 9): [2]} \quad (3.2.4)$$

$$Q(z) = \frac{(\alpha+\beta)z-(\beta-\alpha)}{z^2-1} - \frac{(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)z-(\beta+\alpha)}, \quad ((A24) [2]) \quad (3.2.5)$$

$$R(z) = \frac{(\beta-\alpha)z-(n-1)(n+\alpha+\beta)}{z^2-1} - \frac{(\beta-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)z-(\beta+\alpha)}. \quad (3.2.6)$$

(99),(102)-ből és a „görög betűk kapcsolatából”:

$$E-V(x) = \left\{ \frac{z'''(x)}{2z'(x)} - \frac{3}{4} \left( \frac{z''(x)}{z'(x)} \right)^2 \right\} + \\ + \frac{1}{(1-z^2(x))^2} (z'(x))^2 \left[ \left( \left( n + \omega - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right) (1 - z^2(x)) + (1 - \omega^2 - \rho^2) - 2\omega\rho z(x) + u + v \right], \quad (3.2.7)$$

ahol a megjelenő két új tag u és v:

$$u = 2\omega \frac{z^2(x)-1}{\rho z(x)+\omega}, \quad (3.2.8) \quad \text{és} \quad v = 2(\rho^2 - \omega^2) \frac{z(x)^2-1}{(\rho z(x)+\omega)^2}. \quad (3.2.9)$$

Most 2 új lineárisan független taggal egészül ki a (110) alakú  $\varphi(z)$  függvény

$$\varphi(z(x)) = p_I (1 - z^2(x)) + p_{II} + p_{III} z(x) + p_{IV} \frac{z(x)^2-1}{\rho z(x)+\omega} + p_V \frac{(z(x)^2-1)^2}{(\rho z(x)+\omega)^2}. \quad (3.2.10)$$

A szintén új k, w tagokkal kiegészülő potenciál:

$$\widehat{V(x)} = -\frac{1}{2} \{z, x\} + \frac{c}{\varphi(z(x))} [ s_I (1 - z^2(x)) + s_{II} + s_{III} z(x) + s_{IV} k + s_V w ], \quad (3.2.11)$$

$$k = \frac{z^2(x)-1}{\rho z(x)+\omega} = \frac{u}{2\omega}, \quad (3.2.12)$$

$$w = \frac{z(x)^2-1}{(\rho z(x)+\omega)^2} = \frac{v}{2(\rho^2-\omega^2)}. \quad (3.2.13)$$

(3.2.11)-et, (3.2.7)-be helyettesítve (hasonlóan a fenti hármas egyenletcsomaghoz) az alábbi öt kulcsegyenletcsomag adódik:

$$(n - 1 + \omega + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + s_I - \frac{E}{C} p_I = 0, \quad (3.2.14) \quad \text{ahol (118)-hoz itt csak (n-1) a különbség}$$

$$1 - \omega^2 - \rho^2 + s_{II} - \frac{E}{C} p_{II} = 0, \quad (3.2.15) \quad \text{ami analóg (120)-szal}$$

$$-2\omega\rho + s_{III} - \frac{E}{C} p_{III} = 0, \quad (3.2.16), \text{ ami analóg (121)-ggyel}$$

A kiegészítő két egyenlet:

$$2\omega + s_{IV} - \frac{E}{C} p_{IV} = 0, \quad (3.2.17)$$

$$2(\rho^2 - \omega^2) + s_V - \frac{E}{C} p_V = 0, \quad (3.2.18)$$

Ennél a potenciálosztálynál az energiasajátérték alakja, ha kifejezzük a(3.2.7)-ből:

(124) -hez hasonlóan ,

ahol  $n= 1,2,\dots$ (itt eltolással  $n-1$ ,  $n=1$  esetén  $n$  független (!) )

*s megjelennek az  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi-polinomok*

az alap/kötöttállapot energiásajátérték itt  $\widehat{E}_1$  .

$$\widehat{E}_n = C \left( n - 1 + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 = C \left( n - 1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2. \quad (3.2.19)$$

A potenciál a  $s_i$ ,  $p_i$  koeficiensek értékével (3.2.11)-ből és a kötöttállapot hullámfüggvény alakja

$$\widehat{V}(\alpha, \beta; x) = \frac{C}{1-z^2(x)} \left[ \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} \left( \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \left( \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \frac{2C(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta} + \frac{2C((\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta)^2)}{[(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta]^2}, \quad (3.2.20)$$

emellett:

$$V(\alpha, \beta; x) = \frac{C}{1-z^2(x)} \left[ \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad (3.2.21)$$

$\hat{V}(\alpha, \beta; x)$  az utolsó két tagban tér el  $V(\alpha, \beta; x)$ -től.

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_n(\alpha, \beta; x) &= \\ &= \hat{C}_n^{(\alpha, \beta)} (1 - z(x))^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} (1 + z(x))^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} \left( \frac{1}{(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(z(x)) \right). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Ahol az  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi – polinom:  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  így állítható elő két klasszikus Jacobi-polinom összegeként:

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(z) &= \\ &= \left[ -\frac{(\alpha-\beta)z+\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)} - \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2n-2)} \right] P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z) + \frac{1}{(\alpha+\beta+2n-2)} P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(z). \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Bővebb vonatkozások: [32,33,56,57]

A fenti (3.2.20)-(3.2.23) eredmények szerint ugyanazon potenciálok racionálisan kiterjesztett változatai állnak rendelkezésre, ugyanazon három választási lehetőség mellett, így  $z(x)$  és  $C$  értelmezési tartománya megegyezik a klasszikus megfelelőikkel.

A (3.2.20)-nak megfelelő általános formulák a következők:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\alpha, \beta; x) &= \frac{C}{1-z^2(x)} \left[ \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \\ &\frac{2C(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta} + \frac{2C((\alpha-\beta)^2 - (\alpha+\beta)^2)}{[(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta]^2}, \end{aligned}$$

emellett:

$$V(\alpha, \beta; x) = \frac{C}{1-z^2(x)} \left[ \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} - \frac{1}{4} \right] + \frac{2Cz(x)}{1-z^2(x)} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad (3.2.21)$$

$\hat{V}(\alpha, \beta; x)$  az utolsó két tagban tér el  $V(\alpha, \beta; x)$ -től.

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_n(\alpha, \beta; x) &= \\ &= \hat{C}_n^{(\alpha, \beta)} (1 - z(x))^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} (1 + z(x))^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} \left( \frac{1}{(\alpha-\beta)z(x)+\alpha+\beta} P_n^{(\alpha, \beta)}(z(x)) \right). \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Ahol  $P_n^{\widehat{(\alpha,\beta)}}(z)$  az  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi-polinom,[23,24] ami az alábbi módon állítható elő két klasszikus Jacobi-polinom összegeként [8]:

$$P_n^{\widehat{(\alpha,\beta)}}(z) = \left[ -\frac{(\alpha-\beta)z+\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)} - \frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2n-2)} \right] P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z) + \frac{1}{(\alpha+\beta+2n-2)} P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(z) .(3.2.24)$$

A kötöttállapot energiájátértéket pedig így írhatjuk:

$$\widehat{E}_n = C \left( n - 1 + \omega + \frac{1}{2} \right)^2 = C \left( n - 1 + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right)^2 . \quad (3.2.25)$$

Figyelembe kell venni, hogy  $V(x)$  és  $\widehat{V}(x)$  három lineárisan független tagjából csak kettő marad meg,(3.2.20),(3.2.21)egyenlet, mivel a harmadik tag beépítésre kerül az E energia tagba. A fejezet lezárása előtt megjegyzem, hogy a  $P$  és  $\widehat{P}$  polinomok csak akkor alkotnak végtelen ortonormális polinomrendszert, ha  $z \in [-1,1]$ .Ezen a tartományon kívül  $z$  esetén véges ortonormált rendszert alkotnak, lásd pl. : [70].

### 3.2.2 Az általános PI potenciálosztály szuperszimmetrikus transzformációi

A hat paraméterrel megkonstruált általános  $\chi(x)$  függvény viselkedését vizsgáljuk, a lehetséges 4 transzformáció mellett, legyártva a szuperpotenciált és a partnerpotenciálokat.

Transzformáció	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
$\varepsilon$	$\varepsilon = E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$	$\varepsilon < E_0^-$
$\lim_{x \rightarrow x_-} \chi(x)$	konvergens	divergens	konvergens	divergens
$\lim_{x \rightarrow x_+} \chi(x)$	konvergens	divergens	divergens	konvergens
Spektrum megváltozása	az alapállapotenergia eltűnik	új alapállapotenergia,	nincs változás	nincs változás

**4.táblázat** Ez a táblázat az 1. táblázat általánosításának tekinthető, amennyiben a határok most 0 és végtelen helyett lehetnek mások is. Az itteni verzió alkalmazható a teljes  $x$  tengelyre és a véges tartományra is.

A megfelelő függvény alakja:

$$\chi(x) = (1 - z(x))^t (1 + z(x))^s \frac{(p+z(x))^k}{(q+z(x))^j} . \quad (3.2.2.1)$$

$$z(x) \neq -p \text{ és } z(x) \neq -q.$$

$t, s, k, j, p, q$  paraméterekkel, az 5. táblázat kikötései mellett:

A szuperpotenciál (95) a paraméterek szereplésével:

$$\widetilde{W}(x) = -\frac{d}{dx} \ln \chi(x) = \quad (3.2.2.2)$$

$$W(x) = -C^{\frac{1}{2}} (1 - z(x)^2)^{\frac{1}{2}} \left[ -\frac{t}{1-z(x)} + \frac{s}{1+z(x)} + \frac{k}{p+z(x)} - \frac{j}{q+z(x)} \right] , \quad (3.2.2.3)$$

Az általános  $V(x, \dots)$ , PI típusú potenciálból a *partnerpotenciálok* vagy a racionálisan kiterjesztett  $V(\widetilde{x}, \dots)$  formára, a paraméterekkel felírva (3.2.20)

illetve (3.2.21)-ből, (111) és (3.2.11) összefüggésekből :

$$V_{\pm}(x) = \widetilde{W}(x)^2 \pm \frac{d}{dx} \widetilde{W}(x) + \varepsilon \Rightarrow \quad (3.2.2.4)$$

Illetve lsd.(111) illetve a faktorizációs energia alakját:

$$\begin{aligned} V_{-}(x) - \varepsilon = & -C (t + s + k - j)^2 + \frac{C}{1-z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 - t - s) + \\ & + \frac{Cz(x)}{1-z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 - t + s) + \frac{Ck(k-1)(1-p^2)}{(p+z(x))^2} + \frac{Cj(j+1)(1-q^2)}{(q+z(x))^2} + \\ & + \frac{Ck}{p+z(x)} \left[ p(2t + 2s + 2k - 1) - 2t + 2s - 2j \frac{1-p^2}{q-p} \right] + \\ & + \frac{Cj}{q+z(x)} \left[ -q(2t + 2s - 2j - 1) + 2t - 2s + 2k \frac{1-q^2}{q-p} \right] , \quad (3.2.2.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{+}(x) - \varepsilon = & -C (t + s + k - j)^2 + \frac{C}{1-z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 + t + s) + \\ & + \frac{Cz(x)}{1-z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 + t - s) + \frac{Ck(k+1)(1-p^2)}{(p+z(x))^2} + \frac{Cj(j-1)(1-q^2)}{(q+z(x))^2} + \\ & + \frac{Ck}{p+z(x)} \left[ p(2t + 2s + 2k + 1) - 2t + 2s - 2j \frac{1-p^2}{q-p} \right] + \\ & + \frac{Cj}{q+z(x)} \left[ -q(2t + 2s - 2j + 1) + 2t - 2s + 2k \frac{1-q^2}{q-p} \right] . \quad (3.2.2.6) \end{aligned}$$

A faktorizációs energia alakja:

$$\varepsilon = C (t + s + k - j)^2 \quad (3.2.2.7)$$

### **Speciális próbák, a négy eset vizsgálata**

(Hasonlóan vizsgálom az eseteket, ahogyan a 3.1.2 részben, ahol a megfelelő transzformációkhoz tartozó paraméterek értékei:

$$T_1: t > 0, s = -1$$

$$T_2: t < 0, s = +1$$

$$T_3: t > 0, s = +1$$

$$T_4: t < 0, s = -1 \quad \text{voltak.}$$

Itt a paraméterek értékei az 1.,2.,3.,4. speciális esetben az **5.Táblázatban** kerül összefoglalásra a potenciálokkal és energiatagokkal.)

#### 1. speciális eset

$$j = 0, k = 0$$

(3.2.2.5) , (3.2.2.6)-ból) így egyszerűsödik az első két tagra:

$$V_-(\mathbf{x}) - \varepsilon =$$

$$-C (t + s)^2 + \frac{C}{1-z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 - t - s) + \\ + \frac{Cz(x)}{1-z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 - t + s) \quad , \quad (3.2.2.8)$$

és

$$V_+(\mathbf{x}) - \varepsilon = -C (t + s)^2 + \frac{C}{1-z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 + t + s) + \\ + \frac{Cz(x)}{1-z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 + t - s) \quad , \quad (3.2.2.9)$$

(3.2.2.4) és (3.2.2.5)-ből következik:

$$2t^2 + 2s^2 - t - s = \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{4} - \frac{1}{4} \quad , \quad (3.2.2.10)$$

(231)(3.2.2.10)

$$2t^2 - 2s^2 - t + s = 2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad . \quad (3.2.2.11)$$

A két egyenlet kivonásával és helyettesítésével kapjuk:

$$\text{I.} \quad \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = 2t(2t-1) \quad (3.2.2.12)$$

$$\text{II.} \quad \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = 2s(2s-1) \quad (3.2.2.13)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \alpha^2 - \frac{1}{4} = 4t^2 - 2t \quad (3.2.2.14)$$

$$\rightarrow \alpha^2 = 4t^2 - 2t + \frac{1}{4} = 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2, \text{ ha gyököt vonunk mindkét oldalból} \quad (3.2.2.15)$$

$$\alpha = \pm 2\left(t - \frac{1}{4}\right), \quad \alpha = 2t - \frac{1}{2} \text{ és } \alpha = -2t + \frac{1}{2} \quad (3.2.2.16), (3.2.2.17)$$

$$\left(\alpha^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \alpha \pm \frac{1}{2}\right), \text{ innen: } t = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \text{ és } t = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \quad (3.2.2.18), (3.2.2.19)$$

és hasonlóan II.-ből:

$$\beta^2 - \frac{1}{4} = 2s(2s-1) \rightarrow s = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \text{ és } s = -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}. \quad (3.2.2.20), (3.2.2.21)$$

$$E_0^- - \varepsilon = ? \quad \varepsilon = C(t+s)^2 \quad \text{lsd. 5.táblázat} \quad (3.2.2.22)$$

$V_-(x)$  és  $V_+(x)$  az összefüggésekből  $V(\alpha, \beta; x)$  vagy  $\hat{V}(\alpha, \beta; x)$ -re vezet, foglaljuk táblázatba az eredményeket:

$$\varepsilon = C(t+s)^2$$

Az eredményeket táblázatban összefoglalva

## Összefoglalva az eredményeket az 5. táblázatban

$j, k$	$V_-(x)$	$t$	$s$	$p$	$q$	$V_+(x)$	$\varepsilon$	$E_0^- - \varepsilon$
0,0	$V(\alpha, \beta; x)$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$V(\alpha + 1, \beta + 1, x)$	$C(\frac{\alpha + \beta + 1}{2})^2$	0
		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$V(\alpha - 1, \beta - 1, x)$	$C(\frac{-\alpha - \beta + 1}{2})^2$	$C(\alpha + \beta)$
		$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$V(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$C(\frac{\alpha - \beta + 1}{2})^2$	$C\beta(\alpha + 1)$
		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$V(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$C(\frac{-\alpha + \beta + 1}{2})^2$	$C\alpha(\beta + 1)$
0,1	$V(\alpha, \beta; x)$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{-\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta + 2}$		$\hat{V}(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$C(\frac{\alpha - \beta + 3}{2})^2$	$C(\alpha + 2)(\beta - 1)$
		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta - 2}$		$\hat{V}(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$C(\frac{-\alpha + \beta + 3}{2})^2$	$C(\alpha - 1)(\beta + 2)$
1,0	$\hat{V}(\alpha, \beta; x)$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{-\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$	$V(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$C(\frac{\alpha - \beta - 1}{2})^2$	$C\alpha(\beta + 1)$
		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$	$V(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$C(\frac{-\alpha + \beta - 1}{2})^2$	$C\beta(\alpha + 1)$
1,1	$\hat{V}(\alpha, \beta; x)$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha - \beta}$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$	$\hat{V}(\alpha + 1, \beta + 1, x)$	$C(\frac{\alpha + \beta + 1}{2})^2$	0
		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{-\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - \beta}$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$	$\hat{V}(\alpha - 1, \beta - 1, x)$	$C(\frac{-\alpha - \beta + 1}{2})^2$	$C(\alpha + \beta)$

5.táblázat

**Alább vizsgáljuk meg a további speciális eseteket**

### 2.speciális eset

$j=0, k \neq 0$

ha  $k = 1,$

$$\begin{aligned}
 V_-(x) - \varepsilon &= -C \frac{(t + s + 1)^2}{1 - z^2(x)} + \frac{C}{1 - z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 - t - s) + \\
 &+ \frac{Cz(x)}{1 - z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 - t + s) + \\
 &+ \frac{C}{p + z(x)} [p(2t + 2s + 1) - 2t + 2s], \tag{3.2.2.23}
 \end{aligned}$$

és

$$V_-(x) = \frac{C}{1 - z^2(x)} (2t^2 + 2s^2 - t - s) + \frac{Cz(x)}{1 - z^2(x)} (2t^2 - 2s^2 - t + s) +$$

$$+ \frac{C}{p+z(x)} [p(2t + 2s + 1) - 2t + 2s]. \quad (3.2.2.24)$$

tehát:

$$V_-(\mathbf{x}) = V(\alpha, \beta; x) \quad \text{és} \quad (3.2.2.25)$$

$$V_+(\mathbf{x}) = \hat{V}(\alpha, \beta; x) \quad (3.2.2.26)$$

p tagból:

$$p = \frac{2t-2s}{2t+2s+1}, \quad (248) \text{ valamint a faktorizációs energiátag:}$$

$$\varepsilon = C(t + s + 1)^2, \quad (3.2.2.27)$$

az **5. táblázat** j=0, k=1 esete

### 3. speciális eset:

$$j \neq 0, k = 0$$

hasonlóan:

$$q = \frac{2t-2s}{2t+2s-1}, \quad (3.2.2.28)$$

p-hez képest csak egy nevezőbeli előjelben jelentkezik különbség

$$\varepsilon = C(t + s - 1)^2, \quad (3.2.2.29)$$

itt pedig -1 szerepel a fenti +1.

Az **5. táblázat** j=1, k=0 sora,

a táblázatban összefoglalom az eredményeket.

### 4. speciális eset:

$$j \neq 0, k \neq 0$$

A fenti **5. táblázat** j=k=1 esete.

A faktorizációs energia.  $t = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$  és  $t = -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$  és hasonlóan

$$s = \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \quad \text{és} \quad s = -\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}.$$

$$\varepsilon = C(t + s)^2. \quad (3.2.2.30)$$

$$V_-(x) = \hat{V}(\alpha, \beta; x) \quad (3.2.2.31)$$

A faktorizációs energia és a potenciálpárok felveszik megfelelő formájukat.

### 3.2.3 Alkalmazás a PI potenciálosztály három tagjára

Behelyettesítjük a három különböző  $z(x)$  függvényt az általános képletekbe és megvizsgáljuk az  $\alpha, \beta$  paraméterekkel a peremfeltételeket.

Keresve a potenciálok alakját, a kötöttállapotú sajátfüggvényeket és az energiasajátértékeket.

(3.2.20)-ból a nevezők nem lehetnek nullák, ezért:

$$(\alpha - \beta)z(x) + (\alpha + \beta) \neq 0 \quad \text{ahol } x \in (x_-, x_+) \quad (3.2.2.32)$$

$$z(x) \neq \frac{-(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta} = \frac{-(\alpha+\beta)}{-(\beta-\alpha)} \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}, \quad \alpha = 2t - \frac{1}{2} \text{ vagy } \alpha = -2t + \frac{1}{2} \text{ és}$$

$$\beta = 2s - \frac{1}{2} \text{ vagy } \beta = -2s + \frac{1}{2},$$

például első esetben, nevezőben:  $s \neq t$

$$z(x) \neq \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} = \frac{2t-\frac{1}{2}+2s-\frac{1}{2}}{2s-\frac{1}{2}-2t+\frac{1}{2}} \neq \frac{2t+2s-1}{2s-2t} = \frac{2(t+s-\frac{1}{2})}{2(s-t)} \neq \frac{t+s-\frac{1}{2}}{s-t}. \quad \text{ha } t=0, s=1, \quad (3.2.2.33)$$

$z(x) \neq \frac{1}{2}, z(x) \neq \frac{1}{2} \dots$  nem valósulhat meg.

**Tekintsük az alábbi lehetséges eseteket az alábbi táblázatba foglaltan**

**6.táblázat A három potenciál kulcsértékei**

<b>z(x)</b>	<b>C</b>	<b><math>x_-</math></b>	<b><math>x_+</math></b>	<b><math>z_-</math></b>	<b><math>z_+</math></b>	<b>p,q</b>
<b>cosh (x)</b>	$-a^2$	0	$\infty$	1	$\infty$	$-1 < p, q$
<b>cos (x)</b>	$a^2$	0	$\frac{\pi}{a}$	1	-1	$p, q < -1, 1 < p, q$
<b>i sinh (x)</b>	$-a^2$	$-\infty$	$\infty$	$-\infty$	$\infty$	n.a.

a következő összefüggésekhez vezessük be [2], [8] – ből A és B-t

$$A(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2t^2 + 2s^2 - t - s, \quad (3.2.2.34)$$

$$B(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{2t^2 - 2s^2 - t + s}{2}. \quad (3.2.2.35)$$

## **$z(x) = \cosh(ax)$ eset : Az általánosított Pöschl-Teller Potenciál és racionális kiterjesztése**

A három különböző  $z(x)$  közül a legrészletesebben ezt tárgyalom: ([2] 4. fejezet) Ez analóg a 3.1 részben tárgyalt radiális potenciállal, ami az értelmezési tartományt illeti. A többi  $z(x)$  -hez tartozó potenciálok részleteit ez alapján reprodukálhatja az olvasó.

Ezzel a  $z(x)$  választással a PI osztályú potenciál az ált.P\_T potenciál:

G index: g\_eneralized Pöschl-Teller ---

*\*PT potenciál= általánosított Pöschl-Teller Potenciál*

$$V_G(\alpha, \beta, x) = \frac{a^2}{\sinh^2(ax)} A(\alpha, \beta) + \frac{2a^2 \cosh(ax)}{\sinh^2(x)} B(\alpha, \beta), \quad (3.2.2.36)$$

A kötöttállapotú hullámfüggvény:

$$\Psi_n(\alpha, \beta, x) = C_n^{(\alpha, \beta)} (\cosh(ax) - 1)^{\frac{\alpha-1}{2}} (\cosh(ax) + 1)^{\frac{\beta-1}{2}} P_n(\cosh(x)), \quad (3.2.2.37)$$

és az energiasajátérték:

$$E_n = -a^2 \left( n + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right)^2. \quad (3.2.2.38)$$

### **A racionálisan kiterjesztett Pöschl-Teller potenciál:**

$$\widehat{V}_G(\alpha, \widehat{\beta}, x) = V_G(\alpha, \beta, x) - \frac{2a^2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta) \cosh(ax) + \alpha + \beta} - \frac{2a^2((\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2)}{[(\alpha-\beta) \cosh(ax) + \alpha + \beta]^2}, \quad (3.2.2.39)$$

és a kötöttállapotú hullámfüggvény:

$$\widehat{\Psi}_n(\alpha, \beta, x) = C_n^{(\alpha, \beta)} (\cosh(ax) - 1)^{\frac{\alpha-1}{2}} (\cosh(ax) + 1)^{\frac{\beta-1}{2}} * \\ * [(\alpha - \beta) \cosh(ax) + \alpha + \beta]^{-1} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cosh(x)), \quad (3.2.2.40)$$

Az energiasajátérték:

$$\widehat{E}_n = -\alpha^2 \left( (n-1) + \frac{\alpha+\beta+1}{2} \right)^2 \quad (3.2.2.41)$$

( $E_n$  -től különbözik (n-1)-ben), h n=1 ugyanaz

korábbról a „görög-latin” kapcsolat:

$$\alpha = 2t - \frac{1}{2} \text{ vagy } \alpha = -2t + \frac{1}{2} \text{ és}$$

$$\beta = 2s - \frac{1}{2} \text{ vagy } \beta = -2s + \frac{1}{2}, \text{ illetve A, B tagokkal:}$$

$$(2t=A-B \text{ és } 2s=A+B)$$

(3.2.2.12), (3.2.2.13)-ből:

$$\alpha^2 - \frac{1}{4} = 2t(2t-1) = (A-B)((A-B)-1) \rightarrow \alpha^2 = (A-B)^2 - (A-B) + \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\alpha^2 = \left( (A-B) - \frac{1}{2} \right)^2 \text{ így gyökvonással, pozitív gyökre:}$$

$$\alpha = (A-B) - \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad (3.2.2.42)$$

-----

$$\beta^2 = \left( (A+B) - \frac{1}{2} \right)^2 \text{ így gyökvonással szintén:}$$

$$\text{III. } \beta = (A+B) - \frac{1}{2} . \quad (3.2.2.43)$$

-----

Az energiasajátértékből:

$$\alpha + \beta + 1 < -2n \text{ GPT esetben} \quad (3.2.2.44)$$

$$\alpha + \beta + 1 < -2(n+1) \text{ rac.kiterjesztett verziónál}$$

n= 0 esetben

$$\alpha + \beta + 1 < 0 \quad (3.2.2.45)$$

$$V_G(\alpha, \beta, x) \rightarrow \pm \frac{1}{2} < \alpha \quad (3.2.2.46)$$

$$\widehat{V}_G(\alpha, \widehat{\beta}, x) \rightarrow -1 < \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} . \quad (3.2.2.47)$$

fentiek kombinációjából adódnak a feltételek:

$$0 < -(\alpha + \beta + 1) + 1 \pm 1 < \alpha - \beta, \quad 1 < \alpha . \quad (3.2.2.48)$$

## 7. Táblázatban az eredmények összesítése

**A PT potenciál és a racionálisan kiterjesztett potenciál transzformációi:**

**7.táblázat. Az általánosított Pöschl-Teller  $V_G(\alpha, \beta, x)$  potenciál és  $\widehat{V}_G(\alpha, \beta, x)$  racionális kiterjesztésének SUSY transzformációi. / G=generalized.../**

$j, k$	$V_+(x)$	$\alpha$	$t$	$s$	$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}, V_-(x)$	$\frac{\alpha'+\beta'}{\alpha'-\beta'}, V_+(x)$	$E_0^- - \varepsilon$	$T_i$
0,0	$V_G(\alpha+1, \beta+1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			0	$T_1$
	$V_G(\alpha-1, \beta-1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$-a^2(\alpha+\beta) > 0$	$T_2$
	$V_G(\alpha+1, \beta-1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$a^2(\alpha+1)(-\beta) > 0$	$T_3$
	$V_G(\alpha-1, \beta+1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$a^2(\beta+1)(-\alpha) > 0$	$T_4$
0,1	$\widehat{V}_G(\alpha+1, \beta-1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta+2} > -1$	$a^2(\alpha+2)(1-\beta) > 0$	$T_3$
	$\widehat{V}_G(\alpha-1, \beta+1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta-2} > -1$	$a^2(1-\alpha)(\beta+2) > 0$	$T_4$
1,0	$V_G(\alpha+1, \beta-1, x)$	$> 0$ $> -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} > -1$		$a^2(-\alpha)(\beta+1)$	$T_3$
	$\widehat{V}_G(\alpha-1, \beta+1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} > -1$		$a^2(\alpha+1)(-\beta) > 0$	$T_4$
1,1	$V_G(\alpha+1, \beta+1, x)$	$> 0$ $> -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} > -1$	$\frac{\alpha+\beta+2}{\alpha-\beta} > -1$	0	$T_1$
	$\widehat{V}_G(\alpha-1, \beta-1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} > -1$	$\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha-\beta} > -1$	$a^2(\alpha+\beta) > 0$	$T_2$

**Lássuk alább, részleteiben hogyan jutunk ezekhez az eredményekhez:**

**A számítások részletei az általánosított Pöschl-Teller potenciál, valamint a racionálisan kiterjesztett formája esetében, a 7. táblázathoz.**

Itt a [2] közleményünkben megjelent esetet tárgyalom részletesen

Kiindulás a  $\chi(x)$  függvény és a hat paraméter definiálása,  $x \in ]0; +\infty[$ .

$$\chi(x) = (1 - z(x))^t (1 + z(x))^s \frac{(p+z(x))^k}{(q+z(x))^j}, \quad (3.2.2.49)$$

*Követelmények:*

Megfelelő  $\varepsilon$  megválasztása mellett adja vissza a Pöschl-Teller potenciál alapállapotú hullámfüggvényét, illetve a nem fizikai megoldásokat paramétertranszformációkkal külön-külön le lehessen írni. Az előállított függvényalakban szereplő további tagok a racionálisan kiterjesztett potenciál visszanyerése miatt kell jelen legyen. Ezeket a tagokat a 2024-es [2] cikkben szereplő  $\chi(x)$  függvénnyel analóg módon állítjuk elő.

A vizsgálandó esetben a függvényünk alakja:

$$\chi(x) = (\cosh(ax) - 1)^t (1 + \cosh(ax))^s \frac{(p+\cosh(ax))^k}{(q+\cosh(ax))^j}. \quad (3.2.2.50)$$

$k=j=0$  esetben az általánosított Pöschl-Teller potenciál alapállapotú hullámfüggvényét a megfelelő  $t$  és  $s$  paraméterek megválasztása esetében valóban visszkapjuk. Mivel  $\cosh(ax)$   $x=0$  esetben 1-et ad, így a zéró közelében való viselkedést a  $t$  paraméter segítségével tudjuk meghatározni. A végtelenben a kitevők összege,  $t+s+k-j$  szabja meg a függvény viselkedését. A változótranszformációknál  $t, s, k, j$  paramétereket alapesetben pozitívnak választom!

Elsőként a szuperpotenciál előállítására van szükség:

$$W(x) = -\frac{\chi'(x)}{\chi(x)}, \quad (3.2.2.51)$$

$$W(x) = -a \sinh(ax) [t (\cosh(ax) - 1)^{-1} + s (1 + \cosh(ax))^{-1} + k (p + \cosh(ax))^{-1} - j (q + \cosh(ax))^{-1}]. \quad (3.2.2.52)$$

A partnerpotenciálok pedig:

Jelölésben legyen azonos:  $\widetilde{W} \equiv W$

$$V_{\mp}(x) = \widetilde{W}^2(x) \mp \widetilde{W}'(x), \quad (3.2.2.53)$$

A  $V_-(x) = \widetilde{V}(x) - \varepsilon$  összefüggés miatt, ahol  $\widetilde{V}(x)$  a *kiindulási* potenciál, hogy jelölésben legyen egyszerűbb  $V(x) \equiv \widetilde{V}(x)$ , ami most az általánosított

Pöschl-Teller potenciál vagy annak kiterjesztett változata. Használjuk fel az alábbi *azonosságokat*, cél konstansok behozatala, hogy azonosíthatóvá váljon:  $\epsilon$ .

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)-1)^2} = \frac{(\cosh(ax)-1)(\cosh(ax)+1)}{(\cosh(ax)-1)(\cosh(ax)-1)} = \frac{(\cosh(ax)+1)}{(\cosh(ax)-1)} = \frac{(\cosh(ax)+1)^2}{(\cosh^2(ax)-1)} =$$

$$= \frac{\cosh^2(ax)-1+2\cosh(ax)+2}{(\cosh^2(ax)-1)} = 1 + 2\coth(ax)\operatorname{cosech}(ax) + (2\operatorname{cosech}(ax))^2. \quad (3.2.2.54)$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)+1)^2} = 1 - 2\coth(ax)\operatorname{cosech}(ax) + 2\operatorname{cosech}^2(ax), \quad (3.2.2.55)$$

$$\frac{\cosh(ax)}{(\cosh(ax)-1)} = \frac{\cosh(ax)(\cosh(ax)+1)}{\sinh^2(ax)} = \frac{\sinh^2(ax)+1+\coth(ax)}{\sinh^2(ax)} =$$

$$= 1 + \operatorname{cosech}^2(ax) + \coth(ax)\operatorname{cosech}(ax), \quad (3.2.2.56)$$

több lépéssel kapjuk

$$\frac{\cosh(ax)}{(\cosh(ax)-1)} = 1 + \operatorname{cosech}^2(ax) - \coth(ax)\operatorname{cosech}(ax)., \quad p, q \text{ paraméterekkel:}$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)-1)(\cosh(ax)+p)} = \frac{\cosh(ax)+p-p+1}{(\cosh(ax)+p)} = 1 - \frac{p-1}{p+\cosh(ax)}, \quad (3.2.2.57)$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)-1)(\cosh(ax)+q)} = \dots = 1 - \frac{q-1}{q+\cosh(ax)}, \quad (3.2.2.58)$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)+1)(\cosh(ax)+p)} = \dots = 1 - \frac{p}{p+\cosh(ax)}. \quad (3.2.2.59)$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(\cosh(ax)+1)(\cosh(ax)+q)} = \dots = 1 - \frac{q}{q+\cosh(ax)}, \quad (3.2.2.60)$$

$$\frac{\cosh(ax)}{(\cosh(ax)+p)} = \frac{\cosh(ax)+p-p}{\cosh(ax)+p} = 1 - \frac{p}{p+\cosh(ax)}. \quad (3.2.2.61)$$

$$\frac{\cosh(ax)}{(\cosh(ax)+q)} = 1 - \frac{q}{q+\cosh(ax)}. \quad (3.2.2.62)$$

A partnerpotenciálok alakja:

$$\begin{aligned} V_{\mp}(x) - \varepsilon = & a^2 \sinh^2(ax) [ t^2(\cosh(ax) - 1)^{-2} + s^2(1 + \cosh(ax))^{-2} + k^2(p + \cosh(ax))^{-2} + \\ & j^2(q + \cosh(ax))^{-2} + 2st(\cosh(ax) - 1)^{-1}(1 + \cosh(ax))^{-1} + 2kt(\cosh(ax) - \\ & 1)^{-1}(p + \cosh(ax))^{-1} - 2tj(\cosh(ax) - 1)^{-1}(p + \cosh(ax))^{-1} + 2sk(1 + \\ & \cosh(ax))^{-1}(p + \cosh(ax))^{-1} - 2sj(1 + \cosh(ax))^{-1}(p + \cosh(ax))^{-1} - \\ & - 2jk(p + \cosh(ax))^{-1}(p + \cosh(ax))^{-1} ] \pm \\ & \pm a^2 \cosh(ax) [ t(\cosh(ax) - 1)^{-1} + s(1 + \cosh(ax))^{-1} + k(p + \cosh(ax))^{-1} - \\ & - j(q + \cosh(ax))^{-1} ] \\ & \pm a^2 \sinh^2(ax) [ -t(\cosh(ax) - 1)^{-2} - s(1 + \cosh(ax))^{-2} - k(p + \cosh(ax))^{-2} - \\ & - j(q + \cosh(ax))^{-2} ]. \end{aligned} \quad (3.2.2.63)$$

\*  $\operatorname{cosech}(ax) = \frac{1}{\sinh(ax)}$  azonosságokkal átcsoportosítva a tagokat, kapjuk:

$$\begin{aligned} V_{\mp}(x) - \varepsilon = & a^2 ( t^2 \mp t + s^2 \mp s + 2st + 2kt - 2tj + 2sk - 2sj \pm t \pm s \pm k \mp j ) \\ & + a^2 ( 2t^2 \mp 2t - 2s^2 \pm 2s \pm t \mp s ) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) \\ & + a^2 ( 2t^2 + 2s^2 \mp 2t \mp 2s \pm t \pm s ) \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + a^2 ( k^2 \mp k ) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))^2} + a^2 ( j^2 \mp j ) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))^2} + \\ & + a^2 (-2kj) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))(q+\cosh(ax))} + a^2 ( (-2kt(p-1) - \\ & - 2sk(p+1) \mp kp ) ) \frac{1}{p+\cosh(ax)} + \\ & + a^2 ( (-2jt(q-1) - 2js(q+1) \pm jq ) ) \frac{1}{q+\cosh(ax)}. \end{aligned} \quad (3.2.2.64)$$

Alábbi azonosságokkal tovább alakítva kapjuk  $V_{\mp}(x) - \varepsilon$  precízebb alakját:

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))^2} = 1 - \frac{2p}{p+\cosh(ax)} + \frac{p^2-1}{(p+\cosh(ax))^2} \text{ és} \quad (3.2.2.65)$$

$$\frac{\sinh^2(ax)}{(q+\cosh(ax))^2} = 1 - \frac{2q}{q+\cosh(ax)} + \frac{q^2-1}{(q+\cosh(ax))^2} ; \quad (3.2.2.66)$$

$$V_{\mp}(x) - \varepsilon =$$

$$\begin{aligned} & a^2 ( t^2 \mp t + s^2 \mp s + 2st + 2kt + 2sk \pm t \pm s \pm k + k^2 \mp k ) + \\ & + a^2 (2t^2 \mp 2t - 2s^2 \pm 2s \pm t \mp s) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) \\ & + a^2 (2t^2 + 2s^2 \mp 2t \mp 2s \pm t \pm s) \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + a^2 (k^2 \mp k) \frac{p^2-1}{(p+\cosh(ax))^2} + a^2 (j^2 \mp j) \frac{q^2-1}{(q+\cosh(ax))^2} + \\ & + a^2 (-2kj) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))(q+\cosh(ax))} + a^2 ((-2kt(p-1) - \\ & - 2sk(p+1) \mp kp - 2p(k^2 \mp k)) \frac{1}{p+\cosh(ax)} + \\ & + a^2 ((-2jt(q-1) - 2js(q+1) \pm jq - 2(j^2 \pm j)) \frac{1}{q+\cosh(ax)} . \end{aligned} \quad (3.2.2.67)$$

## Speciális esetek

$$k=0, j=0$$

Az alkalmas parametrizált függvény, a szuperpotenciál és a partnerpotenciálok:

$$\chi(x) = (\cosh(ax) - 1)^t (1 + \cosh(ax))^s, \quad (3.2.2.68)$$

$$\begin{aligned} W(x) &= -a \sinh(ax) [t (\cosh(ax) - 1)^{-1} + s (1 + \cosh(ax))^{-1}] = \\ &= -at (\operatorname{cosech}(ax) + \coth(ax)) - as (\coth(ax) - \operatorname{cosech}(ax)) = \\ &= -a(t-s) \operatorname{cosech}(ax) - a(s+t) \coth(ax). \end{aligned} \quad (3.2.2.69)$$

$$\begin{aligned}
V_{\mp}(x) - \varepsilon = & \\
& a^2 [t^2 + s^2 + 2st] + a^2 [2t^2 \mp t - 2s^2 \pm s] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\
& + a^2 [2t^2 + 2s^2 \mp t \mp s] \operatorname{cosech}^2(ax). \quad (3.2.2.70)
\end{aligned}$$

A partnerek külön-külön:

$$\begin{aligned}
V_{-}(x) - \varepsilon = & \\
& a^2 [t^2 + s^2 + 2st] + a^2 [2t^2 - t - 2s^2 + s] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\
& + a^2 [2t^2 + 2s^2 - t - s] \operatorname{cosech}^2(ax). \quad (3.2.2.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{+}(x) - \varepsilon = & \\
& a^2 [t^2 + s^2 + 2st] + a^2 [2t^2 + t - 2s^2 - s] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\
& + a^2 [2t^2 + 2s^2 + t + s] \operatorname{cosech}^2(ax). \quad (3.2.2.72)
\end{aligned}$$

Összevetve.....a kiinduló  $V(A, B, \Delta, x)$  alakjával  $V_{-}(x) - \varepsilon$ , adódik, kapjuk  $\varepsilon$  értékét, a konstans energia tagot, konstansmentes választással:  $\Delta = 0$

$$\begin{aligned}
V(A, B, \Delta, x) = & A^2 + (A^2 + B^2 + aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - \\
& - B(2A + a) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \Delta. \quad (3.2.2.73)
\end{aligned}$$

$$E_n = A^2 - (A - na)^2 + \Delta, \quad (3.2.2.74)$$

ahol :  $A = a\omega, B = a\lambda$ .

$A^2$  eltűnik elől

Igy  $V(A, B, 0, x)$  alakja és spektruma:

$$\begin{aligned}
V(A, B, 0, x) = & (A^2 + B^2 + aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - \\
& - B(2A + a) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax). \quad (3.2.2.75)
\end{aligned}$$

spektruma:

$$E_n = -(A - na)^2. \quad (3.2.2.76)$$

Nézzük alakjából az  $\varepsilon$  értékét :

$$V_-(x) - \varepsilon = \dots$$

$$\varepsilon = -a^2[t^2 + s^2 + 2st] = -a^2(t + s)^2. \quad (3.2.2.77)$$

$V(A, B, \Delta, x)$  és  $V_-(x)$  paramétereinek összehasonlítása:

$$1.) a^2[2t^2 - t - 2s^2 + s] = -B(2A + a) = -a^2\lambda(2\omega + 1), \quad (3.2.2.78)$$

$$2.) a^2[2t^2 - t + 2s^2 - s] = (A^2 + B^2 + aA) = a^2(\omega^2 + \lambda^2 + \omega), \quad (3.2.2.79)$$

Összeadva a fenti egyenleteket, kapjuk:

$$2t(2t - 1) = (\omega - \lambda)(\omega - \lambda + 1) \rightarrow t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2}, \quad (3.2.2.80)$$

$$2t(2t - 1) = (-\omega + \lambda)(\lambda - \omega - 1) \rightarrow t = \frac{\lambda - \omega}{2}, \quad (3.2.2.81)$$

Második egyenletből kivonva az elsőt:

$$2s(2s - 1) = (\omega + \lambda)(\omega + \lambda + 1) \rightarrow s = \frac{\omega + \lambda + 1}{2}, \quad (3.2.2.82)$$

$$2s(2s - 1) = -(\omega + \lambda)(\lambda + \omega + 1) \rightarrow s = -\frac{(\lambda + \omega)}{2}. \quad (3.2.2.83)$$

A paraméterek lehetnek:

$$1. t = \frac{\lambda - \omega}{2}, \quad 2. t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2}$$

$$2. s = -\frac{(\lambda + \omega)}{2}, \quad 4. s = \frac{\omega + \lambda + 1}{2}$$

A választott paraméterek kombinációk fognak megfelelni az egyes transzformációknak.

A kötöttállapotú hullámfüggvény alakja:

$$n=0,1,2,\dots$$

$$\Psi_0(\lambda, \omega, x) = (\cosh(ax) - 1)^t (\cosh(ax) + 1)^s, \quad (3.2.2.84)$$

Az 1. és 3. esetben:

$$\Psi_0(\lambda, \omega, x) = (\cosh(ax) - 1)^{\frac{\lambda-\omega}{2}} (\cosh(ax) + 1)^{-\frac{(\lambda+\omega)}{2}}, \quad (3.2.2.85)$$

valós megoldást ad és normálható alábbi feltételek teljesülésével:

$$\frac{\lambda-\omega}{2} > 1; \frac{\lambda-\omega}{2} + \frac{(-\lambda-\omega)}{2} = -\omega < 0 \quad (3.2.2.86)$$

$$\omega > 0; \frac{\lambda-\omega}{2} > 1, \text{ azaz } \lambda > 0 \text{ (itt } > 2) \text{ és } \lambda > \omega + 2. \quad (3.2.2.87)$$

**Tekintsük a 4 esetet  $\chi(x) = (\cosh(ax) - 1)^t (1 + \cosh(ax))^s$  függvényre**

### 1.eset.....

Ha  $\chi(x)$  normálható az origóban, nullában és a végtelenben is. Ekkor teljesülnie kell:  $t$  pozitív,  $s+t$  összeg pedig negatív  $t > 1$  és  $s+t < 0$ .

A fenti 4 esetből ez az 1. és a 3. eset

$$t = \frac{\lambda-\omega}{2}; s = \frac{-\omega-\lambda}{2}$$

Ebben az esetben  $V_-(x)$  és  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \\ &- a^2 \lambda [2\omega + 1] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2 [\lambda^2 + \omega(\omega + 1)] \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &= (A^2 + B^2 + aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - B(2A+a) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax). \quad (3.2.2.88) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = -a^2 (t + s)^2 =$$

$$\varepsilon = -a^2 (-\omega)^2 = -A^2 . \quad (3.2.2.89)$$

Igy megkaptuk a kötöttállapot energiát és valóban *visszakaptuk a Pöschl-Teller potenciált.*

A partnerpotenciál :

$$V_+(x) = ? \quad A = a\omega, B = a\lambda.$$

$$\begin{aligned} V_+(x) &= -a^2 \lambda [2\omega - 1] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2 [\lambda^2 + \omega(\omega - 1)] \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &(A^2 + B^2 - aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - B(2A - a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax). \end{aligned} \quad (3.2.2.90)$$

$$V_+(x) = V(A - a, B, 0, x) \quad \text{Ez a } T_1 \text{ transzformáció ([1]1. táblázat)}$$

Nézzük meg az  $A$  operátor hatását a  $\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x)$  hullámfüggvényre

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \left( \frac{d}{dx} + W(x) \right) \Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \quad (3.2.2.91)$$

$$\left( \frac{d}{dx} - \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \right) \Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \frac{d}{dx} \Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) - \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} \Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x), \quad (3.2.2.92)$$

$T_1$  transzformációban Jacobi-polinommal:

$$\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \chi(x) \mathbf{P}(\cosh(ax))_{n+1}^{(2t-\frac{1}{2}, 2s-\frac{1}{2})} \quad (3.2.2.93)$$

Igy, ezzel a fenti egyenletet folytatva:

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \chi(x) \frac{d}{dx} \mathbf{P}(\cosh(ax))_{n+1}^{(2t-\frac{1}{2}, 2s-\frac{1}{2})} = \quad (3.2.2.94)$$

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \chi(x) \frac{d}{d \cosh(ax)} \mathbf{P}(\cosh(ax))_{n+1}^{(2t-\frac{1}{2}, 2s-\frac{1}{2})} \frac{d \cosh(ax)}{dx}, \quad (3.2.2.95)$$

Jacobi-polinomok esetén érvényes alábbi differenciális összefüggést kell felhasználni:

$$\frac{d}{d(f(ax))} \mathbf{P}(f(ax))_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) \mathbf{P}(f(ax))_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}, \quad (3.2.2.96)$$

Jelen esetben:

$$\begin{aligned} A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) &= \chi(x) \frac{d}{d \cosh(ax)} \mathbf{P}(\cosh(ax))_{n+1}^{(2t-\frac{1}{2}, 2s-\frac{1}{2})} \frac{d \cosh(ax)}{d x} = \\ &= \frac{1}{2} a(n - 2\omega + 1) (\cosh(ax) - 1)^{\frac{\lambda-\omega}{2}} \\ &(\cosh(ax) + 1)^{\frac{-\lambda-\omega}{2}} \sinh(ax) \mathbf{P}(\cosh(ax))_n^{(2t+\frac{1}{2}, 2s+\frac{1}{2})}, \end{aligned} \quad (3.2.2.97)$$

felhasználva:

$$\sinh(ax) = (\cosh(ax) - 1)^{\frac{1}{2}} (\cosh(ax) + 1)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.2.98)$$

$$\begin{aligned} A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) &= \frac{1}{2} a(n - 2\omega + 1) (\cosh(ax) - 1)^{\frac{\lambda-\omega+1}{2}} * \\ &(\cosh(ax) + 1)^{\frac{-\lambda-\omega+1}{2}} \mathbf{P}(\cosh(ax))_n^{(\lambda-(\omega-1)-\frac{1}{2}, -\lambda-(\omega-1)-\frac{1}{2})}, \end{aligned} \quad (3.2.2.99)$$

így:

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \frac{1}{2} a(n - 2\omega + 1) \Psi_n(\lambda, \omega - 1, x), \quad (3.2.2.100)$$

alábbi alakban várjuk a megoldást:

$$\Psi_n^+(x) = (E_{n+1}^-)^{-1} A\Psi_{n+1} A\Psi_{n+1}^-(x) \quad (3.2.2.101)$$

ezért a kapott eredményt meg kell szorozni még  $\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x)$  és  $\Psi_n(\lambda, \omega - 1, x)$  függvények normálási faktoraival:

Lásd: [7][8]

$$\Lambda_n^{(\lambda, \omega)} = 2^\omega \left( \frac{n!(2\omega - 2n)\Gamma(\lambda + \omega - n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda - \omega + n + \frac{1}{2})\Gamma(2\omega - n + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.2.102)$$

alakja

Ekkor  $A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \dots$

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = \frac{1}{2} a(n - 2\omega + 1) \frac{\Lambda_{n+1}^{(\lambda, \omega)}}{\Lambda_n^{(\lambda, \omega-1)}} \Psi_n(\lambda, \omega - 1, x), \quad (3.2.2.103)$$

és

$$\frac{\Lambda_{n+1}^{(\lambda, \omega)}}{\Lambda_n^{(\lambda, \omega-1)}} = 2 \left( (n+1) \frac{\Gamma(2\omega-n-1)}{\Gamma(2\omega-n)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.2.104)$$

Gamma függvényre ismert:

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad ([7] 773.o.)\text{-ből} \quad (3.2.2.105)$$

$$\begin{aligned} A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) &= a \left( (n+1) - 2\omega \right) \left( (n+1) \frac{1}{(2\omega-n-1)} \right)^{-\frac{1}{2}} \Psi_n(\lambda, \omega-1, x) = \\ &= -\left( a^2(n+1)(2\omega - (n+1)) \right)^{\frac{1}{2}} \Psi_n(\lambda, \omega-1, x). \end{aligned} \quad (3.2.2.106)$$

Konstansátalakítással:

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = -\left( a^2\omega^2 - (\omega - a^2(n+1))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Psi_n(\lambda, \omega-1, x), \quad (3.2.2.107)$$

a korábbi alakokkal összehasonlítva:

$$E_n = -(A - na)^2 \quad (3.2.2.108)$$

és

$$\varepsilon = -a^2[t^2 + s^2 + 2st] = -a^2(t+s)^2 \rightarrow$$

$$A\Psi_{n+1}(\lambda, \omega, x) = -(E_n - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \Psi_n(\lambda, \omega-1, x), \quad (3.2.2.109)$$

Tehát a  $T_1$  transzformáció esetében belátható, hogy a szuperszimmetrikus kvantummechanika által előírt partner potenciálok hullámfüggvényei között fennáll a tárgyalt analitikai összefüggés, azaz:

$$\Psi_n^+(\mathbf{x}) = (E_{n+1}^-)^{-\frac{1}{2}} A \Psi_{n+1}^-(\mathbf{x}).$$

A sértett esetekben a Jacobi-polinomokra vonatkozó differenciális- és rekurziós-formulákból, valamint [8] azonosságokból az alábbi egyenletek is hasonlóan beláthatók.

$$1. \Psi_n^+(\mathbf{x}) = (E_n^-)^{-\frac{1}{2}} A \Psi_n^-(\mathbf{x}), \quad (3.2.2.110)$$

és

$$2. \Psi_n^-(\mathbf{x}) = (E_n^+)^{-\frac{1}{2}} A^+ \Psi_n^+(\mathbf{x}). \quad (3.2.2.111)$$

## 2.eset.....

Vizsgáljuk meg azt az esetet amikor  $\chi(x)$  nem konvergál a végtelenben. A nullában a függvény normálható marad, ahogy a  $T_1$  transzformáció esetében, de a végtelenben  $t+s$  összegnek pozitívnak kell lennie, ezért s-re a  $T_4$  transzformációt kell alkalmazni!

$$t = \frac{\lambda - \omega}{2} \quad \text{és} \quad s = \frac{\lambda + \omega + 1}{2}, \quad (3.2.2.112)$$

illetve a „latin-görög” kapcsolatot:

$A = a\omega, B = a\lambda$  és

$$\alpha = (A - B) - \frac{1}{2}, \quad \beta = (A + B) - \frac{1}{2}. \quad (3.2.2.113), (3.2.2.114)$$

Ellenőrzésként számoljuk ki  $V_-(x) - et$  és határozzuk meg  $\varepsilon - t$  :

$$\begin{aligned} V_-(x) &= -a^2\lambda(2\omega + 1) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + a^2(\lambda^2 + \omega(\omega + 1)) \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &= (A^2 + B^2 + aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - B(2A + a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax). \end{aligned} \quad (3.2.2.115)$$

$$\varepsilon = -a^2(s + t)^2 = -a^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2. \quad (3.2.2.116)$$

A feltételszabások:

$$\frac{\lambda - \omega}{2} > 1, \quad \omega > 0 \quad \text{ezért} \quad |\lambda| > |\omega| \quad \text{azaz} \quad (3.2.2.117)$$

$$-a^2\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 < E_0, \quad (3.2.2.118)$$

A pluszos partnerpotenciálunk alakja:

$$\begin{aligned} V_+(x) &= -a^2(\lambda + 1)[2\omega + 1] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2[(\lambda + 1)^2 + \omega(\omega + 1)] \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &(A^2 + (B + a)^2 - aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - (B + a)(2A + a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax). \end{aligned} \quad (3.2.2.119)$$

$$V_+(x) = V(A, B + a, 0, x), \quad (3.2.2.120)$$

*Igy kapjuk a harmadik  $T_3$  transzformációnak megfelelő formát.*

### 3.eset.....

A következő eset, amikor  $\chi(x)$  nullában nem normálható csak a végtelenben, ekkor  $t < 0$  és  $s + t < 0$ .

Ehhez az esethez tartozó paraméter választások ekkor:

$$t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2} \quad \text{és} \quad s = \frac{-\lambda - \omega}{2}$$

ezzel:

$$\varepsilon = -a^2(s + t)^2 = -a^2\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = -a^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2, \quad (3.2.2.121)$$

Itt  $\varepsilon$  szintén kisebb az alapállapot energiánál ( $\varepsilon < E_0$ )

$$\frac{\lambda - \omega}{2} > 1, \quad \omega > 0 \text{ így } |\lambda| - 2 > |\omega| \text{ ezért } -a^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 < -a^2\omega^2 = E_0. \quad (3.2.2.122)$$

$$\begin{aligned} V_+(x) &= -a^2(\lambda - 1)[2\omega + 1] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2 [(\lambda - 1)^2 + \omega(\omega + 1)] \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &(A^2 + (B - a)^2 - aA) \operatorname{cosech}^2(ax) - (B - a)(2A + a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax). \quad (3.2.2.123) \end{aligned}$$

$$V_+(x) = V(A, B - a, 0, x), \quad (3.2.2.124) \quad \text{jelen eset a } T_4$$

### 4.eset.....

Nézzük a nullában és a végtelenben is végtelenbe tartó, divergáló megoldásokat:

$$t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2} \quad \text{és} \quad s = \frac{\lambda + \omega + 1}{2}$$

Ekkor :

$$\varepsilon = -a^2(s + t)^2 = -a^2(\omega + 1)^2 < E_0, \quad (3.2.2.125)$$

$$\begin{aligned} V_+(x) &= -a^2\lambda [2(\omega + 1) + 1] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2 [\lambda^2 + (\omega + 1)((\omega + 1) + 1)] \operatorname{cosech}^2(ax) = \\ &((A + 1)^2 + B^2 + a(A + a)) \operatorname{cosech}^2(ax) - B(2(A + a) + a) \operatorname{cosech}(ax) \coth(ax). \quad (3.2.2.126) \end{aligned}$$

$$V_+(x) = V(A, B + a, 0, x), \quad (3.2.2.127) \quad \text{jelen utolsó eset pedig a } T_2 \text{ transzformáció}$$

$j=0$  esetben az alábbi eredmények adódnak

A partnerpotenciálok  $\chi(x)$ -ből:

Helyettesítsünk  $j=0$  esetre

$$\begin{aligned} V_{\mp}(x) - \varepsilon = & a^2 (t^2 \mp t + s^2 \mp s + 2st + 2kt - 2tj + 2sk - 2sj \pm t \pm s \pm k \mp j) \\ & + a^2(2t^2 \mp 2t - 2s^2 \pm 2s \pm t \mp s) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) \\ & + a^2(2t^2 + 2s^2 \mp 2t \mp 2s \pm t \pm s) \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + a^2 (k^2 \mp k) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))^2} + a^2 (j^2 \mp j) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))^2} + \\ & + a^2 (-2kj) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))(q+\cosh(ax))} + a^2 ((-2kt(p-1) - \\ & - 2sk(p+1) \mp kp)) \frac{1}{p+\cosh(ax)} + \\ & + a^2 ((-2jt(q-1) - 2js(q+1) \pm jq)) \frac{1}{q+\cosh(ax)}. \quad (3.2.2.128) \rightarrow \end{aligned}$$

$$V_{\mp}(x) - \varepsilon =$$

$$\begin{aligned} & a^2 (t^2 \mp t + s^2 \mp s + 2st + 2kt + 2sk \pm t \pm s \pm k + k^2 \mp k) \\ & + a^2(2t^2 \mp 2t - 2s^2 \pm 2s \pm t \mp s) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) \\ & + a^2(2t^2 + 2s^2 \mp 2t \mp 2s \pm t \pm s) \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + a^2 (k^2 \mp k) \frac{p^2-1}{(p+\cosh(ax))^2} + a^2 (j^2 \mp j) \frac{q^2-1}{(p+\cosh(ax))^2} + \\ & + a^2 (-2kj) \frac{\sinh^2(ax)}{(p+\cosh(ax))(q+\cosh(ax))} + a^2 ((-2kt(p-1) - \\ & - 2sk(p+1) \mp kp - 2p(k^2 \mp k)) \frac{1}{p+\cosh(ax)} + \\ & + a^2 ((-2jt(q-1) - 2js(q+1) \pm jq - 2(j^2 \pm j)) \frac{1}{q+\cosh(ax)}. \quad (3.2.2.129) \end{aligned}$$

A kiinduló függvény (271)-ből:

$$\chi(x) = (\cosh(ax) - 1)^t (1 + \cosh(ax))^s \frac{(p + \cosh(ax))^k}{(q + \cosh(ax))^j}.$$

j=0 esetben:

$$\chi(x) = (\cosh(ax) - 1)^t (1 + \cosh(ax))^s (p + \cosh(ax))^k \quad . \quad (3.2.2.130)$$

$$V_{\mp}(x) - \varepsilon =$$

$$a^2 (t^2 \mp t + s^2 \mp s + 2st + 2kt + 2sk \pm t \pm s \pm k + k^2 \mp k)$$

$$+ a^2 (2t^2 \mp 2t - 2s^2 \pm 2s \pm t \mp s) \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) +$$

$$+ a^2 + a^2 (k^2 \mp k) \frac{p^2 - 1}{(p + \cosh(ax))^2} +$$

$$+ a^2 ((-2kt(p-1) - 2ks(1+p) \mp kp - 2p(k^2 \mp k)) \frac{1}{p + \cosh(ax)}). \quad (3.2.2.131)$$

Igy adódik:

$$V_{-}(x) - \varepsilon =$$

$$a^2 [t^2 + k^2 + s^2 + 2st + 2kt + 2ks] +$$

$$+ a^2 [2t^2 - t - 2s^2 + s] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) +$$

$$+ a^2 [2t^2 + 2s^2 - t - s] \operatorname{cosech}^2(ax) + a^2 (k^2 - k) \frac{p^2 - 1}{(p + \cosh(ax))^2} +$$

$$+ a^2 ((-2kt(p-1) - 2ks(1+p) - kp - 2p(k^2 - k)) \frac{1}{p + \cosh(ax)}). \quad (3.2.2.132)$$

$$\hat{V}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \Delta = \mathbf{0}, x) \quad (354) \quad (3.2.2.133)$$

potenciál nem tartalmaz konstans tagot, ezért epszilon itt is a  $V_{-}(x) - \varepsilon$ -ban lévő összes konstansnak felel meg:

(Mint korábban:  $V_{-}(\mathbf{x}) = V(\alpha, \beta; x)$  és

$$V_{+}(\mathbf{x}) = \hat{V}(\alpha, \beta; x) \quad )$$

$$\varepsilon = -a^2 [t^2 + k^2 + s^2 + 2st + 2kt + 2ks], \quad ((3.2.2.134)$$

$V_-(x)$  és  $V(A, B, \Delta, x)$  potenciálok esetében írjuk elő, hogy kettejük megegyezzen, így itt is különböző változótranszformációkhoz juthatunk,

azaz:

$V(A, B, \Delta, x)$ -ban szereplő tagok exponenseire (1.) teljesülni kell, hogy zérussal egyenlők!

$$k^2 - k = 0, \quad (3.2.2.135)$$

$$k(k-1) = 0 \quad \text{feltétel szerint } k=0 \text{ vagy } k=1.$$

A korábbi fejezetben leírtam a  $k=0$  választás esetét, tehát most csak a  $k=1$  választás releváns.

Továbbá (2.) teljesülnie kell:

$$-2kt(p-1) - 2ks(p+1) - kp - 2p(k^2 - k) = 0, \quad (3.2.2.136)$$

$k=1$  helyettesítéssel:

$$-2t(p-1) - 2s(p+1) - p = 0, \quad (3.2.2.137) \quad \text{innen:}$$

$$2tp + 2sp + p = 2t - 2s$$

$$p(2t+2s+1) = 2t-2s, \quad (3.2.2.138)$$

$$p = \frac{2t-2s}{2t+2s+1}, \quad (3.2.2.139)$$

$t$ ,  $s$  megfelelő értékeinek választásával kapjuk majd  $p$  aktuális értékét is.

Az előző esethez hasonlóan vessük össze a potenciálokban szereplő paramétereket, így kapjuk, mint előbb  $t$ ,  $s$  lehetséges formuláit:

$$\begin{aligned} 1. \ t = \frac{\lambda - \omega}{2}, \quad 2. \ t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2} \\ 3. \ s = -\frac{(\lambda + \omega)}{2}, \quad 4. \ s = \frac{\omega + \lambda + 1}{2}, \end{aligned} \quad (3.2.2.140)$$

## Most ismét vizsgáljuk meg a négy lehetséges esetet egyenként

### 1.eset

Vegyük azt az esetet, amikor  $\chi(x)$  normálható a végtelenben és nullában is.

$$\text{Ekkor } t > 0 \text{ és } t+s+k = t+s+1 < 0. \text{ illetve} \quad (3.2.2.141)$$

$$\Psi_0(\lambda, \omega, x) \text{ normálási feltételéből } \rightarrow \omega > 0; \lambda > 2. \quad (3.2.2.142)$$

Ekkor a paraméterek választása: 1., 3. eset

$$t = \frac{\lambda - \omega}{2} \text{ és } s = -\frac{(\lambda + \omega)}{2}.$$

Mivel  $s + t + 1 < 0$  illetve követeljük meg, hogy  $\omega > 1$ , ekkor:

$$p = \frac{2t - 2s}{2t + 2s + 1} = \frac{-2\lambda}{2\omega + 1} < 0, \quad (3.2.2.143)$$

Tudjuk, hogy  $\lambda > \omega + 2$ , ebből következik, hogy

$$p = \frac{-2\lambda}{2\omega + 1} < -1, \quad (3.2.2.144)$$

Ez az eredmény gondot okoz, mivel ekkor az  $\frac{1}{p + \cosh(ax)}$  tagok a partnerpotenciál összefüggésében szingularitást eredményeznének.

*Ez az eset a  $T_1$  transzformációnak felel meg.*

### 2.eset

Megvizsgálom azt az esetet amikor a végtelenben  $\chi(x)$  nem konvergáló.

Az itteni paraméter transzformációk:

$$t = \frac{\lambda - \omega}{2} \text{ és } s = \frac{\lambda + \omega + 1}{2} \text{ és } p \text{ értéke most:}$$

$$p = \frac{2t - 2s}{2t + 2s + 1} = \frac{-(2\omega + 1)}{(2\lambda + 2)}, \quad -1 < p < 0, \quad (3.2.2.145)$$

Ekkor  $p$  nem sérti a potenciál nem-szingularitásának feltételét!

$$\varepsilon = -a^2(t^2 + s^2 + k^2 + 2st + 2kt + 2sk) = -a^2(k + s + t)^2, \quad (3.2.2.146.a)$$

$$\varepsilon = -a^2 \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2, \quad (3.2.2.146.b)$$

mivel

$\lambda > \omega + 2$  ezért itt is teljesülhet sértett esetekben a faktorizációs energia esetén várt egyenlőtlenség:

$$\varepsilon < -a^2\omega^2 = E_0, \quad (3.2.2.147)$$

Jelen esetben a partnerpotenciál:

$$\begin{aligned} V_+(x) &= a^2[2t^2 + t - 2s^2 - s] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ a^2 [2t^2 + 2s^2 + t + s] \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ &+ 2a^2 \frac{\left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)^2 - 1}{\left(\cosh(ax) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)\right)^2} + 2a^2 \left[ -t \left( -1 - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right) \right) - s \left( 1 - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right) \right) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right) \right]^* \\ &* \frac{1}{\left(\cosh(ax) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)\right)} - \\ &- 4a^2 \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right) \frac{1}{\left(\cosh(ax) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (3.2.2.148)$$

„Görög-latin” megfeleltetésekkel:

$$\begin{aligned} &\frac{\left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)^2 - 1}{\left(\cosh(ax) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)\right)^2} = \frac{\left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)^2 - 1}{((2\lambda+2) \left(\cosh(ax) - (2\omega+1)\right))^2} = \\ &= \frac{(2\omega+1)^2 - (2\lambda+2)^2}{((2\lambda+2) \left(\cosh(ax) - (2\omega+1)\right))^2} = \frac{(2A+a)^2 - (2B+2a)^2}{((2B+2a) \left(\cosh(ax) - (2A+a)\right))^2} \\ &= \left(\cosh(ax) - \left(\frac{2\omega+1}{2\lambda+2}\right)\right)^{-1} = \frac{2(\lambda+1)}{((2(\lambda+1)) \left(\cosh(ax) - (2\omega+1)\right))} = \\ &= \frac{2(B+a)}{((2(B+a)) \left(\cosh(ax) - (2A+a)\right))}. \end{aligned} \quad (3.2.2.149)$$

Jelen esetben a partnerpotenciál:

$$\begin{aligned} V_+(x) &= -[(2A + a)(B + a)] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ &+ [A^2 + (B + a)^2 + aA] \operatorname{cosech}^2(ax) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2a^2 \frac{(2A+a)^2 - 4(B+a)^2}{((2B+2a) \cosh(ax) - (2A+a))^2} + 2a^2 \left[ -t \left( -1 - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) \right) - s \left( 1 - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) - 2 \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) \right]^* \\
& * \frac{2(B+a)}{(2(B+a) \cosh(ax) - (2A+a))}. \tag{3.2.2.150}
\end{aligned}$$

A  $V_-(x)$  potenciálból úgy kell  $p$  értékét megválasztani, hogy az *általánosított Pöschl-Teller potenciálban* található tagokon kívül a többi tag nulla legyen, így a  $V_+(x)$  potenciálban:

$$-t \left( - \left( \frac{2\omega+1}{2(\lambda+1)} \right) - 1 \right) - s \left( 1 - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) \right) + \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) - 2 \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right) = -p, \tag{3.2.2.151}$$

$$p = - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda+2} \right), \tag{3.2.2.152}$$

Innen következik:

$$\begin{aligned}
V_+(x) &= -[(2A+a)(B+a)] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\
& + [A^2 + (B+a)^2 + aA] \operatorname{cosech}^2(ax) + \\
& + 2a^2 \frac{(2A+a)^2 - 4(B+a)^2}{((2B+2a) \cosh(ax) - (2A+a))^2} + 2a^2 \frac{2A+a}{((2B+2a) \cosh(ax) - (2A+a))} = \hat{V}(\mathbf{A}, \mathbf{B+a}, \mathbf{0}, \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.2.2.153}$$

$$V_+(x) = \hat{V}(\mathbf{A}, \mathbf{B+a}, \mathbf{0}, \mathbf{x}), \tag{3.2.2.154}$$

Tehát ez az eset a  $T_3$  transzformációnak feleltethető meg

### 3.eset

Legyen csak a végtelenben normálható  $\chi(x)$ . Ekkor:

$$t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2} \quad \text{és} \quad s = \frac{-(\lambda + \omega)}{2} \quad \text{és} \quad p \text{ értéke itt:}$$

$$p = - \frac{2s - 2t}{2t + 2s + 1} = \frac{-(-2\omega - 1)}{(-2\lambda + 2)}, \quad -1 < p < 0, \tag{3.2.2.155}$$

$$p = - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda-2} \right), \tag{3.2.2.156}$$

$$\varepsilon = -a^2(t^2 + s^2 + k^2 + 2st + 2kt + 2sk) = -a^2(1 + s + t)^2, \tag{3.2.2.157}$$

$$\varepsilon = -a^2 \left( \lambda - \frac{3}{2} \right)^2. \tag{3.2.2.158}$$

$$\varepsilon < -a\omega^2 = E_0, \quad (3.2.2.159)$$

Jelen esetben a partnerpotenciál:

$$\begin{aligned} V_+(x) = & -[(2A+a)(B-a)] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ & + [A^2 + (B-a)^2 + aA] \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + 2a^2 \frac{(2A+a)^2 - (2B-2a)^2}{((2B-2a) \cosh(ax) - (2A+a))^2} + 2a^2 \left[ -t \left( -1 - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda-2} \right) \right) - s \left( 1 - \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda-2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda-2} \right) - 2 \left( \frac{2\omega+1}{2\lambda-2} \right) \right]^* \\ & * \frac{2(B-a)}{(2(B-a) \cosh(ax) - (2A+a))}. \end{aligned} \quad (3.2.2.160)$$

Átalakítással

$$\begin{aligned} V_+(x) = & -[(2A+a)(B-a)] \coth(ax) \operatorname{cosech}(ax) + \\ & + [A^2 + (B-a)^2 + aA] \operatorname{cosech}^2(ax) + \\ & + 2a^2 \frac{(2A+a)^2 - 4(B-a)^2}{((2B-2a) \cosh(ax) - (2A+a))^2} + \\ & + 2a^2 \frac{2(A+a)}{(2(B-a) \cosh(ax) - (2A+a))} = \hat{V}(A, B-a, 0, x). \end{aligned} \quad (3.2.2.161)$$

Tehát ez az eset a  $T_4$  transzformációnak felel meg.

#### 4.eset

Legyen nem normálható  $\chi(x)$ . Nullában sem és végtelenben sem.

Ekkor:

$$\begin{aligned} t = \frac{\omega - \lambda + 1}{2} \quad \text{és} \quad s = \frac{(\lambda + \omega + 1)}{2} \\ p = -\frac{2s - 2t}{2t + 2s + 1} = \frac{-(2\lambda)}{(2\omega + 3)}, \quad \lambda > \omega + 2 \text{ ebből:} \end{aligned} \quad (3.2.2.162)$$

$$p = -\left( \frac{2\lambda}{2\omega + 3} \right) < -\left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right) < -1. \quad (3.2.2.163)$$

Ez az eset elvetendő mert az első esethez hasonlóan  $p$  itt szingularitást hozna létre  $V_+(x)$ -ben.

Ez a  $T_4$  eset megfelelője.

Ezzel a paraméterek valamennyi esetére megvizsgáltam a transzformációk szolgáltatotta eredményeket.

## A Scarf I. potenciál és racionális kiterjesztése

A  $z(x)$  függvény most  $z(x) = \cos(ax)$

Ha az előző fejezetben leírt eljárással folytatom a vizsgálódást az alábbi eredményekhez jutok.

A hiperbolikus függvények helyére trigonometrikus függvények kerülnek.

Fentebb **részletesen** tárgyaltam hogyan jutunk a PT potenciálhoz és annak racionálisan kiterjesztett alakjához, illetve alapállapoti hullámfüggvényeikhez. Itt, a Scarf I. esetben ugyanazzal az eljárással, műveletsorral az alábbi eredményekhez jutok:

A fenti (257) összefüggéshez hasonlóan felírható:

$$V_I(\alpha, \beta, x) = \frac{a^2}{\sin^2(ax)} A(\alpha, \beta) + \frac{2a^2 \cos(ax)}{\sin^2(x)} B(\alpha, \beta), \quad (3.2.2.164)$$

I index a Scarf I.-re utal.

Itt  $A = a \omega$  és  $B = a \lambda$  mellett  $A, B$  az alábbi kapcsolatban van  $\alpha, \beta$ -val mint (3.2.2.34) és (3.2.2.35) :

$$A(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{és}$$

$$B(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

A kötöttállapoti sajátfüggvény) (3.2.2.137)-hez hasonlóan, de trigonometrikus  $z(x)$  helyettesítéssel:

$$\Psi_n(\alpha, \beta, x) = C_n^{(\alpha, \beta)} (1 - \cos(ax))^{\frac{\alpha+1}{2}} (\cos(ax) + 1)^{\frac{\beta+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos(x)), \quad (3.2.2.165)$$

és az energiasajátérték csak pozitív az értelmezési tartományon a négyzetes tagok miatt:

$$E_n = a^2 \left(n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)^2. \quad (3.2.2.166)$$

A racionális kiterjesztéssel pedig a Scarf I. potenciál alakja az alábbi két taggal egészül ki:

$$\widehat{V}_I(\alpha, \beta, x) = V_I(\alpha, \beta, x) + \frac{2a^2(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)\cos(ax)+\alpha+\beta} - \frac{2a^2((\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2)}{[(\alpha-\beta)\cos(ax)+\alpha+\beta]^2}, \quad (3.2.2.167)$$

(389)

A kötöttállapotú sajátfüggvény itt,

$$\widehat{\Psi}_n(\alpha, \beta, x) = \widehat{C}_n^{(\alpha, \beta)} (1 - \cos(ax) - 1)^{\frac{\alpha+1}{2} + \frac{1}{4}} (1 + \cos(ax))^{\frac{\beta+1}{2} + \frac{1}{4}} * * [(\alpha - \beta)\cos(ax) + \alpha + \beta]^{-1} \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(\cos(x)), \quad (3.2.2.168)$$

Az energiasajátérték tag:

$$\widehat{E}_n = a^2 \left( n - 1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right)^2. \quad (3.2.2.169)$$

Ami a PT energiatag mínusz előjellel

n=1 esetben a [6] Scarf I. hasonló esetéhez jutunk:

([6] 4. oldal (10), (11) megállapítások, Dirichlet peremfeltételek mellett. a=1.)

akkor

$$\alpha = A - B - \frac{1}{2} \text{ és } \beta = A + B - 1/2. \text{ vagy} \quad (3.2.2.170)$$

$$A = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1) \text{ és } B = \frac{1}{2}(\beta - \alpha). \quad (3.2.2.171)$$

A matematikai alakjuk hasonlósága ellenére az Általánosított Pöschl-Teller potenciál és a racionálisan kiterjesztett formája szignifikánsan eltér határfeltételeik tekintetében. Mindkét feltétel véges valós értékre teljesül, ahol a potenciál szingularitása  $\xi^{-2}$  típusú, ahol  $x = \xi$  és  $\pi/a - x$ . A szingularitások figyelembevételével alakulhat  $\alpha, \beta$  értéke függetlenül.

A SUSY transzformációk az 5. táblázatban összefoglalásra kerültek, ami beállítja, megszabja emeli vagy csökkenti  $\alpha, \beta$  értékét. Minimuma adott transzformációnak megfelelően  $-\frac{1}{2}$  és  $\frac{1}{2}$ .

$$\chi(x) = (1 - z(x))^t (1 + z(x))^s \frac{(p+z(x))^k}{(q+z(x))^j} . \quad (3.2.2.101)\text{-ben} \quad t,s$$

exponens értéke függvényében, ha  $t, s > 0$ ,

(3.2.2.165) -ből:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} > 0 \rightarrow \alpha > \pm \frac{1}{2} \quad (3.2.2.172)$$

$$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} > 0 \rightarrow \beta > \pm \frac{1}{2} \quad (3.2.2.173)$$

(389) utolsó tagjaiból az aktuális követelménye  $\alpha, \beta$  értékének a  $V_I$  és  $\widehat{V}_I$  határfeltételeivel, attól függően, hogy  $\alpha < \beta$  vagy  $\beta < \alpha$ :

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} < -1 \quad , \quad \alpha + \beta > 0 \quad (3.2.2.174)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} > 1 \quad (3.2.2.175)$$

Az aktuális paraméter függvényében növel (-) vagy csökkent (+).

Emellett a fenti feltételcsomagok a  $\widehat{V}_I$  potenciálok szinguláris voltának esetleges feltételei. A 8. táblázat lényegében ugyanolyan, mint a 7.táblázat, azzal a különbséggel, hogy a 6.,7. oszlopban a paraméterek k<sub>hi</sub> viselkedésére a felső határfeltételnél alábbi:  $x_+ = \frac{\pi}{a}$ , és  $x_+ \rightarrow \infty$ . a 7.táblázatban látható módon. A SUSY transzformációk általános sémája itt is hasonló az előző fejezetben taglalt Általánosított Pöschl-Teller potenciál és racionális kiterjesztésének eseteihez. A Scarf I. potenciál  $V_I(\alpha, \beta, x)$  és racionális kiterjesztése  $\widehat{V}_I(\alpha, \beta, x)$  alakinvariáns voltát igazolja a  $T_1, T_2$  transzformáció,  $j=k=0$  és  $j=k=1$  értékek mellett!

**A 8.táblázat a SUSY transzformációk eseteit foglalja össze a Scarf I.,  $V_I$  potenciál és racionális kiterjesztése  $\widehat{V}_I$  esetében.**

A 7., 8. oszlopban:

$$1 < \frac{A+B}{A-B} < -1, \text{ ha első esetben } A > B, \text{ ha a második esetben } A < B.$$

$j,k$	$V_+(\mathbf{x})$	$\alpha$	$\beta$	$t$	$s$	$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$ $V_-(\mathbf{x})$ - ban	$\frac{\alpha' + \beta'}{\alpha' - \beta'}$ $V_+(\mathbf{x})$ -ban	$E_0^{(-)} - \epsilon$	$T_i$
0,0	$V_I(\alpha + 1, \beta + 1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			0	$T_1$
	$V_I(\alpha - 1, \beta - 1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$a^2(\alpha + \beta) > 0$	$T_2$
	$V_I(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$> \frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$a^2(\alpha + 1)\beta > 0$	$T_3$
	$V_I(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$> \frac{1}{2}$	$> -\frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$			$a^2(\alpha + \beta)\alpha > 0$	$T_4$
0,1	$\widehat{V}_I(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$> -\frac{1}{2}$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$1 < n < -1$	$a^2(\alpha + 2)^*$ $(\beta - 1) > 0$	$T_3$
	$\widehat{V}_I(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$> \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$		$1 < m < -1$	$a^2(\alpha - 1)$ $*(\beta + 2) > 0$	$T_4$
1,0	$V_I(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$> 0 > -\frac{1}{2}$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$1 < f - 1$		$a^2\alpha(\beta + 1) > 0$	$T_3$
	$V_I(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$> 0 > -\frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$1 < f - 1$		$a^2(\alpha + 1)\beta > 0$	$T_4$
1,1	$\widehat{V}_I(\alpha + 1, \beta + 1, x)$	$> 0 > -\frac{1}{2}$	$> 0 > -\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$1 < f - 1$	$1 < c < -1$	0	$T_1$
	$\widehat{V}_I(\alpha - 1, \beta - 1, x)$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$> 1 > \frac{1}{2}$	$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$1 < f - 1$	$1 < w < -1$	$a^2(\alpha + \beta) > 0$	$T_2$

**8.táblázat**

$$n = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta + 2}, m = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta - 2}, c = \frac{\alpha + \beta + 2}{\alpha - \beta}, w = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha - \beta}, f = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \quad (3.2.2.176)$$

**A Scarf II. potenciál valós verziója és a racionálisan kiterjesztett változata.**

Jelen esetben az alkalmazandó függvény alakja a komplex:  $z(x) = i \sin(ax)$  illetve a Scarf II. potenciál általános alakja komplex ugyan, de az energia

spektruma (sajátértéke) valós lesz. Az alábbi a formulának a legegyszerűbb alakja, az általánosított **PI** potenciálosztálybeli potenciál.

(A *Natanzon osztályból* kivezetnek az  $X_1$  – típusú kivételes Jacobi ,Laguerre polinomokat tartalmazó megoldások!)

$$V_{II}(\alpha, \beta, x) = -\frac{a^2}{(\cosh(ax))^2} A(\alpha, \beta) - \frac{2i a^2 \sinh(ax)}{[\cosh(x)]^2} B(\alpha, \beta). \quad (3.2.2.177)$$

A kötöttállapotú hullámfüggvény:

$$\Psi_n(\alpha, \beta, x) =$$

$$C_n^{(\alpha, \beta)} (1 - i \sinh(ax))^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + i \sinh(ax))^{\frac{\beta+1}{2}} *P_n^{(\alpha, \beta)}(i \sinh(x)), \quad (3.2.2.178)$$

az energiasajátértéke pedig:

$$E_n = -a^2 \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2, \quad (3.2.2.179)$$

Ez azonos az általánosított PT potenciálnál kapott formulával.

Ennél a potenciálnál  $\alpha^* = \beta$

Jelen esettől a (3.2.2.178) hullámfüggvény precízebben Jacobi polinomok helyett/mellett *Romanowski polinomokkal* írható fel. Irodalom: Raboso-Weber nyomán [71].

Itt

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha_R$  és  $\frac{\alpha - \beta}{2} = i\alpha_I$  az általánosított PT potenciálhoz hasonlóan a reguláris hullámfüggvény értelmezhető  $x \rightarrow \infty$  tartományon, így

$$\alpha + \beta + 1 < 0, \quad (3.2.2.180) \quad \text{azaz} \quad \alpha_R < -\frac{1}{2}, \quad (3.2.2.181)$$

Bár most a függvény ilyen kondíció mellett az  $x \rightarrow -\infty$  tartományon is reguláris (reguláris egy pontban, ha az adott pontban differenciálható), illetve egy másik újdonság, hogy a Scarf II. racionális kiterjesztése nem definiálható, mert az alábbi egyenlet nullát fog adni, az alábbi helyettesítésekkel:

$$(\alpha - \beta)i \sinh(ax) + \alpha + \beta = -2\alpha_I \sinh(ax) + 2\alpha_R \quad (3.2.2.182)$$

$\sinh(ax) = \frac{\alpha_R}{\alpha_I}$ ,  $\frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha_R$  és  $\frac{\alpha - \beta}{2} = i\alpha_I$  behelyettesítésekkel:

$$2i\alpha_I \frac{\alpha_R}{\alpha_I} + 2\alpha_R = -2\alpha_R + 2\alpha_R$$

Igy azonosságként mindkét oldal zérussá válik!

Ennek okán csak a valós Scarf II. potenciált fogom itt szerepeltetni, illetve az alábbi 9.táblázatban,  $j=k=0$  esetben. („Kivételes Jacobi-polinomhoz tartozó  $V(x)$ -k” nincsenek jelen most.)

**Táblázat a  $V_{II}(\alpha, \beta, x)$  Scarf II.potenciál kondícióival**

$j, k$	$V_+(\mathbf{x})$	feltétel	$\alpha_R$	$\mathbf{t}$	$\mathbf{s}$	$Re(\mathbf{s}+\mathbf{t})$	$\varepsilon$	$T_i$
0,0	$V_{II}(\alpha + 1, \beta + 1, x)$	$< -\frac{1}{2}$		$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\alpha_R + \frac{1}{2} < 0$	$-a^2(\alpha_R + \frac{1}{2})^2 = E_0^{(-)}$	$T_1$
0,0	$V_{II}(\alpha - 1, \beta - 1, x)$	$< -\frac{1}{2}$		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$-\alpha_R + \frac{1}{2} > 1$	$-a^2(\alpha_R - \frac{1}{2})^2 < E_0^{(-)}$	$T_2$
0,0	$V_{II}(\alpha + 1, \beta - 1, x)$	$< -\frac{1}{2}$		$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$-\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} > 0$	$-a^2\left(i\alpha_I + \frac{1}{2}\right)^2$ komplex	$(T_2)$
0,0	$V_{II}(\alpha - 1, \beta + 1, x)$	$< -\frac{1}{2}$		$-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} > 0$	$-a^2\left(-i\alpha_I + \frac{1}{2}\right)^2$ komplex	$(T_2)$

**9.táblázat**

A fenti táblázat első sorában a sztenderd  $T_1$  típusú SUSYQM transzformáció szerepel, amely kapcsolódva a  $z$  esetéhez: megszünteti, eltünteti a  $V_+(x)$  állapotot, ami megfelel a  $V_-(x)$  állapotnak.

A  $T_2$  típusú SUSYQM transzformáció a második sorban pedig ennek a *fordított esete*: bevezet egy új állapotot  $V_+(x)$  számára, (*keltés-eltüntetés együttese*) az  $\varepsilon$ -nak megfelelő energiával. A fennmaradó két transzformáció elvben  $T_2$  típusú, mert a SUSYQM transzformációt generáló  $\chi(x)$  függvény nem korlátos, ha tart

$\mathbf{x} \rightarrow \pm\infty$  tartományokon. Azonban az energiasajátértékei komplexek, valójában a két energiatag egymás komplex konjugáltja, tehát a két utolsó transzformáció nem tekinthető érvényesnek!

Ezek az energiasajátértékek illeszkednek, mint rezonanciák ebbe a sorozatba mert megfelelnek a valós Scarf II. potenciál irreguláris megoldásainak, illetve azok „rezonánsainak”. Ezeket  $\alpha \rightarrow -\alpha$  helyettesítéssel kaphatjuk meg, ami invariánsan hagyja (3.2.2.177 potenciált, de a (3.2.2.179) energia sajátértékét komplexnek alakítja!

### 3.3. Az $X_1$ – típusú kivételes Laguerre- és Jacobi-polinomok, mint Heun-típusú differenciálegyenletek megoldásai

Ebben az alfejezetben a munka tárgyalását követve bemutatjuk, hogy a 3.1, illetve 3.2 alfejezetekben alkalmazott kivételes Laguerre, illetve Jacobi polinomok megkaphatók a konfluens Heun, illetve a Heun differenciálegyenlet speciális megoldásaiként. E differenciálegyenletek speciális esete a konfluens hipergeometrikus, illetve a hipergeometrikus differenciálegyenlet. Ezek megoldásai ugyanúgy redukálódnak az általánosított Laguerre, illetve Jacobi polinomokra, mint a Heun-féle differenciálegyenletek általános megoldása az említett kivételes ortogonális polinomokra.: [3]

Az említett két Heun-típusú differenciálegyenlet megkapható a (89) egyenletből a 10. Táblázatban feltüntetett  $Q(z)$  és  $R(z)$  függvények behelyettesítésével.

$$\frac{d^2F}{dz^2} + Q(z) \frac{dF}{dz} + R(z) F(z) = 0 \quad (3.3.1)$$

$Q(z)$ ,  $R(z)$  aktuális formáját az alábbi **10. Táblázat**ba foglalom

**10.táblázat**

<b>F(z)</b>	<b>Q(z)</b>	<b>R(z)</b>	<b><math>\exp\left(\frac{1}{2} \int Q(z) dz\right)</math></b>	<b>spec.határeset</b>
<b>H</b> <b>(<math>\alpha, \beta, \gamma, \delta, d, q; z</math>)</b> Heun 6 paraméter	$\frac{\gamma + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-d}}$	$\frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-d)}$	$z^{\frac{\gamma}{2}}(z-1)^{\frac{\delta}{2}}(z-d)^{\frac{\epsilon}{2}}$	${}_2F_1$
<b><math>H_c(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma; z)</math></b> Konfluens Heun 5 paraméter	$\alpha + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1}$	$\frac{\alpha\beta z - \sigma}{z(z-1)}$	$z^{\frac{\gamma}{2}}(z-1)^{\frac{\delta}{2}} \exp\left(\frac{\alpha z}{2}\right)$	${}_2F_1, {}_1F_1$

A fenti táblázat teljes formáját, a Heun-, a konfluens Heun-, a Bikonfluens Heun-,  $H_d$  -Heun és Trikonfluens Heun-egyenletekkel kiegészítve a [3] **1.Táblázat**ában láthatjuk.

Az általános Heun-egyenletnek 3 reguláris szingularitása van, amelyeket az általánosság megszorítása nélkül felvehetünk a  $z=0$ , 1 és  $d$  értékeknél, illetve van egy irreguláris szingularitása végtelenben is.

A paramétereket determinálja az alábbi összefüggés:

Az  $\varepsilon$  paramétert ....

ezért ez a paraméter nem szerepel a  $H()$  megoldás argumentumában.

$$\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1. \quad (3.3.2)$$

A *Heun-egyenlet*  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  *hypergeometrikus* differenciálegyenletre redukálódik az alábbi paraméterválasztásokkal:

$$a = \alpha, b = \beta, \gamma = c, \delta = a + b + 1 - c, \varepsilon = 0, d = 0, q = 0$$

A *Konfluens Heun-egyenletnek* reguláris szingularitási pontjai a  $z=0$  és  $z=1$ .  
Illetve van egy elsőrangú irreguláris szingularitása a végtelenben.

$H_c(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma; z)$  speciális paraméterekkel az egyenlet *hypergeometrikus* ( ${}_2F_1(a, b, c; z)$ ) és *konfluens-hypergeometrikus* ( ${}_1F_1(a, c; z)$ ) differenciálegyenletre redukálódik. Ha a választás:

$$\alpha = 0, \gamma = c, \delta = a + b + 1 - c, \sigma = -ab \quad (3.3.3) \quad \text{illetve}$$

$$\alpha = -1, \gamma = c, \delta = 0, \beta = a, \sigma = -a \quad (3.3.4)$$

A 2.2.1 részben leírt transzformációs módszert alkalmazva a (92) egyenlet alapján megkaphatjuk a két differenciálegyenletből származtatható potenciálokat, illetve a (93) egyenletből a hullámfüggvényeket. Ezeket itt nem vizsgáljuk, helyette a két differenciálegyenlet polinom típusú megoldásaira koncentrálnunk.

### 3.3.1 A konfluens Heun-egyenlet polinom megoldásai [3]

A Konfluens Heun-egyenlet nem szimmetrikus kanonikus formája, (89)-ből és a 10. táblázatból vett függvényekből felírható:

$$\frac{d^2 H_c}{dz^2} + \left( \alpha + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} \right) \frac{dH_c}{dz} + \left( \frac{\alpha\beta z - \sigma}{z(z-1)} \right) H_c(z) = \quad (3.3.5)$$

A  $H_c(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma; z)$  függvényt a  $z$  változó szerint sorba fejtjük a  $z=0$  szinguláris pont körül:

A rekurzió határfeltételeiként megköveteljük, hogy

$$C_{-1}=0 \text{ és} \quad (3.3.6)$$

$$C=0 \text{ teljesüljön.} \quad (3.3.7)$$

$$H_c(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k, \quad (3.3.8)$$

$C_k$  sorfejtési együttható az alábbi három tagú rekurziós relációból határozható meg:

$$(k+1)(\gamma+k)C_{k+1} = \alpha(k-1+\beta)C_{k-1} + [k(k-1+k(\gamma+\delta-\alpha)-\sigma)]C_k. \quad (3.3.9)$$

Ha feltételezzük, hogy  $\gamma \neq -N$  és  $\gamma \neq -N-1$ , akkor a rekurziót lezárhatjuk a  $k=N$  tagnál, amennyiben az alábbi feltételek teljesülnek:

$$0 = (N+1)(\gamma+N)C_{N+1}^{(N)} = \alpha(N-1+\beta)C_{N-1}^{(N)} + [N(N-1) + N(\gamma+\delta-\alpha) - \sigma]C_N^{(N)}$$

$$0 = (N+2)(\gamma+N+1)C_{N+2}^{(N)} \quad (3.3.10)$$

$$= \alpha(N+\beta)C_N^{(N)} + [(N+1)N + (N+1)(\gamma+\delta-\alpha) - \sigma]C_{N+1}^{(N)} \quad (3.3.11)$$

(3.3.10)-ben  $C_{N-1}^{(N)}$  és  $C_N^{(N)}$  közötti kapcsolat biztosítja, hogy  $C_{N+1}^{(N)}=0$  teljesül

illetve ez és  $\beta - N$ , biztosítja  $C_{N+2}^{(N)} = 0$ -t.,

$\alpha \neq 0$  esetén a feltételek így is írhatók:

$$\beta = -N \quad , \quad (3.3.12)$$

$$C_{N-1}^{(N)} = \frac{1}{\alpha} [N(N-1) + N(\gamma + \delta - \alpha) - \sigma] C_N^{(N)} . \quad (3.3.13)$$

Ilyen feltételekkel a *Konfluens Heun-egyenlet* az alábbi polinomalakra egyszerűsödik:

$$H_c(\alpha, \beta = -N, \gamma, \delta, \sigma; z) = \sum_{k=0}^N C_k^{(N)} z^k \quad , \quad (3.3.14)$$

Nulladrendű polinom, konstans függvény , csak akkor lehetséges, ha,  $R(z)=0$ , vagyis  $N=0$ , érvényes ha  $R(z)=0$

$$\frac{\alpha\beta z - \sigma}{z(z-1)} = 0 \quad , \quad \text{ha a számláló zérus, azaz} \quad \alpha\beta z - \sigma = 0, \text{innen, ha } \sigma = 0 : \text{ mivel}$$

$$\beta = -N = 0.$$

Tekintsük a következő speciális paraméter értékeket:

$$\gamma = \alpha + 1, \delta = -2, \sigma = \alpha(2 - N) \quad , \quad \text{normálva} \quad (3.3.15)$$

$$C_k^{(N)} = \frac{\alpha^{k-1} (N-1)! \alpha!}{k!(N-k)!(\alpha+k)!} [\alpha(N-k) - k(k-1)], \quad C_0^{(N)} = 1, \quad (3.3.16)$$

Belátható, hogy ilyenkor a

(3.3.16) együtthatók teljesítik a (3.3.9) rekurziót.

A fenti paramétercsomaggal az aktuális alakja a *Konfluens Heun-egyenlet*nek:

$$z(z-1) \frac{d^2 F}{dz^2} + [\alpha z(z-1) + (\alpha+1)(z-1) - 2z] \frac{dF}{dz} + \mathbf{R}(z) \mathbf{F}(z) = \mathbf{0}, \quad (3.3.17)$$

$\mathbf{R}(z) = \alpha(-Nz + N - 2)$ , itt csak  $\alpha, N$  paraméterektől függ az egyenlet

Változótranszformációval  $\mathbf{z} = -\frac{y}{\alpha}$  kapjuk:

$$-y(y + \alpha) \frac{d^2 F}{dy^2} + [(y - \alpha)(y + \alpha + 1)] \frac{dF}{dz} + [-Ny + \alpha(2 - N)] F(z) = 0, \quad (3.3.18)$$

itt az  $F(y) = L_N^{(\alpha)}(y)$ , ami egy  $X_1$ -típusú kivételes Laguerre-polinom, (3.3.8) pedig az általa kielégített differenciálegyenlet. [6,24]

A *Konfluens Heun-függvény* ilyen speciális reprezentációban (3.3.14) és paraméterek változtatásával:

$$L_N^{(\alpha)}(y) = H_c(\alpha, \beta = -N, \gamma = \alpha + 1, \delta = -2, \sigma = \alpha(2 - N); z = -y/\alpha). \quad (3.3.19)$$

(420)-ból:  $\alpha(N - k) - k(k - 1)$  előjelváltása mellett a

kivételes Laguerre-polinom „kalapos”(kivételes) koefficiense:

e polinom együtthatói a (3.3.16) együtthatók átnormálásával adódnak:

$$C_k^{(\widehat{N})} = \frac{(-1)^k (\alpha + N - 2)! (\alpha + N)}{k! (N - k)! (\alpha + k)!} (\alpha(2k - N) + k(k - 1)) = \quad (3.3.20)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} (\alpha + N)!}{\alpha^{k-1} \alpha! (N - 1)! (\alpha + N - 1)} C_k^{(N)}.$$

(3.3.19) kivételes Laguerre-polinom előállíthatók sima, általánosított Laguerre polinomokból az alábbi formulával:

$$L_N^{(\alpha)}(y) = -(y + \alpha + 1)L_{N-1}^{(\alpha)}(y) + L_{N-2}^{(\alpha)}(y). \quad (3.3.21)$$

Ez az egyenlőség igazolható az általánosított Laguerre polinomok együtthatóira vonatkozó képlet [8] behelyettesítésével.

### 3.3.2 A Heun-egyenlet polinom megoldásai

A paramétereket determinálja az alábbi összefüggés:

$$\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1. \quad (3.3.2)\text{-ből}$$

#### Ezen eset paraméterválasztásai

A 10. táblázatból behelyettesítve a  $Q(z)$  és  $R(z)$  függvényeket a (89) egyenletbe adódik a Heun egyenlet:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left( \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-d} \right) \frac{dH}{dz} + \left( \frac{ABz-q}{z(z-1)(z-d)} \right) H(z) = 0, \quad (3.3.22)$$

Fejessük ki a  $H$  megoldást a  $z=1$  szinguláris pont környezetében hatványsorba fejtéssel:

$$H(A, B, \gamma, \delta, d, q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \left( \frac{z-1}{2} \right)^k, \quad (3.3.23)$$

A (3.3.2) összefüggéssel kiejtve az  $\varepsilon$  paramétert

kaphatjuk az alábbi három tagú rekurziós relációt:

$$\begin{aligned} & (k+1)(\gamma+k)(d-1)C_{k+1} = \\ & = [k(k-1)(3-d) + k(\gamma(1-d) - \delta(1+d) + 2A + 2B + 2) + AB - q]C_k + \\ & + 2[(k-1)(k-2) + (k-1)(A+B+1) + AB]C_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

A határfeltételek is megköveteltek  $C_{-1}=0$ ,  $C_{-2}=0$ .

Ismét feltételezve, hogy  $\gamma \neq -N$  és  $\gamma \neq -N-1$ ,

$k=N$  esetén fennállnak a rekurziót lezáró feltételek:

$$\begin{aligned} & (N+1)(\gamma+N)(d-1)C_{N+1} = \\ & = [N(N-1)(3-d) + N(\gamma(1-d) - \delta(1+d) + 2A + 2B + 2) + AB - q]C_N + \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned}
& + 2 [(N-1)(N-2) + (N-1)(A+B+1) + AB]C_{N-1} \quad \text{és } (N+1)\text{-re:} \\
& (N+2)(\gamma+N+1)(d-1)C_{N+2} = \\
& = [N(N+1)(3-d) + (N+1)(\gamma(1-d) - \delta(1+d) + 2A + 2B + 2) + AB - q]C_{N+1} + \\
& + 2 [N(N-1) + N(A+B+1) + AB]C_N \quad , \quad (3.3.26)
\end{aligned}$$

Ha (3.3.25) jobb oldala nulla, illetve  $C_N, C_{N-1}$  arányos, akkor  $C_{N+1} = 0$  teljesülnie kell. Továbbá, ha (3.3.26)  $C_N$  együtthatója nulla, akkor  $C_{N+2} = 0$  is teljesül, akkor a rekurzió lezárul. Az utóbbi feltétel ilyenkor :

$$AB = -N(N+A+B) \quad (3.3.27)$$

Ez a reláció érvényes  $A = -N$  vagy  $B = -N$  esetében is.

Ez az eset hasonló ahhoz a feltételhez, amely mellett a  ${}_2F_1$  hipergeometrikus függvény polinomra redukálódik, ahol a és b felcserélhető, és

bármelyikük  $(-N)$ -nek választható. Összefoglalva, a rekurzió lezárásának feltételei:

$$A = -N,$$

$$C_{N-1}^{(N)} = \frac{1}{2(N-B-1)} [N^2(1-d) + N(\gamma(1-d) - \delta(1+d) + B-1) - q] C_N^{(N)}. \quad (3.3.28)$$

A polinom megoldása a Heun-egyenletnek így:

$$H(A = -N, B, \gamma, \delta, d, q; z) = \sum_{k=0}^N C_k^{(N)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k \quad . \quad (3.3.29)$$

Ahogy korábban szerepelt az egyenleteink azonosak azokkal, amelyeket  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow A$ -ból kaptunk

A Heun-egyenlet eképp illeszthető az  $X_1$ -típusú kivételes  $P_N^{(\alpha, \beta)}$  Jacobi polinomokat tartalmazó differenciálegyenlethez. [6,24] A polinomok  $\alpha \neq \beta$  esetén definiáltak és kielégítik az alábbi egyenletet:

$$(z^2 - 1) \frac{d^2 F}{dz^2} + 2a \frac{1-dz}{d-z} (z-c) \frac{dF}{dz} + \left[ -2a \frac{1-dz}{d-z} - (N-1)(\alpha + \beta + N) \right] F(z) = 0, \quad (3.3.30)$$

ahol

$$a = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad d = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \quad c = \frac{\beta + \alpha + 2}{\beta - \alpha} \quad (3.3.31)$$

megmutatható, hogy az alábbi helyettesítésekkel

$$A = -N, \quad B = N - 1 + \beta + \alpha, \quad \gamma = \alpha + 1, \quad \delta = \beta + 1, \quad \epsilon = -2, \quad d = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}, \quad (3.3.32)$$

$$q = -\frac{1}{\beta - \alpha} [N^2(\alpha + \beta) + N(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1) - 4\alpha\beta]$$

a (3.3.30) alakot ölti a Heun-egyenlet

Ez azt jelenti, hogy egy normálási faktor erejéig érvényes,

$$\widehat{P}_N^{(\alpha, \beta)}(z) = H(A = -N, B = N - 1 + \alpha + \beta, \gamma = \alpha + 1, \delta = \beta + 1, d, q; z), \quad (3.3.33)$$

ahol b és q a (3.3.38) kapcsolatban van az  $\alpha$  és  $\beta$  paraméterekkel.

A Heun-egyenlet megoldása és az  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi polinomok közötti, illetve az Általánosított hipergeometrikus függvények közti kapcsolat részletesen [42]-ben szerepel.

Mivel az  $X_1$ -típusú kivételes Jacobi polinomok kifejezhetőek a klasszikus, általános Jacobi polinomokkal így a kiterjesztett  $C_k^{(N)}$  sorfejtési együttható szintén kifejezhető a klasszikus Jacobi együtthatóival:

$$\widehat{P}_N^{(\alpha, \beta)}(z) = -f_N P_N^{(\alpha, \beta)}(z) + 2dg_N P_{N-1}^{(\alpha, \beta)}(z) - h_N P_{N-2}^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (3.3.34)$$

$N=0, 1, 2, \dots$

$$f_N = \frac{N(\alpha + \beta + N)}{(\alpha + \beta + 2N - 1)(\alpha + \beta + 2N)}$$

$$g_N = \frac{(\alpha + N)(\beta + N)}{(\alpha + \beta + 2N - 2)(\alpha + \beta + 2N)}$$

$$h_N = \frac{(\alpha + N)(\beta + N)}{(\alpha + \beta + 2N - 2)(\alpha + \beta + 2N - 1)}. \quad (3.3.35)$$

A klasszikus Jacobi polinomok formulája[7,8] a Gamma-függvénnyel:

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha + N + 1)}{N! \Gamma(\alpha + \beta + N + 1)} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + N + k + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k. \quad (3.3.36)$$

Mivel a Heun-egyenlet megoldásait a (3.3.22) egyenletben ugyanebben az alakban fejtettük ki, az együtthatókat a (3.3.31) egyenletben szereplő együtthatók és a (3.3.35) egyenletben szereplő  $f_N, g_N, h_N$  kombinációból kaphatjuk meg.

**A fenti eredmények elsőként a [3] munkánkban jelentek meg.**

[3]:(Lévai,G.;Soltész,T. Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations. *Mathematics* **2025**,1,0. <https://doi.org/10.3390/math1010000>),11.p.,(30)-(37)

Nézzük meg példa gyanánt (3.3.36) és (3.3.35) milyen alakot ölt, ha mondjuk,  **$N=2$  esetén**

$$P_{N=0}^{(\alpha,\beta)}(z) = 1$$

$$P_{N=1}^{(\alpha,\beta)}(z) = \alpha + 1 + (\alpha + \beta + 2) \left(\frac{z-1}{2}\right) \quad (3.3.37)$$

$$P_{N=2}^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} + (\alpha + \beta + 3)(\alpha + 2) \left(\frac{z-1}{2}\right) + (\alpha + \beta + 3) \frac{(\alpha+\beta+4)}{2} \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 .$$

$$f_N = \frac{2(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}$$

$$g_N = \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)},$$

$$h_N = \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} . \quad (3.3.38)$$

$$\widehat{P}_N^{(\alpha,\beta)}(z) = -f_N P_N^{(\alpha,\beta)}(z) + 2d g_N P_{N-1}^{(\alpha,\beta)}(z) - h_N P_{N-2}^{(\alpha,\beta)}(z) =$$

$$= -\frac{2(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} + \frac{1}{2} (\alpha + \beta + 3)(\alpha + 2)(\alpha + \beta + 2)(z - 1) +$$

$$+ \frac{(\alpha+\beta+3)}{8} (\alpha + \beta + 4)(z - 1)^2 + \frac{2(\alpha+\beta)}{\beta-\alpha} \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)} (\alpha + 1) +$$

$$- \frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} . \quad (3.3.39)$$

## 4.Összefoglaló

A dolgozatban az egydimenziós, időtől független Schrödinger-egyenlet egzakt megoldásainat vizsgáltam két széles körben alkalmazott módszer felhasználásával. Az egyik egy transzformációs eljárás [35,36,69], amellyel a Schrödinger-egyenlet egy változótranszformációval a matematikai fizika valamely másodrendű differenciálegyenletének alakjára hozható. E módszerrel közvetlenül elérhetők a Natanzon osztályú potenciálok, amelyek a hipergeometrikus és a konfluens hipergeometrikus differenciálegyenletekből nyerhetők. Even esetekben a kötöttállapotú hullámfüggvények Jacobi- illetve általánosított Laguerre-polinomokkal fejezhető ki. E potenciálosztályba tartoznak a legismertebb egzaktul megoldható potenciálok (radiális harmonikus oszcillátor, Coulomb, Morse, Pöschl-Teller, Rosen-Morse I, II, Eckart, Scarf I, II).

A másik alkalmazott módszer a Szuperszimmetrikus Kvantummechanika [10,11], amely lehetővé tesz új, egzaktul megoldható potenciálok generálását egy ismert, megoldható potenciálból kiindulva. A szuperszimmetria következményeként a két potenciál energiaspektruma lényegében azonos.

A jelen dolgozatban a Natanzon osztályú potenciálok mellett azok körén túli potenciálok vizsgálatát is végeztem. Ilyenek a radiális harmonikus oszcillátor, illetve három azonos alosztályba tartozó potenciál (Scarf I, II, általánosított Pöschl-Teller) racionális kiterjesztései [6,25,26], Az utóbbiak kötöttállapotú hullámfüggvényei az  $X_1$  típusú kivételes Laguerre, illetve Jacobi polinomokkal fejezhető ki [23,24], maguk a potenciálok pedig az említett transzformációs módszerrel leszámaztathatóak e polinomok differenciálegyenleteiből. Ismeretesek további potenciálok is, amelyek hasonló módon adódnak a Heun-féle differenciálegyenlet [41] különféle (általános, konfluens, bikonfluens, trikonfluens, kettős konfluens) változataiból.

A dolgozatban kiterjedten alkalmaztam a szuperszimmetrikus kvantummechanika transzformációit, amelyek sértetlen, illetve spontán sérült szuperszimmetria esetén fogalmazhatók meg. E transzformációk egy ismert potenciállal felírt Schrödinger-egyenlet megoldásaiból származtathatók, annak különféle határfeltételeket teljesítő zérushelyet nem tartalmazó megoldásaiból. A sértetlen esetben a megoldás az alapállapotú hullámfüggvény, amely normálható lévén eltűnik a határokon, míg a sérült esetben a megoldás valamelyik határon végtelenné válik és így nemfizikaiként értelmezhető. Ennek megfelelően négy típusú szuperszimmetrikus transzformáció definiálható: egy ( $T_1$ ) sértetlen, három ( $T_2, T_3, T_4$ ) pedig sérült szuperszimmetriával.

Munkám során e szuperszimmetrikus transzformációkat vizsgáltam különféle potenciálok alkalmazásával. Elsőként a *radiális harmonikus oszcillátor* szuperszimmetrikus partnerpotenciáljait állítottam elő *sértetlen* és *spontán*

sértett szuperszimmetria esetén [1]. Ezekhez a  $(T_1, T_2, T_3, T_4)$  transzformációkhoz a megfelelő Schrödinger egyenlet olyan megoldásait tekintettem, amelyek az origóban, illetve aszimptotikusan regulárisak, illetve irregulárisak. Alkalmos próbafüggvényeket választottam, amelyekkel különféle partnerpotenciálokat számoltam ki és kaptam.

A megválasztott legegyszerűbb esetekben a partnerpotenciálok alakja mind a négy transzformáció esetében ugyanolyannak (alakinvariánsnak) mutatkozott/mutatkoztak.

Ezt követően kimutattam, hogy a próbafüggvény általánosabb választásával  $T_3$  és  $T_4$  típusú transzformációkkal összekapcsolhatók a radiális harmonikus oszcillátor, illetve annak a racionális kiterjesztéseiként adódó potenciálok. Még általánosabb próbafüggvényekkel  $T_1$  és  $T_2$  típusú transzformációk kötnek össze racionálisan kiterjesztett radiális harmonikus oszcillátor potenciálokat, igazolva azok alakinvariánciáját is. E potenciálok hullámfüggvényei  $X_1$  típusú kivételes Laguerre polinomokkal fejezhetők ki.

További potenciálokat vizsgáltam a SUSYQM korábbi transzformációs módszerével megadva a megfelelő potenciálokat, alapállapot hullámfüggvényeiket és az energiaspektrum alakjait [2]. A formalizmussal egyszerre három potenciál (*általánosított Pöschl-Teller, Scarf I., Scarf II.*) egységes absztrakt tárgyalását tettem lehetővé, addig a pontig, amikor a konkrét határfeltételeket kell kiróni a megoldásokra: a három potenciál a valós féltengelyen, véges tartományon, illetve a teljes valós tengelyen van értelmezve. Ebben az esetben a megoldások Jacobi-polinomokkal kerültek felírásra. A próbafüggvény legegyszerűbb alakját véve a szuperszimmetrikus partner potenciálok itt is mind a négy transzformáció esetében azonos típusúnak bizonyultak.

A próbafüggvény általánosabb esetében az általánosított Pöschl-Teller és a Scarf I potenciálok esetében  $T_3$  és  $T_4$  típusú transzformációk kötötték össze a potenciálokat a racionális kiterjesztéseikkel. A legáltalánosabb próbafüggvényt alkalmazva  $T_1$  és  $T_2$  transzformációkat írtam le e potenciálok racionálisan kiterjesztett változatai között, igazolva azok alakinvariánciáját. E potenciálok hullámfüggvényei  $X_1$  típusú kivételes Jacobi polinomokkal fejezhetők ki. Rámutattam, hogy a valós Scarf II potenciál esetén e transzformációk nem értelmezhetőek.

Kimutattam, hogy a fenti vizsgálatokban szereplő  $X_1$  típusú kivételes ortogonális Laguerre, illetve Jacobi polinomok megkaphatók a konfluens Heun, illetve a Heun-féle differenciálegyenlet polinom típusú megoldásaiként [3].

## 4. Summary

In this thesis, I investigated exact solutions of the one-dimensional, time-independent Schrödinger equation using two widely applied methods. One of these is a transformation approach [35,36,69], by which the Schrödinger equation can be brought, via a change of variables, into the form of a second-order differential equation from mathematical physics. Using this method, the Natanzon class of potentials can be obtained directly; these potentials arise from the hypergeometric and confluent hypergeometric differential equations. In such cases, the bound-state wave functions can be expressed in terms of Jacobi and generalized Laguerre polynomials. This class includes the most well-known exactly solvable potentials (the radial harmonic oscillator, Coulomb, Morse, Pöschl–Teller, Rosen–Morse I and II, Eckart, and Scarf I and II potentials).

The other method employed is Supersymmetric Quantum Mechanics (SUSYQM) [10,11], which makes it possible to generate new exactly solvable potentials starting from a known solvable one. As a consequence of supersymmetry, the energy spectra of the two partner potentials are essentially identical.

In the present work, in addition to Natanzon-class potentials, I also examined potentials lying beyond this class. These include rational extensions of the radial harmonic oscillator and of three potentials belonging to the same subclass (Scarf I, Scarf II, and the generalized Pöschl–Teller potentials) [6,25,26]. The bound-state wave functions of the latter can be expressed in terms of  $X_1$ -type exceptional Laguerre and Jacobi polynomials [23,24], while the potentials themselves can be derived from the differential equations of these polynomials using the above-mentioned transformation method. Further potentials are also known that arise in a similar way from various forms (general, confluent, biconfluent, triconfluent, and double-confluent) of the Heun differential equation [41].

Throughout the thesis, I extensively applied the transformations of supersymmetric quantum mechanics, which can be formulated in cases of unbroken and spontaneously broken supersymmetry. These transformations can be derived from solutions of the Schrödinger equation written for a known potential, specifically from its nodeless solutions satisfying various boundary conditions. In the unbroken case, the solution is the ground-state wave function, which is normalizable and therefore vanishes at the boundaries, whereas in the broken case the solution diverges at one of the boundaries and is thus interpreted as non-physical. Accordingly, four types of supersymmetric transformations can be defined: one ( $T_1$ ) with unbroken supersymmetry and three ( $T_2, T_3, T_4$ ) with broken supersymmetry.

In my work, I investigated these supersymmetric transformations for various potentials. First, I constructed the supersymmetric partner potentials of the radial harmonic oscillator in the cases of unbroken and spontaneously broken supersymmetry [1]. For the ( $T_1, T_2, T_3, T_4$ ) transformations, I considered

solutions of the corresponding Schrödinger equation that are regular or irregular at the origin and/or asymptotically. I chose suitable trial functions and used them to calculate and obtain various partner potentials.

In the simplest selected cases, the shapes of the partner potentials turned out to be identical (shape-invariant) for all four transformations.

Subsequently, I showed that with a more general choice of trial function,  $T_3$  and  $T_4$  type transformations can connect the radial harmonic oscillator with its rationally extended potentials. With even more general trial functions,  $T_1$  and  $T_2$  type transformations connect rationally extended radial harmonic oscillator potentials, thereby also confirming their shape invariance. The wave functions of these potentials can be expressed in terms of  $X_1$ -type exceptional Laguerre polynomials.

I also investigated further potentials using the earlier SUSYQM transformation method, providing the corresponding potentials, their ground-state wave functions, and the forms of their energy spectra [2]. This formalism allowed a unified abstract treatment of three potentials (the generalized Pöschl–Teller, Scarf I, and Scarf II potentials) up to the point where specific boundary conditions must be imposed on the solutions: the three potentials are defined on the positive real half-axis, on a finite interval, and on the entire real axis, respectively. In this case, the solutions were expressed in terms of Jacobi polynomials. Taking the simplest form of the trial function, the supersymmetric partner potentials again proved to be of the same type for all four transformations.

For a more general trial function, in the cases of the generalized Pöschl–Teller and Scarf I potentials,  $T_3$  and  $T_4$  type transformations connected the potentials with their rational extensions. Using the most general trial function, I described  $T_1$  and  $T_2$  transformations between rationally extended versions of these potentials, thereby confirming their shape invariance. The wave functions of these potentials can be expressed in terms of  $X_1$ -type exceptional Jacobi polynomials. I pointed out that for the real Scarf II potential these transformations are not well defined.

Finally, I demonstrated that the  $X_1$ -type exceptional orthogonal Laguerre and Jacobi polynomials appearing in the above investigations can be obtained as polynomial-type solutions of the confluent Heun and Heun differential equations, respectively [3].

## **5. Köszönetnyilvánítás**

Köszönettel tartozom elsősorban Dr. Lévai Géza témavezetőmnek, aki 2016-tól mindig segített a területe tanulmányozásában, a kitűzött feladatokkal fokozatosan nyitott ajtókat újabb, magasabb szintekre. Köszönöm a közlemények, számítások elkészítésében nyújtott önzetlen, atyai segítségét. Hálás vagyok, hogy hétvégéken és ünnepek alatt is hajlandó volt együtt gondolkodni és a levezetések útvesztőjében irányt mutatott levelezéseink és személyes találkozásaink során. Köszönöm Dr. Kruppa András Tibor és Dr. Gulyás László felkészítését a komplex vizsgámra, hálás vagyok a szakmai segítségükért. Köszönet Dr. Sohler Dórának értékes, aktuális tanácsaiért. Köszönöm munkahelyi vezetőmnek, Köveskúti Péternek, hogy tehermentesített, bátorított és lehetővé tette utazásaimat Debrecenbe. Szeretettel köszönöm feleségemnek, Soltész-Kuti Viviennek, hogy mindenben támogatott, így Család, munka mellett is folytathattam tanulmányaimat.

## 6. Publikációk, felhasznált irodalom, hivatkozások listája

- 1. Lévai G.; Soltész T. Unified supersymmetric transformations for the harmonic oscillator and its rational extension. *Eur.J.Phys.* **2020**,41,025403. (23)(37)
- 2. Soltész T.;Pethő L.F.;Lévai G. Unified Supersymmetric Description of Shape-Invariant Potentials Within and Beyond the Natanzon Class. *Symmetry* **2024**, 16,174. doi:10.3390/sym16020174 (44)
- 3. Lévai G.;Soltész T.Schrödinger Potentials with Polynomial Solutions of Heun-Type Equations. *Mathematics* **2025**,1,0.
- 4. F.Ravndal. Elementary Supersymmetry **1990** 300-302 p.,University of Oslo, Norway
- 5. F.Cooper, A.Khare, U.Sukhatme: Supersymmetry in Quantum Mechanics, 2001.Singapore:World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd
- 6. Quesne C. Exceptional orthogonal polynomials, exactly solvable potentials and supersymmetry. *J.Phys. A Math.Theor.* **2008**,41,392001.(15)(16)(19)
- 7. A.P. Prudnikov,Y.A.Brychkov, O.I.Marichev, Integrals and Series, Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
- 8. Abramowitz M.;Stegun I.A. *Handbook of Mathematical Functions*;Dover;New York, NY USA,1970. (17)(3)(2)
- 9. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. An extension of Bochner's problem:Exceptionalinvariant subspaces. *J.Approx.Theor.***2010**,162,987 (16)
- 10. Witten E **1981** *Nucl.Phys. B* 188 513 (1)(7)
- 11. Cooper F., Khare A. and Sukhatme U. **1995** *Phys. Rep.* 251 267 (2)(7)(8)
- 12. Infeld L. and Hull T D **1951** *Rev.Mod.Phys.* 23 21(5)(11)(1)
- 13. Shrödinger E. **1940** *Proc. R. Irish Acad.* A 46 9 and 183(6)(12)(6)
- 14. Shrödinger E. **1941/1942** *Proc. R. Irish Acad.* A 47 53-54.(7)(13)
- 15. Natanzon G.A. **1971** *Vest. Leningrad Univ.* 10 22 (8)
- 16. Natanzon G.A. **1979** *Teor. Mat. Fiz.* 38 146-153 (8)(1)(4)
- 17. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R.**2010** *J.Phys.A:Math.Theor.*43 434016 (26)
- 18. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2012** *Contemp.Math.* 563 51.(27)
- 19. Cordero P and Salamó S **1991** *J.Phys. A : Math Gen.* 24 5299-5305. (9)(2)
- 20. Függe S 1971 *Practical Quantum Mechanics* (Berlin: Springer) (10)(5)
- 21. Batic D,Williams R and Nowakowski M **2013** *J.Phys. A:Math.Theor.*46 245204 (11)(29)

- 22. Ishkhanyan T A and Ishkhanyan A M **2017** Solutions of the bi-confluent Heun equation in terms of the Hermite functions *Ann. Phys.* 383 79-91 (12)(28)
- 23. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2009** *J. Math. Anal. Appl.* 359, 352 (13)(14)(17)
- 24. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2010** *J. Approx Theory* 162 987 (14)(15)(35)
- 25. Bagchi B, Quesne C and Roychoudhury R **2009** *Pramana J. Phys.* **73** 337 (16)(17)(43)
- 26. Midya B and Roy B **2013** *J. Phys. A: Math.Theor.* 46 175 201 (18)(18)
- 27. Bender C M et al **2018** *PT Symmetry in Quantum and Classical Mechanics* ( London: World Scientific Publishing Europe Ltd.) (19)
- 28. Frank W M, Land D J and Spector R M **1971** *Rev. Mod. Phys.* 43 36 (20)
- 29. Sukumar C V **1985** *J. Phys. A: Math. Gen.* 18 2937 (21)(26)
- 30. Ancarani L U and Braye D **1992** *Phys. Rev. A* 46 206 (22)
- 31. Lévai G, Baye D and Sparenberg J-M **1997** *Lect. Notes Phys.* 488 363 (23)(29)
- 32. Odake S and Sasaki R **2009** *Phys. Lett. B* 679 414 (24)(20)
- 33. Odake S and Sasaki R **2010** *Phys. Lett. B* 684 173 (25)(47)
- 34. Lévai G and Roy P **1999** *Phys. Lett. A* 264 117 (28)
- 35. Bhattacharjie A;Sudarshan E.C.G. A class of solvable potentials. *Nuovo Cim.* **1962**,25, 864-879. (4)(3)
- 36. Lévai G. A search for shape-invariant solvable potentials. *J. Pys. A Math. Gen.* **1989**, 22, 689-702. (5)(12)
- 37. Witten E. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nucl. Phys. B* **1981**, 188, 513 (6)
- 38. Junker G. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*; Sppringer: Berlin 1996 (8)(3)
- 39. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires. *C. R. Acad.Sci.* **1882**, 94, 1456 (9)(9)
- 40. Gendenshtein L. E. Derivation of exact of the Schrödinger equation by means of supersymmetry. *JETP Lett.* **1983**,38,356-359.(4)(10)(11)
- 41. Ronveaux A. (Ed.) *Heun's Differential Equations*; Oxford University Press: Oxford,UK, 1995 (22)
- 42. Takemura K. Heun's equqtion, generalized hypergeometric function and exceptional Jacobi polynomial. *J.Phys.A Math Theor.* **2012**, 45, 085211.(20)(42)
- 43. Lévai G. Potentials from the Polynomial Solutions of the Confluent Heun Equation *Symmetry* **2023**,15,461 (21)(34)
- 44. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the general Heun functions. *Ann.Phys.* **2018**, 388 456-471.(22)(26)
- 45. Cooper F.;Ginocchio J. N.; Khare A. Relationship between supersymmetry and solvable potentials. *Phys. Rev. D* **1987**,36,2458 (24)

- 46. Odake S ; Sasaki R. Krein-Adler transformations for shape-invariant potentials and pseudo virtual states. *J. Phys.A* **2013**,46,245201 (25)
- 47. Sukumar C. V. Supersymmetric quantum mechanics of one dimensional system. *J.Phys. A Math. Gen.* **1985**,18,2917 (27)
- 48. Ancarani L.U.;Baye D. Iterative supersymmetric construction of phase-equivalent potentials. *Phys.Rev. A* **1992**, 46,206. (28)
- 49. Baye D.;Sparenberg J-M. Supersymmetric transformations of real potentials on the line. *J.Pys. A Math.Gen.* **1995**,28,5079. (30)
- 50. Bender C. M.;Tateo R.;Dorey P.E.;Dunning T.C.;Lévai G.;Kuzhel S.;Hook D. W. *PT Symmetry in Quantum and Classical Physics*;WSPU Ltd.:London, UK, **2019** (35)(15)
- 51. Acar Y. C. ;Acevedo L;Kuru S. *Phys.Scr.* **2023**,98,125229. (37)
- 52. Yadav R. K.;Kumari N.;Khare A.;Mandal B.P. Group theoretic approach to rationally extended shape invariant potentials. *Ann.Phys.* **2015**,359, 46-54. (38)
- 53. Lévai G. A class of exactly solvable potentials related to the Jacobi polynomials. *J. Phys. A Math Gen.* **1991**,24,131. (39)
- 54. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials I. One-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.* **1984**,152,203. (40)
- 55. Ginocchio J.N.A class of exactly solvable potentials II. The three-dimensional Schrödinger equation. *Ann Phys.* **1985**,159,467.(41)
- 56. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. **2010** *J. Phys.A Math.Theor.*,43,434016. (48)(21)
- 57. Gómez-Ullate D.;Kamran N.;Milson R. *Contemp.Math.* 2012,563,51.(49)
- 58. Milson R. Liouville transformation and exactly solvable Schrödinger equations. *Int. J. Theor.Phys.* **1998**, 37,1735.(44)
- 59. Natanzon G. Overlapping of Lévai's and Milson's  $e$ -tangent-polynomial potentials. along symmetric curves. *Axioms* **2023**,12,584.(45)
- 60. Miller W.J. *Lie Theory of Special Functions*: New York,NY,USA,1968(10)
- 61. Lévai G.  $PT$  symmetry in Natanzon-class potentials. *Int.J.Theor Phys.* **2015**,54,2724 (13)
- 62. Ishkhnyan A. M.;Dorey P.E.;Krainov V. Discretization of Natanzon potentials. *Eur.Phys.J.Plus* **2016**,141,342. (14)
- 63. Bochner S. Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme. *Math. Z.* **1929**,29,730 (16)
- 64. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit vier Verzweigungspunkten. *Math.Annalen* **1889**,33,51.(23)
- 65. Manning M.F. Exact solutions of the Schrödinger equation. *Phys.Rev.* 1935,48,161 (25)
- 66. Ishkhanyan A. M. Schrödinger potentials solvable in terms of the confluent Heun functions. *Theor.Math.Phys.* **2016**,188,980.(27)

- 67. Ushveridze A.G. *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics*; Institute of physics Publishing: Bristol, UK, 1994. (31)
- 68. Natanzon G.  $X_1$ -Jacobi differential polynomials systems and related double-step shape-invariant Liouville potentials solved by exceptional orthogonal polynomials. *Axioms* **2025**,14,218. (45)
- 69. Lévai G.P.T Symmetry in Natanzon-class Potentials. *Int.J.Theor.Phys.* **2015**,54,2724.
- 70. Quesne C. Extending Romanowski Polynomials in quantum mechanics. *J.Math.Phys.* **2013**,54,122103. (33)
- 71. Raposo A.P.; Weber H.J.; Alvarez-Castillo D.E. Kirchbach M. Romanowski polynomials in selected physics models. *Cent.Eur.J.Phys.* **2007**,5,253. (34)
- 72. Marx György *Kvantummechanika Műszaki Bp.* 1964. 89.o.
- 73. Dutt R.; Khare A.; Varshni Y.P. New class of conditionally exactly solvable potential. *J.Phys.A Math.Theor.* **2012**,45,444020

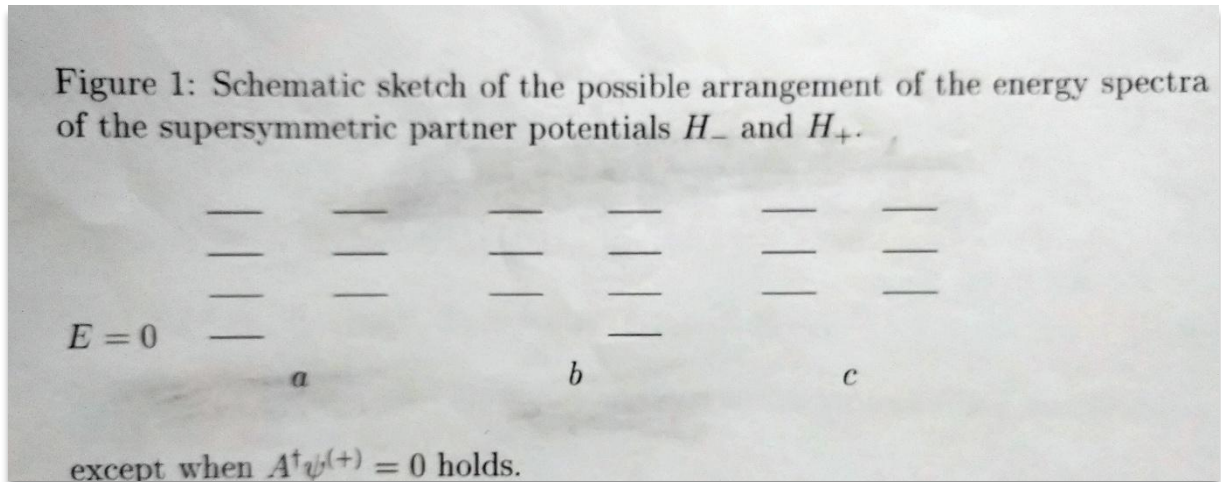
---

Számozások:

(1-73): dolgozatban szereplő hivatkozások

2020-as, 2024-es, 2025-ös közlemények hivatkozásai

## 7. Függelék



**1.ábra** Dr. Lévai Géza nyomán [53]

Három (a, b, c) eset baloldali oszlop  $H_-$ , jobb oldali  $H_+$  spektruma

$A$  operátor hatása  $\leftarrow$ ,  $A^+$  operátor hatása  $\rightarrow$  balról jobbra „lépteti az állapotot”

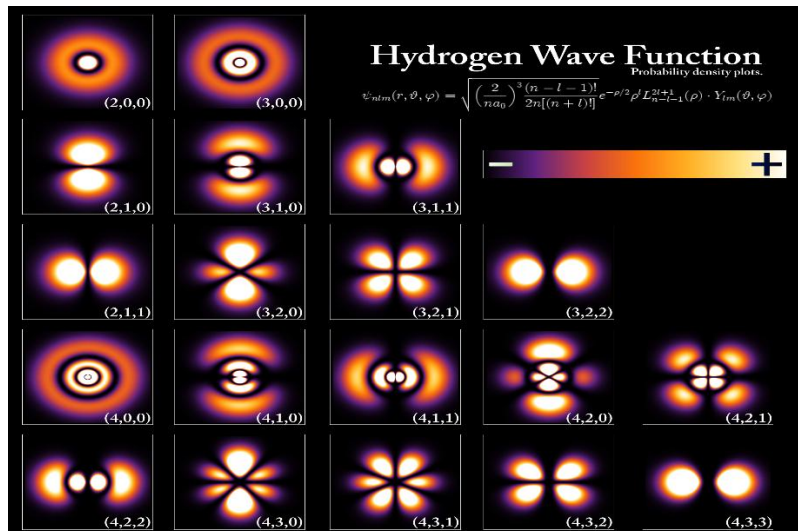
$A$ ,  $A^+$  léptető operátorok hatásai:

$$A\Psi_n \quad \rightarrow \quad \Psi_{n-1}, \quad A^+\Psi_{n-1}(l+1, x) \quad \rightarrow \quad \Psi_n(l, x)$$

**a) panel:**  $T_1$  transzformáció, *sértetlen SUSY* és a transzformáció eliminálja az alapállapotot, létezik fizikai relitás,  $E_{n+1}^- = E_n^+$   $n=0,1,2,\dots$   $E_0^- = 0$  skalázással,  $\epsilon = 0$ ,  $H_+$  spektrumában nincs nulla

**b) panel:**  $T_2$  eset, *sértett SUSY*, új alapállapot ( $V_+$ ) bevezetése/megjelenése, a faktorizációs energia:  $\epsilon \neq 0$

**c) panel:**  $T_3$  és  $T_4$  transzformáció esete, nincs „E shift”,  $\epsilon \neq 0$ , *sértett SUSY*, változatlan spektrum.



$$\Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = C(n, l) \exp(-\rho/2) \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

Fő- kvantumszám	Mellék- kvantumszám	Mágneses kvantumszám	Alhélj jelölés	Spin- kvantumszám	Elektronok max. száma
1	0	0	1s	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2
2	0	0	2s	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2 } 8 6
	1	1, 0, +1	2p	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	
3	0	0	3s	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2 } 18 6 } 10
	1	1, 0, +1	3p	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	
	2	2, 1, 0, +1, +2	3d	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	
4	0	0	4s	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2 } 32 6 } 10 } 14
	1	1, 0, +1	4p	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	
	2	2, 1, 0, +1, +2	4d	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	
	3	3, 2, 1, 0, +1, +2, +3	4f	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	

## 2.ábra

([https://medicalimaginghelp.blog.hu/2019/09/01/kvantummechanikai\\_atommodell](https://medicalimaginghelp.blog.hu/2019/09/01/kvantummechanikai_atommodell))

Példa:  $2p_{\frac{3}{2}}$ ,  $n=2$ , s,p,d alhéjak  $\rightarrow l$ : mellékkvantumszám,  $\frac{3}{2} : j$ , eredő,  $j=l+s$ ,

ahol **s**: spinkvantumszám

A képen látható hidrogén-valószínűségi hullám egyenlettel kiszámítható az elektron megtalálási valószínűsége, a világos részek jelölik, hogy hol fordul elő legnagyobbbrészt az elektron.



