



# **A centrálaxonometrikus leképezés és komputergrafikai alkalmazása**

Doktori értekezés tézisei

## **Central-axonometric mapping and its application in computer graphics**

PhD. Theses

**Dr. Schwarcz Tibor**

Debreceni Egyetem

Debrecen, 2006.



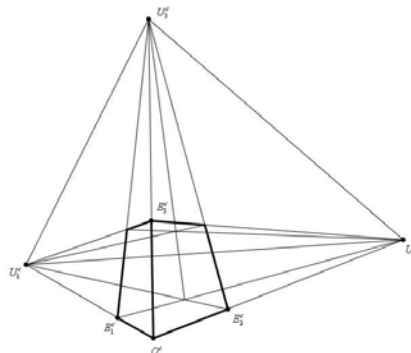
## CÉLKITŰZÉS

A dolgozat célja a centrálaxonometrikus leképezésekkel kapcsolatos eredmények összefoglalása valamint olyan új eredmények bemutatása, melyek lehetővé teszik a centrálaxonometria komputergrafikai alkalmazását.

## A DOLGOZATBAN SZEREPLŐ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

A centrálaxonometria klasszikus értelmezése szintetikus úton történik. A leképezést egy Desargues-féle háromszög párral adhatjuk meg, konkrétan egy térbeli ortonormált Descartes rendszer egységpontjainak valamint a tengelyek végtelen távoli pontjainak képét adjuk meg a rajz síkján. Ezt az alakzatot nevezzük *axonometrikus referencia rendszernek*, jelölése:  $\phi:(O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$ . Egy tetszőleges térbeli pont képe a kettősviszony

invariancia alapján áll elő.



A dolgozatban a  $\phi:(O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$  rendszert az alábbi módon paraméterezem,

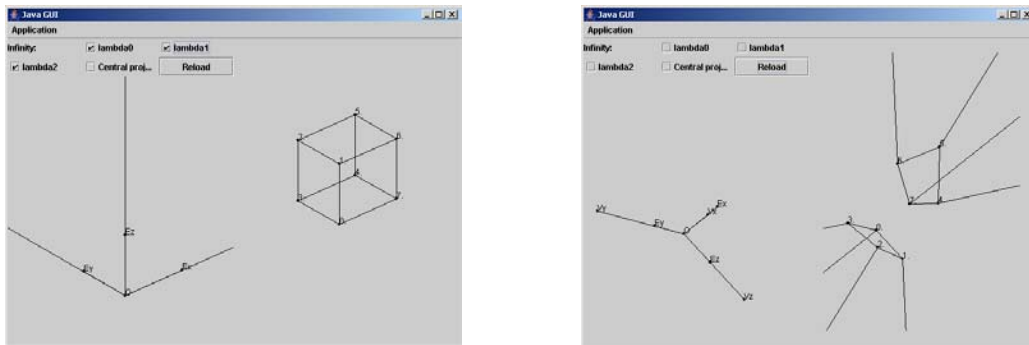
inhomogén koordináták esetében:  $O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_i^c = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ ,  $U_i^c = \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$

Így egyszerűen biztosítható az egységpontok és végtelen távoli pontok háromszögének perspektív vonatkozása.

A leképezés  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$  között valósul meg és természetesen lineáris. Homogén koordinátákat használva több módon is meghatározom a leképezéshez tartozó mátrixot, ami az alábbi alakú:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1-1}x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}y_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1-1} & \frac{1}{\delta_2-1} & \frac{1}{\delta_3-1} & 1 \end{bmatrix}$$

A  $\delta_i$ ,  $i=1,2,3$  értékeket végtelen nagyra választva megkapjuk a paralel axonometriát, így lehetővé válik a két leképezés egységes kezelése. Az alábbi képek ezt illusztrálják:



A grafikai alkalmazhatóság szempontjából fontos lehet, hogy a és a rajz-koordinátarendszer a világ koordinátarendszer egy síkján helyezkedjen el. Megmutatom, hogy a centrálaxonometri esetén- csakúgy mint centrálprojekcióban- a képsík párhuzamos eltolásakor a képek hasonlóak lesznek. Előállítok egy origón áthaladó síkra történő centrálaxonometriához tartozó mátrixot, amely az alábbi alakú:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1-1}x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}y_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}z_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}z_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}z_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1-1} & \frac{1}{\delta_2-1} & \frac{1}{\delta_3-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Bebizonyítom a leképezés centrális jellegét, azaz meghatározom a  $C$  pontot, amely lényegében a lineáris leképezés null tere:

$$c_1 = \frac{-(\delta_1 - 1)\delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

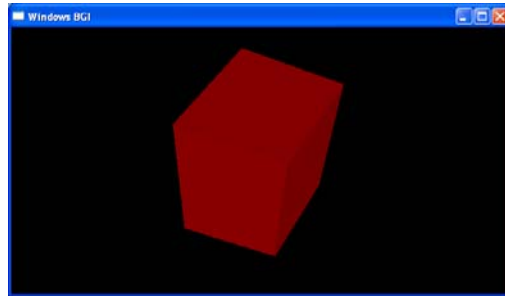
$$c_2 = \frac{\delta_1(\delta_2 - 1)\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_3 = \frac{-\delta_1\delta_2(\delta_3 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

A  $C$  pontról belátom, hogy a rajta áthaladó egyenesek pontjainak képe megegyezik. Ez alapján nyílik lehetőség arra, hogy a centrálaxonometriában is alkalmazzuk a láthatóságot biztosító eljárásokat. Megmutatom, hogy a leképezéshez tartozik úgynevezett eltűnési sík is, amely sík pontjai a képsík végtelen távoli pontjaiba képeződnek, és egyenlete:

$$\frac{1}{\delta_1 - 1}p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1}p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1}p_3 + 1 = 0$$

A fenti eredményeket konkrét példával illusztrálom, az alábbi kép egy kocka láthatóság szerinti árnyalását mutatja be:



Megmutatjuk, hogy a centrálaxonometriák két osztályba sorolhatóak, és az alábbi mátrixok valamelyikével hasonló mátrixsal írhatóak le:

$$\hat{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0) \text{ illetve } \hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 \mathbf{0} \right\rangle$$

Feltételt adok arra vonatkozóan, hogy egy centrálaxonometria mikor centrálprojekció és megmutatom, hogy ez akkor és csak akkor áll fenn, ha a transzformáció mátrixa hasonló a

$diag(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$  mátrixhoz. Bizonyítok több tételt arra vonatkozóan, hogy lineáris leképezés mikor centrálprojekció. Erre alapozva meghatározom egy tetszőleges pontból tetszőleges síkra történő centrálprojekció általános alakját, ahol  $U$  a képsík,  $C$  pedig a centrum koordinátáit tartalmazó vektorok:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(U, C)} \begin{bmatrix} c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 & -c_1u_2 & -c_1u_3 & -c_1u_4 \\ -c_2u_1 & c_1u_1 + c_3u_3 + c_4u_4 & -c_2u_3 & -c_2u_4 \\ -c_3u_1 & -c_3u_2 & c_1u_1 + c_2u_2 + c_4u_4 & -c_3u_4 \\ -c_4u_1 & -c_4u_2 & -c_4u_3 & c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \end{bmatrix}$$

A sajátértékekre vonatkozó feltétel alapján bizonyítok néhány tételt a centrálprojekció – centrálaxonometria vonatkozásában, így az ortogonális axonometria alaptételét, a Stiefel kritériumot, a Szabó kritériumot.

A dolgozat mellékletében illusztrációként bemutatok egy C++ kódrészletet, amelyben egy kockát ábrázoltam láthatóság szerint.

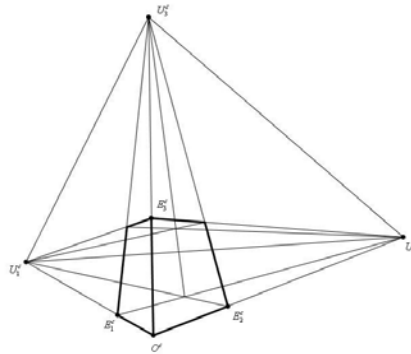
A bizonyításokhoz tartozó számításokat Mapple-lel végeztem, ezek a számítások szintén a mellékletben találhatóak

## AIM

The aim of this paper is to give a summary of the earlier results of central axonometric mapping and to show some new results which make it possible to adopt methods for computer graphics in case of central axonometric mapping as well.

## SUMMARY OF THE RESULTS

The classic way for defining central axonometric mapping is a synthetic one. We can define such a mapping by a Desargues type triangle pair. Namely we give the picture of the unit points and the points infinity of a Cartesian basis in  $\mathbb{P}^3$ . The  $\phi: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$  is called *central axonometric reference system*. The mapping of an approval point is based on the cross ratio invariance.



The system  $\phi: (O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c, U_1^c, U_2^c, U_3^c)$  is parameterized in inhomogeneous coordinates in

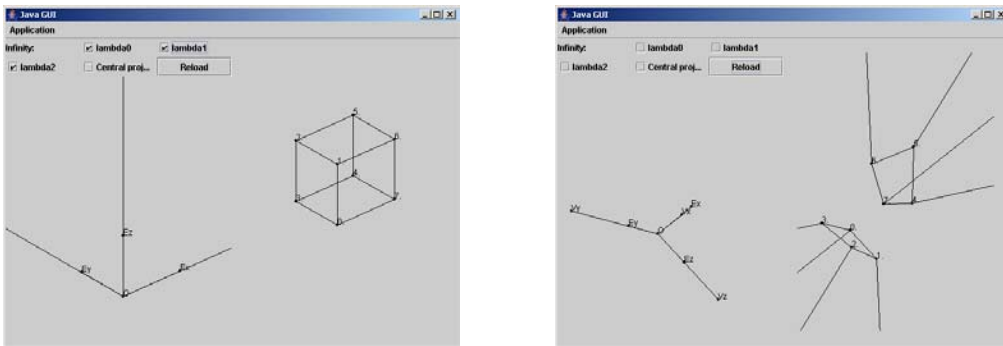
the following way:  $O^c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_i^c = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ ,  $U_i^c = \begin{bmatrix} \delta_i x_i \\ \delta_i y_i \end{bmatrix}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

In this way it is easy to guarantee the perspective connection between the two triangles.

This is a linear mapping from  $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Using homogenous coordinates I work out the matrix belonging to the mapping in several ways. The result is:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1-1}x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}y_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1-1} & \frac{1}{\delta_2-1} & \frac{1}{\delta_3-1} & 1 \end{bmatrix}$$

In case the values  $\delta_i$ ,  $i=1,2,3$  are infinitely big, then we get the well known parallel axonometric mapping. In this way the common handling of central and parallel axonometry become possible. The pictures below show that:



From the point of view of computer graphics application the position of the picture plain in the world-system may be important. I show that if we translate the picture plane parallelly, the connection between the pictures is similarity. I produce a matrix which maps the space on a plane going through the origin. This is the following:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_1-1}x_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}x_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}x_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}y_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}y_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}y_3 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\delta_1-1}z_1 & \frac{\delta_2}{\delta_2-1}z_2 & \frac{\delta_3}{\delta_3-1}z_3 & 0 \\ \frac{1}{\delta_1-1} & \frac{1}{\delta_2-1} & \frac{1}{\delta_3-1} & 1 \end{bmatrix}$$



It has been shown that this mapping has a central character, namely the point  $C$  with the following coordinates:

$$c_1 = \frac{-(\delta_1 - 1)\delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

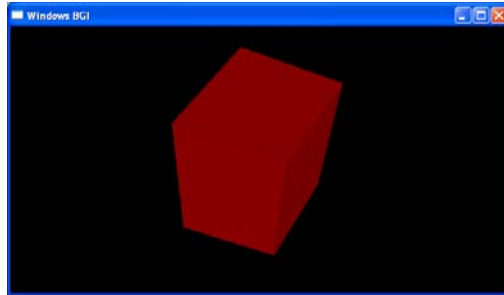
$$c_2 = \frac{\delta_1(\delta_2 - 1)\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

$$c_3 = \frac{-\delta_1\delta_2(\delta_3 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)}{\delta_1\delta_2(x_1y_2 - x_2y_1) + \delta_1\delta_3(x_3y_1 - x_1y_3) + \delta_2\delta_3(x_2y_3 - x_3y_2)}$$

is the center, which means that the points of the lines fitting on  $C$  have the same image. This makes the use of hidden-line, hidden surface methods practicable in computer graphics at the central-axonometric mappings, too. I have shown that the mapping has a disappearing plane, which is the following:

$$\frac{1}{\delta_1 - 1}p_1 + \frac{1}{\delta_2 - 1}p_2 + \frac{1}{\delta_3 - 1}p_3 + 1 = 0$$

This result illustrates the following shaded picture of a cube:



The central axonometric mappings have been classified into two classes, which are represented with the following matrices:

$$\hat{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, 0) \text{ and } \hat{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \lambda_3 0 \right\rangle$$

I have given a condition of central projection, and have proved that a central axonometric mapping is a central projection then and only then if the matrix of the mapping is similar to

$diag(\lambda, \lambda, \lambda, 0)$ . Several other statements have also been proved for the central axonometric mappings, and using these I have given the general form of a central projection from an optional center to an optional plane:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{(U, C)} \begin{bmatrix} c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4 & -c_1u_2 & -c_1u_3 & -c_1u_4 \\ -c_2u_1 & c_1u_1 + c_3u_3 + c_4u_4 & -c_2u_3 & -c_2u_4 \\ -c_3u_1 & -c_3u_2 & c_1u_1 + c_2u_2 + c_4u_4 & -c_3u_4 \\ -c_4u_1 & -c_4u_2 & -c_4u_3 & c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \end{bmatrix}$$

Based on the new condition of central projection I have proved some already known results, namely the condition of the orthogonal axonometric mapping, the Stiefel-criteria, the Szabó criteria.

For illustration I have attached a C++ program code, in order to demonstrate the efficiency of the method. Some of the computations were made by Maple, which are also attached.

## Irodalomjegyzék-References

- [BRA86] Brauner H: Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen. Beitr. Algebra u. Geometrie 21, 5-26, 1986
- [CSET47] Н. Ф. Четверухин, Вопросы современной начертательной геометрии, Москва, Сб. Статей, 334. о., 1947
- [DRS57] Drs L., V základni vete centralni axonometrie. Časopis pro pestovanie-matematiky, roc. 82, 1957. 165-173
- [DÜR03] L- Dür: An algebraic Equation for Central Projection. J. Geometry Graphics 7, 137-143, 2003
- [HAV96] H. Havlicsek: On the Matrices of Central linear Mappings. Math. Bohem, 121,151-156 1996
- [HOF97] Hoffman Miklós: On the Theorems of Central Axonometry, Journal for Geometry and Graphics, Volume 1, (1997) No2 , 151-155
- [JUH95] Juhász Imre: Számítógépi geometria és grafika, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1993., 1995
- [KRU10] Kruppa, E.:Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie, Sb. Akad Wiss. Wien (math.-nat. Kl.) **119** (1910), 487-506
- [KRU23] Müller, E.,und E. Kruppa: Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Bd.: E Kruppa: Die linearen Abbildungen, Wien, (1923), S.183.
- [MOL95] Pál Ledneczky and Emil Molnár: Projective geometry in engineering, Periodika Polytechnika Ser. Mech. Eng., Vol 39. No. 1, 43-60, 1995
- [RP74] Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, 1974

- [STA95] H. Stachel: Zur Kennzeichnung der Zentralprojectionen nach H. Havlicek, Technical Report Nr. 19., 1995
- [STA04] H. Stachel: On Arne Dür's Equation Concerning Central Axonometries, J. Geometry Graphics 8, 215-224, 2004
- [STI38] Stiefel, E.: Zum satz von Pohlke. Comment. Math.Helv. **10**(1938), 208-225
- [STI71] Stiefel, E, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, I. Bd. , 3 Aufl. Basel, Stuttgart, (1971)
- [SZJ78] Szabó József: Az Eckhart-féle összemetszési eljárás egy általánosítása és annak komputergrafikai alkalmazása, kandidátusi értekezés, 1978
- [SZJ94] J. Szabó, H.Stachel, H. Vogel: Ein Satz über die Zentralaxonometrie. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **203**, 3-11 (1994)
- [SZJ95] Szabó József: Eine analitische Bedingung dafür, daß eine Zentralaxonometrie Zentralprojection ist. Publ. Math., 1995

## Publikációk és előadások-Publications and lectures

### Publikációk-Publications

1. A ciklografikus leképezés két általánosításáról  
1979, KLTE (egyetemi elsődíjas pályamunka)
2. Másodrendű felületek ábrázolása és síkmetszése számítástechnikai eszközökkel.  
TDK-dolgozat, 1979 KLTE
3. Másodrendű felületek ábrázolása és síkmetszése számítástechnikai eszközökkel.  
XV. OTDK nivódíjas pályamunkái III. kötet 520. old ,1982.
4. Másodrendű felületek ábrázolása és áthatása számítástechnikai eszközökkel.  
Doktori értekezés, KLTE, 1984., 64 oldal
5. Description of second order surfaces by devives of computer geometry.  
Rostocker Informatik-Berichte, Heft 2 ,105-109, 1985.
6. A ciklografikus leképezés két általánosításáról.  
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 11/c, 57-75, 1988
7. Visibility of convex polyhedras  
Bull. Appl. Math. 50, No.576, 237-243 (1988)  
[ZB:659.52001]
8. Hidden line problem in the case of a body consisting of two convex polihedra  
Rostocker Informatik-Berichte, Heft 8 , 84-87, 1989.
9. Description and plane section of certain rotation surfaces  
Studentexte Computergeometrie, Heft 109/90 Teil3, 166-174, 1990
10. Forgásfelületek ábrázolása  
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 12/d, 85-91, 1990.
11. Desription of special SNAKE surfaces.  
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 12/d, 91-97, 1990.
12. Desription of special SNAKE surfaces.  
Konstruktive Geometrie Vortragssammlung, 143-148, 1990
13. A visibility algorithm for a collection of convex polyhedra.  
Acta academiae Pedagogicae Nyiregyháziensis Tom. 13/d, 109-112, 1992  
[ZB:881.68119]
14. Centralaxonomic Mapping in Computer-graphics.  
Geometria i grafika in inzynierska z. 1, Gliwice, 37-44, 1996
15. Hidden Surface and Shading Problem for special Bodies.  
7<sup>th</sup> International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive  
Geometry Prceedings, 192-194, 1996  
[19990500033 CompuTec]
16. A komputergrafikai tantárgyak oktatási koncepciói és tantárgyi tematikái a KLTE-n.  
(Grundprinzip für Unterricht und Themenkreise der Computergraphik an der KLTE)  
(Szabó J, Schwarcz T. Hoffmann M., Ledeczky G., Sulyok P., Várady L.) Proc.  
Informatika a Felsőoktatásban '96 □  
Networkshop '96; Debrecen, 1996. ISBN 963 0470 27 6. II. kötet 662-664. old.
17. Bitmap transformation based on projective invariants  
Geometria i grafika in inzynierska z. 2, Gliwice, 15-23, 1998  
(Tornai Róbert társszerzővel)
18. Bitmap Transformations  
4rd International Conference on Applied Informatics. Eger-Noszvaj (Hungary), 169-

178., 1999  
(Tornai Róbert társszerzővel)

- Hermite curves with given curvature –Kéziratban, 2005
- Degenerated linear transformations and central projection- Előkészületben, 2006

### **Szakmaspecifikus alkotások- Other works**

- 2d-s modellezést lehetővé tévő rajzoló szoftver fejlesztése. 1999
- Dinamikus modellezést lehetővé tévő 2d-s rajzoló szoftver fejlesztése. 2004
- Általános lekérdezőmodul fejlesztése Firebird adatbázis-motorhoz 2005

### **Előadások-Lectures**

1. Description of second order surfaces by devives of computer geometry, DIGRA 84, 1984, Rostock
2. HiddenLine Problem in the case of a body consisting of two convex polyhedral, DIGRA 88 , 1988
3. Description and plane section of certain rotation surfaces, TU Dresden, Computergeometrie, 1990, Gausig
4. Desription of special SNAKE surfaces, Konstruktive geometrie, 1990, Debrecen
5. About the STEINER-Relationship. 7. ungarish-österreiches Geometrie-Symposium, 1992,Seggauberg
6. Eine Verallgemeinerung der Zyklographhie, Welttagung über Geometrie, 1995, Seggauberg
7. Hidden Surface and shading Problem for special Bodies, 7. ICECGDG, 1996 Cracow
8. Bitmap Transformations based on projective invarants, Geometria I Komputer, 1997, Wisla
9. Efficiency Concideration for Ray Tracing, 3. ICAI, 1997, Eger
10. Projective Geometrie sotfwer. SDG, 2000,Drezda
11. Bitmap Transformations, 4. ICAI, 1999, Eger
12. Imaginary Elements in Projective Geometry, TU München, 2000, München
13. Imaginary Elements in Projective Geometry, 5. ICAI, 2001, Eger
14. 3D reconstruction of coronary ,Vienna University of Technology,Department of Geometry, 2002 május
15. Central axonometric mapping in computergraphics. Geometria I Komputer, 2003, Wisla
16. Central axonometric mapping in computergraphics.SDG, 2003, Drezda
17. Central axonometric mapping in computergraphics. 6. ICAI, 2004, Eger
18. Central axonometric mapping, Konstruktív Geometria, 2005, Balatonföldvár
19. Centrálaxonometrikus leképezés komputergrafikai alkalmazása, 2005, Gyires Béla Informatikai Napok