TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001

Bessenyei Mihály

Analízis Példatár

Debreceni Egytem, Matematikai Intézet
Debrecen, 2014

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Halmazok; műveletek halmazokkal

1. **Feladat.** *(Műveleti tulajdonságok) Igazolja, hogy bármely A, B, C halmazra*

(i)

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$$

(ii)

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

(iii)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iv)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. **Feladat.** *(De Morgan azonosságok) Igazolja, hogy minden $A, B \subset X$ esetén*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

3. **Feladat.** *Igazolja, hogy bármely $A, B, C \subset X$ halmazra*

(i)

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

(ii)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(iii)

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$
$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

4. **Feladat.** *Igazolja az alábbi állítások ekvivalenciáját:*

$$A \subset B; \quad A \cup B = B; \quad A \cap B = A; \quad A \setminus B = \emptyset.$$

5. **Feladat.** *Legyenek a, b, c páronkét különböző elemek és $A := \{a, b, c\}$. Határozza meg a $\mathcal{P}(A)$ halmazrendszer elemeit!*

6. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B halmaz esetén*

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \qquad \mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

7. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ pontosan akkor teljesül, ha $x = u$ és $y = v$. Mikor áll egyenlőség helyett tartalmazás?*

8. **Feladat.** *Igazolja, hogy* $\{a\} \times \{a\} = \{\{\{a\}\}\}$.

9. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy* A, B *nem üres halmazok. Igazolja, hogy* $A \times B = B \times A$ *pontosan akkor, ha* $A = B$.

10. **Feladat.** *Igaz-e, hogy* $(A \times A) \times A = A \times (A \times A)$ *teljesül minden* A *halmaz esetén?*

11. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy* A, B, C, D *nem üres halmazok. Igazolja, hogy* $A \times B \subset C \times D$ *pontosan akkor, ha* $A \subset B$ *és* $C \subset D$.

12. **Feladat.** *Legyenek* A, B, C, D *tetszőleges halmazok. Bizonyítsa be, hogy ekkor*

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C);$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C);$$
$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

Továbbá,

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D);$$
$$(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D).$$

13. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy tetszőleges* $R \subset A \times B$ *és* $S \subset B \times C$ *reláció esetén*

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

14. **Feladat.** *Igazolja, hogy bármely* $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$, $T \subset C \times D$ *reláció esetén*

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

15. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha* $R \subset A \times B$ *adott reláció és* $H, K \subset A$ *tetszőleges halmazok, akkor*

$$R(H \cup K) = R(H) \cup R(K), \qquad R(H \cap K) \subset R(H) \cap R(K).$$

16. **Feladat.** *Határozza meg az* $R \subset A \times B$ *reláció értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét, valamint az* $R(C)$ *halmazt, ha*

(i) $A = B = [0, 1]$; $xRy \Leftrightarrow x \leq 2y \leq 2x$; $C = \{1/2\}$;
(ii) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 3, 5\}$; $xRy \Leftrightarrow xy = 0$; $C = \{1, 2\}$;
(iii) $A = \{-5, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{-2, 1, 2, 3\}$; $xRy \Leftrightarrow x + y = 7$; $C = \{-5, 9\}$;
(iv) $A = B = [-1, 1]$; $xRy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$; $C = \{0\}$.

17. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha f függvény, akkor $g \subset f$ szintén függvény!*

18. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ függvények, akkor $g \circ f$ szintén függvény!*

19. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha $f\colon A \to B$, akkor $\mathrm{id}_A \subset f^{-1} \circ f$, továbbá, hogy minden $C \subset A$ esetén $C \subset f^{-1}(f(C))$. Milyen feltételek mellett áll itt egyenlőség A minden C részhalmaza esetén?*

20. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha $f\colon A \to B$, akkor $f \circ f^{-1} \subset \mathrm{id}_B$, továbbá, hogy minden $C \subset B$ esetén $f(f^{-1}(C)) \subset C$. Milyen feltételek mellett áll itt egyenlőség B minden C részhalmaza esetén?*

21. **Feladat.** *Legyen $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$. Mutassa meg, hogy ha f és g szürjektív/injektív/bijektív, akkor $g \circ f$ is az.*

22. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy valamely $f\colon A \to B$ függvény inverze pontosan akkor függvény, ha f injektív!*

23. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha $f\colon A \to B$ adott függvény és $H, K \subset B$ tetszőleges halmazok, akkor*

$$f^{-1}(H \cup K) = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K), \qquad f^{-1}(H \cap K) = f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K).$$

24. **Feladat.** *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valamint $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a következő módon adott függvények: $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 1/x$. Határozza meg az $f(A)$, $f(B)$, $g(B)$, $g(C)$, $h(D)$, $h(E)$ valamint az $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(C)$, $g^{-1}(B)$, $g^{-1}(C)$, $g^{-1}(D)$, $h^{-1}(A)$, $h^{-1}(C)$ halmazokat, amennyiben*

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad B = [0, 1] \quad C = [-1, 1] \quad D =]0, 1[\quad E = [-2, 0[.$$

25. **Feladat.** *Határozza meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, amelyen f értelmezhető! Vizsgálja meg, hogy f injektív-e, és ha annak bizonyul, határozza meg inverzét! Az f függvény x-beli értéke az alábbiak szerint adott:*

$$2x + 3; \quad x^2; \quad \frac{1}{x}; \quad \frac{1-x}{1+x}; \quad \frac{1}{x^2 - x - 2}; \quad \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

26. **Feladat.** *Határozza meg a $g \circ f$ illetve $f \circ g$ függvényt, ha $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $f(x) = 1 - x^2$ és $g(x) = 1/(1 + x^2)$ előírással adott!*

27. **Feladat.** *Vizsgálja az $R \subset A \times A$ relációt reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás, linearitás szempontjából, ha*

(i) $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$;
(ii) $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, b), (c, c)\}$;
(iii) $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$;
(iv) $A = \mathcal{P}(X)$, aRb *pontosan akkor, ha* $a = b$;
(v) $A = \mathcal{P}(X)$, aRb *pontosan akkor, ha* $a \subset b$.

28. **Feladat.** *Állapítsa meg, hogy az $R \subset A \times A$ reláció ekvivalencia reláció, részbenrendezési reláció vagy rendezési reláció-e, ha*

(i) $A = \mathbb{N}$, aRb *pontosan akkor, ha* $a|b$;
(ii) $A = \mathbb{Z}$, aRb *pontosan akkor, ha* $a|b$;
(iii) $A = \mathbb{N}$, aRb *pontosan akkor, ha* $5|b - a$;
(iv) $A = \mathbb{N}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $a + v = b + u$;
(v) $A = \mathbb{N}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $av = bu$;
(vi) $A = \mathbb{R}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $a + v = b + u$;
(vii) $A = \mathbb{R}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $av = bu$;
(viii) $A = \mathbb{R}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $a^2 + b^2 = u^2 + v^2$;
(ix) $A = \mathbb{R}^2$, $(a, b)R(u, v)$ *pontosan akkor, ha* $a^2 + b^2 \leq u^2 + v^2$.

29. **Feladat.** *Jelölje rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén P_n azon k természetes számokat, amelyekre $k|n$ teljesül, s legyen $R \subset P_n \times P_n$ a következő módon értelmezve: aRb pontosan akkor, ha $a|b$. Igazolja, hogy ekkor R parciális rendezés! Adjon n-re vonatkozó szükséges és elegendő feltételt arra nézve, hogy R rendezés legyen!*

30. **Feladat.** *(Bishop–Phelps rendezés) Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valamint $\lambda > 0$ esetén legyen $a \preceq b$ pontosan akkor, ha $\lambda|a - b| \leq f(a) - f(b)$. Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz!*

31. **Feladat.** *Mutassa meg, hogy $R \subset A \times A$ pontosan akkor szimmetrikus, ha $R = R^{-1}$, illetve, hogy pontosan akkor tranzitív, ha $R \circ R \subset R$.*

32. **Feladat.** *Igazolja, hogy minden $R \subset A \times A$ relációhoz létezik legszűkebb, R-et tartalmazó ekvivalencia reláció!*

33. **Feladat.** *Legyen $\mathcal{F}$ az $A \times B$-beli függvényeknek egy, a tartalmazásra nézve rendezett részhalmaza. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\bigcup \mathcal{F}$ olyan függvény, amely $\mathcal{F}$ bármelyik elemének kiterjesztése!*

34. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy az ekvivalencia reláció, részbenrendezési reláció, valamint rendezési reláció definíciójában szereplő tulajdonságok függetlenek!*

35. **Feladat.** *Oldja meg az $A+A=2A$ egyenletet a valós számok nem üres, véges részhalmazainak halmazán, ahol $A \subset \mathbb{R}$ esetén*

$$A+A := \{a+b \mid a,b \in A\}; \qquad 2A := \{2a \mid a \in A\}.$$

36. **Feladat.** *Legyen X egy halmaz, $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ pedig monoton leképezés. Igazolja, hogy ekkor minden $A \subset X$ esetén*

$$\Phi(A) \subset \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B,\ \Phi(B) \subset B\}.$$

37. **Feladat.** *Legyen X egy halmaz, $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ pedig olyan monoton leképezés, melyre minden $x \in X$ esetén $x \in \Phi(\{x\})$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor bármely $A \subset X$ esetén $A \subset \Phi(A)$.*

38. **Feladat.** *Legyen X egy halmaz, $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ pedig olyan leképezés,*

(i) amely monoton, azaz $A \subset B$ esetén $\Phi(A) \subset \Phi(B)$;
(ii) involutív, azaz $\Phi^2 = \Phi$;
(iii) végül, amelynek az egyelemű halmazok fixpontjai, azaz $\Phi(\{x\}) = \{x\}$.

Igazolja, hogy ekkor

$$\Phi(A) = \bigcap \{B \subset X \mid A \subset B,\ B = \Phi(B)\}.$$

39. **Feladat.** *(Tarski-féle fixponttétel, elemi változat) Igazolja, hogy ha X egy halmaz, $\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ pedig monoton leképezés, akkor létezik Φ-nek fixpontja, azaz van olyan $A \subset X$, hogy $A = \Phi(A)$.*

40. **Feladat.** *(Tarski-féle fixponttétel, nem elemi változat) Legyen $(X, \preceq)$ teljes parciálisan rendezett halmaz, $\Phi\colon X \to X$ pedig monoton leképezés. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $a, b \in X$ elemek, hogy $a \preceq \Phi(a) \preceq \Phi(b) \preceq b$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor létezik Φ-nek fixpontja az $[a, b]$ intervallumban.*

41. **Feladat.** *(Knaster–Tarski fixponttétel) Legyen $(X, \preceq)$ parciálisan rendezett halmaz, $\Phi\colon X \to X$ pedig monoton leképezés. Tegyük fel, hogy*

(i) van olyan $a \in X$, hogy $a \preceq \Phi(a)$, valamint
(ii) az $[a, +\infty[$ intervallumban minden lánc felülről korlátos.

Igazolja, hogy ekkor Φ-nek létezik fixpontja, továbbá, hogy a fixpontok között van maximális.

42. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha T test, akkor*

(i) $x = y$ *esetén* $x + z = y + z$ *valamint* $xz = yz$*;*
(ii) $x + z = y + z$ *esetén* $x = y$*; hasonlóan,* $xz = yz$ *és* $z \neq 0$ *esetén* $x = y$*;*
(iii) $-x = (-1)x$ *és* $-(x + y) = -x - y$*;*
(iv) $(-x)y = x(-y) = -xy$ *és* $(-x)(-y) = xy$*;*
(v) ha $y \neq 0$*, akkor* $-(x/y) = (-x)/y = x/(-y)$*;*
(vi) ha $y, v \neq 0$*, akkor*

$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv + yu}{yv}, \qquad \frac{x}{y}\frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}.$$

43. **Feladat.** *Jelölje* $\mathbb{Z}_m$ *a moduló* m *maradékosztályok halmazát a szokásos műveletekkel ellátva. Adjon* m *segítségével szükséges és elegendő feltételt arra nézve, hogy* $\mathbb{Z}_m$ *test legyen! Adjon példát két-, három- illetve négyelemű testre!*

44. **Feladat.** *Jelölje* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *az* $a+b\sqrt{2}$ *alakú számok halmazát, ahol* a, b *racionális számok. Igazolja, hogy ekkor* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *részteste a valós számok testének!*

45. **Feladat.** *Legyen* $\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *és értelmezzük az* $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$ *elemek összegét illetve szorzatát az alábbiak szerint:*

$$(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), \quad (x, y) \odot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Igazolja, hogy e műveletekkel ellátva $\mathbb{C}$ *test! Megadható-e olyan rendezés, melyre nézve* $\mathbb{C}$ *rendezett test lesz?*

46. **Feladat.** *Igazolja, hogy az* R *rendezett test elemeire teljesülnek az alábbi tulajdonságok!*

(1) $x^2 \geq 0$ *és* $x^2 = 0$ *pontosan akkor, ha* $x = 0$*;*
(2) ha $0 < x < y$*, akkor* $0 < 1/y < 1/x$*;*
(3) ha $x < y < 0$*, akkor* $1/y < 1/x < 0$*.*

47. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha* R *rendezett test, akkor minden* $x, y \in R$ *esetén*

$$\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}, \quad \max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2},$$

illetve

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

48. **Feladat.** *Legyenek* $A, B \subset \mathbb{R}$ *felülről korlátos, nem üres halmazok, valamint legyen* $x \in \mathbb{R}$*. Mutassa meg, hogy ekkor az* $A + B$ *és* $A + x$ *halmazok szintén felülről korlátosak,* $-A$ *pedig alulról korlátos, továbbá*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \ \sup(A + x) = \sup A + x, \ \inf(-A) = -\sup A.$$

Fogalmazza meg az analóg állítást alulról korlátos, nem üres halmazok esetén! Mit állíthatunk az AB *halmaz alulról/felülről való korlátosságáról?*

49. **Feladat.** *Mely valós (esetleg elfajuló) intervallumokkal egyenlők az alábbi halmazok?*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left]0,\frac{1}{n}\right[;\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\frac{1}{n}\right[;\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left]-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[;\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[-\sqrt{n},1+\frac{1}{n}\right];$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left]0,\frac{1}{n}\right[;\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{n},1\right];\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[1+\frac{1}{n},\sqrt{n}\right];\quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[\frac{1}{n},1+\sqrt{n}\right].$$

50. **Feladat.** *Igazolja teljes indukcióval az alábbi oszthatósági állításokat!*

(i) $6|n(2n+1)(7n+1)$;
(ii) $6|(n^2+5)n$
(iii) $5|2^{4n+1}+3$;
(iv) $8|5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$;
(v) $18|2^{2n}+24n-10$;
(vi) $120|n^5-5n^3+4n$.

51. **Feladat.** *Igazolja teljes indukcióval az alábbi, zárt alakokra vonatkozó állításokat!*

(i) $1+\cdots+n=n(n+1)/2$;
(ii) $1^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$;
(iii) $1\cdot 4+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;
(iv) $(1+\cdots+n)^2=1^3+\cdots+n^3$;

52. **Feladat.** *Igazolja teljes indukcióval az alábbi egyenlőtlenségeket!*

$$\frac{3^n}{2(n+2)}<\frac{(3n)!}{(2n!)^2};\quad \frac{1}{2\sqrt{n}}<\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

53. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy n egyenes a síkot legfeljebb $(n^2+n+2)/2$ részre osztja!*

54. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy n kör a síkot legfeljebb n^2-n+2 részre osztja!*

55. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy adott $n\geq 3$ pont a síkon, és a közöttük meghúzható szakaszok közül n darabot megrajzolunk, akkor létrejön olyan zárt sokszögvonal, melynek csúcsai az adott pontok közül valók!*

56. **Feladat.** *Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy bármely két ember egyforma. Az állítás $n=1$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, és tekintsünk $n+1$ embert. Alakítsunk köztük egy $(n-1)$ és egy 2 főből álló csoportot. Az egyes csoportokon belül levő emberek, a feltevés értelmében, egyformák. Helyezzük most a 2 fő valamilyikét a másik csoportba! Ekkor az n főből álló csoportban továbbra is egyformák az emberek; ám ekkor a maradék egy fő is ugyanolyan, mint a többi, hiszen egyforma azzal, akit áthelyeztünk. Hol a hiba a gondolatmenetben?*

57. **Feladat.** *Adja meg az $x = 1/3$ racionális törtet tizedestört alakban! Melyik racionális törttel egyenlő az $x = 0,12121212\ldots$ tizedes tört?*

58. **Feladat.** *Adja meg az $x = 1/2$ racionális törtet triadikus alakban! Melyik racionális törttel egyenlő az $x = 0,12121212\ldots$ triadikus tört?*

59. **Feladat.** *Adja meg az $x = 1/3$ racionális törtet diadikus alakban! Melyik racionális törttel egyenlő az $x = 0,10101010\ldots$ diadikus tört?*

60. **Feladat.** *Igazolja, hogy*

(i) $\mathbb{N}$ *végtelen halmaz;*
(ii) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$*;*
(iii) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*;*
(iv) $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$*;*
(v) $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$*.*

61. **Feladat.** *Igazolja, hogy*

(i) végtelen halmaznak létezik megszámlálhatóan végtelen részhalmaza;
(ii) ha A megszámlálható és B végtelen, akkor $A \cup B \sim B$;
(iii) $\mathbb{N}$ véges részhalmazainak halmaza megszámlálhatóan végtelen;
(iv) az algebrai számok halmaza megszámlálhatóan végtelen;
(v) megszámlálható halmazok megszámlálható rendszerének egyesítése megszámlálható.

62. **Feladat.** *Igazolja, hogy*

(i) $]0, 1[$ *nem megszámlálható halmaz;*
(ii) $]0, 1[\sim \mathbb{R}$*;*
(iii) $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$*;*
(iv) $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$*;*
(v) kontinuum számosságú halmazok megszámlálható rendszerének egyesítése kontinuum számosságú.

63. **Feladat.** *Létezik-e olyan sorozat, amely minden természetes számot végtelen sokszor tartalmaz? Mi a számossága a természetes szám értékű sorozatok halmazának?*

64. **Feladat.** *Igazolja, hogy nem üres halmazon értelmezett logikai értékű függvények halmaza ekvivalens a szóbanforgó halmaz részhalmazainak halmazával! Igazolja továbbá, hogy a valós-valós függvények halmaza és $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ekvivalensek!*

65. **Feladat.** *Létezik-e egyelemű ábécé? Azaz, kódolható-e tetszőleges véges szöveg egyetlen karakter segítségével?*

66. **Feladat.** *Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket! (A második feladatban p_k jelöli a prímszámok sorozatának k-adik elemét.)*

$$1-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<1; \qquad \prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{p_k^2}\Big)>\frac{1}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<2; \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2; \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq \log_2\sqrt{2n}; \quad \sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}<\frac{n^2\pi}{4}.$$

67. **Feladat.** *Igazolja, hogy $a,b,c\geq 0$ esetén*

(i) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$;
(ii) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$; $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geq 16abc$
(iii) $a^3+b^3+c^3\geq a^2b+b^2c+c^2a$;
(iv) $8(a^3+b^3+c^3)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

68. **Feladat.** *Igazolja, hogy $a,b,c>0$ esetén*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3; \qquad \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

69. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha az a,b,c pozitív számok összege egy, akkor*

$$\Big(1+\frac{1}{a}\Big)\Big(1+\frac{1}{b}\Big)\Big(1+\frac{1}{c}\Big)\geq 64; \quad \Big(a+\frac{1}{a}\Big)^2+\Big(b+\frac{1}{b}\Big)^2+\Big(c+\frac{1}{c}\Big)^2\geq\frac{100}{3}.$$

70. **Feladat.** *Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!*

$$x^9-4x^4+2x^3+x=0; \qquad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}=0.$$

71. **Feladat.** *Igazolja, hogy minden pozitív $x_1,\dots,x_n$ szám esetén*

$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{x_k}\Big)\Big(1+\frac{x_k}{k^2}\Big)\geq (n+1)^2;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{x_k+x_{k+1}}\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k; \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^3}{x_k^2+x_kx_{k+1}+x_{k+1}^2}\geq\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

72. **Feladat.** *(Általánosított Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz egyenlőtlenség) Igazolja, hogy ha $A=(a_{kl})$ nemnegatív számokból álló $n\times m$-es mátrix, akkor*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{m}a_{kl}\right)^m\leq\prod_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kl}^m\right).$$

73. **Feladat.** *Vizsgálja definíció alapján az (x_n) sorozat konvergenciáját, ha*

$$x_n = \sqrt{2}; \quad x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$x_n = \frac{1}{n^2}; \quad x_n = \frac{n+1}{n}; \quad x_n = (-1)^n; \quad x_n = n.$$

74. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \frac{2n+3}{4n+1}; \quad x_n = \frac{n^3-2n^2+5n+2}{2n^3+n^2+2}; \quad x_n = \frac{n^3-n^2+2n-1}{n^2+4n+2};$$

$$x_n = \frac{n^2+4n+2}{2n^3+n^2+2}; \quad x_n = \frac{n^2+n(-1)^n}{2n^2+100n}.$$

75. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n}; \quad x_n = \frac{2^n+3^{n+2}+5^{n+3}}{2^{n+1}+3^n+5^{n-1}}; \quad x_n = \frac{(-2)^{n+1}+7^{n+2}}{3^n+7^{n+1}};$$

$$x_n = \frac{n2^n+n^2 3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n-1}}; \quad x_n = \frac{n^2 2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n-1}}; \quad x_n = \frac{n^5 2^n+n^2 3^{n+1}}{n^3 2^{n+1}+(n^2+1)3^{n-1}}.$$

76. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \sqrt[n]{n^2+n+1}; \quad x_n = \sqrt[n]{n^{12}+n^6+100}; \quad x_n = \sqrt[n]{2^n+3^{n+1}};$$

$$x_n = \sqrt[n]{n^3 2^n+n^2 3^{n+1}}; \quad x_n = \sqrt[n]{n^7(-2)^n+n^5 3^{n+1}+n^{100}+1}.$$

77. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}; \quad x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n};$$

$$x_n = \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}; \quad x_n = \sqrt{n^2+2n}-n;$$

$$x_n = \sqrt{n^2+4n+2}-n; \quad x_n = \sqrt{n^2+6n+3}-\sqrt{n^2+2}.$$

78. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n; \quad x_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}; \quad x_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n-1};$$

$$x_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{3n+2}; \quad x_n = \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n+1}; \quad x_n = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{3n+2}.$$

79. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \left(1.00001+\frac{1}{n}\right)^n; \qquad x_n = \left(0.99999+\frac{1}{n}\right)^n.$$

80. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi rekurzióval adott sorozatok konvergensek, és számítsa ki a határértéküket!*

$$x_1 = \sqrt{2}; \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n};$$
$$x_1 = \sqrt{6}; \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n};$$
$$x_1 = \sqrt{8}; \quad x_{n+1} = \sqrt{8 + x_n}$$

81. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi rekurzióval adott (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek, és határértékük megegyezik! Mi a határérték az első esetben?*

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2; \qquad x_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2};$$
$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2; \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

82. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha (x_n) olyan valós számsorozat, hogy $x_n \to +\infty$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

83. **Feladat.** *Igazolja, hogy konvergens sorozat korlátos, továbbá, hogy konvergens sorozat határértéke egyértelmű!*

84. **Feladat.** *Igazolja a nevezetes sorozatok határértékére vonatkozó tételt, a konvergencia és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételt, valamint a rendőr-elvet!*

85. **Feladat.** *Igazolja, hogy monoton növekvő, felülről korlátos valós számsorozat konvergens, és határértéke a sorozat értékkészletének pontos felső korlátja!*

86. **Feladat.** *Lehet-e két divergens sorozat összege illetve szorzata konvergens? Mit állíthatunk bővített határérték és műveletek illetve bővített határérték és rendezés kapcsolatáról?*

87. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha (x_n) konvergens sorozat, akkor $(|x_n|)$ szintén konvergens! Igaz-e az állítás megfordítása?*

88. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha (x_n) nullsorozat, (y_n) pedig korlátos sorozat, akkor $(x_n y_n)$ nullsorozat! Igaz-e az állítás, ha (y_n) tetszőleges? Mit állíthatunk az $(x_n y_n)$ sorozat konvergenciájáról, ha (x_n) konvergens, (y_n) pedig korlátos?*

89. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi sorozatok limesz inferiorát és limesz szuperiorát!*

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}; \quad x_n = (1+(-1)^n)n;$$
$$x_n = n^{(-1)^n}; \quad x_n = 1 + 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

90. **Feladat.** *(Stolz–Cesàro) Legyenek (x_n) és (y_n) olyan sorozatok, hogy (y_n) szigorúan monoton növő, felülről nem korlátos és $\big((x_{n+1}-x_n)/(y_{n+1}-y_n)\big)$ konvergens. Bizonyítsa be, hogy ekkor (x_n/y_n) is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

91. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi sorozatok konvergensek, és számítsa ki határértéküket!*

$$x_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \qquad x_n = \frac{\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}}{\log n}; \qquad x_n = \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

92. **Feladat.** *Jelölje rendre H, G, illetve A a harmónikus, mértani illetve számtani közepeket, s legyen (x_n) pozitív tagú, konvergens sorozat. Igazolja, hogy ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} H(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n;$$
$$\lim_{n\to\infty} G(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n;$$
$$\lim_{n\to\infty} A(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

93. **Feladat.** *Mutassa meg, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozza meg összegüket!*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\big);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

94. **Feladat.** *Lefedhető-e a racionális számok halmaza zárt intervallumok olyan megszámlálható rendszerével, melyben szereplő intervallumok összhossza egy?*

95. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi sorok divergensek!*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000n+1};$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1000}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}.$$

96. **Feladat.** *Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^c};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}.$$

97. **Feladat.** *Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n n!}{n^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{c^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{n!};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{8^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n+1)2^n}{n!}.$$

98. **Feladat.** *Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n+3^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{n-1}{n+1}\Big)^{n(n-1)};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\big(2+(-1)^n\big)}{5^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c+\frac{1}{n}\Big)^n;\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

99. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy a $\sum x_n^2$ és $\sum y_n^2$ sorok konvergensek. Mutassa meg, hogy ekkor a $\sum |x_n y_n|$ és $\sum (x_n^2+y_n^2)$ szintén konvergens sorok. Mit állíthatunk a $\sum x_n/n$ sor konvergenciájáról?*

100. **Feladat.** *Legyen (x_n) nemnegatív tagú, monoton csökkenő sorozat. Igazolja, hogy ekkor az alábbi sorok ekvikonvergensek!*

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}2^n x_{2^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n x_{n^2}.$$

101. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy ha (x_n) pozitív tagú sorozat, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n};\qquad \limsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\ge\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}.$$

Ezt fölhasználva igazolja, hogy az $(\sqrt[n]{n!}/n)$ sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

102. **Feladat.** *Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciasugarát valamint konvergenciatartományát!*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(x+1)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}(x+i)^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}(x-i)^n;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} x^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n} x^n.$$

103. **Feladat.** *Igazolja, hogy az elemi függvényeket definiáló alábbi hatványsorok minden $x \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergensek!*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

104. **Feladat.** *Igazolja, hogy az elemi függvények minden $x \in \mathbb{C}$ esetén eleget tesznek a következő azonosságoknak!*

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} \qquad \cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} \qquad \sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$$

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

105. **Feladat.** *Igazolja, hogy az elemi függvények minden $x, y \in \mathbb{C}$ esetén eleget tesznek az alábbi addíciós összefüggéseknek!*

$$\begin{aligned}
\exp(x+y) &= \exp(x)\exp(y) \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)
\end{aligned}$$

106. **Feladat.** *Vizsgálja folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket a $p = 0$ pontban illetve értelemzési tartományuk pontjaiban!*

$$f(x) = x^2, \quad (x \in \mathbb{R});$$
$$f(0) = 0, \quad f(x) = |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$$
$$f(x) = 1, \quad (x \in \mathbb{Q}), \qquad f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q});$$
$$f(x) = x, \quad (x \in \mathbb{Q}), \qquad f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q});$$
$$f(x) = (-1)^x \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

107. **Feladat.** *Igazolja, hogy a polinomok és a racionális törtfüggvények értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak!*

108. **Feladat.** *Értelmezzük a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbiak szerint. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor legyen $h(x) = 1/m$, ahol $x = n/m$, n és m relatív prímek, valamint m pozitív; ha $x \notin \mathbb{Q}$ akkor pedig legyen $h(x) = 0$. Mit állíthatunk h folytonosságáról?*

109. **Feladat.** *Létezik-e olyan $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek szakadási pontjainak halmaza a racionális számok halmaza? Létezik-e olyan $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melynek szakadási pontjainak halmaza az irracionális számok halmaza?*

110. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, amelyekre $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor $f = g$. Mit állíthatunk a folytonos valós-valós függvények halmazának számosságáról?*

111. **Feladat.** *Vizsgálja az $f(x) = 1/x$ függvényt egyenletes folytonosság szempontjából a $]0, 1[$, $]1, 2[$, $]0, +\infty[$ illetve $]1, +\infty[$ intervallumokon!*

112. **Feladat.** *Vizsgálja az $f\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ alábbi függvényt egyenletes folytonosság szempontjából, ha*

$$f(x) = x; \quad f(x) = x^2; \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

113. **Feladat.** *Igazolja, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz tulajdonságot teljesít, ha*

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}; \quad f(x) = \big|3|x + 2| - |x - 1|\big|; \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

114. **Feladat.** *(A Brouwer-féle fixponttétel egydimenziós változata) Igazolja, hogy ha $f\colon [a, b] \to [a, b]$ folytonos, akkor van olyan $x_0 \in [a, b]$, hogy $f(x_0) = x_0$.*

115. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha I valós intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor minden $x_1, \ldots, x_n \in I$ esetén van olyan $\xi \in I$, hogy*

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

116. **Feladat.** *Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek létezik-e az $x_0 = 0$ pontban jobboldali és baloldali határértéke, illetve határértéke! Mit állíthatunk folytonosság szempontjából azokban az esetekben, amikor x_0 benne van az értelmezési tartományban?*

$$\operatorname{sgn}(x); \qquad \operatorname{sgn}^2(x); \qquad \chi_{\mathbb{Q}}(x); \qquad x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

$$\sin\frac{1}{x}; \qquad \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x}; \qquad \frac{1}{x}; \qquad \frac{1}{x^2}.$$

117. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi határértékeket!*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+6}{x^2+2x-3}; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3x^2+2}{4x^3+3x+6}; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+2}{2x^3+x^2+x};$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-1}{2x+1}; \quad \lim_{x\to0}\frac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+2x^2}; \quad \lim_{x\to0}\frac{6x^4+3x^2+5x}{4x^3+7x^2};$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}; \quad \lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}.$$

118. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi határértékeket!*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right); \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right);$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{6x+4}-\sqrt{7x+2}}; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x^2+1}-1}{x}.$$

119. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi határértékeket!*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}; \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}; \quad \lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x}; \quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cosh x}{x^2}.$$

120. **Feladat.** *Legyen $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monoton növő, folytonos függvény. Igazolja, hogy ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\varphi(t) < t$ *ha* $t > 0$*;*

(ii) $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t) = 0$ *minden* $t > 0$ *esetén.*

(Itt φ^n az n-edik iterációs hatványt jelenti.)

121. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét!*

$$x_n = \sin(\sin(\cdots\sin(1))); \qquad y_n = \arctan(\arctan(\cdots\arctan(1))).$$

122. **Feladat.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, véges halmaz és $x_n \colon H \to \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy (x_n) akkor és csak akkor konvergál egyenletesen, ha pontonként konvergál.*

123. **Feladat.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$, valamint $x_n \colon H \to \mathbb{R}$ olyan függvénysorozat, melynek pontonkénti határfüggvénye $x \colon H \to \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy (x_n) pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az alábbi valós számsorozat nullsorozat:*

$$a_n = \sup\{|x_n(t) - x(t)| \,:\, t \in H\}$$

124. **Feladat.** *Határozza meg az (x_n) függvénysorozat konvergenciahalmazát és pontonkénti határfüggvényét, ha $x_n(t)$ az alábbiak szerint adott:*

$$\sqrt{n^2t+n} - n\sqrt{t}, \quad t \geq 0; \qquad n^2t(1-t^2)^n; \qquad \frac{t^n}{1+t^n}, \quad t \neq -1;$$

$$\sqrt[n]{1+t^n}, \quad t \geq 0; \qquad \frac{2nt}{1+n^2t^2}.$$

125. **Feladat.** *Igazolja, hogy az (x_n) függvénysorozat egyenletesen konvergens, ha $x_n(t)$ az alábbiak szerint adott:*

$$\frac{1}{n+t}, \quad t \geq 0; \qquad \sqrt{t^2 + \frac{1}{n^2}}; \qquad \frac{nt}{1+n+t}, \quad t \in [0,1];$$

$$\frac{t}{1+n^2t^2}; \qquad \frac{2nt}{1+n^2t^2}, \quad t \geq 1.$$

126. **Feladat.** *Igazolja, hogy az (x_n) függvénysorozat pontonként konvergens, de nem egyenletesen konvergens, ha $x_n(t)$ az alábbiak szerint adott:*

$$\frac{t}{n}, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \frac{1}{nt}, \quad t \in]0,1[; \qquad \chi_{[0,1/n]}(t), \quad t \in]0,1[;$$

$$t^n, \quad t \in [0,1]; \qquad \frac{2nt}{1+n^2t^2}, \quad t \in [0,1].$$

127. **Feladat.** *Legyen $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és $t \in [0,1]$ esetén $x_n(t) = g(t)t^n$. Igazolja, hogy (x_n) pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha $g(1) = 0$.*

128. **Feladat.** *Legyen $x_n(t) = t^n/(1+t^{2n})$ és $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum. Igazolja, hogy (x_n) pontosan akkor egyenletesen konvergens I-n, ha $I \cap \{-1,1\} = \emptyset$.*

129. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett valós értékű, folytonos függvények $\mathcal{C}[0,1]$ tere a szuprémum normáva ellátva olyan végtelen dimenziós Banach-tér, melyben a konvergencia épp az egyenletes konvergencia. Igazolja továbbá, hogy e térben nem teljesül a Bolzano–Weirstrass tétel.*

130. **Feladat.** *Igazolja, hogy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, ha f az alábbi módon adott (ahol szükséges, az $f(x_0) := 0$ választással élünk):*

$$|x|; \qquad \sqrt{|x|}; \qquad x \sin \frac{1}{x}; \qquad x \cos \frac{1}{\sqrt{|x|}}; \qquad x\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

131. **Feladat.** *Igazolja, hogy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, ha f az alábbi módon adott (ahol szükséges, az $f(x_0) := 0$ választással élünk):*

$$x|x|; \qquad x\sqrt{|x|}; \qquad x^2 \sin \frac{1}{x}; \qquad x^2 \cos \frac{1}{\sqrt{|x|}}; \qquad x^2\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

132. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített, továbbá $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $f(x) = g(x)(x - x_0)$ módon értelmezett. Adja meg az f függvény x_0-beli differenciálhatóságának szükséges és elegendő feltételét!*

133. **Feladat.** *Tegyük fel, hogy $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig az $f(x) = g(x)|x - x_0|$ módon értelmezett. Adja meg az f függvény x_0-beli differenciálhatóságának szükséges és elegendő feltételét!*

134. **Feladat.** *Adjon példát olyan függvényre, amely egyszer differenciálható a nullában, de kétszer nem! Adjon példát olyan függvényre, amely differenciálható a nullában, a nullától különböző helyeken pedig seholsem folytonos!*

135. **Feladat.** *Az elemi függvények deriváltjainak ismeretében határozza meg az f függvény deriváltját, ha f az alábbi módon adott:*

$$(x^2 + x)\sin x; \quad (x^2 - x)\cos x; \quad (x^3 - 2x)\sinh x; \quad (x^3 + 2x)\sinh x;$$
$$\sin x \cos x; \quad \sin x \exp x; \quad \cos x \exp x; \quad \sinh x \cosh x;$$
$$\sin x \cos x \exp x; \quad \sinh x \cosh x \exp x; \quad \sin x \cos x \sinh x \cosh x.$$

136. **Feladat.** *Az elemi függvények deriváltjainak ismeretében határozza meg az f függvény deriváltját, ha f az alábbi módon adott:*

$$\sin^2 x; \quad \sin x^2; \quad \cos^2 x; \quad \cos x^2; \quad \exp^3 x; \quad \exp x^3;$$
$$\sin(\cos x); \quad \cos(\sin x); \quad \sinh(\sin x); \quad \cosh(\cos x);$$
$$\sin(\cos(\exp x)); \quad \cos(\sin(\exp x)); \quad \exp(\exp(\exp x)).$$

137. **Feladat.** *Az elemi függvények deriváltjainak ismeretében határozza meg az f függvény deriváltját, ha f az alábbi módon adott:*

$$\frac{\sin x \cos x}{\exp(x^2 + 1)}; \quad \frac{(x^2 + x + 1)\sinh x}{(x^2 + 1)\cosh x}; \quad \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\sinh(x^2 + 1)}{\cosh(x^2 + x)}.$$

138. **Feladat.** *Az inverzfüggvény-tétel valamint az elemi függvények deriváltjainak ismeretében határozza meg az arcus- és area-függvények deriváltját értelmezési tartományuk belső pontjaiban!*

139. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy a* $p(x) = x^7 + 14x - 3$ *polinomnak pontosan egy valós zérushelye létezik!*

140. **Feladat.** *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *valamint* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *rögzített paraméterek esetén* $p(x) = x^n + \alpha x + \beta$. *Igazolja, hogy a* p *polinomnak páros* n *esetén legfeljebb két, páratlan* n *esetén pedig legfeljebb három valós zérushelye van!*

141. **Feladat.** *Igazolja, hogy a* $\sin$, $\cos$, $\arctan$ *függvények mindegyike Lipschitz-tulajdonságot teljesít!*

142. **Feladat.** *Igazolja, hogy az* $f(x) = \sqrt{x}$ *függvény nem Lipschitz az értelemzési tartományon, azonban Lipschitz az értelmezési tartomány bármely, a nullát nem tartalmazó részintervallumán!*

143. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy intervallumon értelmezett differenciálható függvény, melynek deriváltja korlátos, Lipschitz-tulajdonságot teljesít!*

144. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy kompakt intervallumon értelmezett, folytonosan differenciálható függvény Lipschitz-tulajdonságot teljesít!*

145. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha* I *valós intervallum,* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *az* $x_0 \in I$ *pontban* n*-szer differenciálhatóak, akkor* fg *is* n*-szer differenciálható* x_0*-ban, és*

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}(x_0).$$

146. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi függvények századik deriváltjait!*

$$x^2 \exp(2x); \qquad x^2 \sin\frac{x}{2}; \qquad x^2 \cos\frac{x}{2}; \qquad \sin 3x \cos 2x.$$

147. **Feladat.** *Írja föl a* p *polinomot* $(x-1)$ *(illetve* $(x+1)$*) polinomjaként, ha* $p(x)$ *az alábbiak szerint adott!*

$$x^3 + x^2 - 2x + 1; \quad x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 2; \quad x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

148. **Feladat.** *Határozza meg az* f *függvény másodrendű Maclaurin-polinomját, ha* f *az alábbiak szerint adott!*

$$\sin(\pi \sin x); \qquad \sin(\pi \cos x); \qquad \cos(\pi \cos x); \qquad \cos(\pi \sin x).$$

149. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi valós számok közelítő értékét három tizedesjegy pontossággal!*

$$\sqrt{5}; \qquad \sqrt[3]{30}; \qquad \sqrt[5]{250}; \qquad \sqrt[12]{4000}; \qquad \log(1.2).$$

150. **Feladat.** *Határozza meg az* $f(x) = \log(1+x)$ *függvény Maclaurin-sorának konvergenciatartományát, majd ennek segítségével számítsa ki a Leibniz-féle alternáló sor összegét!*

151. **Feladat.** *Legyen I valós intervallum. Határozza meg mindazon $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek minden $x, y \in I$ esetén kielégítik az $f(x) - f(y) \le (x-y)^2$ egyenlőtlenséget!*

152. **Feladat.** *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, a belső pontokban n-szer differenciálható függvény. Igazolja, hogy ha $f(a) = f(b) = 0$ és f-nek $(n-1)$ belső pontban zérushelye van, akkor van olyan $\xi \in]a,b[$, hogy $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

153. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi összegek zárt alakját! (Az első két esetben föltesszük, hogy $x \neq 1$.)*

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}; \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cos kx.$$

154. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével!*

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{5x^2-x-4}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \alpha x}{1-\cos \beta x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp \alpha x - 1}{\sin \beta x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x - \sin x}{x^2}; \quad \lim_{x\to 0-} \frac{2x - \sin x}{x^2}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{\exp x}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x\to +0} 2x \log x; \quad \lim_{x\to +0} 2x \cot x; \quad \lim_{x\to +0} x^{\sin x}; \quad \lim_{x\to +0} (\sin x)^x.$$

155. **Feladat.** *Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi polinomokon!*

$$x^3 - 5x^2; \quad x^3 - 6x^2 + 32; \quad 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6; \quad 2x^4 - 4x^2 + 6.$$

156. **Feladat.** *Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken!*

$$x + \frac{1}{x}; \quad x^2 + \frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{(x-1)^2}{x^2+1}; \quad \frac{x^2}{(x-1)\exp x}$$

157. **Feladat.** *Végezze el az arkusz- és are-függvények teljes függvényvizsgálatát!*

158. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha I valós intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) Minden $x, y \in I$ és $\lambda \in [0,1]$ esetén $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$;

(ii) ha $x < y$ tetszőleges elemei I-nek, továbbá α és β megoldásai az

$$f(x) = \alpha x + \beta, \qquad f(y) = \alpha y + \beta$$

egyenletrendszernek, akkor minden $p \in I^\circ$ esetén

$$\begin{aligned} f(p) &\ge \alpha p + \beta, && ha\, p \le x; \\ f(p) &\le \alpha p + \beta, && ha\, p \in]x, y[; \\ f(p) &\ge \alpha p + \beta, && ha\, p \ge y; \end{aligned}$$

(iii) bármely $x_1 < x_2 < x_3$ I-beli pontok esetén

$$\begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \ge 0;$$

(iv) bármely $x < y < z$ I-beli pontok esetén

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y};$$

(v) tetszőleges $x_0 \in I^\circ$ elemhez léteznek olyan α és β konstansok, hogy

$$\alpha x_0 + \beta = f(x_0), \qquad \alpha x + \beta \le f(x);$$

(vi) minden $x_1, \dots, x_n \in I$ illetve minden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nemnegatív valós szám esetén, amelyre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$,

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

159. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha I nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor*

(i) f lokálisan Lipschitz tulajdonságot teljesít I pontjaiban;

(ii) f jobb és baloldali deriváltjai léteznek I bármely pontjában;

(iii) bármely $x < y$, $x, y \in I$ esetén

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y);$$

(iv) f differenciálható legfeljebb megszámlálhatóan sok ponttól eltekintve.

160. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy ha I nyílt intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, úgy f pontosan akkor konvex, ha f' monoton növő. Hasonlóan, ha f kétszer differenciálható, úgy f pontosan akkor konvex, ha f'' nemnegatív.*

161. **Feladat.** *(Súlyozott számtani–mértani közepek) Igazolja, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív számok, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ konvex kombinációs együtthatók, akkor fönnáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Speciálisan,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

162. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha $\alpha, \beta\gamma$ tetszőleges háromszög szögei, akkor*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

163. **Feladat.** *Igazolja, hogy ha α, β, γ hegyesszögű háromszög szögei, akkor*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2};$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \geq 3\sqrt{3}.$$

164. **Feladat.** *Legyen I valós intervallum és $\lambda \in]0,1[$. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt λ-konvexnek mondjuk, ha minden $x, y \in I$ esetén*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

teljesül. Bizonyítsa be, hogy ha f λ-konvex függvény, akkor speciálisan Jensen-konvex, azaz $1/2$-konvex is.

165. **Feladat.** *Bizonyítsa be, hogy nyílt intervallumon értelmezett Jensen-konvex függvény racionálisan konvex. Mutassa meg továbbá, hogy nyílt intervallumon értelmezett függvény pontosan akkor konvex, ha folytonos és Jensen-konvex.*

166. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx; \quad \int \frac{2x^3+3x^2+x}{x^4+2x^3+x^2+1}dx; \quad \int \frac{\exp(2x)}{1+\exp(2x)}dx; \quad \int \frac{1}{x\log x}dx;$$

$$\int \tan x dx; \quad \int \coth x dx; \quad \int \tan^2 x dx; \quad \int \coth^2 x dx;$$

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx; \quad \int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}; \quad \int \frac{1}{\sin x}dx; \quad \int \frac{1}{(x^2+1)\arctan x}dx;$$

$$\int x^3\sqrt{x^4+1}dx; \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx; \quad \int \sin^2 x\cos x dx; \quad \int \frac{\log x}{x}dx;$$

$$\int \frac{\log^2 x}{x}dx; \quad \int \frac{\sinh x}{\cosh^3 x}dx; \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt[5]{\cos^7 x}}dx; \quad \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx; \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx.$$

167. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int x\sin x dx; \quad \int x\cos x dx; \quad \int (x^2+x)\sin x dx; \quad \int (x^2+x)\cos x dx;$$

$$\int (x^2+x)\exp(2x)dx; \quad \int \exp(2x)\sin(3x)dx; \quad \int \exp(2x)\cos(3x)dx;$$

$$\int \operatorname{arsh} x dx; \quad \int \arcsin x dx; \quad \int \arctan x dx; \quad \int \log x dx.$$

168. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int \sqrt[5]{7x-16}dx; \quad \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx; \quad \int \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx;$$

$$\int \frac{dx}{9+4x^2}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}; \quad \int \frac{dx}{\cosh^2(3x+2)};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\exp(2x)}}; \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}; \quad \int \frac{xdx}{1+x^4}; \quad \int \frac{dx}{x\log x\log\log x};$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx; \quad \int \sqrt{1+x^2}dx; \quad \int \sqrt{25+4x^2}dx; \quad \int x^2\sqrt[3]{1-x}dx.$$

169. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}; \quad \int \frac{dx}{x^2-6x+9}; \quad \int \frac{dx}{x^2+4x+5};$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx; \quad \int \frac{x}{x^3-3x+2}dx; \quad \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx;$$

$$\int \frac{dx}{x^3-5x^2-2x+24}; \quad \int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3}dx; \quad \int \frac{x^2-4x+2}{(x-3)^3}dx;$$

$$\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2}dx; \quad \int \frac{2x^3-x^2+x+1}{(x+2)^2(x-1)^2}dx; \quad \int \frac{2x^2dx}{(x^2+1)(x^2-1)};$$

$$\int \frac{3x^2+4}{(x^2-2x+5)^2}dx; \quad \int \frac{2x^3-4x^2+x-1}{(x-1)(x^2+4)^2}dx; \quad \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx;$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx; \quad \int \frac{x+3}{x^2+3x+4}dx; \quad \int \frac{2x^2}{x^4-1}dx; \quad \int \frac{dx}{x^8-1}.$$

170. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int \frac{dx}{\sin x}; \quad \int \frac{dx}{\cos x}; \quad \int \frac{dx}{1+\sin x}; \quad \int \frac{dx}{1+\cos x};$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}; \quad \int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}dx; \quad \int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx;$$

$$\int \frac{4dx}{5+6\cos x}; \quad \int \frac{\sin x dx}{3\sin x+5\cos x}; \quad \int \frac{2dx}{1+2\tan x}.$$

171. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi primitív függvényeket!*

$$\int \frac{4dx}{e^{2x}-4}; \quad \int \frac{5dx}{e^{2x}+1}; \quad \int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx; \quad \int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^{3x}+7e^{2x}+6e^x};$$

$$\int x\sqrt{5x+3}dx; \quad \int (3x+6)\sqrt{2x-4}dx; \quad \int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3}dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}dx; \quad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}; \quad \int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

172. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi függvények normális beosztássorozathoz tartozó alsó és fölső integrálközelítő összegeinek zárt alakját!*

$$f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2;\qquad g\colon [1,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2+x;$$
$$h\colon [0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3;\qquad k\colon [1,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3+x.$$

173. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi Riemann-integrálokat!*

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx;\quad \int_0^{\pi}\sin^3 x dx;\quad \int_0^1 \arccos x dx;\quad \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx;$$
$$\int_1^2 \frac{\sin(\pi\log x)}{x}dx;\quad \int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-3x+2};\quad \int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2+4x+5};$$
$$\int_0^2 |x-1|dx;\quad \int_1^3|x-2|dx;\quad \int_0^3|x^2-3x+2|dx;\quad \int_{-3}^0|x^2+3x+2|dx.$$

174. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi improprius Riemann-integrálokat!*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3};\quad \int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{3x}};\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2};\quad \int_0^1\frac{dx}{\sqrt[7]{x^3}};\quad \int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx.$$

175. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi módon adott (a_n) sorozatok határértékét!*

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+k};\quad \sum_{k=1}^n\frac{n}{(n+k)^2};\quad \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}};$$
$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n};\quad \frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=1}^n k^{\alpha};\quad \frac{1}{n}\Big(\prod_{k=1}^n(n+k)\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

176. **Feladat.** *Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket!*

$$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}}dx<\frac{1}{4};\qquad \int_0^1\sqrt[4]{-16x^4+8x^2+15}\sin\pi x dx<\frac{4}{\pi};$$
$$\int_0^1 x\sqrt{\sin\pi x}dx<\frac{\sqrt{2}}{3};\qquad \int_0^1\sqrt{1+x^4}dx<1.1$$

177. **Feladat.** *Igazolja, hogy $\mathbb{R}^n$ Banach-tér ha rendre az 1-, 2-, ∞-normákkal ruházzuk föl. Mutassa meg továbbá, hogy ezek ekvivalens normák!*

178. **Feladat.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ legalább $(n+1)$-elemű halmaz, s jelölje $\mathcal{P}_n$ a legfeljebb n-ed fokú polinomok valós vektorterét. Legyenek $t_0, \dots, t_n$ páronként különböző H-beli elemek. Igazolja, hogy ekkor a*

$$|p| := \max\{|p(t_0)|, \dots, |p(t_n)|\}$$

módon értelmezett függvény normát származtat a $\mathcal{P}_n$ halmazon. Igazolja továbbá, hogy ha (p_m) tetszőleges sorozat $\mathcal{P}_n$-ben, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) $p_m \to p$ *a* $\{t_0, \dots, t_n\}$ *halmazon;*
(ii) $p_m \to p$ *a* H *pontjaiban;*
(iii) $p_m \to p$ *a* H *kompakt részhalmazain.*

179. **Feladat.** *Igazplja, hogy a $\mathcal{C}[0,1]$ lineáris téren a $|x|_1 = \int_0^1 |x(t)|dt$ előírás normát származtat. Bizonyítsa be továbbá, hogy e norma nem ekvivalens a szuprémum normával, valamint, hogy e normával $\mathcal{C}[0,1]$ nem teljes.*

180. **Feladat.** *Legyenek X, Y normált terek, valamint $A\colon X \to Y$ lineáris leképezés. Igazolja, hogy ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $\sup_{|x|\le 1} |Ax| < +\infty$;
(ii) $\sup_{|x|=1} |Ax| < +\infty$;
(iii) van olyan $c > 0$, *hogy* $|Ax| \le c|x|$ *minden* $x \in X$ *esetén;*
(iv) A *folytonos* X*-en;*
(v) A *folytonos a* $p = 0$ *pontban.*

181. **Feladat.** *Határozza meg az $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés normáját, ha ismert a természetes bázisra vonatkozó mátrixreprezentációja, valamint az értelmezési tartomány és az értékkészlet is az 1- (illetve: a ∞)-normával van ellátva.*

182. **Feladat.** *Igazolja, hogy $A\colon \mathcal{C}[-1,1] \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál és határozza meg a normáját, ha*

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k), \quad -1 \le t_1 < \dots < t_n \le 1,\ \alpha_k \in \mathbb{R};$$

$$Ax = \int_{-1}^{1} x(t)dt; \qquad Ax = xy, \quad y \in \mathcal{C}[-1,1];$$

$$Ax = \int_{-1}^{1} x(t)\sin^2(2\pi t)dt; \qquad Ax = \int_{-1}^{1} x(t)\sin(2\pi t)dt;$$

$$Ax = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt, \quad y \in \mathcal{C}[-1,1]$$

183. **Feladat.** *Vizsgálja definíció alapján, hogy az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés Fréchet- illetve iránymenti differenciálhatóságát a $p = (0,0)$ pontban, ha $f(p) = 0$, továbbá*

$$f(x,y) := (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}; \quad f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2};$$
$$f(x,y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f(x,y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$$

.

184. **Feladat.** *Vizsgálja definíció alapján, hogy az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezés Fréchet- illetve iránymenti differenciálhatóságát a p pontban, ha*

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|}; \quad f(x,y) := \sqrt[3]{x^3+y^3}; \quad f(x,y) := \sqrt[3]{xy}, \quad p = (0,0);$$
$$f(x,y) := 3x+y, \quad p = (1,2); \qquad f(x,y) := 2x+3y, \quad p = (1,1);$$
$$f(x,y) := x^2+xy, \quad p = (2,1); \qquad f(x,y) := 3xy+y^2, \quad p = (3,1).$$

185. **Feladat.** *Igazolja definíció alapján, hogy az $f(x,y,z) = (x^2+yz, xy^2+z)$ módon értelmezett leképezés Fréchet értelemben differenciálható a $p = (2,1,1)$ pontban.*

186. **Feladat.** *Számítsa ki a $\partial_v f(p)$ irány menti deriváltat, ha*

$$f(x,y) = \big(y\sin(x^2+xy), x\cos(xy), \exp(x^2-y^2+1)\big),$$
$$p = (0,1), \quad v = (2,-3);$$

$$f(x,y,z) = \big((x^2+xy)\cos(z^2-y^2),\ (z^3+y^2z)\exp(z^2-x)\big),$$
$$p = (1,-1,1), \quad v = (1,3,-2).$$

187. **Feladat.** *Határozza meg a $g \circ f$ leképezés $p = (1,1,-1)$ pontbeli, $v = (1,-1,0)$ irány menti deriváltját, ha*

(i) $g(x,y) = (x^2+y^2+xy, x+y^2)$, $\quad f(x,y,z) = (xz^2+x^2y+xyz, xy-z^2)$;
(ii) $g(x,y) = (x+y+x^2y^2, xy)$, $\quad f(x,y,z) = (xz+xy+xyz, xy-z^2)$;
(iii) $g(x,y) = (x^2y+x^2y^3, xy+y^2)$, $\quad f(x,y,z) = (xz^2+x^2y+xyz, xy-z^3)$.

188. **Feladat.** *Határozza meg a $g \circ f$ leképezés $p = (0,1)$ pontbeli, $v = (1,-1)$ irány menti deriváltját, ha*

(i) $g(x,y,z) = (x^2+xy, y^2+yz, xy+yz)$, $\quad f(x,y) = (x^2+xy, y^2+xy, x+y)$;
(ii) $g(x,y,z) = (x+y^2+z^3, y^2+xz, xyz)$, $\quad f(x,y) = (x+y^2, y+x^2, x+y+xy)$;
(iii) $g(x,y,z) = (xy+yz+zx, xy+y^2)$, $\quad f(x,y,z) = (x^2+z^2+xyz, xy-z^3)$.

189. **Feladat.** *Igazolja, hogy létezik a $b \in \mathbb{R}$ pontnak W és az $a \in \mathbb{R}^2$ pontnak U környezete, valamint létezik olyan $g = (g_1, g_2)\colon W \to U$ differenciálható függvény, amely eleget tesz a megadott implicit egyenletnek! Határozza meg $g'(b)$ természetes bázisra vonatkozó mátrixát, ha*

(i)

$$\begin{aligned} x^2 + xg_1^2 + x^2 g_2 + g_1 g_2 =& 2, \\ x + g_1^2 + g_2^2 - g_1 - g_2 =& -1, \\ b = -1, \quad g(b) =& (1, 1); \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^2 - x\cos g_1 + \sin g_2 =& 16, \\ xg_1 + \sin g_1 - \cos g_2 =& 2\pi, \\ b = 4, \quad g(b) =& (\pi/2, 0); \end{aligned}$$

190. **Feladat.** *Igazolja, hogy létezik a $b \in \mathbb{R}$ pontnak W és az $a \in \mathbb{R}^2$ pontnak U környezete, valamint létezik olyan $g\colon W \to U$ differenciálható függvény, amely eleget tesz a megadott implicit egyenletnek! Határozza meg $g'(b)$ természetes bázisra vonatkozó mátrixát, ha*

(i)

$$(x^2 + y^2)g - 2xyg - 4 = 0, \qquad b = (1, -1), \quad g(b) = 1;$$

(ii)

$$x^2 + y^2 - xy + g^2 - g = 3, \qquad b = (1, 1), \quad g(b) = -1;$$

191. **Feladat.** *Igazolja, hogy létezik a $b \in \mathbb{R}^2$ pontnak W és az $a \in \mathbb{R}^2$ pontnak U környezete, valamint létezik olyan $g = (g_1, g_2)\colon W \to U$ differenciálható függvény, amely eleget tesz a megadott implicit egyenletnek! Határozza meg $g'(b)$ természetes bázisra vonatkozó mátrixát, ha*

(i)

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4y + \sin g_1 + \cos g_2 =& 0, \\ xy + y^2 + \cos g_1 + g_2 =& \frac{\pi}{2} + 4, \\ b := (2, -3), \quad g(b) =& (0, \pi/2) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + xg_1 + g_2 =& 0, \\ x - y - g_1 + 2yg_2 =& 0, \\ b = (2, -1), \quad g(b) =& (-1, 2). \end{aligned}$$

192. **Feladat.** *Írja föl az alábbi polinomokat a megadott monomok polinomjaként!*

(i) $p(x,y) = x^2y + xy + y^3$, $x-1, y+1$;
(ii) $p(x,y) = x^2y + y^2 - xy + x$, $x+1, y+1$;
(iii) $p(x,y,z) = xy + z^2 + x^2 + z$, $x-1, y-1, z+1$;
(iv) $p(x,y,z) = x^2y + y^2z + xyz + z^3$, $x-1, y-1, z+1$.

193. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi függvények másodrendű Maclaurin-polinomját!*

$$y\sin(x+y^2); \quad x\cos(x^2+y); \quad (x^2+y)\cos(xy); \quad (x+y^2)\sin(xy).$$

194. **Feladat.** *Léteznek-e, és amennyiben igen, egyenlőek-e a* $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ *illetve* $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ *parciális deriváltak, ha*

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad f(0,0) = 0;$$

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0.$$

195. **Feladat.** *Vizsgálja lokális szélsőérték szempontjából az alábbi függvényeket!*

$$5x^2 + 2xy + 2y^2; \quad x^2 + 5y^2 + 4xy - 2; \quad 2x^4 + y^2 - 2x^2y^2 - 2x^2;$$

$$5x^4 + y^4 - 2x^2 - 4x^2y^2; \quad (x^2+y^2-4)^2 - y^2; \quad (x^2+y^2-1)^2 - 6x^2;$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 4x - 4y - 4z.$$

196. **Feladat.** *Keresse meg az* f *szélsőértékeit a* $h = 0$ *feltételre nézve, ha*

(i) $f(x,y) = x + 2y$, $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$;
(ii) $f(x,y) = xy$, $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$;
(iii) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$;
(iv) $f(x,y,z) = x - y + 2z$, $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2$;
(v) $f(x,y,z) = xyz$, $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$;
(vi) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $h(x,y,z) = (x^2 + y^2 + 2z^2 - 1, x + 2y + 3z)$.

197. **Feladat.** *Határozza meg az* $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ *egyenletű ellipszis origóhoz legközelebbi, illetve attól legtávolabbi pontjait!*

198. **Feladat.** *Határozza meg az* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *gömbfelület azon pontjait, amelyek a legnagyobb illetve legkisebb távolságra vannak a* $p = (1, 5, -10)$ *(illetve:* $p = (1, 2, 2)$ *és* $p = (-2, 1, 0)$*) ponttól!*

199. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi függvények normális beosztássorozathoz tartozó alsó és fölső integrálközelítő összegeinek zárt alakját!*

$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=xy;$$
$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2+y^2.$$

200. **Feladat.** *Léteznek-e az alábbi Riemann-integrálok, illetve fölcserélhető-e az integrálás sorrendje az alábbi példákban?*

$$f\colon [0,\pi]\times[0,1]\to\mathbb{R}, f(x,y)=\cos x\chi_{\mathbb{Q}}(y);$$
$$f\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}, f(x,y)=2y\chi_{\mathbb{Q}}(x)+1-\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

201. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!*

$$\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^3}y^2dydx;\quad \int_0^1\int_{-1}^1 xy^2\sin(\pi x^2)dydx;\quad \int_{-1}^1\int_0^1 y\cos(\pi xy)dydx.$$

202. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!*

$$\int_H (x^2+xy)d(x,y),\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1], x^2\le y\le x\};$$
$$\int_H (y^2+xy)d(x,y),\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1], x\le y\le \sqrt{x}\};$$
$$\int_H \sin\big(\pi(x+y)\big)d(x,y),\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1], 0\le y\le x\};$$
$$\int_H \cos\big(\pi(x-y)\big)d(x,y),\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\in[0,1], -y\le x\le y\}.$$

203. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!*

$$\int_0^1\int_0^1|2x+y-2|dydx;\quad \int_0^1\int_0^1|2xy-1|dydx;\quad \int_0^1\int_0^1|4x^2+y-1|dydx.$$

204. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi integrálok értékét!*

$$\int_H \big(x^2+(y+1)^2\big)d(x,y);\quad H=\mathrm{conv}\{(-1,0);(0,-1);(0,1);(1,0)\};$$
$$\int_H \Big((x+1)^2+\frac{1}{4}(y+2)^2\Big)d(x,y);\ H=\mathrm{conv}\{(-2,0);(-1,-2);(-1,2);(0,0)\};$$
$$\int_H \sin\big(\pi(x^2+y^2)\big)d(x,y);\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 1\le x^2+y^2\le 2\};$$
$$\int_H (x-y)^2d(x,y);\quad H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+\mid 1\le x^2+y^2\le 2\}.$$

205. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi feltételekkel adott testek Jordan-mértékét!*

(i) $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
(ii) $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = r^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(0 < \sqrt{2} < a)$;
(iii) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

206. **Feladat.** *Számítsa ki a* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$ *halmaz külső és belső Jordan-mérétékét! Igazolja, hogy az alábbi halmazok Jordan szerint nullmérétékűek!*

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = \chi_{\mathbb{Q}}(x)\}$;
(ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = x^2\}$;
(iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = \sqrt{x}\}$;
(iv) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y = f(x)\}$, *ahol* $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *folytonos.*

207. **Feladat.** *Vizsgálja az adott függvények rektifikálhatóságát definíció szerint!*

(i) $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$;
(ii) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$;
(iii) $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, $x \in [0, 1]$;
(iv) $f(x) = \cos(\pi/x)$, $x \in]0, 1]$ *valamint* $f(0) = 0$;
(v) $f(x) = x\cos(\pi/x)$, $x \in]0, 1]$ *valamint* $f(0) = 0$.

208. **Feladat.** *Igazolja, hogy kompakt intervallumon adott korlátos változású függvény szakadási helyeinek halmaza megszámlálható, és nincs másodfajú szakadása!*

209. **Feladat.** *Igazolja, hogy kompakt intervallumon adott differenciálható függvény, melynek deriváltja korlátos, korlátos változású. Igazolja, hogy kompakt intervallumon adott Lipshitz-függvény korlátos változású!*

210. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi totális variációkat!*

$$\bigvee_0^1 x^2 dx; \quad \bigvee_{-1}^1 x^3 dx; \quad \bigvee_0^{2\pi} \sin x dx; \quad \bigvee_0^3 (2x^3 - 9x^2 + 12x) dx.$$

211. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi Riemann–Stieltjes integrálokat!*

$$\int_0^1 x dx^2; \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx^2; \quad \int_0^1 x d\sin(2\pi x); \quad \int_0^1 x^2 d\cos(2\pi x).$$

212. **Feladat.** *Számítsa ki a* $\in_g f$ *görbe menti integrált, ha* g *a* $[0,1]^2$ *egységnégyzet határa pozitív irányítással,* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *pedig az alábbi leképezés:*

$$f(x,y) = \Big(\frac{y^2}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2}{1+x^2+y^2}\Big).$$

213. **Feladat.** *Számítsa ki az alábbi függvények adott pálya menti integrálját!*

$$f(x,y) = \Big(\frac{x+2y}{x^2+y^2}, \frac{y-2x}{x^2+y^2}\Big), \qquad g(t) = (\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi];$$

$$f(x,y,z) = \big(yz, (x^2+y^2)z, xy\big), \qquad g(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

214. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi függvények origóban eltűnő primitív függvényét!*

$$f(x,y) = (x,y); \quad f(x,y) = (y,x); \quad f(x,y) = (x-y, y-x);$$

$$f(x,y) = (x+y, x-y); \quad f(x,y) = (2xy+y^2, x^2+2xy).$$

215. **Feladat.** *Határozza meg az alábbi függvények origóban eltűnő primitív függvényét!*

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x, y^2, -z^2); \\ f(x,y,z) &= (yz, xz, xy); \\ f(x,y,z) &= (y^2+2xz, z^2+2xy, x^2+2yz); \\ f(x,y,z) &= (2xy^3, 3x^2y^2+ze^y, e^y). \end{aligned}$$

216. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi leképezéseknek nem létezik primitív függvénye!*

$$f(x,y) = (y,-x); \quad f(x,y) = (\sin(xy) + xy\cos(xy), x^3\cos(xy));$$

$$f(x,y) = (y^2+xy, x^2+xy); \quad f(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, xy^2z^2).$$

217. **Feladat.** *Igazolja, hogy az alábbi leképezésnek nem létezik primitív függvénye a teljes értelmezési tartományon, azonban létezik az* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \le 0\}$ *halmazon!*

$$f(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big).$$