

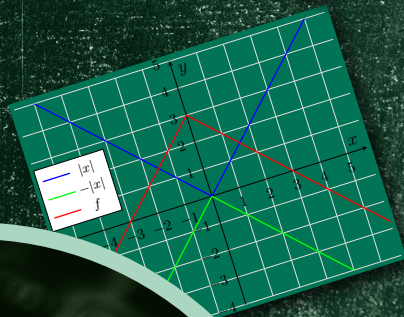
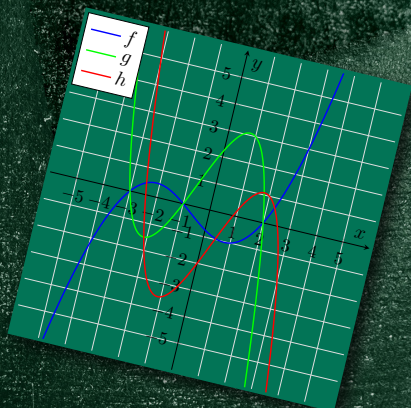
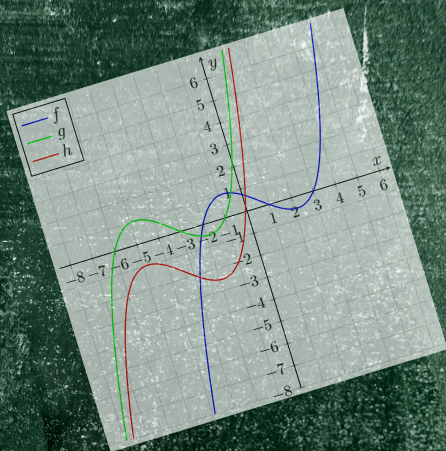


DEBRECENI
EGYETEM

Gazdaságtudományi Kar

KÉZI CSABA GÁBOR
SIPOS DÓRA FRUZZSINA

**Oktatási segédanyag
a matematika
kritériumtárgyhoz
gazdasági
alkalmazásokkal**



Debreceni Egyetem
Gazdaságtudományi Kar

Oktatási segédanyag a matematika kritériumtárgyhoz gazdasági alkalmazásokkal

DR. KÉZI CSABA GÁBOR

DR. SIPOS DÓRA FRUZZSINA



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2026

Lektor:
Dr. habil Nagy Gergő
egyetemi docens

Borítóterv:
M. Szabó Monika

ISBN 978-963-615-314-4 (pdf)

© Debreceni Egyetemi Kiadó – Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének a tagja
dupress.unideb.hu

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Előszó

Ez a szakkönyv a Gazdaságtudományi Kar hallgatói számára készült, azzal a céllal, hogy áttekinthetően és gyakorlatorientáltan támogassa a Matematika Kritériumtárgy keretében elsajátítandó középiskolai matematikai ismereteket.

A gazdasági gondolkodás és a matematikai alapműveltség szorosan összekapcsolódik: a későbbi tanulmányok és szakmai feladatok megértéséhez elengedhetetlen a biztos, rendszerezett tudás.

Jelen szakkönyv ezért egyszerre kínál elméleti összefoglalást és bőséges gyakorlati példatárat, hogy lépésről lépésre építse fel a szükséges kompetenciákat.

Törekedtünk arra, hogy a tartalom érthető, logikus felépítésű és önálló tanulásra is alkalmas legyen.

Szerzőkként közös célunk volt olyan anyag létrehozása, amely nemcsak segíti a felkészülést, hanem magabiztosságot is ad a matematikai gondolkodásban.

A könyvben szereplő ábrák, táblázatok, grafikonok saját szerkesztésünk eredményei.

Bízunk benne, hogy a könyv hasznos útitársként kíséri végig tanulmányaikat, és hozzájárul a sikeres vizsgákhoz és a későbbi szakmai fejlődéshez.

Jó munkát és eredményes tanulást kívánunk!

1. fejezet

Algebrai alapismeretek

1.1. Ellentett, reciprok, abszolútérték

Elméleti összefoglaló.

Az alábbi táblázat első oszlopában áttekintünk néhány fogalmat, amit a későbbiekben használni fogunk, a második oszlopban pedig egy-egy példával illusztráljuk azokat.

1. Alapfogalmak

Fogalom	Példa
Az a valós szám <i>ellentettje</i> $-a$.	-5 ellentettje 5
Az $a \neq 0$ valós szám <i>reciproka</i> $\frac{1}{a}$.	5 reciproka $\frac{1}{5}$
Az a valós szám <i>abszolútértéke</i> : $ a = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$	-5 abszolútértéke 5

Kidolgozott feladatok.**1. Feladat.** Adjuk meg a

$$3 + \frac{1}{5}$$

valós szám reciprokának ellentettjét!

Megoldás:

Mivel

$$3 + \frac{1}{5} = \frac{15}{5} + \frac{1}{5} = \frac{16}{5},$$

ezért a szám reciproka $\frac{5}{16}$, aminek az ellentettje $-\frac{5}{16}$.**2. Feladat.** Adjuk meg az $|-7| - (-5)$ szám reciprokát!**Megoldás:**Mivel $|-7| = 7$ és $-(-5) = 5$, ezért

$$|-7| - (-5) = 7 + 5 = 12.$$

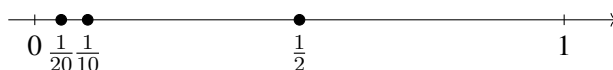
A 12 reciproka $\frac{1}{12}$.**3. Feladat.** Adjuk meg az $|2 - 7| + (-(-3))$ szám ellentettjét!**Megoldás:**

Mivel

$$|2 - 7| = |-5| = 5 \quad \text{és} \quad -(-3) = 3,$$

így

$$5 + 3 = 8,$$

tehát a keresett szám ellentettje -8 .**4. Feladat.** Ábrázoljuk számegyenesen a 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, 1 és $\frac{1}{20}$ számokat!**Megoldás:**A megadott számok mind pozitív törtek, ezért a számegyenes 0 és 1 közötti részén helyezkednek el:

1.2. Hatványozás azonosságai

Elméleti összefoglaló.

Legyenek a és b valós számok, továbbá n és m pozitív egész számok.

Az a szám n -edik hatványán az

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab tényező}}$$

n -tényezős szorzatot értjük.

Az a^n kifejezésben az a valós számot *hatványalap*nak hívjuk. Az n természetes számot *hatványkitevő*nek nevezzük, míg az a^n kifejezést *hatványként* vagy *hatványértékként* említjük. Például a 2^3 kifejezésben a hatványalap: 2, a hatványkitevő: 3, a hatványérték: $2^3 = 8$. Az alábbi táblázat első oszlopában összefoglaljuk a hatványozás azonosságait, a második oszlopban pedig egy-egy példával illusztráljuk a megfelelő azonosságot.

2. A hatványozás azonosságai

Azonosság	Példa
$a^0 = 1$	$5^0 = 1$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(4 \cdot 5)^3 = 4^3 \cdot 5^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{2^6}{5^6}$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^6 \cdot 2^5 = 2^{6+5} = 2^{11} = 2048$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^4)^2 = 2^8 = 256$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Fontos megjegyezni, hogy különböző alapú, különböző kitevőjű hatványok szorzására, osztására nincs a fentihez hasonló azonosság.

A hatványkitevő lehet egész szám, racionális szám, sőt valós szám is. Ebben a jegyzetben a legutóbbi esettel nem foglalkozunk.

A 0^0 hatvány értékét definíció szerint 1-nek fogjuk tekinteni. Ennek indoklása mélyebb matematikai eszközök használatát igényli.

Kidolgozott feladatok.

5. Feladat. Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy

$$\frac{a^4 \cdot a^2}{(a^3)^2} = a^x$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel hatvány hatványozásakor a kitevők összeszorzódnak, ezért $(a^3)^2 = a^6$.

Azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, így

$$a^4 \cdot a^2 = a^6.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük, így

$$\frac{a^6}{a^6} = a^0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$.

6. Feladat. Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy

$$\frac{a^7 \cdot a^2}{(a^3)^2} = a^x$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel hatvány hatványozásakor a kitevők összeszorzódnak, ezért $(a^3)^2 = a^6$.

Azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, így

$$a^7 \cdot a^2 = a^9.$$

Azonos alapú hatványok osztáskor az alapot a számláló és nevező kitevőinek különbségére emeljük, így

$$\frac{a^9}{a^6} = a^{9-6} = a^3,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 3$.

7. Feladat. Határozzuk meg az x és y valós számok értékét úgy, hogy

$$\frac{(a^2 \cdot b)^5 \cdot (a \cdot b^3)^2}{(a^3 \cdot b)^2 \cdot (a^2 \cdot b^3)^3} = a^x \cdot b^y$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel szorzatok hatványozásakor a kitevők összeszoródnak, ezért

$$(a^2 \cdot b)^5 = (a^2)^5 \cdot b^5 = a^{10} \cdot b^5, \quad (a \cdot b^3)^2 = a^2 \cdot b^6.$$

Így az

$$(a^2 \cdot b)^5 \cdot (a \cdot b^3)^2 = a^{10} \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot b^6 = a^{12} \cdot b^{11}.$$

Azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, így azt kapjuk, hogy

$$a^{10} \cdot a^2 = a^{12}, \quad b^5 \cdot b^6 = b^{11}.$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük, így

$$\frac{a^{12} \cdot b^{11}}{(a^3 \cdot b)^2 \cdot (a^2 \cdot b^3)^3} = \frac{a^{12} \cdot b^{11}}{a^6 \cdot b^2 \cdot a^6 \cdot b^9} = \frac{a^{12} \cdot b^{11}}{a^{12} \cdot b^{11}} = a^0 \cdot b^0.$$

Amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, illetve $y = 0$.

8. Feladat. Számológép használata nélkül számoljuk ki a

$$\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-2} + 2^{-3}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$ és $2^{-3} = \frac{1}{8}$, ezért

$$\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-2} + 2^{-3}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} = 2.$$

9. Feladat. Számológép használata nélkül számoljuk ki a

$$\frac{3^{-1} + 3^{-2}}{3^{-2} + 3^{-3}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^{-2} = \frac{1}{9}$ és $3^{-3} = \frac{1}{27}$, ezért

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{27}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{4} = 3.$$

10. Feladat. Számológép használata nélkül számoljuk ki a

$$\frac{5^{-2} + 5^{-3}}{5^{-1} - 5^{-2}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $5^{-1} = \frac{1}{5}$, $5^{-2} = \frac{1}{25}$ és $5^{-3} = \frac{1}{125}$, ezért

$$\frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{125}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{25}} = \frac{\frac{6}{125}}{\frac{4}{25}} = \frac{6}{125} \cdot \frac{25}{4} = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}.$$

11. Feladat. Számoljuk ki a

$$\frac{10^{-1} + 10^{-2}}{10^{-3}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{100}$ és $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, ezért

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{1000}} = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{1}{1000}} = \frac{11}{100} \cdot 1000 = 110.$$

12. Feladat. Számoljuk ki a

$$\frac{-3^2 + (-3)^2 + 1}{-2^2 + 3^{-2}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $-3^2 = -(3^2) = -9$ és $(-3)^2 = 9$, ezért

$$-3^2 + (-3)^2 + 1 = -9 + 9 + 1 = 1.$$

Továbbá $-2^2 = -(2^2) = -4$ és $3^{-2} = \frac{1}{9}$, ezért

$$-2^2 + 3^{-2} = -4 + \frac{1}{9} = -\frac{36}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{35}{9}.$$

Így

$$\frac{1}{-\frac{35}{9}} = -\frac{9}{35}.$$

13. Feladat. Számoljuk ki a

$$2^2 + 2^{-2} + (-2)^2 + (-2)^{-2}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $2^2 = 4$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, $(-2)^2 = 4$, $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$, ezért

$$4 + \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

14. Feladat. Számológép használata nélkül számoljuk ki a

$$\frac{18^3 \cdot 40^2}{12^4 \cdot 15}.$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

A kifejezésben szereplő egyes számok prímtényezői felbontásai:

$$18 = 2 \cdot 3^2, 40 = 2^3 \cdot 5, 12 = 2^2 \cdot 3, 15 = 3 \cdot 5.$$

Felhasználva a szorzat hatványozására és a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságokat azt kapjuk, hogy

$$18^3 = (2 \cdot 3^2)^3 = 2^3 \cdot 3^6$$

$$40^2 = (2^3 \cdot 5)^2 = 2^6 \cdot 5^2$$

$$12^4 = (2^2 \cdot 3)^4 = 2^8 \cdot 3^4.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \frac{18^3 \cdot 40^2}{12^4 \cdot 15} &= \frac{(2^3 \cdot 3^6) \cdot (2^6 \cdot 5^2)}{(2^8 \cdot 3^4) \cdot (3 \cdot 5)} = \frac{2^{3+6} \cdot 3^6 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^{4+1} \cdot 5} = \\ &= \frac{2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^2}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

1.3. Gyökvonás azonosságai

Elméleti összefoglaló.

Legyenek a és b tetszőleges olyan valós számok, hogy az előforduló kifejezéseknek legyen értelme, legyenek továbbá m és n pozitív egész számok.

Az $\sqrt[n]{a}$ kifejezés azt a valós számot jelenti, amelynek n -edik hatványa az a szám. Például $\sqrt[3]{27} = 3$, mert $3^3 = 27$.

3. A gyökvonás azonosságai

Azonosság	Példa
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$
$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$\sqrt[3]{27^5} = (\sqrt[3]{27})^5 = 3^5 = 243$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[15]{2}$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben a gyökkitevő páros, úgy $\sqrt[n]{a}$ azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek az n -edik hatványa az a szám.

Kidolgozott feladatok.

15. Feladat. Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy

$$\frac{(a^2)^3 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}} = a^x$$

összefüggés teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $(a^2)^3 = a^6$, továbbá $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ és $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, ezért

$$\frac{a^6 \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^x$$

Mivel azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük, ezért

$$a^6 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{2}}.$$

Ezt felhasználva

$$\frac{a^{\frac{13}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}} = a^x$$

adódik. A hányados hatványozására vonatkozó azonosság alapján azt kapjuk, hogy

$$a^{\frac{13}{2} - \frac{2}{3}} = a^x \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{35}{6}},$$

így $x = \frac{35}{6}$.

16. Feladat. Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy

$$\frac{a^{-3} \cdot \sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} = a^x$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4}}$ és $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$, ezért

$$\frac{a^{-3} \cdot a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}} = a^{-3 + \frac{5}{4} - \frac{3}{2}} = a^{\frac{-12+5-6}{4}} = a^{-\frac{13}{4}},$$

tehát $x = -\frac{13}{4}$.

1.4. Műveletek polinomokkal, nevezetes azonosságok

Elméleti összefoglaló.

Legyen a_n egy nullától különböző valós szám, n tetszőleges természetes szám, továbbá legyenek $a_0, a_1, \dots, a_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor az

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

kifejezést *n-edfokú polinomnak* nevezzük.

Például az $x^2 + 7x - 5$ kifejezés egy másodfokú polinom. Az alábbi táblázatban összefoglaljuk a fontosabb nevezetes azonosságokat:

4. Nevezetes azonosságok

Azonosság	Példa
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2$
$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$	$9 - x^2 = (3 - x) \cdot (3 + x)$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(3 - x - y)^2 = 9 + x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2xy$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(2 + x)^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2 - x)^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$
$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$	$8 + x^3 = (2 + x) \cdot (4 - 2x + x^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$	$8 - x^3 = (2 - x) \cdot (4 + 2x + x^2)$

Kidolgozott feladatok.

17. Feladat. Végezd el a zárójelfelbontást és összevonást az

$$(x + 2) \cdot (2x - 1) - 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$$

kifejezésben!

Megoldás:

Mivel

$$(x + 2) \cdot (2x - 1) = 2x^2 - x + 4x - 2 = 2x^2 + 3x - 2$$

és

$$(x - 3) \cdot (x - 2) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6,$$

ezért

$$\begin{aligned}(x + 2) \cdot (2x - 1) - 2 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) &= \\ 2x^2 + 3x - 2 - 2 \cdot (x^2 - 5x + 6) &.\end{aligned}$$

Elvégezve a -2 -vel való szorzást és az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 - 2 \cdot (x^2 - 5x + 6) &= \\ = 2x^2 + 3x - 2 - 2x^2 + 10x - 12 &= \\ = 13x - 14.\end{aligned}$$

18. Feladat. Végezd el a zárójelfelbontást és összevonást az

$$(x - 1) \cdot (3x + 4) - 3 \cdot (x + 5) \cdot (x - 1)$$

kifejezésben!

Megoldás:

Mivel

$$(x - 1) \cdot (3x + 4) = 3x^2 + 4x - 3x - 4 = 3x^2 + x - 4$$

és

$$(x + 5) \cdot (x - 1) = x^2 - x + 5x - 5 = x^2 + 4x - 5,$$

ezért

$$\begin{aligned}(x - 1) \cdot (3x + 4) - 3 \cdot (x + 5) \cdot (x - 1) &= \\ = 3x^2 + x - 4 - 3 \cdot (x^2 + 4x - 5) &.\end{aligned}$$

Elvégezve a -3 -mal való szorzást és az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 4 - 3 \cdot (x^2 + 4x - 5) &= \\ = 3x^2 + x - 4 - 3x^2 - 12x + 15 &= -11x + 11. \end{aligned}$$

19. Feladat. Végezd el a zárójelfelbontást és összevonást az

$$(2x - 3) \cdot (x + 4) - 4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$$

kifejezésben!

Megoldás:

Mivel

$$(2x - 3) \cdot (x + 4) = 2x^2 + 8x - 3x - 12$$

és

$$(x - 2) \cdot (x + 1) = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2,$$

ezért

$$\begin{aligned} (2x - 3) \cdot (x + 4) - 4 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) &= \\ = 2x^2 + 5x - 12 - 4 \cdot (x^2 - x - 2). \end{aligned}$$

Elvégezve a -4 -gyel való szorzást és az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 12 - 4 \cdot (x^2 - x - 2) &= \\ = 2x^2 + 5x - 12 - 4x^2 + 4x + 8 &= -2x^2 + 9x - 4. \end{aligned}$$

20. Feladat. Adjuk meg az A , B és C valós számok értékét úgy, hogy

$$(x + 2)^2 - 4 \cdot (2x - 4) - 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ és $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$, ezért

$$x^2 + 4x + 4 - 4 \cdot (2x - 4) - 2 \cdot (x^2 - 1) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 4x + 4 - 8x + 16 - 2x^2 + 2 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$-x^2 - 4x + 22 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Tehát $A = -1$, $B = -4$, $C = 22$.

21. Feladat. Adjuk meg az A , B és C valós számok értékét úgy, hogy

$$(x - 3)^2 + 5 \cdot (x + 1) - (x + 2) \cdot (x - 2) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9,$$

másrészt

$$5 \cdot (x + 1) = 5x + 5,$$

végül

$$(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4,$$

ezért

$$x^2 - 6x + 9 + 5x + 5 - (x^2 - 4) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$-x + 18 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Tehát $A = 0$, $B = -1$, $C = 18$.

22. Feladat. Adjuk meg az A , B és C valós számok értékét úgy, hogy

$$2 \cdot (x + 4)^2 - 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) + 7 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16,$$

másrészt

$$(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4,$$

ezért

$$2 \cdot (x^2 + 8x + 16) - 3 \cdot (x^2 - 4) + 7 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$2x^2 + 16x + 32 - 3x^2 + 12 + 7 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$-x^2 + 16x + 51 = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Tehát $A = -1$, $B = 16$, $C = 51$.

23. **Feladat.** Határozd meg az A és B valós számokat úgy, hogy

$$(\sqrt{2} + 3)^2 = A \cdot \sqrt{2} + B$$

teljesüljön!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{2} + 3)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 = 2 + 6 \cdot \sqrt{2} + 9 = 11 + 6 \cdot \sqrt{2},$$

ezért $A = 6$ és $B = 11$.

24. **Feladat.** Határozd meg az A és B valós számokat úgy, hogy

$$(\sqrt{3} + 2)^2 = A \cdot \sqrt{3} + B$$

teljesüljön!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{3} + 2)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + 2^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Ezért $A = 4$ és $B = 7$.

25. **Feladat.** Határozd meg az A és B valós számokat úgy, hogy

$$(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1) = A \cdot \sqrt{5} + B$$

teljesüljön!

Megoldás:

Felhasználva az

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2,$$

azonosságot azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = 5 - 1 = 4.$$

Mivel a kifejezésben nincs irracionális tag, ezért $A = 0$ és $B = 4$.

1.5. Algebrai törtek

Elméleti összefoglaló.

Két polinom hányadosát *algebrai törtnek* nevezzük. Például az

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{3x - 3}$$

kifejezés egy algebrai tört.

Az algebrai törtek a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán vannak értelmezve, ahol a nevezőjük nem nulla.

Például az előbbi algebrai tört esetén $3x - 3 \neq 0$, így $x \neq 1$, vagyis az értelmezési tartománya

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Kidolgozott feladatok.

26. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $x - 2 \neq 0$, azaz $x \neq 2$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Mivel

$$x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2),$$

ezért

$$\frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x+2)}{\cancel{x-2}} = x + 2 \quad (x \neq 2).$$

27. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $x + 3 \neq 0$, azaz $x \neq -3$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

Mivel

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2,$$

ezért

$$\frac{(x+3)^2}{x+3} = \frac{\cancel{(x+3)} \cdot (x+3)}{\cancel{x+3}} = x + 3 \quad (x \neq -3).$$

28. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{2x^2 - 8x}{2x - 8}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $2x - 8 \neq 0$, azaz $x \neq 4$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

Mivel

$$2x^2 - 8x = 2x \cdot (x - 4), \quad 2x - 8 = 2 \cdot (x - 4),$$

ezért

$$\frac{\cancel{2} x \cancel{(x-4)}}{\cancel{2} \cancel{(x-4)}} = x \quad (x \neq 4).$$

29. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $x - 2 \neq 0$, azaz $x \neq 2$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Mivel

$$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4),$$

ezért

$$\frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 2x + 4)}{\cancel{x-2}} = x^2 + 2x + 4 \quad (x \neq 2).$$

30. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{9x^2 - 1}{3x - 1}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $3x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{3}$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Mivel

$$9x^2 - 1 = (3x - 1) \cdot (3x + 1),$$

ezért

$$\frac{\cancel{(3x-1)} \cdot (3x+1)}{\cancel{3x-1}} = 3x+1 \quad \left(x \neq \frac{1}{3} \right).$$

31. Feladat. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

tört értelmezhető, majd adjuk meg a törtet tovább már nem egyszerűsíthető alakban!

Megoldás:

A tört nevezője nem lehet 0, így $x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Tehát az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Mivel

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

ezért

$$\frac{(x-1)^2}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x-1)}{\cancel{x-1}} = x-1 \quad (x \neq 1).$$

32. Feladat. Adjuk meg az A és B valós számok értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-2)}$$

összefüggés!

Megoldás:

A bal oldalon a közös nevező $x \cdot (x - 2)$, így

$$\frac{3 \cdot (x-2) + 4x}{x \cdot (x-2)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x-2)}.$$

A bal oldalon a zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{3x - 6 + 4x}{x \cdot (x - 2)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 2)}.$$

Az egynemű kifejezéseket összevonva adódik:

$$\frac{7x - 6}{x \cdot (x - 2)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 2)}.$$

Ebből következik, hogy

$$A = 7, \quad B = -6.$$

33. Feladat. Adjuk meg az A és B valós számok értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$\frac{2x + 1}{x} + \frac{4 - 2x}{x - 3} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 3)}$$

összefüggés!

Megoldás:

A bal oldalon a közös nevező $x \cdot (x - 3)$, így

$$\frac{(2x + 1) \cdot (x - 3) + (4 - 2x)x}{x \cdot (x - 3)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 3)}.$$

A bal oldalon a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{(2x^2 - 6x + x - 3) + (4x - 2x^2)}{x \cdot (x - 3)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 3)}.$$

A bal oldalon a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{2x^2 - 6x + x - 3 + 4x - 2x^2}{x \cdot (x - 3)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 3)}.$$

Az egynemű kifejezéseket összevonva

$$\frac{-x - 3}{x \cdot (x - 3)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x - 3)}$$

adódik. Ebből következik, hogy

$$A = -1, \quad B = -3.$$

34. Feladat. Adjuk meg az A és B valós számok értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$\frac{x + 4}{x + 1} + \frac{2 - x}{x - 1} = \frac{A \cdot x + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)}$$

összefüggés!

Megoldás:

A bal oldalon a közös nevező $(x + 1) \cdot (x - 1)$, így

$$\frac{(x + 4) \cdot (x - 1) + (2 - x) \cdot (x + 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A \cdot x + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)}.$$

A bal oldalon a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x^2 - x + 4x - 4) + (2x + 2 - x^2 - x)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A \cdot x + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)},$$

így a

$$\frac{x^2 - x + 4x - 4 + 2x + 2 - x^2 - x}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A \cdot x + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)}$$

kifejezéshez jutunk. Az egyenmű kifejezéseket összevonva

$$\frac{4x - 2}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{A \cdot x + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)}$$

adódik. Ebből következik, hogy

$$A = 4, \quad B = -2.$$

35. Feladat. Egyszerűsítsük az

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel egyrészt $x^2 - 4x = x \cdot (x - 4)$, másrészt $x^2 + 2x = x \cdot (x + 2)$, továbbá $x^2 - 16 = (x - 4) \cdot (x + 4)$ és $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$, ezért

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} = \frac{x \cdot (x - 4)}{x \cdot (x + 2)} : \frac{(x - 4) \cdot (x + 4)}{(x - 3) \cdot (x + 3)}.$$

Törtet törttel úgy osztunk, hogy a második reciprokával szorzunk, ezért

$$\frac{x \cdot (x - 4)}{x \cdot (x + 2)} \cdot \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{(x - 4) \cdot (x + 4)} = \frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{(x + 2) \cdot (x + 4)}.$$

A közös x és $(x - 4)$ tényezők kiesnek, így a végső alakra azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x - 3) \cdot (x + 3)}{(x + 2) \cdot (x + 4)} = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 8} = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 8}.$$

36. Feladat. Egyszerűsítsük az

$$\frac{ax + bx - ay - by}{3x - 3y}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Mivel

$$ax + bx - ay - by = x \cdot (a + b) - y \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (x - y),$$

és

$$3x - 3y = 3 \cdot (x - y),$$

ezért

$$\frac{ax + bx - ay - by}{3x - 3y} = \frac{(a + b) \cdot (x - y)}{3 \cdot (x - y)} = \frac{a + b}{3}.$$

37. Feladat. Számoljuk ki a

$$\frac{20\,000 \cdot 20\,004 - 20\,002 \cdot 19\,998}{20\,000 \cdot 20\,001 - 19\,999 \cdot 19\,999}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Vezessük be az $x = 20\,000$ jelölést. Ekkor a kifejezés átírható az alábbi alakra:

$$\frac{x \cdot (x + 4) - (x + 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x + 1) - (x - 1) \cdot (x - 1)}.$$

A szorzatok felbontása után:

$$\frac{x^2 + 4x - (x^2 - 4)}{x^2 + x - (x^2 - 2x + 1)} = \frac{4x + 4}{3x - 1}.$$

Behelyettesítve az $x = 20\,000$ értéket azt kapjuk, hogy

$$\frac{4x + 4}{3x - 1} = \frac{80\,004}{59\,999}.$$

1.6. A logaritmus fogalma és azonosságai

Elméleti összefoglaló.

Legyen a egy tetszőleges, egytől különböző, pozitív valós szám.

A $\log_a x$ azt a számot (kitevőt) jelenti, amelyet az a -ra emelve x -et kapunk.

Az előbbi azt is jelenti, hogy $\log_a x = b$ pontosan akkor teljesül, ha

$$a^b = x.$$

Másképpen fogalmazva $\log_a x$ azt jelenti, hogy az a számnak hanyadik hatványa az x . Például

$$\log_2 8 = 3, \text{ mert } 2^3 = 8.$$

Az alábbi táblázatban legyen $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$.

5. A logaritmus azonosságai

Azonosság	Példa
$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_3 3^{10} = 10 \cdot \log_3 3 = 10 \cdot 1 = 10$
$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$	$\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$
$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$	$\log_3 6 - \log_3 2 = \log_3 \frac{6}{2} = \log_3 3 = 1$
$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1,5$

Kidolgozott feladatok.

38. **Feladat.** Legyen $A = \log_3 27$ és $B = \log_4 \frac{1}{16}$. Adjuk meg az $A^2 + 2B^2$ pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $\log_3 27$ azt a számot jelenti, hogy a 3 számnak hanyadik hatványa a 27, ezért

$$A = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3.$$

Hasonlóan:

$$B = \log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2.$$

Tehát

$$A^2 + 2B^2 = 3^2 + 2 \cdot (-2)^2 = 9 + 8 = 17.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti feladatnak is.

39. **Feladat.** Számoljuk ki a

$$\log_5 \frac{1}{25} + \log_2 32 + \log_4 \frac{1}{64}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$, továbbá $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$, valamint $\log_4 \frac{1}{64} = \log_4 4^{-3} = -3$, ezért

$$\log_5 \frac{1}{25} + \log_2 32 + \log_4 \frac{1}{64} = -2 + 5 + (-3) = 0.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti feladatnak is.

1.7. Gazdasági alkalmazások

40. **Feladat.** Egy heti bérben fizetett dolgozó alap órábéra £8, és a 40 órát meghaladó órákra £12 jár. Az adó mértéke heti £80 feletti keresetrészre 25%. Tegyük fel, hogy a ledolgozott órák száma hetente $H > 40$.

- Írjuk fel a nettó heti bért a H függvényében, majd egyszerűsítsük a kifejezést!
- Számoljuk ki $H = 50$ esetén a nettó bért a kapott képlet felhasználásával!
- Határozzuk meg a kapott képlet nélkül, a szöveg alapján, hogy heti 50 óra munka után mennyi lesz a nettó bér?

Megoldás:

- Először a bruttó bért számoljuk ki:

$$B = 40 \cdot 8 + (H - 40) \cdot 12 = 320 + 12H - 480 = 12H - 160,$$

azaz $12H - 160$ font. Az adó csak a £80 feletti részre vonatkozik. Az adó nagysága 25%, ezért a nettó bér:

$$N = 0,75 \cdot (B - 80) + 80,$$

azaz a bruttó bért behelyettesítve

$$N = 0,75 \cdot ((12H - 160) - 80) + 80 = 0,75 \cdot (12H - 240) + 80.$$

adódik. A zárójelfelbontás és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$N = 9H - 180 + 80 = 9H - 100.$$

Tehát a nettó heti bér H függvényében

$$N = 9H - 100 \quad (H > 40).$$

- A nettó bér $H = 50$ esetén

$$N = 9 \cdot 50 - 100 = £350.$$

- Ha $H = 50$, akkor a bruttó bér

$$(40 \text{ óra} \cdot £8) + (10 \text{ óra} \cdot £12) = £320 + £120 = £440.$$

Az adó a £80 feletti részre

$$(£440 - £80) \cdot 0,25 = £360 \cdot 0,25 = £90,$$

így a nettó bér

$$£440 - £90 = £350.$$

ami megegyezik azzal az eredménnyel, amit a képletbe való behelyettesítéssel kaptunk.

41. Feladat. Egy termék alapára darabonként 180 forint. Ha a megrendelés több mint 10 darabra szól, akkor az egységár minden egyes darab után 2 forinttal csökken (legfeljebb 60 darabig).

- Ha 11 darab termékre érkezik megrendelés, akkor mennyi lesz az egységár?
- Ha 12 darab termékre érkezik megrendelés, akkor mennyi lesz az egységár?
- Írjunk fel képletet a teljes rendelési költséget a rendelési mennyiség (n) függvényében, majd egyszerűsítsük! Tegyük fel, hogy $10 \leq n \leq 60$.
- Ellenőrizzük a képlet helyességét $n = 50$ esetén!

Megoldás:

- a) Ha 11 darab termékre érkezik megrendelés, akkor az egységár

$$180 - 2 \cdot 1 = 180 - 2 = 178,$$

azaz 178 forint.

- b) Ha 12 darab termékre érkezik megrendelés, akkor az egységár

$$180 - 2 \cdot 2 = 180 - 4 = 176,$$

azaz 176 forint.

- c) Az egységár n függvényében:

$$p(n) = \begin{cases} 180, & \text{ha } n \leq 10, \\ 180 - 2 \cdot (n - 10) = 200 - 2n, & \text{ha } 10 < n \leq 60. \end{cases}$$

A teljes költség $C(n) = n \cdot p(n)$, ezért

$$C(n) = \begin{cases} 180n, & \text{ha } n \leq 10, \\ n \cdot (200 - 2n) = 200n - 2n^2, & \text{ha } 10 < n \leq 60. \end{cases}$$

- d) Ha $n = 50$, akkor az egységár

$$p(50) = 200 - 100 = 100,$$

így a költség

$$C(50) = 50 \cdot 100 = 5\,000.$$

Ugyanez a képletből

$$C(50) = 200 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2 = 10\,000 - 5\,000 = 5\,000.$$

42. Feladat. Egy kirándulás költsége személyenként £8 a szállításért, továbbá minden felnőtt után £5 és minden gyermek után £3 étkezési díj fizetendő. Írjunk fel kifejezést a kirándulás teljes költségére, ha x a felnőttek, és y a gyermekek száma, majd egyszerűsítsük a kifejezést!

Megoldás:

A szállítás költsége minden résztvevő után

$$\text{szállítási díj} = 8 \cdot (x + y).$$

Az étkezési díj

$$\text{étkezési díj} = 5x + 3y.$$

A teljes költség

$$T = 8 \cdot (x + y) + 5x + 3y.$$

Zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$T = 8x + 8y + 5x + 3y = 13x + 11y.$$

Tehát a kirándulás teljes költsége

$$T = 13x + 11y.$$

43. Feladat. Egy cég parkolót épít az alkalmazottai számára. A parkoló, amely x autót tud befogadni, hosszúsága (méterben) $4x + 10$, szélessége pedig $2x + 10$. A parkoló területéből 24 m^2 kizárólag a látogatók autóinak lesz fenntartva. Írjunk fel kifejezést az alkalmazottak számára rendelkezésre álló területre x függvényében, majd egyszerűsítsük a kifejezést!

Megoldás:

A teljes parkoló területe

$$T_{\text{teljes}} = (4x + 10) \cdot (2x + 10).$$

A szorzás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$T_{\text{teljes}} = 8x^2 + 40x + 20x + 100 = 8x^2 + 60x + 100.$$

Mivel 24 m^2 a látogatóknak van fenntartva, ezért az alkalmazottak számára elérhető terület:

$$T_{\text{dolgozók}} = T_{\text{teljes}} - 24 = 8x^2 + 60x + 76.$$

Tehát az alkalmazottak számára rendelkezésre álló terület

$$T_{\text{dolgozók}} = 8x^2 + 60x + 76 \text{ m}^2.$$

44. Feladat. Egy cég nyersanyagot vásárol, amelynek ára az első 40 tonnára £220/tonna, a következő 40 tonnára £180/tonna, és az ezen felüli mennyiségre £150/tonna. Írjunk fel kifejezést a teljes költségre az összes mennyiség (x tonna) függvényében, ha $x > 80$, majd egyszerűsítsük a kifejezést!

Megoldás:

A teljes költség három részből áll:

$$C = C_1 + C_2 + C_3,$$

ahol

$$C_1 = 40 \cdot 220 = £8\,800$$

$$C_2 = 40 \cdot 180 = £7\,200$$

$$C_3 = (x - 80) \cdot 150.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$C = 8\,800 + 7\,200 + 150 \cdot (x - 80).$$

A zárójelek felbontása után

$$C = 16\,000 + 150x - 12\,000 = 150x + 4\,000$$

adódik, így a teljes költség fontban

$$C = 150x + 4\,000, \quad (x > 80).$$

45. Feladat. Egy vállalat összköltsége

$$C(x) = 25x + 2x^2,$$

ahol x a termelt mennyiség. Írjuk fel az átlagköltségre vonatkozó kifejezést a termelt mennyiség x függvényében!

Megoldás:

Az átlagköltség az összköltség osztva a termelt mennyiséggel, azaz

$$AC(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Mivel $C(x) = 25x + 2x^2$, ezért

$$AC(x) = \frac{25x + 2x^2}{x}.$$

Kiemelve az x -et a számlálóban azt kapjuk, hogy

$$AC(x) = \frac{x \cdot (25 + 2x)}{x} = 25 + 2x.$$

Tehát az átlagköltség

$$AC(x) = 25 + 2x$$

1.8. Összefoglaló feladatok

46. **Feladat.** Végezzük el a kivonást az

$$2^{n+1} - 2^n$$

kifejezés esetén!

Megoldás:

Mivel

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2^n \cdot 2,$$

ezért

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot 2 - 2^n = 2^n \cdot (2 - 1) = 2^n.$$

47. **Feladat.** Végezzük el a kivonást az

$$(n + 1)^2 - n^2$$

kifejezés esetén!

Megoldás:

Mivel

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

ezért

$$(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

48. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges természetes szám, akkor az

$$\frac{n + 4}{2n + 3} - \frac{n + 3}{2n + 1}$$

kifejezés értéke mindig negatív!

Megoldás:

A közös nevező a két nevező szorzata, így

$$\frac{(n + 4) \cdot (2n + 1) - (n + 3) \cdot (2n + 3)}{(2n + 3) \cdot (2n + 1)}.$$

adódik. A számlálóban elvégezve a zárójelek felbontását azt kapjuk, hogy

$$\frac{2n^2 + n + 8n + 4 - (2n^2 + 3n + 6n + 9)}{(2n + 3) \cdot (2n + 1)}.$$

A megmaradt zárójel felbontása és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{2n^2 + n + 8n + 4 - 2n^2 - 3n - 6n - 9}{(2n + 3) \cdot (2n + 1)} = \frac{-5}{(2n + 3) \cdot (2n + 1)},$$

ami mindig negatív, mert a számláló negatív, és a nevező pozitív, ugyanis n természetes szám, ami pozitív, így $2n + 3$ és $2n + 1$ is pozitív és két pozitív szám szorzata pozitív.

49. Feladat. Adjuk meg a $\left| \frac{-8}{4} \right| - \left(-\frac{3}{2} \right)$ szám ellentettjét!

Megoldás:

Mivel $\left| \frac{-8}{4} \right| = 2$ és $-\left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$, ezért

$$2 - \left(-\frac{3}{2} \right) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

így a keresett szám ellentettje

$$-\frac{7}{2}.$$

50. Feladat. Számoljuk ki a

$$\frac{3^{-1} + 3^{-2}}{3^{-3}}$$

kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Mivel $3^{-1} = \frac{1}{3}$, $3^{-2} = \frac{1}{9}$ és $3^{-3} = \frac{1}{27}$, ezért

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{27}} = \frac{4}{9} \cdot 27 = 12.$$

Tehát a kifejezés értéke 12.

51. Feladat. Határozzuk meg az x kitevőt úgy, hogy

$$\frac{(a^3)^2 \cdot a^{-4}}{a^2} = a^x$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel $(a^3)^2 = a^6$, ezért

$$\frac{a^6 \cdot a^{-4}}{a^2} = a^{6-4-2} = a^0.$$

Tehát $x = 0$.

52. Feladat. Végezzük el a zárójelfelbontást és egyszerűsítést az

$$(2x + 3)^2 - (x - 1)^2$$

kifejezésben!

1. Megoldás:

Felhasználva az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot:

$$(2x + 3)^2 - (x - 1)^2 = [(2x + 3) - (x - 1)] \cdot [(2x + 3) + (x - 1)].$$

A zárójelek felbontása után:

$$(x + 4) \cdot (3x + 2) = 3x^2 + 14x + 8.$$

Tehát a kifejezés egyszerűsített alakja $3x^2 + 14x + 8$.

2. Megoldás:

Mivel

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

és

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

ezért

$$\begin{aligned} (2x + 3)^2 - (x - 1)^2 &= 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 2x + 1) = \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 3x^2 + 14x + 8 \end{aligned}$$

53. Feladat. Határozzuk meg az A és B valós számokat úgy, hogy

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{x + 2} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x + 2)}$$

teljesüljön!

Megoldás:

A közös nevező $x \cdot (x + 2)$, így

$$\frac{4 \cdot (x + 2) + 5x}{x \cdot (x + 2)} = \frac{A \cdot x + B}{x \cdot (x + 2)}.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\frac{4x + 8 + 5x}{x \cdot (x + 2)} = \frac{9x + 8}{x \cdot (x + 2)}.$$

amiből következik, hogy $A = 9$ és $B = 8$.

54. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

kifejezés értéke negatív minden n természetes szám esetén!

Megoldás:

Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1 \cdot n - 1 \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1)},$$

ezért

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - n - 1}{n \cdot (n+1)} = -\frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Mivel n természetes szám, ezért pozitív, így $n+1$ is pozitív. Egy negatív és egy pozitív szám hányadosa negatív.

55. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

kifejezés értéke negatív minden n természetes szám esetén!

Megoldás:

Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1 \cdot n^2 - 1 \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot (n+1)^2},$$

ezért

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - n^2 - 2n - 1}{n^2 \cdot (n+1)^2} = \frac{-2n - 1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$$

Mivel n^2 és $(n+1)^2$ pozitív számok, amelyek szorzata is pozitív, és $-2n - 1$ negatív és egy negatív, így egy pozitív szám hányadosa adódik, ami negatív.

56. Feladat. Végezzük el a kivonást az

$$(n + 1)^3 - n^3$$

kifejezés esetén!

Megoldás:

Mivel

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

ezért

$$(n + 1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

Mivel n pozitív, ezért $3n$ is pozitív, továbbá n^2 , így $3n^2$ is pozitív és pozitív számok összege pozitív, amivel igazoltuk, hogy a kifejezés értéke minden n természetes szám esetén pozitív.

2. fejezet

Egyenletek megoldása

2.1. Elsőfokú egyenletek

Elméleti összefoglaló.

Legyenek a és b tetszőleges valós számok! Az

$$a \cdot x + b = 0$$

egyenletet *elsőfokú egyenletnek* nevezzük, az x -et az egyenlet *ismeretlenének* hívjuk.

Például $2x + 4 = 0$ egy elsőfokú egyenlet.

Azt mondjuk, hogy egy valós szám *megoldása* az egyenletnek, ha behelyettesítve az x helyére igaz egyenlőséget kapunk.

Például a $2x + 4 = 0$ egyenletnek $x = -2$ megoldása, mert $2 \cdot (-2) + 4 = 0$.

Ha $a = 0$ és $b = 0$, akkor azonosságot kapunk, ilyenkor minden valós szám megoldása az egyenletnek.

Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $a \neq 0$, akkor az $a \cdot x + b = 0$ egyenlet megoldása

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2x + 2}{5} = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel szorozva, majd az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$2x + 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 2x = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Kidolgozott feladatok.

57. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{5x+1}{2} - \frac{3x-1}{5} = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Közös nevező a 10. Ezzel szorozva az egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$5 \cdot (5x + 1) - 2 \cdot (3x - 1) = 20.$$

Felbontva a zárójeleket

$$25x + 5 - 6x + 2 = 20$$

adódik. Összevonás és az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy

$$19x + 7 = 20 \quad \Rightarrow \quad 19x = 13,$$

így az egyenlet megoldása $x = \frac{13}{19}$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek, amit behelyettesítéssel ellenőrizhetünk is.

58. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(2x+1)^2 - 4x^2 = 5$$

egyenletet!

Megoldás:

Az azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$

így az egyenlet

$$4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 = 5$$

alakú lesz. Összevonás és az egyenlet rendezése után

$$4x + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 4x = 4$$

adódik, így az egyenlet megoldása $x = 1$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek, amit behelyettesítéssel ellenőrizhetünk is.

59. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{4x - 3}{3} + \frac{2x + 1}{6} = 5$$

egyenletet!

Megoldás:

Közös nevező a 6. Ezzel szorozva az egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot (4x - 3) + (2x + 1) = 30.$$

Felbontva a zárójeleket

$$8x - 6 + 2x + 1 = 30$$

adódik. Összevonás és az egyenlet rendezése után azt kapjuk, hogy

$$10x - 5 = 30 \quad \Rightarrow \quad 10x = 35,$$

így az egyenlet megoldása $x = \frac{35}{10} = \frac{7}{2} = 3,5$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek, amit behelyettesítéssel ellenőrizhetünk is.

60. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x - 2)^2 - (x + 1)^2 = 9$$

egyenletet!

Megoldás:

Mivel $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ és $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ezért

$$(x^2 - 4x + 4) - (x^2 + 2x + 1) = 9.$$

A zárójelek felbontása után

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 - 2x - 1 = 9$$

adódik, tehát az egyenlet

$$-6x + 3 = 9$$

alakú. Összevonás és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$-6x + 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott szám megoldása az eredeti egyenletnek, amit behelyettesítéssel ellenőrizhetünk is.

2.2. Másodfokú egyenletek

Elméleti összefoglaló.

Legyenek a, b, c olyan valós számok, hogy $a \neq 0$. Az

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

egyenletet *másodfokú* egyenletnek nevezzük.

Ha $b = 0$ vagy $c = 0$, akkor *hiányos másodfokú egyenletről* beszélünk.

Ha $b = 0$, akkor az egyenlet $a \cdot x^2 + c = 0$ alakú, így $a \cdot x^2 = -c$, amiből azt kapjuk, hogy

$$x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Például az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet megoldása

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Ha $c = 0$, akkor az egyenlet $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$ alakú, így

$$x \cdot (a \cdot x + b) = 0$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így

$$x = 0 \quad \text{vagy} \quad a \cdot x + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Például az $x^2 - x = 0$ egyenlet megoldása

$$x \cdot (x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{vagy} \quad x = 1.$$

Ha $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ egyenlet megoldása

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Példa. Oldjuk meg a $2x^2 - 1x - 3 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

így az egyenlet megoldásai

$$x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{1-5}{4} = -1.$$

Kidolgozott feladatok.

61. Feladat. Oldjuk meg a $2x^2 - 200 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenletet rendezve $2x^2 = 200$ adódik, így $x^2 = 100$, amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 10$.

62. Feladat. Oldjuk meg az $x^2 = 2x$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenletet rendezve $x^2 - 2x = 0$ adódik, így

$$x \cdot (x - 2) = 0,$$

ami csak úgy teljesülhet, ha $x = 0$ vagy $x - 2 = 0$, amiből azt kapjuk, hogy $x = 2$.

63. Feladat. Oldjuk meg az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

így az egyenlet megoldásai

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3 \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1.$$

64. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x + 3)^2 - 6 \cdot (x + 2) = 5$$

egyenletet!

Megoldás:

Az azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9,$$

így az egyenlet:

$$x^2 + 6x + 9 - 6x - 12 = 5$$

Összevonás és az egyenlet rendezése után

$$x^2 - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8$$

adódik, így az egyenlet megoldása

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott számok megoldásai az eredeti egyenletnek, amit behelyettesítéssel ellenőrizhetünk is.

2.3. Exponenciális egyenletek

Elméleti összefoglaló.

Azokat az egyenleteket, amelyeknél az ismeretlen a kitevőben szerepel *exponenciális egyenlet*nek nevezzük.

Például a

$$2^x + 4^x = 6$$

egyenlet egy exponenciális egyenlet.

Az exponenciális egyenletek megoldása során felhasználjuk a logaritmus azonosságait.

Az exponenciális egyenletek megoldása során fel fogjuk használni azt a tényt, hogy ha a pozitív, 1-től különböző valós szám, akkor az $a^x = a^y$ összefüggésből, következik, hogy $x = y$.

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2^x \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{8}$$

egyenletet!

Megoldás:

Mivel $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ és $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$, ezért a

$$2^x \cdot 2^{-2} = 2^{\frac{3}{2}}$$

egyenlet adódik. A hatványozás azonosságainak felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$2^{x-2} = 2^{\frac{3}{2}},$$

így $x - 2 = \frac{3}{2}$, tehát az egyenlet megoldása

$$x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Kidolgozott feladatok.

65. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$3^{x+2} + 3^{x+3} = 108$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^3 = 108.$$

Vezessük be az $a = 3^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$9a + 27a = 108 \quad \Rightarrow \quad 36a = 108.$$

Ebből $a = 3$. Visszahelyettesítve az $a = 3^x$ kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$3^x = 3 \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

66. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

Vezessük be az $a = 2^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 6a + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$a_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

adódik, így

$$a_1 = \frac{6 - 2}{2} = 2, \quad a_2 = \frac{6 + 2}{2} = 4.$$

Visszahelyettesítve az $a = 2^x$ egyenletbe, egyrészt azt kapjuk, hogy

$$2^x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

másrészt

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek is.

67. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 12 = 0.$$

Vezessük be az $a = 3^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 7a + 12 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

adódik, így

$$a_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3, \quad a_2 = \frac{7 + 1}{2} = 4.$$

Visszahelyettesítve az $a = 3^x$ egyenletbe, egyrészt azt kapjuk, hogy

$$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1,$$

másrészt a logaritmus definíciója szerint

$$3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$$

adódik. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek is.

68. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{3^{x+4}}{3^{2x-2}} = 9^{x-3}$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználva, hogy $9 = 3^2$, továbbá alkalmazva azt, hogy hatvány hatványozásakor az alapot a kitevők szorzatára emeljük, azt kapjuk, hogy

$$\frac{3^{x+4}}{3^{2x-2}} = 3^{2 \cdot (x-3)},$$

így

$$\frac{3^{x+4}}{3^{2x-2}} = 3^{2x-6},$$

Azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a számláló és a nevező kitevőjének különbségére emeljük, így

$$3^{x+4-(2x-2)} = 3^{2x-6}.$$

Egyszerűsítés után

$$3^{-x+6} = 3^{2x-6}$$

adódik, így

$$-x + 6 = 2x - 6,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 4$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

69. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$2^{3x} - 5 \cdot 2^{2x} + 6 \cdot 2^x = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$2^x \cdot (2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 6) = 0.$$

Mivel $2^x > 0$, ezért csak a zárójelben lévő kifejezés lehet nulla:

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0.$$

Vezessük be az $a = 2^x$ jelölést. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 5a + 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

adódik, így $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Visszahelyettesítve az $a = 2^x$ kifejezésbe:

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1, \quad \text{illetve} \quad 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmények megoldásai az eredeti egyenletnek is.

2.4. Logaritmikus egyenletek

Elméleti összefoglaló.

Logaritmikus egyenletek nevezzük azokat az egyenleteket, amelyek logaritmikus kifejezéseket tartalmaznak.

Például a $\log_2 x = 3$ egy logaritmikus egyenlet.

A logaritmikus egyenletek megoldása során felhasználjuk a logaritmus azonosságait.

A logaritmikus egyenletek megoldása során fel fogjuk használni azt a tényt, hogy ha a pozitív, 1-től különböző valós szám, akkor az $\log_a x = \log_a y$ összefüggésből, következik, hogy $x = y$.

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\log_3(x - 2) - \log_3 x = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2 \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Tehát az értelmezési tartomány: $x \in]2; \infty[$.

A logaritmus azonosságainak alkalmazásával az egyenlet

$$\log_3 \left(\frac{x - 2}{x} \right) = \log_3 9.$$

alakú lesz. A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$\frac{x - 2}{x} = 9 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 9x.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $8x = -2$, így $x = -\frac{1}{4}$, ami viszont nem eleme az értelmezési tartománynak, így az egyenletnek nincs megoldása.

Kidolgozott feladatok.

70. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\lg(x - 2) + \lg 5 = 1$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2.$$

A logaritmus azonosságainak alkalmazásával az egyenlet átalakítható:

$$\lg(5 \cdot (x - 2)) = 1.$$

Mivel $1 = \lg 10$, ezért

$$\lg(5 \cdot (x - 2)) = \lg 10.$$

A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$5 \cdot (x - 2) = 10 \quad \Rightarrow \quad 5x - 10 = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

71. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\log_3(x - 1) + \log_3 x = \log_3 6$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1 \quad \text{és} \quad x > 0,$$

így $x > 1$. A logaritmus azonosságainak alkalmazásával az egyenlet átalakítható úgy, hogy

$$\log_3(x \cdot (x - 1)) = \log_3 6.$$

A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$x \cdot (x - 1) = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

így $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$. Mivel $x_2 = -2 \leq 1$, nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az egyenlet megoldása $x = 3$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

72. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\log_2(x - 3) - \log_2 x = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3 \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Tehát az értelmezési tartomány: $x \in]3; \infty[$.

A logaritmus azonosságainak alkalmazásával az egyenlet

$$\log_2 \left(\frac{x - 3}{x} \right) = \log_2 4.$$

alakú lesz. A logaritmus függvény szigorúan monoton, így

$$\frac{x - 3}{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 4x.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $3x = -3$, így $x = -1$, ami viszont nem eleme az értelmezési tartománynak, így az egyenletnek nincs megoldása.

2.5. További egyenletek

Ebben a részben olyan egyenleteket fogunk megoldani, amelyek abszolútértékes és gyökös kifejezéseket tartalmaznak és olyanokat, amelyek szorzattá alakítással oldhatók meg.

73. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$|x + 3| = 2x + 5$$

egyenletet!

Megoldás:

Ha $x \geq -3$, akkor

$$x + 3 = 2x + 5,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = -2$, ami teljesíti az $x \geq -3$ feltételt.

Ha $x < -3$, akkor

$$-(x + 3) = 2x + 5,$$

amiből azt kapjuk, hogy $-x - 3 = 2x + 5$, vagyis $-3x = 8$, tehát $x = -\frac{8}{3}$, ami nem teljesíti az $x < -3$ feltételt.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is:

$$x = -2.$$

74. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\sqrt{x + 1} = x - 1$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya:

$$x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$x + 1 = (x - 1)^2.$$

A nevezetes azonosság elvégzése után

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1.$$

Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - 3) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x \cdot (x - 3) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x = 0 & & x - 3 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 3 \end{array}$$

Ha $x = 0$, akkor

- az egyenlet bal oldala $\sqrt{0 + 1} = 1$;
- az egyenlet jobb oldala $0 - 1 = -1$.

Tehát $x = 0$ nem megoldása az eredeti egyenletnek.

Ha $x = 3$, akkor

- az egyenlet bal oldala $\sqrt{3 + 1} = 2$;
- az egyenlet jobb oldala $3 - 1 = 2$.

Tehát $x = 3$ megoldása az eredeti egyenletnek.

75. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\sqrt{x + 1} = 2x - 4$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya $x \geq -1$. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$x + 1 = (2x - 4)^2.$$

A nevezetes azonosság elvégzése után

$$x + 1 = 4x^2 - 16x + 16.$$

Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$4x^2 - 17x + 15 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 4 \cdot 15}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8},$$

azaz $x_1 = 3$ és $x_2 = \frac{5}{4}$.

Ellenőrzés után azt kapjuk, hogy $x = 3$ megoldása, de $x = \frac{5}{4}$ nem megoldása az eredeti egyenletnek.

76. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 4x^3 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kiemelve a közös tényezőt azt kapjuk, hogy

$$x^4 - 4x^3 = x^3 \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x \cdot (x - 4) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x = 0 & & x - 4 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 4 \end{array}$$

Az egyenlet megoldásai $x_1 = 0, x_2 = 4$.

77. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 2x^2 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kiemelve a közös tényezőt:

$$x^4 - 2x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x^2 = 0 & & x^2 - 2 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \end{array}$$

Tehát a megoldások: $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2}$.

78. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^4 - 8x = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kiemelve a közös tényezőt:

$$x^4 - 8x = x \cdot (x^3 - 8) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x \cdot (x^3 - 8) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x = 0 & & x^3 - 8 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 2 \end{array}$$

Tehát a megoldások: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

79. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1,$$

így az egyenlet megoldásai $x_1 = 1, x_2 = -1$.

80. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2x - 2x^{-3} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mivel

$$2x^{-3} = \frac{2}{x^3},$$

ezért az egyenlet

$$2x - \frac{2}{x^3} = 0$$

alakú lesz. A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$2x^4 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1,$$

így az egyenlet megoldásai $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

81. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2 - 200x^{-2} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Mivel

$$200x^{-2} = \frac{200}{x^2},$$

ezért az egyenlet

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0$$

alakú lesz. A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$2x^2 - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 100,$$

így az egyenlet megoldásai $x_1 = 10$, $x_2 = -10$.

2.6. Gazdasági alkalmazások

82. Feladat. Elhelyezünk 600 000 forintot egy bankba két évre kamatos kamatozású betétbe. A bank a második évre a kamatot az első évhez képest 4%-kal emeli. A két év elteltével a pénzünk 725 760 forintra növekedett. Mennyi volt a kamat az első évben, illetve a második évben?

Megoldás:

Legyen az első évi kamat $p\%$. Ekkor felírható az

$$600\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+4}{100}\right) = 725\,760$$

egyenlet. Az egyenlet mindkét oldalát 600 000-rel elosztva azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+4}{100}\right) = 1,2096.$$

A zárójelek felbontása után

$$1 + \frac{2p+4}{100} + \frac{p^2+4p}{10\,000} = 1,2096$$

adódik. Az egyenlet mindkét oldalából 1-et kivonva

$$\frac{2p+4}{100} + \frac{p^2+4p}{10\,000} = 0,2096.$$

Szorozva a közös nevezővel, 10 000-rel azt kapjuk, hogy

$$100 \cdot (2p+4) + (p^2+4p) = 2\,096.$$

A zárójel felbontása után

$$200p + 400 + p^2 + 4p = 2\,096$$

adódik. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$p^2 + 204p - 1696 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$p_{1,2} = \frac{-204 \pm \sqrt{204^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1696)}}{2} = \frac{-204 \pm 220}{2},$$

adódik, így $p_1 = 8$, illetve $p_2 = -212$. Mivel $p > 0$, ezért $p = 8$, azaz az első évi kamat 8%, a második évi pedig $8\% + 4\% = 12\%$.

83. Feladat. Egy város lakóinak száma jól modellezhető a

$$P(t) = 25\,000 \cdot 2^{0,02t}$$

összefüggéssel, ahol t a 2 000 óta eltelt évek száma.

- a) Hányan laktak a városban 2 000-ben?
 b) Hányan laktak a városban 2 010-ben?
 c) Mikor lesz a város népessége 40 000 fő?

Megoldás:

- a) Mivel 2 000-ben 2 000-hez képest 0 év telt el, ezért 2 000-ben

$$P(0) = 25\,000 \cdot 2^0 = 25\,000$$

fő lakott a városban.

- b) Mivel 2 010-ben 2 000-hez képest 10 év telt el, ezért

$$P(10) = 25\,000 \cdot 2^{0,02 \cdot 10} = 25\,000 \cdot 2^{0,2} \approx 25\,000 \cdot 1,1487 \approx 28\,717$$

fő lakott a városban.

- c) Keressük a

$$40\,000 = 25\,000 \cdot 2^{0,02t}$$

egyenlet megoldását. Az egyenlet mindkét oldalát elosztva 25 000-rel azt kapjuk, hogy

$$1,6 = 2^{0,02t}.$$

Ha vesszük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lg 1,6 = \lg 2^{0,02t} = 0,02t \cdot \lg 2 \Rightarrow 0,02t = \frac{\lg 1,6}{\lg 2}.$$

Ebből

$$t = \frac{1}{0,02} \cdot \frac{\lg 1,6}{\lg 2} \approx 50 \cdot 0,6781 \approx 33,9,$$

tehát körülbelül 2 034-ben éri el a város lakossága a 40 000 főt.

84. Feladat. Egy áru listaára 100 000 Ft. Akcióban az ár először $d\%$ -kal csökken, majd 20% áfa kerül rá, és a végső fogyasztói ár 108 000 Ft lett. Számítsuk ki d értékét!

Megoldás:

A leírt folyamat képlete:

$$100\,000 \cdot \left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot 1,20 = 108\,000.$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva 100 000-rel azt kapjuk, hogy

$$\left(1 - \frac{d}{100}\right) \cdot 1,20 = 1,08.$$

Innen

$$1 - \frac{d}{100} = \frac{1,08}{1,20} = 0,90 \Rightarrow \frac{d}{100} = 0,10 \Rightarrow d = 10$$

adódik. Tehát a kedvezmény mértéke 10%.

85. Feladat. Egy termék ára az első évben $p\%$ -kal, a második évben pedig $(p + 5)\%$ -kal nő. A termék induló ára 50 000 Ft, két év múlva az ára 63 250 Ft lett. Határozzuk meg p értékét és a második évi növekedési rátát is!

Megoldás:

A feladat szövegének megfelelő egyenlet

$$50\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+5}{100}\right) = 63\,250.$$

Mindkét oldalt 50 000-rel osztva azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p+5}{100}\right) = 1,265.$$

A zárójeleket felbontva

$$1 + \frac{2p+5}{100} + \frac{p^2+5p}{10\,000} = 1,265$$

adódik. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$100 \cdot (2p + 5) + (p^2 + 5p) = 2\,650.$$

A zárójeleket felbontva és az egyenletet nullára rendezve

$$p^2 + 205p - 2150 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2} = \frac{-205 \pm \sqrt{205^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2150)}}{2} = \frac{-205 \pm 225}{2},$$

így $p_1 = 10$, $p_2 = -215$. Mivel p értéke csak pozitív lehet, ezért $p = 10$, a második évben pedig $p + 5 = 15\%$ a növekedés.

86. Feladat. Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságárusnál ugyanazt a magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának 12%-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után 714 forintjuk marad. Mennyibe került a magazin, és mennyi pénze volt a lányoknak külön-külön a magazin megvásárlása előtt?

Megoldás:

Legyen a magazin ára x . Ekkor Anna pénze $0,88x$, Zsuzsi pénze pedig

$$\frac{4}{5}x = 0,8x.$$

A két lány pénzének összege:

$$0,88x + 0,8x.$$

Mivel a magazin árát közösen fizetik, és 714 forint marad, felírható az egyenlet:

$$0,88x + 0,8x = x + 714.$$

A bal oldalon összevonva:

$$1,68x = x + 714.$$

Rendezés után:

$$0,68x = 714 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{714}{0,68} = 1\,050.$$

Tehát a magazin ára 1050 forint.

Anna pénze $0,88 \cdot 1050 = 924$ forint, Zsuzsi pénze pedig $0,8 \cdot 1050 = 840$ forint volt a magazin vásárlása előtt.

87. Feladat. Egy vállalat egy adott terméke esetén a p egységár (font) és az eladott q mennyiség (darab) között a

$$q = 70 - p,$$

kapcsolat áll fenn.

- a) Hány darabot tudunk értékesíteni $p = 10$ fontos egységáron?
- b) Milyen egységár esetén lesz a vállalat összbevétele 600 font?
- c) Amikor 600 font a bevételünk, hány darab terméket értékesítettünk?

Megoldás:

a) Ha $p = 10$, akkor $q = 70 - 10 = 60$ darab terméket tudunk értékesíteni.

b) Az összbevétel

$$p \cdot q = p \cdot (70 - p) = 70p - p^2.$$

Mivel az összbevétel 600 font, ezért

$$70p - p^2 = 600.$$

Az egyenletet nullára rendezve:

$$p^2 - 70p + 600 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{4\,900 - 2\,400}}{2} = \frac{70 \pm 50}{2},$$

így

$$p_1 = \frac{70 + 50}{2} = 60, \quad p_2 = \frac{70 - 50}{2} = 10.$$

c) Ha $p_1 = 60$, akkor $q_1 = 70 - 60 = 10$ darab terméket értékesítettünk.

Ha $p_1 = 10$, akkor $q_1 = 70 - 10 = 60$ darab terméket értékesítettünk.

88. Feladat. Egy versenyzői piacon a p egységár esetén q darab termék iránt van kereslet és a p és q között a

$$q = \frac{610 - p}{3}$$

összefüggés áll fenn.

Ugyanezen termék esetén a kínálatra a

$$q = \frac{p - 20}{2},$$

összefüggés adódik.

Határozzuk meg az egyensúlyi árat és mennyiséget, vagyis azt az egységárat és termelési szintet, amikor a kereslet és a kínálat megegyezik!

Megoldás:

Egyensúlyban a kereslet és a kínálat megegyezik, vagyis

$$\frac{610 - p}{3} = \frac{p - 20}{2}.$$

A közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$1\,220 - 2p = 3p - 60 \quad \Rightarrow \quad 1\,280 = 5p,$$

így az egyensúlyi ár

$$p = 256.$$

Az egyensúlyi mennyiség

$$q = \frac{256 - 20}{2} = 118.$$

Tehát az egyensúlyi mennyiség $q^* = 118$, az egyensúlyi ár pedig $p^* = 256$ font.

89. Feladat. Egy vállalat egy adott terméke előállításának átlagköltsége

$$\frac{40}{x} + 10x \text{ font,}$$

ahol x a legyártott mennyiség (darab). Milyen termelési szint esetén lesz az átlagköltség 40 font?

Megoldás:

A feladatunk, hogy megoldjuk a

$$\frac{40}{x} + 10x = 40$$

egyenletet. Mindkét oldalt szorozva x -szel azt kapjuk, hogy

$$40 + 10x^2 = 40x.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$10x^2 - 40x + 40 = 0$$

adódik. Mindkét oldal osztható 10-zel, így

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Felhasználva, hogy

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

azt kapjuk, hogy

$$(x - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Tehát az átlagköltség akkor lesz 40 font, ha a vállalat 2 egység terméket állít elő.

2.7. Összefoglaló feladatok

90. **Feladat.** Oldjuk meg a

$$(6\,900 - 0,2x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10}x \cdot (6\,900 - 0,2x)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet értelmezési tartománya

$$6\,900 - 0,2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 34\,500.$$

Mivel

$$(6\,900 - 0,2x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6\,900 - 0,2x},$$

és

$$(6\,900 - 0,2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6\,900 - 0,2x}}$$

ezért az egyenlet

$$\sqrt{6\,900 - 0,2x} - \frac{0,1x}{\sqrt{6\,900 - 0,2x}} = 0$$

alakú lesz. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a nevezővel azt kapjuk, hogy

$$6\,900 - 0,2x - 0,1x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,900 = 0,3x.$$

Az egyenlet mindkét oldalát osztva 0,3-del azt kapjuk, hogy

$$x = 23\,000.$$

Ellenőrzéssel adódik, hogy a kapott szám valóban megoldása az eredeti egyenletnek.

91. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{3x - 2}{4} + \frac{2x + 1}{6} = 3$$

egyenletet!

Megoldás:

A közös nevező 12. Ezzel az egyenlet mindkét oldalát szorozva azt kapjuk, hogy

$$3 \cdot (3x - 2) + 2 \cdot (2x + 1) = 36.$$

Felbontva a zárójeleket

$$9x - 6 + 4x + 2 = 36$$

adódik. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$13x - 4 = 36,$$

így

$$13x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{40}{13}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kapott eredmény megoldása az eredeti egyenletnek is.

92. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x - 3)^2 - (x - 1) \cdot (x - 5) = 2$$

egyenletet!

Megoldás:

Először bontsuk fel a zárójeleket:

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9, \quad (x - 1) \cdot (x - 5) = x^2 - 6x + 5.$$

Ezeket behelyettesítve

$$(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - 6x + 5) = 2$$

adódik, így

$$x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5 = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2,$$

ami ellentmondás, így az egyenletnek nincs megoldása.

93. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$2^{x+1} - 2^{x-1} = 6$$

egyenletet!

Megoldás:

Felhasználva az $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, illetve az $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$ összefüggéseket a

$$2 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} = 6$$

egyenlethez jutunk. Bevezetve a $2^x = a$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$2a - \frac{a}{2} = 6 \quad \Rightarrow \quad 4a - a = 12,$$

így $3a = 12$, tehát $a = 4$. Visszahelyettesítve a $2^x = a$ egyenletbe $2^x = 4$ adódik, tehát $x = 2$.

94. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\frac{2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

A nevezővel szorozva és a számlálóban elvégezve a műveleteket azt kapjuk, hogy

$$2x^2 + 2 - 4x^2 = 0.$$

Összevonás után $-2x^2 + 2 = 0$ adódik, így

$$2 = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

95. Feladat. Egyszerűsítsük a

$$\frac{-4x \cdot (x^2 + 1)^2 - (2 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

kifejezést, majd oldjuk meg a

$$\frac{-4x \cdot (x^2 + 1)^2 - (2 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

A számlálóban kiemelve az $(x^2 + 1) \cdot 4x$ kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x^2 + 1) \cdot 4x \cdot [-(x^2 + 1) - (2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^4}.$$

Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{4x \cdot [-(x^2 + 1) - (2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^3}.$$

Tehát az

$$\frac{4x \cdot [-(x^2 + 1) - (2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^3} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A nevezővel szorozva

$$4x \cdot [-(x^2 + 1) - (2 - 2x^2)]$$

adódik. Egy szorzat csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így egyrészt $4x = 0$, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$. Másrészt

$$-(x^2 + 1) - (2 - 2x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - 1 - 2 + 2x^2 = 0,$$

így $x^2 - 3 = 0$, tehát $x^2 = 3$, azaz $x = \pm\sqrt{3}$.

96. Feladat. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

- a) Adjuk meg a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{(x-2)^2 - x \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4}$$

kifejezés értelmezhető!

- b) Egyszerűsítsük az

$$\frac{(x-2)^2 - x \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4}$$

kifejezést.

- c) Oldjuk meg az

$$\frac{(x-2)^2 - x \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

- a) A nevező nem lehet nulla, így $(x-2)^4 \neq 0$, tehát $x-2 \neq 0$, azaz $x \neq 2$. Az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

- b) A számlálóban kiemelve az $(x-2)$ kifejezést, majd egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x-2) \cdot [(x-2) - 2x]}{(x-2)^4} = \frac{[(x-2) - 2x]}{(x-2)^3} = \frac{x-2-2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}.$$

- c) Egyszerűsítés után a

$$\frac{-x-2}{(x-2)^3} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A nevezővel szorozva

$$-x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

adódik, ami megoldása az eredeti egyenletnek.

97. **Feladat.** Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

- a) Adjuk meg a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazát, amelyen a

$$\frac{-1 \cdot (x-2)^3 - (-x-2) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$$

kifejezés értelmezhető!

- b) Egyszerűsítsük a

$$\frac{-1 \cdot (x-2)^3 - (-x-2) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6}$$

kifejezést.

- c) Oldjuk meg az

$$\frac{-1 \cdot (x-2)^3 - (-x-2) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

- a) A nevező nem lehet nulla, így $(x-2)^6 \neq 0$, tehát $x-2 \neq 0$, azaz $x \neq 2$.
Az értelmezési tartomány

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

- b) A számlálóban kiemelve az $(x-2)^2$ kifejezést, majd egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{-1 \cdot (x-2)^3 - (-x-2) \cdot 3 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^6} = \\ & = \frac{(x-2)^2 \cdot [-(x-2) - 3 \cdot (-x-2)]}{(x-2)^6}. \end{aligned}$$

Mivel

$$-(x-2) - 3 \cdot (-x-2) = -x + 2 + 3x + 6 = 2x + 8,$$

így

$$\frac{(x-2)^2 \cdot (2x+8)}{(x-2)^6} = \frac{2x+8}{(x-2)^4}.$$

c) Egyszerűsítés után a

$$\frac{2x+8}{(x-2)^4} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A nevezővel szorozva

$$2x+8=0 \quad \Rightarrow \quad x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$$

adódik, ami megoldása az eredeti egyenletnek.

98. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^8 - x^7 = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kiemelve a közös tényezőt azt kapjuk, hogy

$$x^8 - x^7 = x^7 \cdot (x - 1) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x^7 \cdot (x - 1) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x^7 = 0 & & x - 1 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_2 = 1 \end{array}$$

Az egyenlet megoldásai $x_1 = 0, x_2 = 1$.

99. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0$$

egyenletet!

Megoldás:

Kiemelve a közös tényezőt azt kapjuk, hogy

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc} & x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ x = 0 & & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x_1 = 0 & & x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \end{array}$$

Az egyenlet megoldásai $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1$.

3. fejezet

Egyenletrendszerek megoldása

3.1. Elsőfokú egyenletrendszerek

Elméleti összefoglaló.

Azokat az egyenletrendszereket, amelyek elsőfokú egyenletekből állnak, *elsőfokú egyenletrendszereknek* nevezzük.

Például az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & y = 5 \\ x & + & 2y = 5 \end{array} \right\}$$

egy kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer.

Az elsőfokú két ismeretlen tartalmazó, két egyenletből álló egyenletrendszerek megoldása:

1. Az elsőfokú egyenletrendszereket megoldhatjuk a behelyettesítő módszerrel azaz úgy, hogy az egyik ismeretlen kifejezzük az egyik egyenletből és azt behelyettesítjük a másik egyenletbe.
2. Az elsőfokú egyenletrendszereket megoldhatjuk az egyenlő együtthatók módszerével, amikor az egyik, vagy mindkét egyenletet megszorozzuk nullától különböző valós számmal úgy, hogy az egyik ismeretlen együtthatója a két egyenletben (előjeltől eltekintve) egyenlő legyen.

Példa. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 4x & + & 2y = 10 \\ 3x & - & 5y = -4 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = 5 - 2x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$3x - 5 \cdot (5 - 2x) = -4$$

adódik. A zárójelet felbontva és összevonva

$$3x - 25 + 10x = -4 \quad \Rightarrow \quad 13x = 21,$$

így

$$x = \frac{21}{13}.$$

Ezt felhasználva

$$y = 5 - 2 \cdot \frac{21}{13} = \frac{65}{13} - \frac{42}{13} = \frac{23}{13}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = \left(\frac{21}{13}; \frac{23}{13} \right).$$

Példa. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 5x & + & 4y = 13 \\ 7x & - & 6y = 11 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével!

Megoldás:

Az első egyenletet 3-mal szorozva azt kapjuk, hogy

$$15x + 12y = 39.$$

A második egyenletet 2-vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$14x - 12y = 22.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} 15x & + & 12y = 39 \\ 14x & - & 12y = 22 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$$29x = 61 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{61}{29}.$$

Ezt behelyettesítve az eredeti második egyenletbe

$$7 \cdot \frac{61}{29} - 6y = 11 \quad \Rightarrow \quad \frac{427}{29} - 6y = 11$$

adódik ahonnan

$$6y = \frac{427}{29} - 11 = \frac{427}{29} - \frac{319}{29} = \frac{108}{29} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{18}{29}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = \left(\frac{61}{29}; \frac{18}{29} \right).$$

Kidolgozott feladatok.

100. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & y = 5 \\ x & + & 2y = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezve az y ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$y = 5 - 2x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x + 2 \cdot (5 - 2x) = 0$$

adódik. A zárójelet felbontva, majd az egyenmű tagokat összevonva azt kapjuk, hogy

$$x + 10 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 10 = 0,$$

így

$$3x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{3}.$$

Ezt felhasználva

$$y = 5 - 2x = 5 - 2 \cdot \frac{10}{3} = 5 - \frac{20}{3} = \frac{15 - 20}{3} = -\frac{5}{3}$$

adódik. Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = \left(\frac{10}{3}; -\frac{5}{3} \right).$$

101. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & - & y = 7 \\ x & + & 3y = -2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = 2x - 7.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x + 3 \cdot (2x - 7) = -2$$

adódik. A zárójelet felbontva, majd az egyenmű tagokat összevonva azt kapjuk, hogy

$$x + 6x - 21 = -2 \quad \Rightarrow \quad 7x = 19,$$

így

$$x = \frac{19}{7}.$$

Ezt felhasználva

$$y = 2 \cdot \frac{19}{7} - 7 = \frac{38}{7} - \frac{49}{7} = -\frac{11}{7}$$

adódik. Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = \left(\frac{19}{7}; -\frac{11}{7} \right).$$

102. Feladat. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x & + & y = 5 \\ x & - & 2y = 7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = 5 - 3x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x - 2 \cdot (5 - 3x) = 7$$

adódik. A zárójelet felbontva, majd az egyenmű tagokat összevonva azt kapjuk, hogy

$$x - 10 + 6x = 7 \quad \Rightarrow \quad 7x = 17,$$

így

$$x = \frac{17}{7}.$$

Ezt felhasználva

$$y = 5 - 3 \cdot \frac{17}{7} = \frac{35}{7} - \frac{51}{7} = -\frac{16}{7}$$

adódik. Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = \left(\frac{17}{7}; -\frac{16}{7} \right).$$

103. Feladat. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x & + & 3y = 7 \\ 3x & - & 4y = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével!

Megoldás:

Az első egyenletet 4-gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$8x + 12y = 28.$$

A második egyenletet 3-mal szorozva azt kapjuk, hogy

$$9x - 12y = 6.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} 8x & + & 12y = 28 \\ 9x & - & 12y = 6 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy

$$17x = 34 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Ezt behelyettesítve az eredeti második egyenletbe

$$3 \cdot 2 - 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad 6 - 4y = 2$$

adódik így $y = 1$. Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$M = (2; 1).$$

3.2. Másodfokú egyenletrendszerek

Elméleti összefoglaló.

Azokat az egyenletrendszereket, amelyek megoldása során másodfokú egyenletet kell megoldani, *másodfokú egyenletrendszereknek* nevezzük.

Például az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y = 5 \\ x^2 & + & y^2 = 2 \end{array} \right\}$$

másodfokú egyenletrendszer.

A másodfokú egyenletrendszereket behelyettesítő módszerrel oldhatjuk meg azaz úgy, hogy az egyik ismeretlent kifejezzük az egyszerűbb egyenletből és azt behelyettesítjük a másik egyenletbe.

Példa. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y = 4 \\ x^2 & + & y^2 = 10 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezve az y ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$y = 4 - x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x^2 + (4 - x)^2 = 10$$

adódik. Az azonosságot elvégezve, majd az egynemű tagokat összevonva azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 16 = 10.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

adódik, így $x_1 = 3$ és $x_2 = 1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$y_1 = 4 - 3 = 1 \quad \text{és} \quad y_2 = 4 - 1 = 3.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai

$$M_1 = (3; 1) \quad \text{és} \quad M_2 = (1; 3).$$

Kidolgozott feladatok.

104. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y = 3 \\ x^2 & + & y^2 = 5 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből kifejezve az y ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$y = 3 - x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x^2 + (3 - x)^2 = 5$$

adódik. Az azonosságot elvégezve, majd az egyenmű tagokat összevonva azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6x + 9 = 5.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

adódik, így $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$y_1 = 3 - 2 = 1 \quad \text{és} \quad y_2 = 3 - 1 = 2.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (2; 1) \quad \text{és} \quad M_2 = (1; 2).$$

105. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} x^2 & + & y = 5 \\ y & - & 2x = -10 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

A második egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = 2x - 10.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$x^2 + (2x - 10) = 5$$

adódik. Az azonosság elvégzése, majd az egyenemű tagok összevonása után azt kapjuk, hogy

$$x^2 + 2x - 10 = 5.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad x_2 = -5.$$

Ezt felhasználva

$$y_1 = 2 \cdot 3 - 10 = -4 \quad \text{és} \quad y_2 = 2 \cdot (-5) - 10 = -20$$

adódik.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (3; -4), \quad M_2 = (-5; -20).$$

106. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x^2 & - & 6y = 0 \\ 2y & - & 6x = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

A második egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$2y = 6x \quad \Rightarrow \quad y = 3x.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$3x^2 - 6 \cdot 3x = 0$$

adódik, így

$$3x^2 - 18x = 0.$$

Kiemelve $3x$ -et azt kapjuk, hogy

$$3x \cdot (x - 6) = 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$x_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 6.$$

Ezt felhasználva

$$y_1 = 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{és} \quad y_2 = 3 \cdot 6 = 18.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (0; 0), \quad M_2 = (6; 18).$$

107. Feladat. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2y - 8x + 3x^2 & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

A második egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x.$$

Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$2x - 8x + 3x^2 = 0$$

adódik. Összevonva az egynemű tagokat azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 6x = 0.$$

Kiemelve a $3x$ -et

$$3x \cdot (x - 2) = 0$$

adódik, amiből következik, hogy

$$x_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 2.$$

Az $y = x$ összefüggés alapján azt kapjuk, hogy

$$y_1 = 0 \quad \text{és} \quad y_2 = 2.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (0; 0), \quad M_2 = (2; 2).$$

3.3. További egyenletrendszerek

108. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = x^2.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$3 \cdot (x^2)^2 - 3x = 0$$

adódik, azaz

$$3x^4 - 3x = 0.$$

Kiemelve a $3x$ -et azt kapjuk, hogy

$$3x \cdot (x^3 - 1) = 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$x_1 = 0 \quad \text{vagy} \quad x_2 = 1.$$

Ezt felhasználva

$$y_1 = (0)^2 = 0 \quad \text{és} \quad y_2 = (1)^2 = 1.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (x_1; y_1) = (0; 0), \quad M_2 = (x_2; y_2) = (1; 1).$$

109. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{x^2} + y &= 0 \\ -\frac{1}{y^2} + x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} + x = 0.$$

Mivel $\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{1}{x^4}$, ezért

$$-\frac{1}{\frac{1}{x^4}} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^4 + x = 0.$$

Kiemelve x -et:

$$x \cdot (-x^3 + 1) = 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1.$$

Azonban $x_1 = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $x = 1$ lehetséges. Ekkor

$$y = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen valós megoldása:

$$M = (1; 1).$$

110. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y &= 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Összeadva a két egyenletet azt kapjuk, hogy

$$(4x^3 - 4x + 4y) + (4y^3 + 4x - 4y) = 0,$$

amiből egyszerűsítés után

$$4x^3 + 4y^3 = 0$$

adódik, azaz

$$x^3 + y^3 = 0.$$

Ebből következik, hogy

$$x^3 = -y^3,$$

így

$$x = -y.$$

Ezt visszahelyettesítve például a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4y^3 - 4y - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y^3 - 8y = 0.$$

Kiemelve $4y$ -t az

$$4y \cdot (y^2 - 2) = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből

$$y = 0 \quad \text{vagy} \quad y = \pm\sqrt{2}$$

adódik. Az $x = -y$ összefüggést felhasználva az egyenletrendszer megoldásai:

$$M_1 = (0; 0), \quad M_2 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), \quad M_3 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}).$$

111. Feladat. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 36 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 6.$$

A második egyenletből

$$y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2.$$

adódik. Mivel az egyenletek egymástól függetlenek, ezért bármelyik x -hez bármelyik y tartozhat, így az egyenletrendszernek négy megoldása van, amelyek

$$M_1 = (6; 2), \quad M_2 = (6; -2), \quad M_3 = (-6; 2), \quad M_4 = (-6; -2).$$

3.4. Gazdasági alkalmazások

112. **Feladat.** A mosogatógépen kétféle program van. Egy mosogatáshoz az A program 20%-kal több elektromos energiát és 10%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. Egy mosogatás az A programmal 151 Ft-ba, a B programmal 140 Ft-ba kerül. A mosogatószer mindkét programnál 40 Ft. Forintban kifejezve mennyi elektromos energiát és mennyi vizet használ a B program?

Megoldás:

Jelölje x a B program energiaköltségét és y a B program vízköltségét forintban. Ekkor a B program teljes költsége:

$$x + y + 40 = 140.$$

Az A program 20%-kal több energiát és 10%-kal kevesebb vizet használ, tehát annak költsége:

$$1,2x + 0,9y + 40 = 151.$$

Vagyis az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + 40 & = & 140 \\ 1,2x + 0,9y + 40 & = & 151 \end{array} \right\}.$$

Vonjuk ki az első egyenlet 1,2-szeresét a másodikból:

$$(1,2x + 0,9y + 40) - (1,2x + 1,2y + 48) = 151 - 168,$$

amiből

$$-0,3y = -9 \quad \Rightarrow \quad y = 30.$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$x + 30 + 40 = 140 \quad \Rightarrow \quad x = 70.$$

Tehát a B program 70 Ft értékű elektromos energiát és 30 Ft értékű vizet használ egy mosogatáshoz.

113. **Feladat.** Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőkében, és minden sorban 5-tel kevesebb fa áll, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában van. Tudjuk azt is, hogy 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyő. A platánok telepítésekor a fenyőkhöz viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték, így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában?

- b) Hány fenyőfa van egy sorban?
 c) Hány platánfát telepítettek?

Megoldás:

- a) Jelölje a fenyők parcellájában a sorok számát r , egy sorban a fenyők számát c . Ekkor a fenyők száma összesen $r \cdot c$. A tölgyeknél sorból $r - 4$, soronként fából $c - 5$ van, tehát a tölgyek száma $(r - 4) \cdot (c - 5)$. Mivel 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyő, ezért

$$r \cdot c - (r - 4) \cdot (c - 5) = 360.$$

A platánoknál a sorok száma: $r + 3$. Az egy sorban lévő fák száma: $c + 2$. Tehát az összes tölgyfa darabszáma: $(r + 3) \cdot (c + 2)$. Mivel 228-cal több platánfa van, mint fenyő, ezért

$$(r + 3) \cdot (c + 2) - r \cdot c = 228.$$

A kapott egyenletben a zárójeleket felbontva elsőfokú egyenletrendszerhez jutunk, ugyanis egyrészt

$$r \cdot c - (r \cdot c - 5r - 4c + 20) = 360 \Rightarrow 5r + 4c = 380,$$

másrészt

$$r \cdot c + 2r + 3c + 6 - r \cdot c = 228 \Rightarrow 2r + 3c = 222$$

adódik. Tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{l} 5r + 4c = 380 \\ 2r + 3c = 222 \end{array} \right\}.$$

A második egyenletet 4-gyel szorozva azt kapjuk, hogy $8r + 12c = 888$.

Az első egyenletet 3-mal szorozva azt kapjuk, hogy $15r + 12c = 1\,140$. A második egyenletből kivonva az első

$$(15r - 8r) = 1\,140 - 888 \Rightarrow 7r = 252 \Rightarrow r = 36$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve a $2r + 3c = 222$ egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$72 + 3c = 222 \Rightarrow 3c = 150 \Rightarrow c = 50.$$

Tehát a fenyők parcellájában 36 sor van.

- b) Egy sorban 50 fa van.
 c) A platánok száma:

$$(r + 3) \cdot (c + 2) = 39 \cdot 52 = 2\,028.$$

114. **Feladat.** Határozzuk meg a nemzeti jövedelem egyensúlyi szintjét az alábbi alap Keynes-féle makrogazdasági modellben:

$$Y = C + I, \quad C = 40 + 0,5Y, \quad I = 200.$$

Megoldás:

Az egyensúlyi feltétel szerint

$$Y = C + I.$$

Behelyettesítve a fogyasztást és a beruházás adott értékét azt kapjuk, hogy

$$Y = 40 + 0,5Y + 200.$$

Összevonva a konstans tagokat

$$Y = 240 + 0,5Y.$$

adódik. Kivonva mindkét oldalból $0,5Y$ -t azt kapjuk, hogy

$$Y - 0,5Y = 240 \quad \Rightarrow \quad 0,5Y = 240.$$

Mindkét oldalt osztva $0,5$ -del azt kapjuk, hogy

$$Y = \frac{240}{0,5} = 480,$$

tehát az egyensúlyi nemzeti jövedelem

$$Y = 480.$$

115. **Feladat.** Egy fogyasztónak 240 font a költségvetése, és ezt teljes egészében két termékre, A -ra és B -re költi. Kezdetben az árak:

A : 5 font/db, B : 10 font/db.

Később az A termék ára 6 fontra nő, a B termék ára 8 fontra csökken. Hány darabot vásároljon az egyes termékekből úgy, hogy a költségvetés éppen elfogyjon?

Megoldás:

Jelölje a az A termék, b a B termék darabszámát. Ekkor az árkombináció mellett

$$5a + 10b = 240$$

adódik. A második árkombináció mellett azt kapjuk, hogy

$$6a + 8b = 240.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} 5a & + & 10b = 240 \\ 6a & + & 8b = 240 \end{array} \right\}$$

Az első egyenletet elosztva 5-tel

$$a + 2b = 48$$

adódik. A második egyenletet elosztva 2-vel azt kapjuk, hogy

$$3a + 4b = 120,$$

így az

$$\left. \begin{array}{rcl} a & + & 2b = 48 \\ 3a & + & 4b = 120 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az első egyenletből kifejezve a -t

$$a = 48 - 2b$$

adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3 \cdot (48 - 2b) + 4b = 120.$$

A zárójelet felbontva azt kapjuk, hogy

$$144 - 6b + 4b = 120 \quad \Rightarrow \quad 144 - 2b = 120,$$

így

$$-2b = 120 - 144 = -24 \quad \Rightarrow \quad b = 12.$$

Ekkor

$$a = 48 - 2 \cdot 12 = 48 - 24 = 24.$$

Tehát mindkét árkombináció mellett a teljes költségvetés felhasználható, ha 24 db A és 12 db B terméket vásárol a fogyasztó.

116. Feladat. Egy háztartás havi villanyszámlája három részből áll. Az egyik rész az alapidő, ami 1 600 Ft. A másik rész a nappali áram díja, ami 60 Ft/kWh, végül az éjszakai áram díja 40 Ft/kWh. A számla teljes értékére 27% általános forgalmi adót (ÁFA) számolnak fel.

- Mennyit fizet a fogyasztó (forintra kerekítve), ha a nappali fogyasztás 39 kWh, az éjszakai fogyasztás 24 kWh?
- Adjunk képletet a befizetendő számla összegére, ha a nappali fogyasztás x kWh, az éjszakai fogyasztás y kWh!

- c) Egy hónapban a befizetendő számla 3 937 Ft volt. Tudjuk, hogy a nappali fogyasztás kétszer akkora volt, mint az éjszakai. Mennyi volt ekkor a nappali és az éjszakai fogyasztás?
- d) Mekkora a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit fizetünk a nappali és az éjszakai fogyasztásért?

Megoldás:

- a) A fizetendő összeg

$$\begin{aligned} (1\,600 + 60 \cdot 39 + 40 \cdot 27) \cdot 1,27 &= \\ &= (1\,600 + 2\,340 + 960) \cdot 1,27 = 4\,900 \cdot 1,27 = 6\,223. \end{aligned}$$

- b) A nettó (ÁFA nélküli) összeg

$$S_{\text{nettó}} = 1\,600 + 60x + 40y.$$

A bruttó (fizetendő) összeg

$$S_{\text{bruttó}} = 1,27 \cdot S_{\text{nettó}} = 1,27 (1\,600 + 60x + 40y).$$

- c) A feltétel szerint $x = 2y$, továbbá $S_{\text{bruttó}} = 3\,937$ Ft. Ezeket felhasználva a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} (1\,600 + 60x + 40y) \cdot 1,27 &= 6\,096 \\ x &= 2y \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletbe behelyettesítve, hogy $x = 2y$, azt kapjuk, hogy

$$1,27 \cdot (1\,600 + 60 \cdot 2y + 40 \cdot y) = 6\,096.$$

Mindkét oldalt 1,27-tel osztva azt kapjuk, hogy

$$1\,600 + 120y + 40y = 4\,800 \quad \Rightarrow \quad 160y = 3\,200,$$

így $y = 20$. Ezt felhasználva $x = 2 \cdot 20 = 40$. Tehát a fogyasztásra azt kaptuk, hogy $x = 40$ kWh a nappali, $y = 20$ kWh az éjjeli fogyasztás.

- d) Alapdíj és ÁFA nélkül az egyenlő fizetendő a két időszakra azt jelenti, hogy

$$60x = 40y \quad \Rightarrow \quad 3x = 2y \quad \Rightarrow \quad x : y = 2 : 3.$$

117. Feladat. Egy biobolt tulajdonosa 2 400 Ft kilónkénti árú kesudiót és 1 500 Ft egységárú aszalt gyümölcsöt kevert össze, majd az így kapott keveréket kis csomagokban árulta. Összesen 10 kg-ot adott el 25%-os haszonnal, így 25 500 Ft bevételre tett szert. Mennyi kesudiót és mennyi aszalt gyümölcsöt használt?

Megoldás:

Jelölje x a felhasznált kesudió, y az aszalt gyümölcs mennyiségét kilogrammban. Ekkor

$$x + y = 10.$$

A keverék eladási ára összesen 25 500 Ft volt 10 kg-ra, tehát az eladási ár kilónként:

$$\frac{25\,500}{10} = 2\,550 \text{ Ft.}$$

A haszon 25%, ezért a beszerzési ár kilogrammonként

$$\frac{2\,550}{1,25} = 2\,040 \text{ Ft.}$$

Tehát a teljes beszerzési költség:

$$10 \cdot 2\,040 = 20\,400 \text{ Ft.}$$

A keverék beszerzési ára ugyanakkor a két összetevő összköltségének összege

$$2\,400x + 1\,500y = 20\,400 \quad \Rightarrow \quad 24x + 15y = 204.$$

Azt kaptuk, hogy a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y = 10 \\ 24x & + & 15y = 204 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kifejezve az y -t azt kapjuk, hogy

$$y = 10 - x.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$24x + 15 \cdot (10 - x) = 204$$

adódik. A zárójelet felbontva azt kapjuk, hogy

$$24x + 150 - 15x = 204.$$

Összevonva az egyenmű tagokat

$$9x + 150 = 204.$$

adódik. Az egyenletet rendezve

$$9x = 54 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{54}{9} = 6.$$

Ekkor

$$y = 10 - 6 = 4.$$

Tehát a biobolt tulajdonosa 6 kg kesudiót és 4 kg aszalt gyümölcsöt használt fel a keverékhez.

118. Feladat. Egy vállalat két terméket gyárt, nevezetesen A -t és B -t, amelyekhez kétféle termelési tényezőt, K -t és L -t használ. Egy egység A termék előállításához 6 egység K és 3 egység L szükséges, míg egy egység B termék előállításához 4 egység K és 5 egység L szükséges. A vállalat rendelkezésére 420 egység K és 300 egység L áll. Hány egységet kell gyártania A -ból és B -ől, ha mindkét termelési tényezőt teljesen fel akarja használni?

Megoldás:

Jelölje x az A termékből, y pedig a B termékből gyártott mennyiségét. A K termelési tényezőre a

$$6x + 4y = 420,$$

míg az L termelési tényezőre a

$$3x + 5y = 300$$

egyenlet adódik. Tehát a következő egyenletrendszert kell megoldanunk a valós számpárok halmazán:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 420 \\ 3x + 5y = 300 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer mindkét egyenlete értelmezve van minden valós számpárra, tehát

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Az első egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$6x + 4y = 420 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y = 210.$$

Ebből x -et kifejezve

$$3x + 2y = 210 \quad \Rightarrow \quad 3x = 210 - 2y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{210 - 2y}{3}$$

adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3 \cdot \frac{210 - 2y}{3} + 5y = 300,$$

így

$$210 - 2y + 5y = 300 \quad \Rightarrow \quad 210 + 3y = 300.$$

Ebből az következik, hogy

$$3y = 90 \quad \Rightarrow \quad y = 30.$$

Visszahelyettesítjük az $y = 30$ értéket az x -re kapott kifejezésbe, így

$$3x + 2 \cdot 30 = 210 \quad \Rightarrow \quad 3x + 60 = 210 \quad \Rightarrow \quad 3x = 150,$$

tehát $x = 50$. Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer megoldása:

$$M = (50; 30).$$

Ez gazdasági értelemben azt jelenti, hogy a vállalatnak

50 egység A -t és 30 egység B -t

kell termelnie ahhoz, hogy a K és L termelési tényezőket teljesen felhasználja.

3.5. Összefoglaló feladatok

119. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 10 \\ xy &= 3 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

A második egyenletből kifejezve az y ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$x \cdot y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x},$$

ahol $x \neq 0$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$x^2 + y^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 10.$$

adódik. Ebből

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10.$$

Mindkét oldalt x^2 -tel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^4 + 9 = 10x^2.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

adódik. Bevezetve az $a = x^2$ új ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$a^2 - 10a + 9 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}.$$

Tehát

$$a_1 = \frac{10 + 8}{2} = 9, \quad a_2 = \frac{10 - 8}{2} = 1.$$

Mivel $a = x^2$, ezért $x^2 = 9$, illetve $x^2 = 1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

Mindegyik x -hez meghatározva az y -t az $y = \frac{3}{x}$ összefüggésből

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{3} = 1,$$

$$x_2 = -3 \Rightarrow y_2 = \frac{3}{-3} = -1,$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{3}{1} = 3,$$

$$x_4 = -1 \Rightarrow y_4 = \frac{3}{-1} = -3.$$

adódik. Tehát az egyenletrendszer megoldásai

$$M_1 = (3; 1), \quad M_2 = (-3; -1), \quad M_3 = (1; 3), \quad M_4 = (-1; -3).$$

120. Feladat. Egy fogyasztó két terméket vásárol, A -t és B -t. Egyik alkalommal 8 db A terméket és 6 db B terméket vásárol, összesen 520 Ft értékben. Egy másik alkalommal 5 db A terméket és 10 db B terméket vesz, ekkor a fizetendő összeg 550 Ft.

Feltételezve, hogy az árak nem változtak, határozzuk meg az A és B termék egységárát!

Megoldás:

Jelölje x Ft az A termék, y Ft a B termék árát. Az első vásárlásnál

$$8x + 6y = 520.$$

A második vásárlásnál

$$5x + 10y = 550.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{rcl} 8x & + & 6y = 520 \\ 5x & + & 10y = 550 \end{array} \right\}.$$

Oldjuk meg az egyenletrendszert az egyenlő együtthatók módszerével. Az első egyenletet 5-tel, a másodikat 8-cal szorozva:

$$40x + 30y = 2\,600,$$

$$40x + 80y = 4\,400.$$

A második egyenletből kivonjuk az első:

$$(40x + 80y) - (40x + 30y) = 4\,400 - 2\,600,$$

amiből

$$50y = 1\,800 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1\,800}{50} = 36.$$

Ezt visszahelyettesítve például az $5x + 10y = 550$ egyenletbe:

$$5x + 10 \cdot 36 = 550 \quad \Rightarrow \quad 5x + 360 = 550,$$

így

$$5x = 550 - 360 = 190 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{190}{5} = 38.$$

Tehát az A termék ára 38 Ft/db, a B termék ára 36 Ft/db.

121. Feladat. Határozzuk meg a nemzeti jövedelem egyensúlyi szintjét a

$$Y = C + I + G, \quad C = 30 + 0,8 \cdot (Y - T), \quad T = 50, \quad I = 70, \quad G = 50.$$

Keynes-féle makrogazdasági modellben!

Megoldás:

Az egyensúlyi feltétel szerint

$$Y = C + I + G$$

adódik. Behelyettesítve C, I, G értékeit azt kapjuk, hogy

$$Y = (30 + 0,8(Y - 50)) + 70 + 50.$$

A zárójelet felbontva

$$Y = 30 + 0,8Y - 0,8 \cdot 50 + 70 + 50$$

adódik. Mivel $0,8 \cdot 50 = 40$, ezért

$$Y = 30 + 0,8Y - 40 + 70 + 50.$$

Összevonva a konstans tagokat azt kapjuk, hogy $30 - 40 + 70 + 50 = 110$, így

$$Y = 0,8Y + 110.$$

Az $0,8Y$ -t átvisszük a bal oldalra, így

$$Y - 0,8Y = 110 \quad \Rightarrow \quad 0,2Y = 110$$

adódik. Tehát

$$Y = \frac{110}{0,2} = 550.$$

Tehát az egyensúlyi nemzeti jövedelem

$$Y = 550.$$

122. Feladat. Egy gyárban kétféle dolgozói kategória van: szakmunkások és segéd munkások. Egy szakmunkás napi bére 8 000 Ft, egy segéd munkásé 6 000 Ft. Egy adott napon összesen 20 dolgozó volt jelen, és a kifizetett napi bér összesen 136 000 Ft volt.

Hány szakmunkás és hány segéd munkás dolgozott ezen a napon?

Megoldás:

Jelölje x a szakmunkások, y a segéd munkások számát. Tudjuk, hogy

$$x + y = 20,$$

valamint a bérkölségből

$$8\,000x + 6\,000y = 136\,000.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & = & 20 \\ 8\,000x & + & 6\,000y & = & 136\,000 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kifejezve az y -t azt kapjuk, hogy

$$y = 20 - x.$$

Ezt behelyettesítjük a második egyenletbe

$$8\,000x + 6\,000 \cdot (20 - x) = 136\,000$$

adódik. Felbontva a zárójelet azt kapjuk, hogy

$$8\,000x + 120\,000 - 6\,000x = 136\,000.$$

Összevonva az egynemű tagokat

$$2\,000x + 120\,000 = 136\,000$$

adódik. Kivonva mindkét oldalból a 120 000-et azt kapjuk, hogy

$$2\,000x = 16\,000 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16\,000}{2\,000} = 8.$$

Ebből

$$y = 20 - 8 = 12$$

adódik. Tehát 8 szakmunkás és 12 segéd munkás dolgozott az adott napon.

123. Feladat. Egy befektető összesen 1 000 000 Ft-ot helyez el két különböző kamatlábú lekötésbe. Az egyik rész 5%-os, a másik 8%-os éves kamatra kamatozik. Egy év elteltével a befektető összesen 68 000 Ft kamatot kapott.

Mennyit fektetett be az egyes kamatlábak mellett?

Megoldás:

Jelölje x Ft az 5%-os, y Ft a 8%-os kamatozású befektetés összegét. Tudjuk, hogy összesen 1 000 000 Ft-ot fektetett be, így

$$x + y = 1\,000\,000.$$

Az éves kamat az 5%-os részen $0,05x$, a 8%-os részen $0,08y$, ezek összege 68 000 Ft, így

$$0,05x + 0,08y = 68\,000.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 1\,000\,000 \\ 0,05x + 0,08y & = & 68\,000 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kifejezve az x -et azt kapjuk, hogy

$$x = 1\,000\,000 - y.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$0,05 \cdot (1\,000\,000 - y) + 0,08y = 68\,000$$

adódik, így

$$0,05 \cdot 1\,000\,000 - 0,05y + 0,08y = 68\,000.$$

Elvégezve a bal oldalon lévő szorzást azt kapjuk, hogy

$$50\,000 + 0,03y = 68\,000,$$

így

$$0,03y = 18\,000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{18\,000}{0,03} = 600\,000.$$

A kapott eredményt felhasználva

$$x = 1\,000\,000 - 600\,000 = 400\,000.$$

Tehát a befektető 400 000 Ft-ot helyezett el 5%-os, és 600 000 Ft-ot 8%-os kamatra.

124. Feladat. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az

$$\left. \begin{array}{rcl} -\frac{20}{x^2} + y & = & 0 \\ -\frac{50}{y^2} + x & = & 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer értelmezési tartománya

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az első egyenletből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{20}{x^2}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-\frac{50}{\left(\frac{20}{x^2}\right)^2} + x = 0$$

adódik. Mivel

$$\left(\frac{20}{x^2}\right)^2 = \frac{400}{x^4},$$

ezért

$$-\frac{50}{\frac{400}{x^4}} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{50 \cdot x^4}{400} + x = 0.$$

Egyszerűsítés után a

$$-\frac{x^4}{8} + x = 0$$

egyenlethez jutunk. Kiemelve x -et azt kapjuk, hogy

$$x \cdot \left(-\frac{x^3}{8} + 1\right) = 0.$$

Ebből adódik, hogy

$$x_1 = 0 \quad x_2^3 = 8.$$

Azonban $x_1 = 0$ nem eleme az értelmezési tartománynak, így csak $x^3 = 8$ lehetséges, amiből $x = 2$. Ekkor

$$y = \frac{20}{2^2} = \frac{20}{4} = 5.$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen valós megoldása $M = (2; 5)$.

4. fejezet

Egyenlőtlenségek megoldása

4.1. Elsőfokú egyenlőtlenségek

Elméleti összefoglaló

Az elsőfokú egyenlőtlenségek esetében, ha a nevező nem tartalmaz ismeretlent, akkor ugyanúgy járunk el, mint az egyenletek esetében, figyelve arra, hogy ha egyenlőtlenséget negatív számmal szorozzuk vagy osztjuk, akkor a relációs jel iránya megváltozik.

Példa. Oldjuk meg a $-2x + 4 \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából 4-et kivonva azt kapjuk, hogy

$$-2x \leq -4,$$

majd mindkét oldalt -2 -vel osztva

$$x \geq 2$$

adódik.

Amennyiben az egyenlőtlenség nevezőjében ismeretlen szerepel, akkor első lépésben az egyenlőtlenséget nullára kell rendezni.

A nullára rendezett egyenlőtlenség általános alakja az alábbiak valamelyike lehet:

$$\frac{ax + b}{cx + d} < 0, \quad \frac{ax + b}{cx + d} \leq 0, \quad \frac{ax + b}{cx + d} > 0, \quad \frac{ax + b}{cx + d} \geq 0,$$

ahol a, b, c, d olyan valós számok, hogy $cx + d \neq 0$. Ezekben az esetekben az egyenlőtlenséget úgy oldjuk meg, hogy a vizsgálódásunkat két esetre bontjuk aszerint, hogy a tört értéke negatív vagy pozitív.

Az

$$\frac{ax + b}{cx + d} < 0$$

egyenlőtlenség esetén a bal oldalon szereplő tört értéke akkor lesz negatív, ha a számláló pozitív és a nevező negatív, vagy fordítva, a számláló negatív és a nevező pozitív. Ha az egyenlőtlenség relációs jelében az egyenlőség is megengedett, akkor a számláló relációs jelében egyenlőségjel is megengedett.

Az

$$\frac{ax + b}{cx + d} > 0$$

egyenlőtlenség esetén a bal oldalon szereplő tört értéke akkor lesz pozitív, ha a számláló pozitív és a nevező pozitív, vagy fordítva, a számláló negatív és a nevező negatív. Ha az egyenlőtlenség relációs jelében az egyenlőség is megengedett, akkor a számláló relációs jelében egyenlőségjel is megengedett.

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x-1}{x+3} \leq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

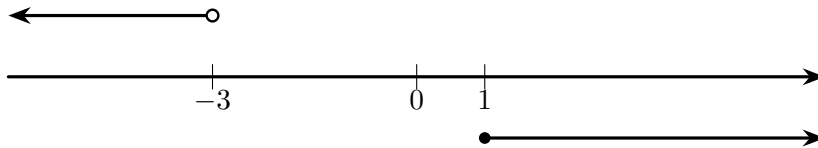
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x-1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x+3 < 0,$$

így

$$x \geq 1 \quad \text{és} \quad x < -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Így az első esetben nem kapunk megoldást.

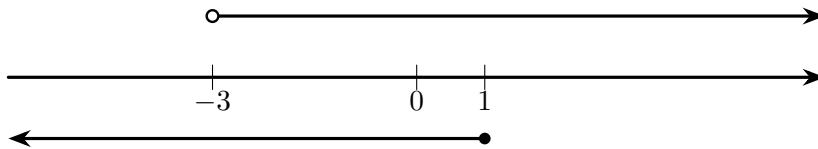
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$x-1 \leq 0 \quad \text{és} \quad x+3 > 0,$$

így

$$x \leq 1 \quad \text{és} \quad x > -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Ebben az esetben azt kaptuk, hogy a közös rész $] -3; 1]$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $] -3; 1]$.

Kidolgozott feladatok

125. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x-2}{x+3} \leq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

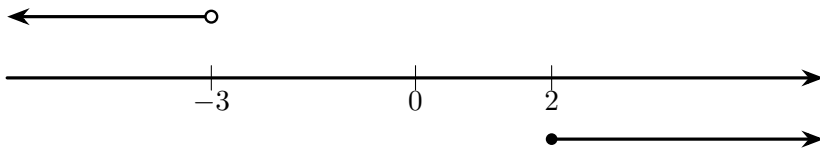
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 3 < 0,$$

így

$$x \geq 2 \quad \text{és} \quad x < -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Így az első esetben nem kapunk megoldást.

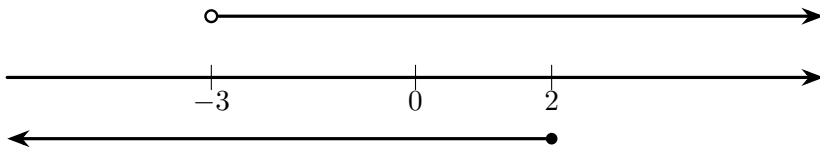
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$x - 2 \leq 0 \quad \text{és} \quad x + 3 > 0,$$

így

$$x \leq 2 \quad \text{és} \quad x > -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Ebben az esetben azt kaptuk, hogy a közös rész $] -3; 2]$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása: $] -3; 2]$.

126. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{2x - 4}{x + 3} > 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

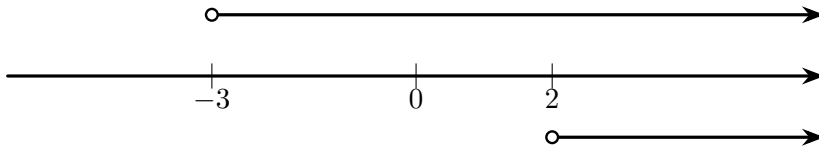
I. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis amikor a számláló és a nevező is pozitív. Ekkor

$$2x - 4 > 0 \quad \text{és} \quad x + 3 > 0,$$

így

$$x > 2 \quad \text{és} \quad x > -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $]2; \infty[$.

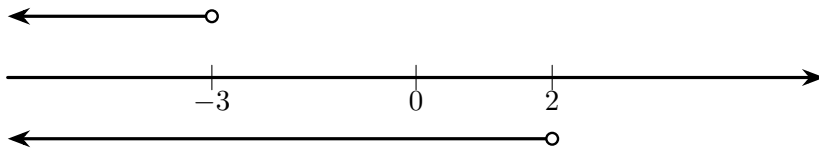
II. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis amikor a számláló és a nevező is negatív. Ekkor

$$2x - 4 < 0 \quad \text{és} \quad x + 3 < 0,$$

így

$$x < 2 \quad \text{és} \quad x < -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $] - \infty; -3[$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] - \infty; -3[\cup]2; \infty[.$$

127. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x-4}{x+1} \leq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

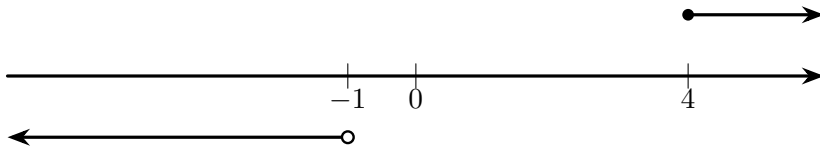
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$x-4 \geq 0 \quad \text{és} \quad x+1 < 0,$$

így

$$x \geq 4 \quad \text{és} \quad x < -1.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy nincs közös rész.

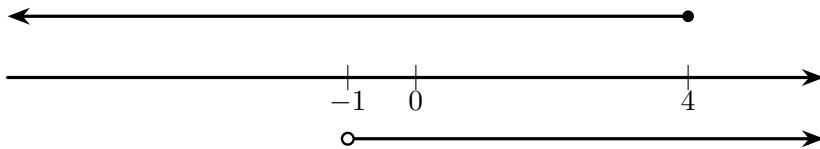
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$x-4 \leq 0 \quad \text{és} \quad x+1 > 0,$$

így

$$x \leq 4 \quad \text{és} \quad x > -1.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Itt a közös rész $] -1; 4]$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] -1; 4].$$

128. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{5-x}{x+3} < 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű.

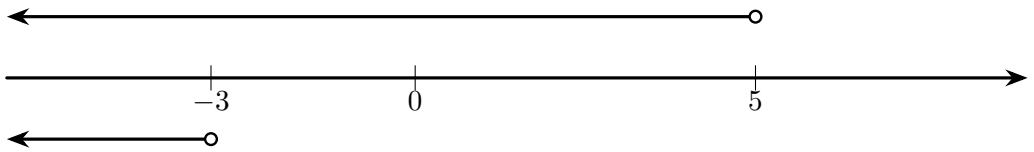
I. eset: $\frac{+}{-}$, vagyis amikor a számláló pozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$5 - x > 0 \quad \text{és} \quad x + 3 < 0,$$

így

$$x < 5 \quad \text{és} \quad x < -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Közös rész: $] - \infty; -3[$.

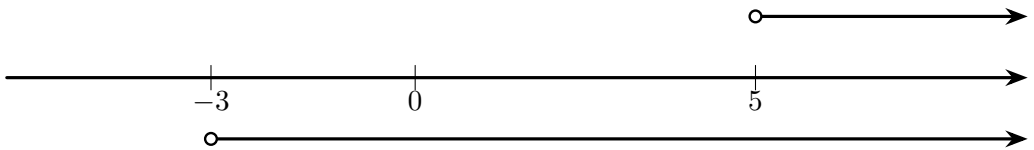
II. eset: $\frac{-}{+}$, vagyis amikor a számláló negatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$5 - x < 0 \quad \text{és} \quad x + 3 > 0,$$

így

$$x > 5 \quad \text{és} \quad x > -3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Közös rész: $]5; \infty[$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] - \infty; -3[\cup]5; \infty[.$$

129. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$1 + \frac{1}{x} > 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Közös nevezőre hozva azt kapjuk, hogy

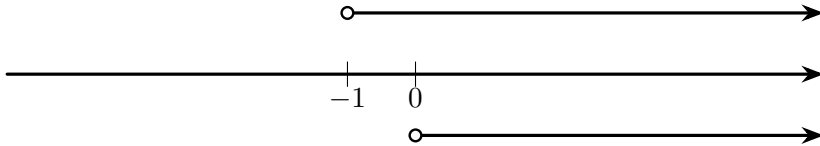
$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

Egy tört csak úgy lehet pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

I. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis a számláló és a nevező pozitív előjelű, azaz

$$x+1 > 0 \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Számegyenesen ábrázolva:

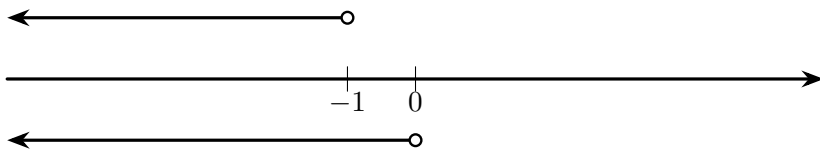


Közös rész: $]0; \infty[$.

II. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis a számláló és a nevező negatív előjelű, azaz

$$x+1 < 0 \quad \text{és} \quad x < 0,$$

Számegyenesen ábrázolva:



Közös rész: $] - \infty; -1[$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] - \infty; -1[\cup]0; \infty[.$$

130. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{2x+4}{x-3} \geq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Egy tört csak úgy lehet nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

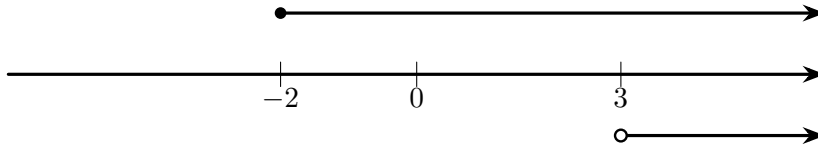
I. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis amikor a számláló nemnegatív és a nevező pozitív. Ekkor

$$2x + 4 \geq 0 \quad \text{és} \quad x - 3 > 0,$$

így

$$x \geq -2 \quad \text{és} \quad x > 3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $]3; \infty[$.

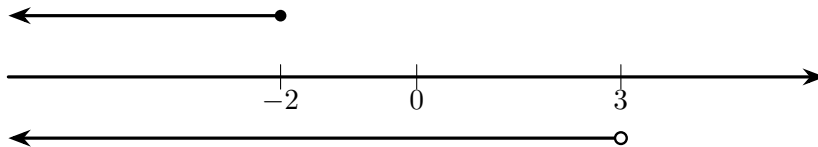
II. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis amikor a számláló nempozitív és a nevező negatív. Ekkor

$$2x + 4 \leq 0 \quad \text{és} \quad x - 3 < 0,$$

így

$$x \leq -2 \quad \text{és} \quad x < 3.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $] - \infty; -2]$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] - \infty; -2] \cup]3; \infty[.$$

131. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{x+1}{x+2} < 2$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Első lépésben az egyenlőtlenséget nullára rendezzük. Közös nevezőre hozva az egyenlőtlenség bal oldalát azt kapjuk, hogy

$$\frac{x+1}{x+2} - 2 = \frac{x+1-2 \cdot (x+2)}{x+2} = \frac{x+1-2x-4}{x+2} = \frac{-x-3}{x+2}.$$

Tehát a megoldandó egyenlőtlenség

$$\frac{-x-3}{x+2} < 0.$$

A számolás egyszerűsítése miatt érdemes mindkét oldalt -1 -gyel szorozni. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{-x-3}{x+2} < 0 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2} > 0.$$

Egy tört csak úgy lehet pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.

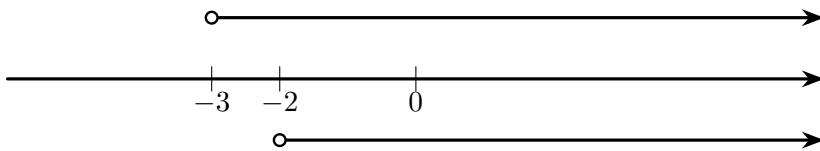
I. eset: $\frac{+}{+}$, vagyis amikor a számláló és a nevező is pozitív. Ekkor

$$x+3 > 0 \quad \text{és} \quad x+2 > 0,$$

így

$$x > -3 \quad \text{és} \quad x > -2.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $] -2; \infty[$.

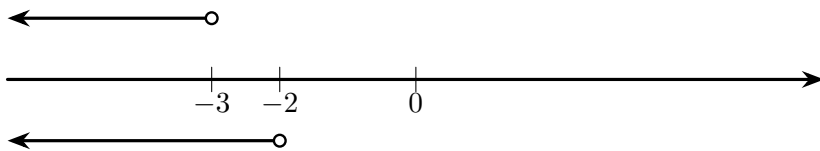
II. eset: $\frac{-}{-}$, vagyis amikor a számláló és a nevező is negatív. Ekkor

$$x+3 < 0 \quad \text{és} \quad x+2 < 0,$$

így

$$x < -3 \quad \text{és} \quad x < -2.$$

Számegyenesen ábrázolva az alábbi adódik:



Látható, hogy a közös rész: $] -\infty; -3[$.

Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] -\infty; -3[\cup] -2; \infty[.$$

4.2. Másodfokú egyenlőtlenségek

Elméleti összefoglaló

A másodfokú egyenlőtlenségeket grafikusan fogjuk megoldani. Az egyenlőtlenséget nullára rendezzük, majd kiszámoljuk a másodfokú függvény zérushelyeit, és a zérushelyek segítségével vázlatosan ábrázoljuk a parabolát.

Ha $a > 0$, és x_1, x_2 az $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyei úgy, hogy $x_1 < x_2$, akkor az

$$ax^2 + bx + c < 0$$

egyenlőtlenség megoldása $x \in]x_1; x_2[$.

Ha $a > 0$, és x_1, x_2 az $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyei úgy, hogy $x_1 < x_2$, akkor az

$$ax^2 + bx + c > 0$$

egyenlőtlenség megoldása $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$.

Ha $a < 0$, és x_1, x_2 az $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyei úgy, hogy $x_1 < x_2$, akkor az

$$ax^2 + bx + c > 0$$

egyenlőtlenség megoldása $x \in]x_1; x_2[$.

Ha $a < 0$, és x_1, x_2 az $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyei úgy, hogy $x_1 < x_2$, akkor az

$$ax^2 + bx + c < 0$$

egyenlőtlenség megoldása $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; \infty[$.

Példa. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

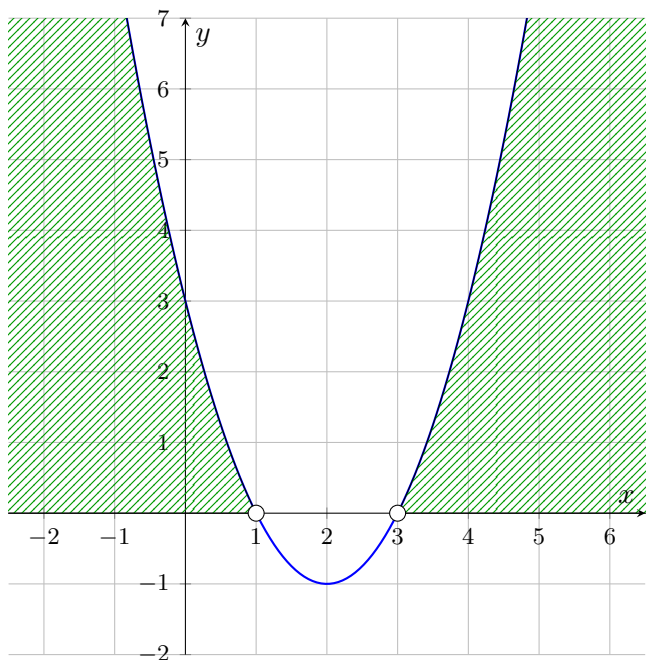
egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 4x + 3$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

azaz $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely felett van, azaz

$$x \in]-\infty; 1[\cup]3; \infty[.$$

Kidolgozott feladatok

132. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 7x + 10 > 0$$

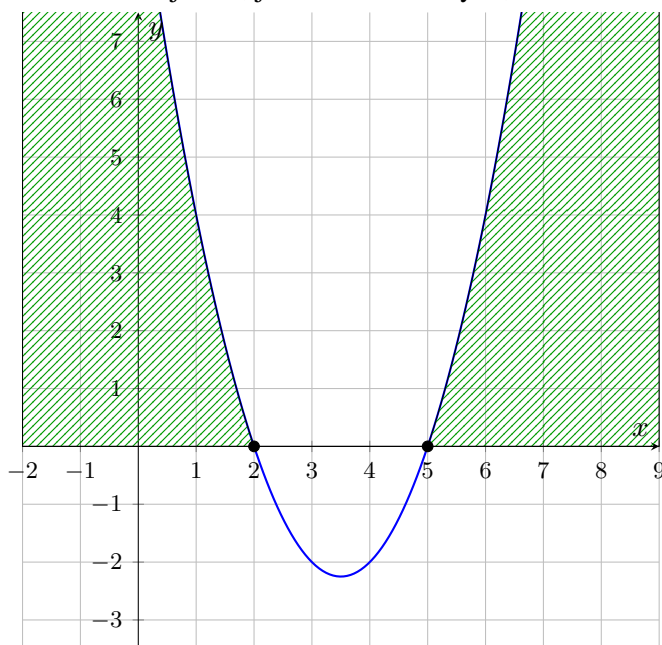
egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 7x + 10$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$. A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely felett van, azaz

$$x \in] - \infty; 2[\cup]5; \infty[.$$

133. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$1 - x^2 \geq 0$$

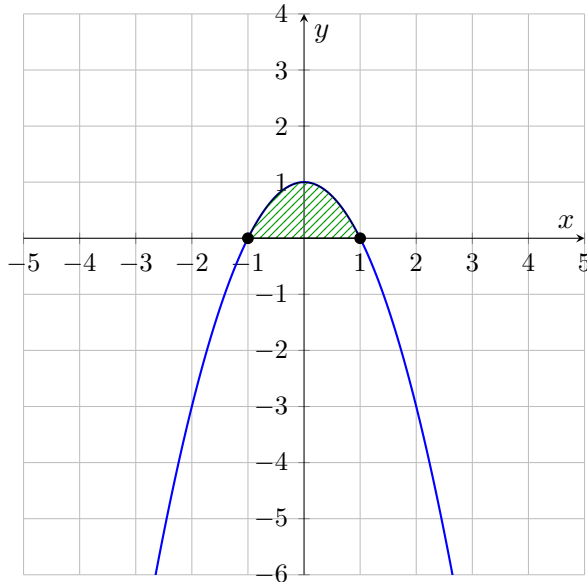
egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Első lépésben meghatározzuk az $1 - x^2$ függvény zérushelyeit, azaz meg kell oldanunk az $1 - x^2 = 0$ egyenletet, amire azt kapjuk, hogy

$$x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

A parabola „lefelé nyílik”, mert a négyzetes tag negatív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in [-1; 1].$$

134. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - 4 \leq 0$$

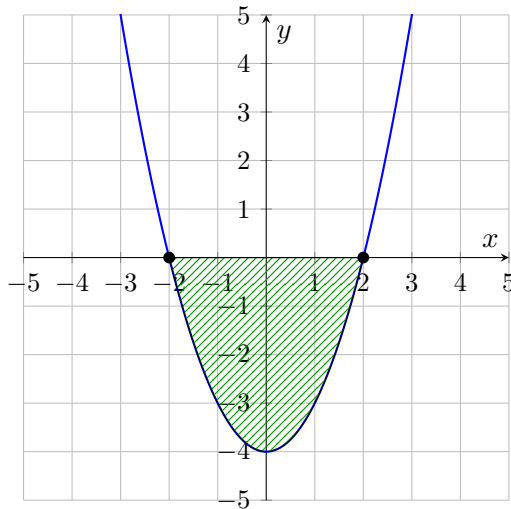
egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 4$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 4 = 0$ egyenletet. Ebből

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

adódik. A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az x értékeken nempozitív, ahol a grafikonja az x -tengely alatt vagy rajta van, azaz

$$x \in [-2; 2].$$

135. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 - x - 6 > 0$$

egyenlőtlenséget!

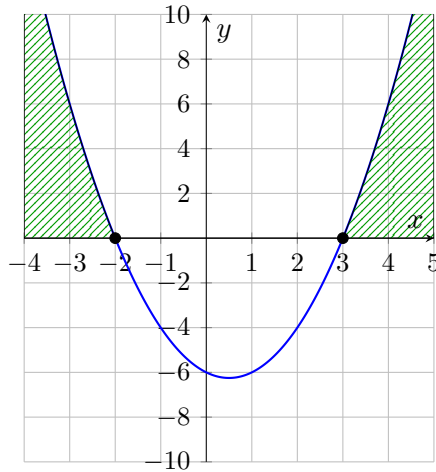
Megoldás:

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - x - 6$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - x - 6 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

azaz $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely felett van, azaz

$$x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[.$$

136. Feladat. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$-x^2 + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Először meghatározzuk a $-x^2 + 1$ függvény zérushelyeit, azaz meg kell oldanunk a

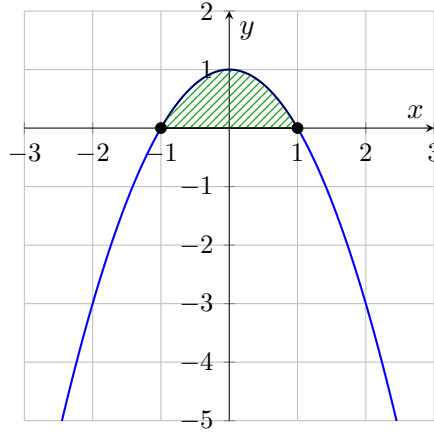
$$-x^2 + 1 = 0$$

egyenletet. Ebből

$$-x^2 = -1, \quad \text{azaz} \quad x^2 = 1,$$

tehát $x = \pm 1$.

A parabola „lefelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója negatív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in [-1; 1].$$

137. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$-x^2 + x + 6 < 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk a $-x^2 + x + 6$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

egyenletet. Szorozzuk meg mindkét oldalt -1 -gyel:

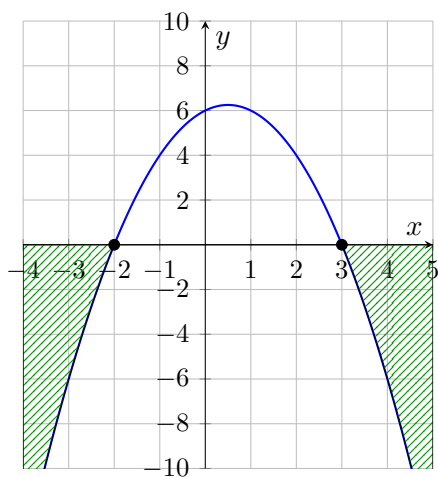
$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Ennek megoldásai a másodfokú megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

A parabola „lefelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója negatív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon negatív, ahol a grafikonja az x -tengely alatt van, azaz

$$x \in]-\infty; -2[\cup]3; \infty[.$$

4.3. Gazdasági alkalmazások

138. **Feladat.** Egy kisvállalkozás egy termékét darabonként 30 euróért adja el. Egy darab előállításának változó költsége 20 euró, az állandó költség pedig 500 euró havonta. Hány darabot kell havonta eladni ahhoz, hogy a vállalkozás ne legyen veszteséges (azaz a nyereség ne legyen negatív)?

Megoldás:

Jelölje x a havonta eladott termékek számát.

A bevétel $30x$. Az összköltség $20x + 500$. A nyereség a bevétel és a költség különbsége, azaz

$$30x - (20x + 500) = 10x - 500.$$

Azt várjuk, hogy a nyereség ne legyen negatív, így a

$$10x - 500 \geq 0$$

elsőfokú egyenlőtlenséghez jutunk. Mindkét oldalt 10-zel osztva azt kapjuk, hogy

$$x - 50 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 50.$$

Tehát legalább 50 darabot kell eladni havonta, hogy a vállalkozás ne legyen veszteséges, azaz

$$x \in [50; \infty[.$$

139. **Feladat.** Egy vállalkozás havi nyeresége (ezer euróban) a termelés nagyságának függvényében

$$N(x) = -x^2 + 8x - 12,$$

ahol x az eladott termékek mennyiségét jelöli (száz darabban mérve). Milyen termelési szint esetén lesz nyereséges a vállalkozás?

Megoldás:

Az $N(x) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $-x^2 + 8x - 12$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a

$$-x^2 + 8x - 12 = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt -1 -gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

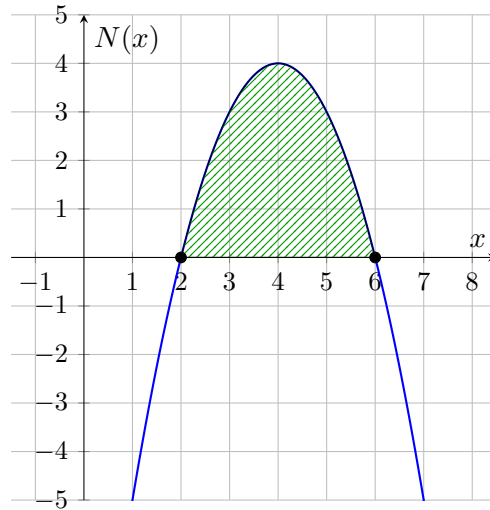
A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2},$$

adódik, azaz

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

A $N(x) = -x^2 + 8x - 12$ nyereségfüggvény parabolája „lefelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója negatív. Vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely fölött van, azaz

$$N(x) > 0 \iff x \in]2; 6[.$$

Tehát a vállalkozás akkor nyereséges, ha a termelés 200 és 600 között van.

140. Feladat. Tegyük fel, hogy egy termék egységára x (10 euróban mérve), és a nyereség (ezer euróban) az

$$N(x) = -x^2 + 6x - 5$$

függvénnyel írható le. Milyen árintervallumban teljesül, hogy a vállalkozás nem veszteséges?

Megoldás:

A $-x^2 + 6x - 5 > 0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ehhez a $-x^2 + 6x - 5$ függvény zérushelyeit keressük, ezért megoldjuk a

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt -1 -gyel szorozva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

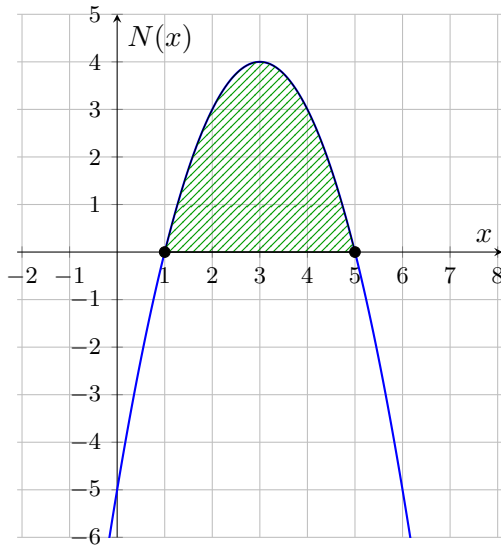
A másodfokú megoldóképletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

így

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Az $N(x) = -x^2 + 6x - 5$ nyereségfüggvény parabolája „lefelé nyílik”, mert a négyzetes tag együtthatója negatív. Vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az x értékeken nemnegatív, ahol a grafikonja az x -tengelyen vagy fölötte van, azaz

$$N(x) \geq 0 \iff x \in [1; 5].$$

Tehát a vállalkozás akkor nem veszteséges, ha az egységár az $1 \cdot 10 = 10$ és az $5 \cdot 10 = 50$ euró közötti zárt intervallumba esik.

4.4. Összefoglaló feladatok

141. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x - 2)^2 - 9 > 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Felhasználva az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ azonosságot azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 4x + 4 - 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 5 > 0$$

egyenlőtlenség adódik. Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 4x - 5$ függvény zérushelyeit, vagyis megoldjuk az

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

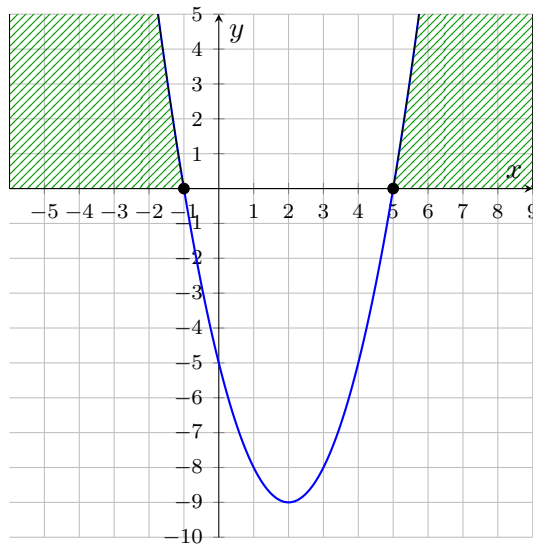
másodfokú egyenletet. A megoldóképlet segítségével

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

adódik, vagyis

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 5.$$

Az alábbi ábra szemlélteti az $x^2 - 4x + 5$ függvényt és az egyenlőtlenség megoldását:



Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in] - \infty; -1[\cup]5; \infty[.$$

142. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x - 1)^2 - 2x^2 + 4x + 2 \geq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

Felhasználva az

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azonosságot azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 4x + 2 \geq 0.$$

Elvégezve az összevonást

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

adódik.

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk a $-x^2 + 2x + 3$ függvény zérushelyeit, ezért megoldjuk a

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt -1 -gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

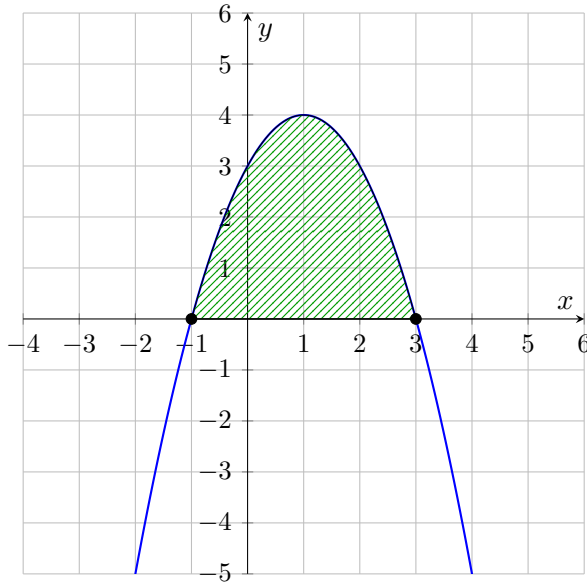
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

adódik, vagyis az egyenlet megoldásai

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

A négyzetes tag együtthatója negatív ($a = -1 < 0$), ezért a parabola lefelé nyílik. A másodfokú függvény grafikonját és az egyenlőtlenség megoldását az alábbi ábra szemlélteti:



Tehát az egyenlőtlenség megoldása:

$$x \in [-1; 3].$$

143. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\frac{2x - 3}{x + 1} \geq 0$$

egyenlőtlenséget!

Megoldás:

A tört akkor és csak akkor nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. Két esetet vizsgálunk. Közben figyelni kell arra, hogy $x + 1 \neq 0$, vagyis $x \neq -1$.

I. eset: $\frac{+}{+}$, amikor a számláló és a nevező is nemnegatív. Ekkor

$$2x - 3 \geq 0 \quad \text{és} \quad x + 1 > 0.$$

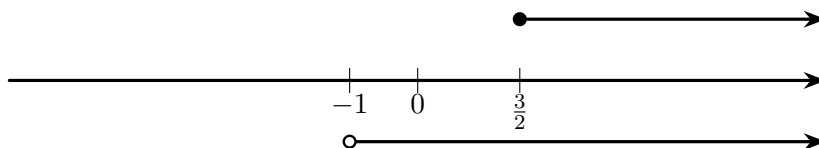
Az első egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$2x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{3}{2},$$

a másodikból pedig azt, hogy

$$x > -1.$$

Ezt számegyenesen is ábrázoljuk:



A két feltétel egyszerre való teljesülése:

$$x \in \left[\frac{3}{2}; \infty \right[.$$

II. eset: $\frac{-}{-}$, amikor a számláló és a nevező negatív. Ekkor

$$2x - 3 \leq 0 \quad \text{és} \quad x + 1 < 0.$$

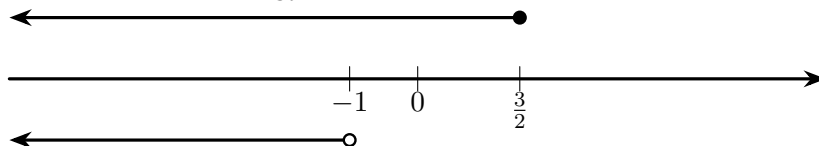
Az első egyenlőtlenségből

$$2x \leq 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{3}{2},$$

a másodikból pedig

$$x < -1$$

következik. A két feltétel együttesen:



A közös rész tehát

$$x \in] - \infty; -1[.$$

Összefoglalva, a két esetből kapott részmegoldásokat azt kapjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása

$$x \in] - \infty; -1[\cup \left[\frac{3}{2}; \infty \right[.$$

144. Feladat. Egy vállalkozás nyeresége (millió euróban) az

$$N(x) = -x^2 + 5x - 4$$

függvénnyel írható le, ahol x az eladott termékek számát jelöli száz darabos egységekben. Milyen x értékekre nem veszteséges a vállalkozás?

Megoldás:

A vállalkozás akkor nem veszteséges, ha a nyereség nemnegatív, azaz

$$N(x) \geq 0.$$

Tehát a $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldani. Ehhez először meghatározzuk a $-x^2 + 5x - 4$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk a

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

egyenletet. Mindkét oldalt -1 -gyel szorozva azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

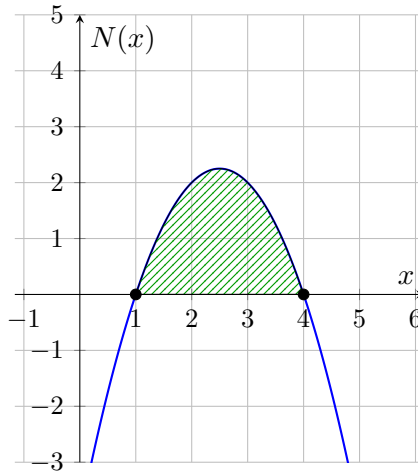
A megoldóképlet segítségével

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

így

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Mivel a négyzetes tag együtthatója negatív, ezért a parabola „lefelé” nyílik:



Mivel x az eladott mennyiséget jelöli száz darabos egységekben, a vállalkozás akkor nem veszteséges, ha

$$x \in [1; 4],$$

azaz 100 és 400 darab termék közötti eladás esetén.

145. Feladat. Egy kávézó csészénként 4 euróért értékesít kávéját. Egy csésze előállítási költsége 1,2 euró, a havi fix költség pedig 1800 euró. Legalább hány csésze kávé kell eladni havonta ahhoz, hogy a nyereség ne legyen negatív?

Megoldás:

Jelölje x a havonta eladott csészék számát.

A bevétel ekkor

$$B(x) = 4x,$$

az összköltség pedig

$$K(x) = 1,2x + 1800.$$

A nyereség a bevétel és a költség különbsége:

$$N(x) = B(x) - K(x) = 4x - (1,2x + 1800) = 2,8x - 1800.$$

Azt várjuk, hogy a nyereség ne legyen negatív, vagyis

$$N(x) \geq 0 \iff 2,8x - 1800 \geq 0.$$

Ezt az egyenlőtlenséget megoldva

$$2,8x \geq 1800 \iff x \geq \frac{1800}{2,8} \approx 642,86$$

adódik. Mivel x a csészek számát jelöli, egész számnak kell lennie, és felfelé kell kerekítenünk, ezért

$$x \geq 643.$$

Tehát a kávézónak havonta legalább 643 csésze kávé kell eladnia ahhoz, hogy ne legyen veszteséges.

5. fejezet

Függvények

5.1. Függvények tulajdonságai

Elméleti összefoglaló

Függvényen egyértelmű hozzárendelést értünk. Az egyértelmű azt jelenti, hogy minden x valós számhoz legfeljebb egy y értéket rendelhetünk hozzá.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *értelmezési tartományán* a

$$D_f = \{x \in D \mid y = f(x)\}$$

halmazt értjük.

Például az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény értelmezési tartománya $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tegyük fel, hogy n tetszőleges természetes szám! Az

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

függvény értelmezési tartománya: $x \in [0; \infty[$.

Tegyük fel, hogy a tetszőleges, 1-től különböző pozitív valós szám! Ekkor az $f(x) = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[$.

Tegyük fel, hogy a tetszőleges pozitív valós szám!

Az $f(x) = \log_x a$ függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[\setminus \{1\}$.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *értékkészletén* az

$$R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$$

halmazt értjük.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékkészlete az $f(x)$ függvényértékek halmaza.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen *zérushelye* van, ha $f(x_0) = 0$.

A zérushely meghatározása egy egyenlet megoldását jelenti. A függvény hozzárendelési szabályát egyenlővé kell tenni nullával és meg kell oldani a kapott egyenletet!

Például az $f(x) = x^2 - 4$ függvény zérushelye az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet megoldása, azaz $x = \pm 2$.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$;

- *monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

Legyen a D halmaz szimmetrikus az origóra, ami azt jelenti, hogy ha $x \in D$, akkor $-x \in D$. Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ teljesül minden $x \in D$ esetén;
- *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in D$ esetén.

Ha egy függvény páros, akkor a grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ha egy függvény páratlan, akkor a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Például az $f(x) = x^2$ függvény páros, az $f(x) = x^3$ függvény páratlan.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

- *alulról korlátos*, ha az értékkészlete alulról korlátos;
- *felülről korlátos*, ha az értékkészlete felülről korlátos;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *maximuma* van, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legkisebb eleme;
- *szélsőértéke* van, ha minimuma vagy maximuma van az x_0 helyen.

Kidolgozott feladatok

146. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{6 - 2x}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$6 - 2x \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \leq 3$, így az értelmezési tartomány $a] - \infty; 3]$ intervallum.

147. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt[4]{2x + 4}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a

$$2x + 4 \geq 0$$

egyenlőtlenséget, amiből azt kapjuk, hogy $x \geq -2$, így az értelmezési tartomány $a [-2; \infty[$ intervallum.

148. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \log_2(x^2 - 7x + 10)$ függvény értelmezve van!

Megoldás:

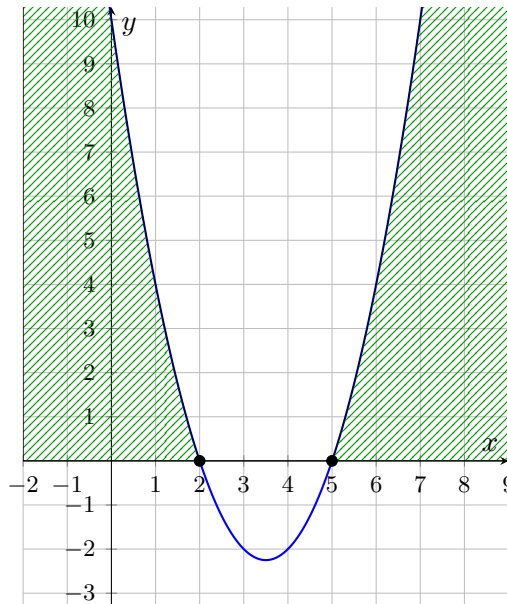
A logaritmusfüggvény csak akkor értelmezett, ha az argumentuma pozitív, azaz

$$x^2 - 7x + 10 > 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásához először meghatározzuk az $x^2 - 7x + 10$ függvény zérushelyeit, azaz megoldjuk az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenletet. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$. A parabola „felfelé nyílik”, mert a négyzetes tag pozitív, ezért vázlatosan felrajzolva, jelölve a zérushelyeit, az alábbi ábrát kapjuk:



A függvény azokon az intervallumokon pozitív, ahol a grafikonja az x -tengely felett van, azaz

$$D_f: x \in]-\infty; 2[\cup]5; \infty[.$$

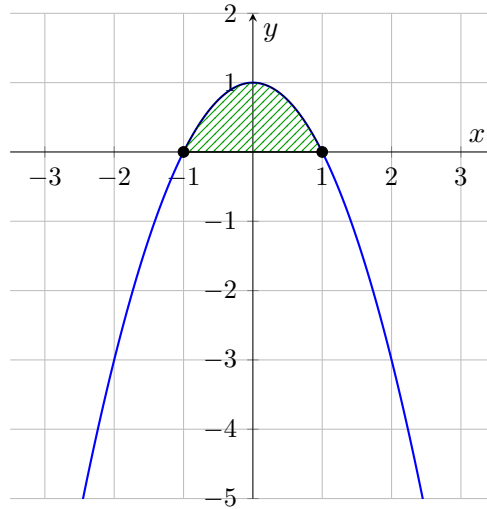
149. **Feladat.** Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel páros gyökkitevőjű gyök alatt csak pozitív szám állhat, ezért az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a $1 - x^2 \geq 0$ egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenséget grafikusán oldjuk meg. Ehhez első lépésben meghatározzuk az $1 - x^2$ függvény zérushelyeit, azaz meg kell oldanunk az $1 - x^2 = 0$ egyenletet, amire azt kapjuk, hogy $x^2 = 1$, azaz $x = \pm 1$. Ezután felvázoljuk az $1 - x^2$ függvény grafikonját:



Leolvashatjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása és így egyben az f függvény értelmezési tartománya:

$$D_f: x \in [-1; 1].$$

150. Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 4x$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk az $x^2 - 4x = 0$ egyenletet. Ha x -et kiemeljük, akkor azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x - 4) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\begin{array}{ccc}
 & x \cdot (x - 4) = 0 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 x = 0 & & x - 4 = 0 \\
 x_1 = 0 & & x_2 = 4
 \end{array}$$

Tehát a megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

151. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x} - 3$ függvény zérushelyét!

Megoldás:

Meg kell oldanunk a $\sqrt{x} - 3 = 0$ egyenletet.

Hozzáadva a 3-at mindkét oldalhoz azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x} = 3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve $x = 9$ adódik.

5.2. Függvénytranszformációk

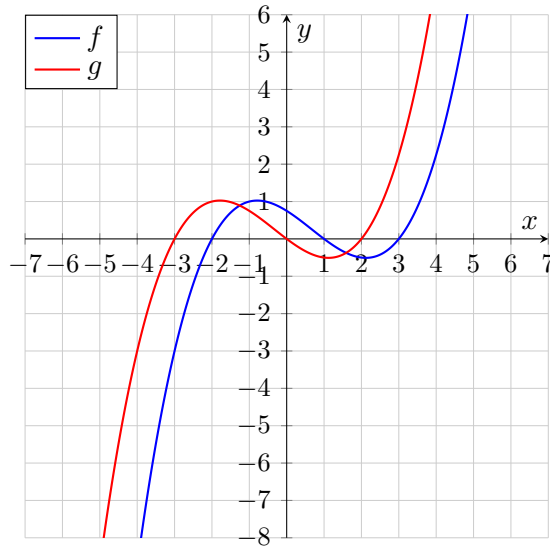
Elméleti összefoglaló

Ebben a szakaszban $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény!

Tétel. Ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $x + c \in D_f$, akkor $f(x + c)$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(-c; 0)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja balra, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja jobbra tolódik c -vel

Példa. Tekintsük az alábbi grafikkal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(x + 1)$ függvényt közös koordináta-rendszerben az f -fel, és figyeljük meg az eltolást!

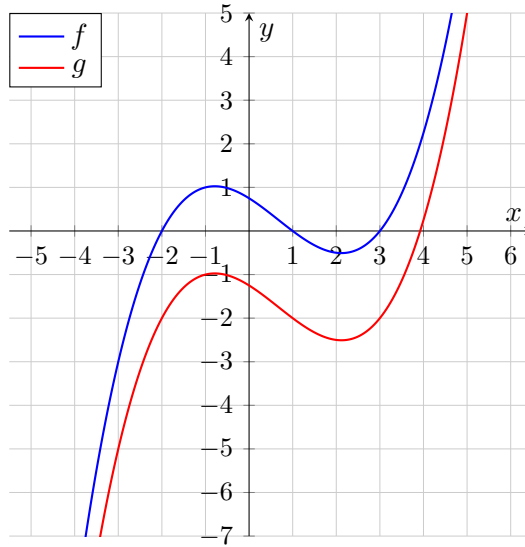
Itt $g(x) = f(x + 1)$ azt jelenti, hogy az f grafikonja 1 egységgel balra tolódik.



Tétel. Ha $c \in \mathbb{R}$, akkor $f(x) + c$ grafikonja az f függvény grafikonjának a $(0; c)$ vektorral való eltolása, azaz ha c pozitív valós szám, akkor a függvény grafikonja felfelé, ha c negatív valós szám, akkor a függvény grafikonja lefelé tolódik c -vel.

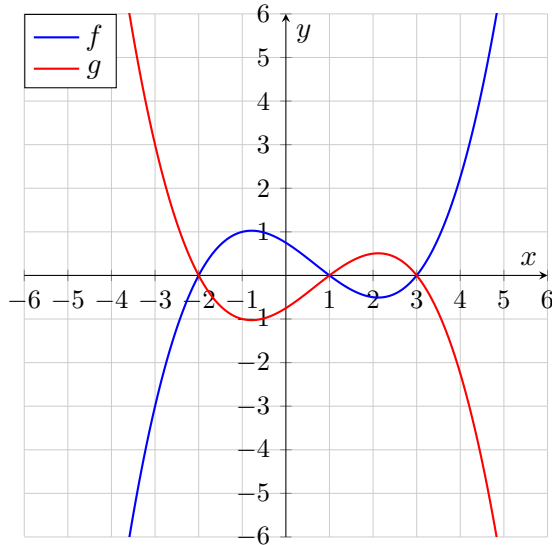
Példa. Tekintsük az alábbi grafikkal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(x) - 2$ függvényt közös koordináta-rendszerben az f függvényvel!

A $g(x) = f(x) - 2$ a grafikon 2 egységgel lefelé tolását jelenti.



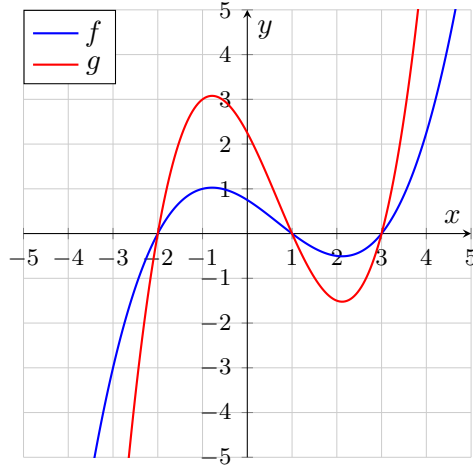
Tétel. A $-f$ függvény grafikonja az f függvény grafikonjának x -tengelyre tükrözése.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = -f(x)$ függvényt közös koordináarendszerben az f -fel!



Tétel. Ha $a > 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a -szoros nyújtása.

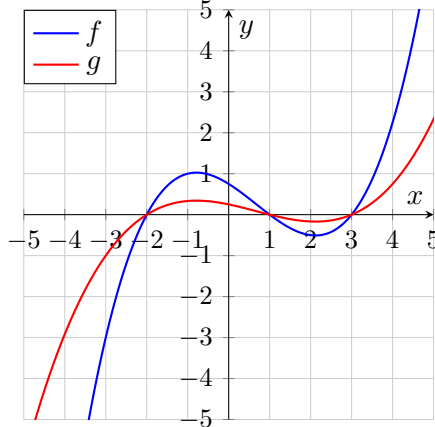
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = 3f(x)$ függvényt! A $g(x) = 3f(x)$ az f grafikonjának háromszoros függőleges nyújtását jelenti.



Tétel. Ha $0 < a < 1$, akkor $a \cdot f$ grafikonja az f grafikonjának a -szoros zsugorítása.

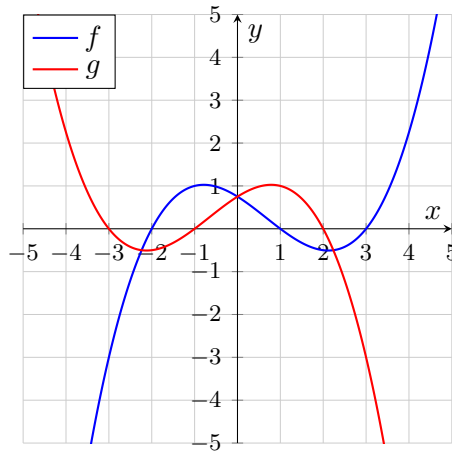
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ függvényt!

A $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$ az f grafikonjának $\frac{1}{3}$ -szoros függőleges zsugorítását jelenti.



Tétel. Ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, akkor $f(-x)$ az f grafikonjának y -tengelyre való tükrözése.

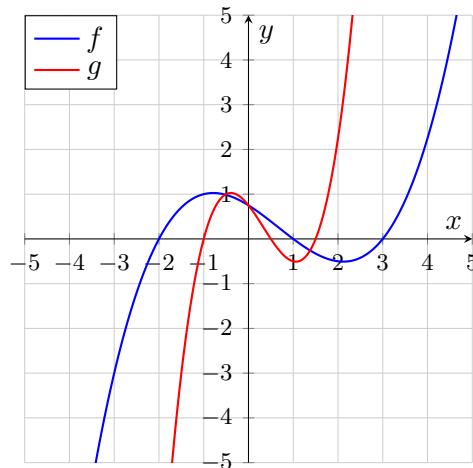
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(-x)$ függvényt!



Tétel. Ha $a > 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$ -szoros zsugorítása.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(2x)$ függvényt!

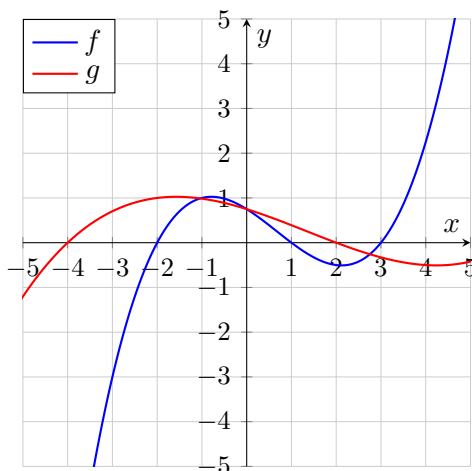
A $g(x) = f(2x)$ az f grafikonjának $\frac{1}{2}$ -szeres vízszintes zsugorítását jelenti.



Tétel. Ha $0 < a < 1$ olyan valós szám, hogy $x \cdot a \in D_f$, akkor $f(a \cdot x)$ grafikonja az f grafikonjának $\frac{1}{a}$ -szoros nyújtása.

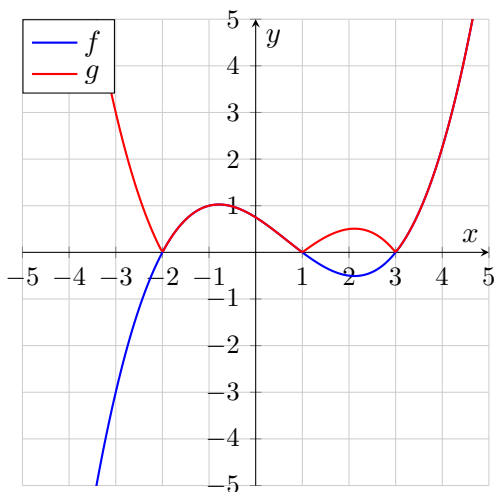
Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ függvényt!

A $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ az f grafikonjának kétszeres vízszintes nyújtását jelenti.



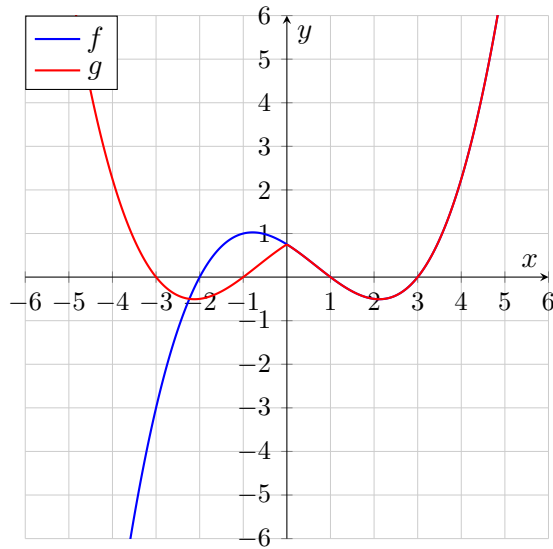
Tétel. Az $|f|$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy az x tengely alatti részt (vagyis a negatív függvényértékeket) tükrözzük az x tengelyre.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = |f(x)|$ függvényt!



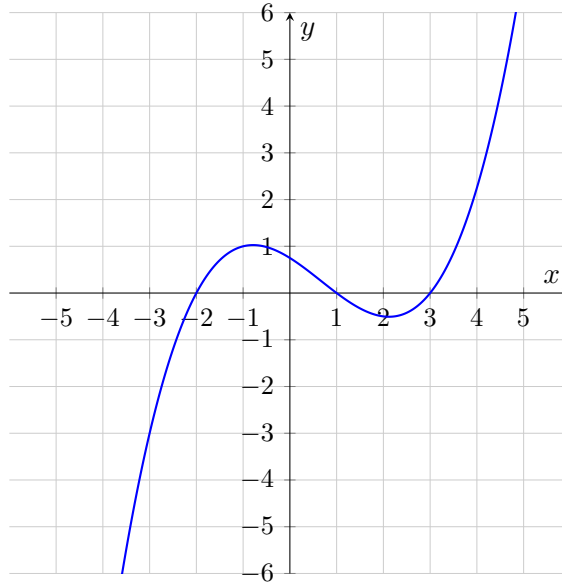
Tétel. Ha $x \in D_f$ esetén $|x| \in D_f$, akkor $f(|x|)$ grafikonja az f grafikonjából úgy kapható meg, hogy a pozitív számokhoz tartozó függvényértékeket tükrözzük az y tengelyre.

Példa. Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt! Ábrázoljuk a $g(x) = f(|x|)$ függvényt!



Kidolgozott feladatok

152. **Feladat.** Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:



Ábrázoljuk először a

$$g(x) = f(x + 4)$$

függvényt, majd ezt követően a

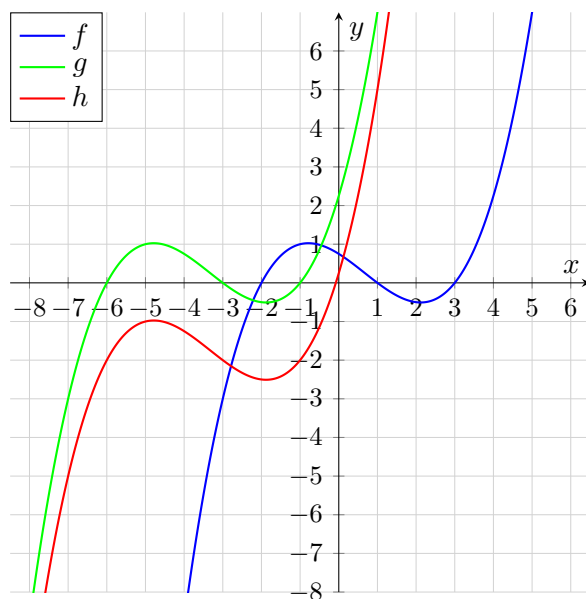
$$h(x) = f(x + 4) - 2$$

függvényt közös koordináta-rendszerben! Fogalmazzuk meg szóvegesen is, hogy milyen irányú és hány egységgel való eltolást jelent a g függvény grafikonja az f függvény grafikonjához képest! Ugyanígy, fogalmazzuk meg szóvegesen, hogy milyen irányú és hány egységgel való eltolást jelent a h függvény grafikonja a g függvény grafikonjához képest!

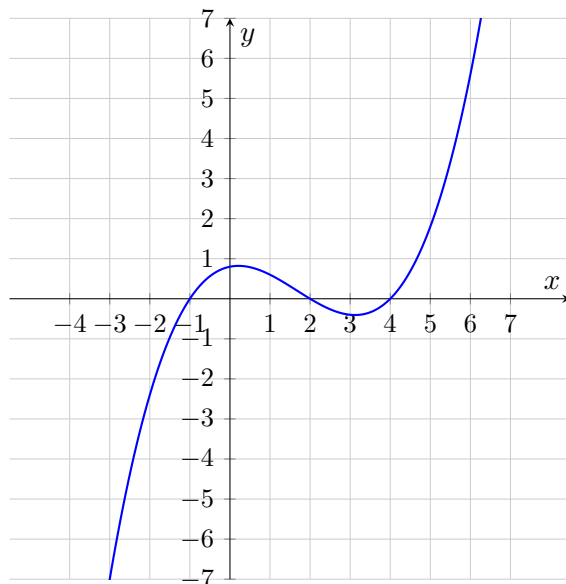
Megoldás:

A $g(x) = f(x + 4)$ esetében 4 egységgel balra tolódik az f függvény grafikonja.

A $h(x) = g(x) - 2 = f(x + 4) - 2$ esetében 2 egységgel lefelé tolódik a g függvény grafikonja:



153. **Feladat.** Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:

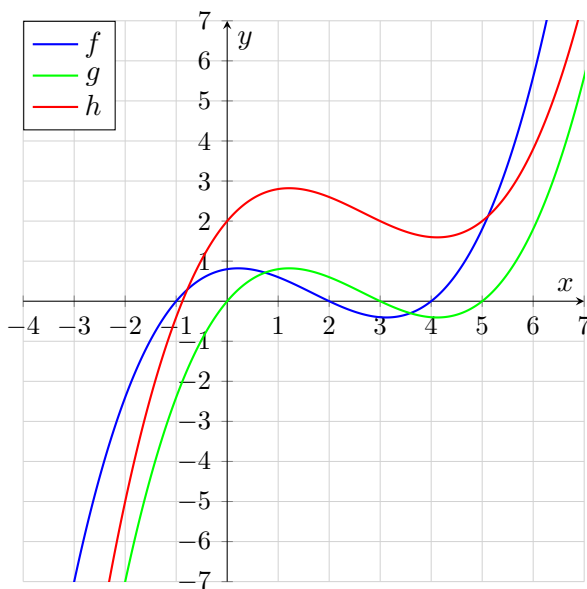


Ábrázoljuk először a $g(x) = f(x-1)$, majd ezt követően a $h(x) = f(x-1)+2$ függvényt!

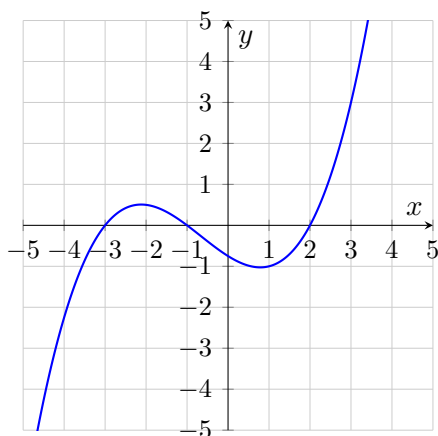
Megoldás:

A $g(x) = f(x - 1)$ esetében 1 egységgel jobbra tolódik az f függvény grafikonja.

A $h(x) = g(x) + 2 = f(x - 1) + 2$ esetében 2 egységgel felfelé tolódik a g függvény grafikonja:



154. **Feladat.** Tekintsük az alábbi grafikonnal definiált f függvényt:



Ábrázoljuk először a $g(x) = -3 \cdot f(x)$, majd ezt követően a

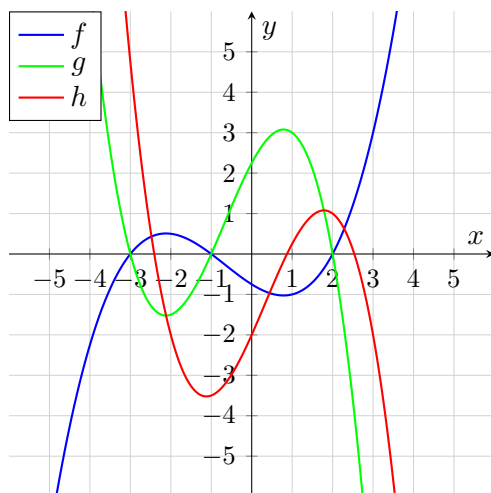
$$h(x) = g(x - 1) - 2 = -3 \cdot f(x - 1) - 2$$

függvényt!

Megoldás:

A $g(x) = -3 \cdot f(x)$ esetében a grafikon az x -tengelyre tükröződik és 3-szorosára nyúlik függőlegesen.

A $h(x) = g(x - 1) - 2 = -3 \cdot f(x - 1) - 2$ függvény esetében 1 egységgel jobbra tolódik az f függvény grafikonja, majd az 2 egységgel lefelé tolódik:



5.3. Elemi függvények és grafikonjaik

Elméleti összefoglaló

Elsőfokú függvények. Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvényt *elsőfokú függvénynek* nevezzük, ahol m -et a függvény *meredekségének* mondjuk.

Az elsőfokú függvények grafikonja egyenes.

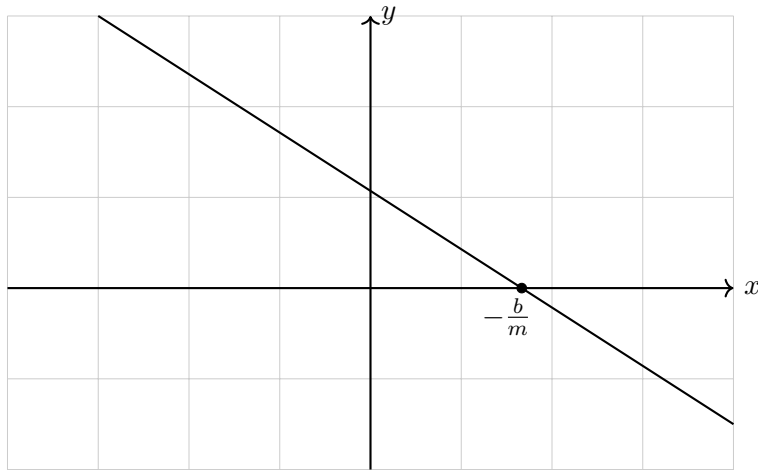
A függvénynek egyetlen zérushelye van: $-\frac{b}{m}$.

A függvény nem korlátos.

Ha $m > 0$, akkor szigorúan monoton növekvő, ha $m < 0$, akkor szigorúan monoton csökkenő, ha $m = 0$, akkor a függvény konstans.

Ha $b = 0$, akkor a függvény páratlan. Ha $b \neq 0$, akkor nem páros, nem páratlan.

Példa. Az alábbi ábra mutatja az $f(x) = mx + b$ függvény grafikonját $m < 0$ esetén:



Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

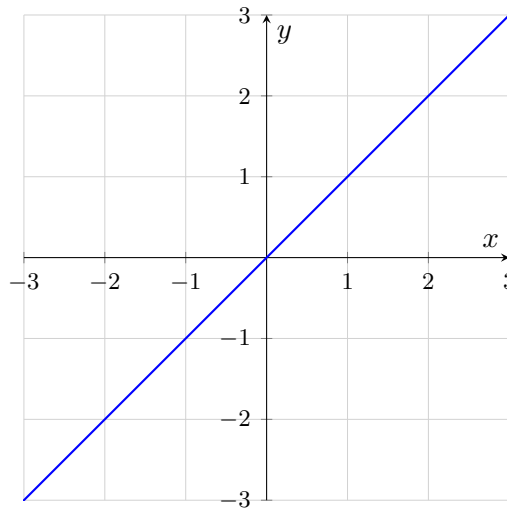
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R}$.
- d) Zérushely: $x = 0$.
- e) A függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos.
Nincs minimuma, nincs maximuma.
- f) A függvény szigorúan monoton növekvő.
- g) A függvény páratlan, mert a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

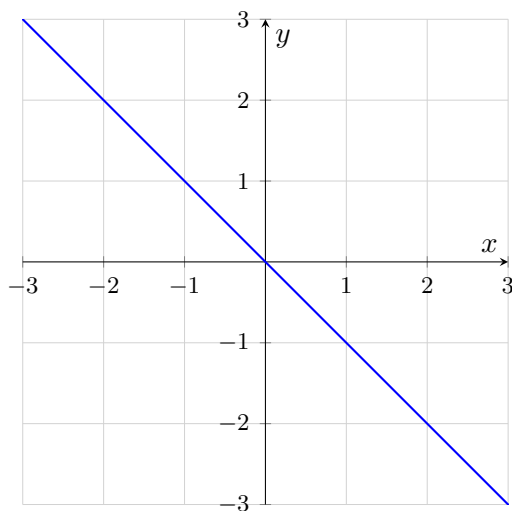
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

d) Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R}$.

- e) Zérushely: $x = 0$.
- f) A függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos, nincs minimuma és nincs maximuma.
- g) A függvény szigorúan monoton csökkenő.
- h) A függvény páratlan, mert $f(-x) = -(-x) = x = -f(x)$, illetve a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Másodfokú függvények. Legyen $a \neq 0$ tetszőleges valós szám, továbbá b és c tetszőleges valós számok. Az $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ függvényt *másodfokú függvénynek* nevezzük.

A másodfokú függvény grafikonját *parabolának* hívjuk.

Ha $a > 0$, akkor a parabolának minimuma van.

Ha $a < 0$, akkor a parabolának maximuma van.

A parabola egyenlete átírható

$$f(x) = a \cdot (x - u)^2 + v$$

alakra, amit *tengelyponti alaknak* is hívunk. Ebben az alakban a parabola tengelypontja (csúcspontja), ami egyben a szélsőértéke is

$$T = (u; v),$$

ahol

$$u = -\frac{b}{2a}.$$

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt!

- a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

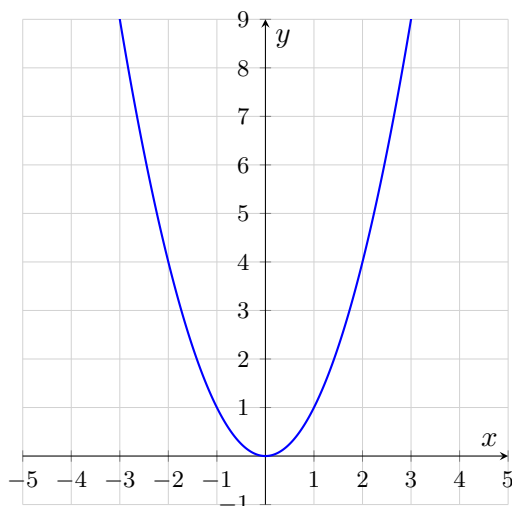
- b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Adjuk meg a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 0$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Minimuma van. Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = 0$.

f) Szigorúan monoton csökkenő a $] -\infty; 0]$ intervallumon, és szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.

g) A függvény páros, mert a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

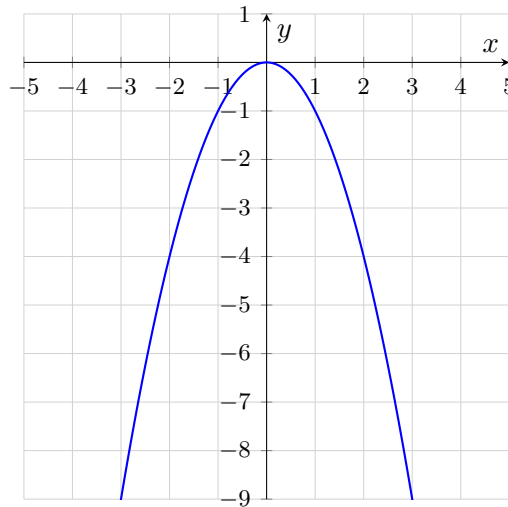
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Adjuk meg a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- d) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 0]$.
- e) Zérushely: $x = 0$.
- f) Felülről korlátos, alulról nem korlátos.
- g) A $] -\infty; 0]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

- h) A függvény páros, mert $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$, a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Négyzetgyök függvények. Azokat a függvényeket, amelyek leképezési szabályában négyzetgyökös kifejezés szerepel *négyzetgyök függvények*nek nevezzük.

A legegyszerűbb gyökfüggvény az $f(x) = \sqrt{x}$.

Példa. Tekintsük az $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ függvényt!

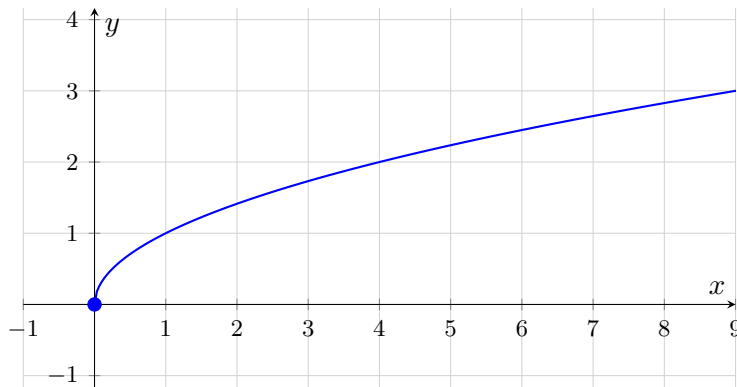
- Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az $x = 0, 1, 4, 9$ helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!
- Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- Határozzuk meg a zérushelyet!
- Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0; \infty[$.

Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 0$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Minimuma van. Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = 0$.

f) Szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.

Abszolútérték függvények. Azokat a függvényeket, amelyek leképezési szabályában abszolútérték szerepel, *abszolútérték függvényeknek* nevezzük.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Határozzuk meg a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

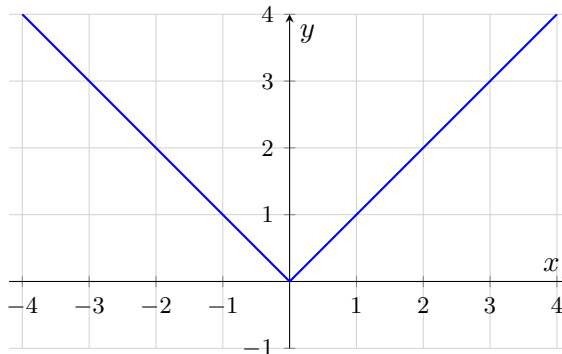
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	3	2	1	0	1	2	3	4

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 0$.

e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Minimuma van. Minimumhely $x = 0$, minimumérték $y = 0$.

f) Szigorúan monoton csökkenő a $] - \infty; 0]$ intervallumon.

Szigorúan monoton növekvő a $[0; \infty[$ intervallumon.

g) Páros, mert a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre. Ez algebrailag azt jelenti, hogy

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Határozzuk meg a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

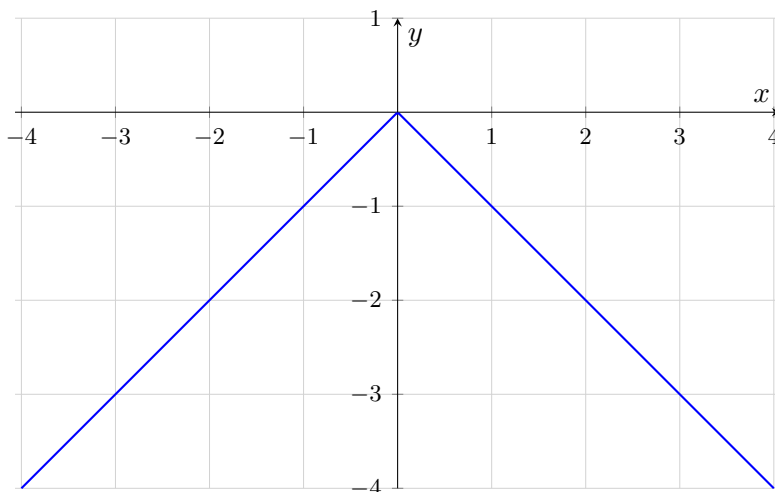
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	-1	-2	-3

b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- d) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 0]$.
- e) Zérushely: $x = 0$.
- f) Felülről korlátos, alulról nem korlátos.
- g) A $] -\infty; 0]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- h) Páros, mert $f(-x) = -|-x| = -|x| = f(x)$, a grafikon tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre.

Exponenciális függvények. Legyen a tetszőleges, 1-től különböző valós szám. Az

$$f(x) = a^x$$

alakú függvényeket *exponenciális függvényeknek* nevezzük.

Ha $a > 0$, akkor az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő.

Ha $a < 0$, akkor az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az $f(x) = a^x$ függvénynek nincs zérushelye.

Az $f(x) = a^x$ függvénynek nincs szélsőértéke.

Az $f(x) = a^x$ függvény nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Adjuk meg a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

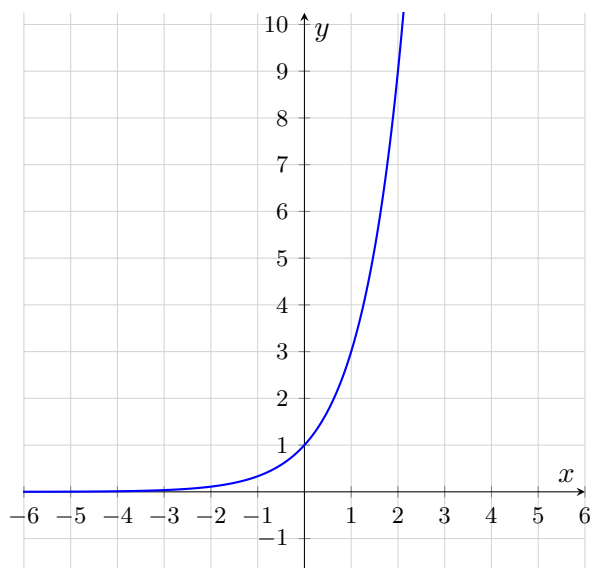
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-3	-2	-1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in]0; \infty[$.

d) Zérushely: nincs.

e) Alulról korlátos.

Nincs minimuma, nincs maximuma.

f) Szigorúan monoton növekvő.

g) Nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushelyet, ha van!

e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!

f) Jellemezzük monotonitás szerint!

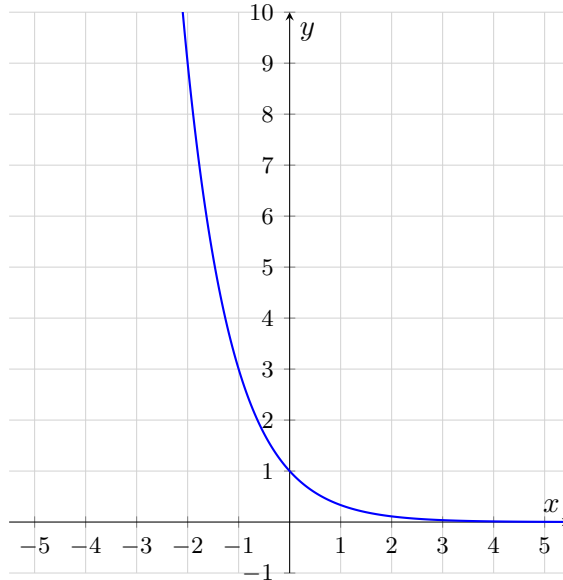
g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

b) A függvény grafikonja:



c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

Értékkészlet: $R_f: y \in]0; \infty[$.

d) Zérushely: nincs.

e) A függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos.

Nincs minimuma, nincs maximuma.

f) Szigorúan monoton csökkenő.

g) Nem páros nem páratlan.

Logaritmikus függvények. Legyen a tetszőleges, 1-től különböző, pozitív valós szám. Az

$$f(x) = \log_a x$$

alakú függvényeket *logaritmikus függvényeknek* nevezzük.

Ha $a > 0$, akkor az $f(x) = \log_a x$ logaritmikus függvény szigorúan monoton növekvő.

Ha $a < 0$, akkor az $f(x) = \log_a x$ logaritmikus függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek egyetlen zérushelye $x = 1$.

Az $f(x) = \log_a x$ függvénynek nincs szélsőértéke.

Az $f(x) = \log_a x$ függvény nem páros, nem páratlan.

Példa. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

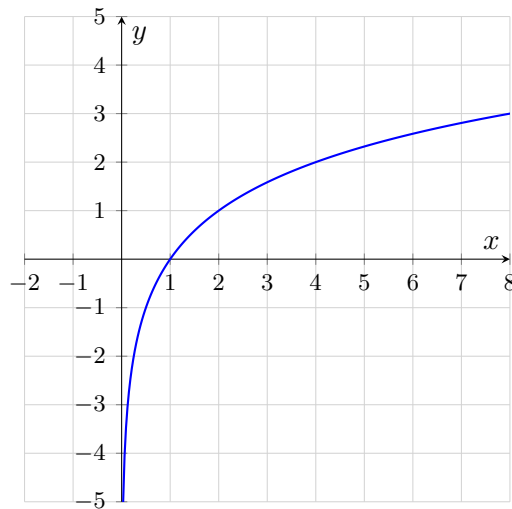
b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b) A függvény grafikonja:



Példa. Tekintsük az $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

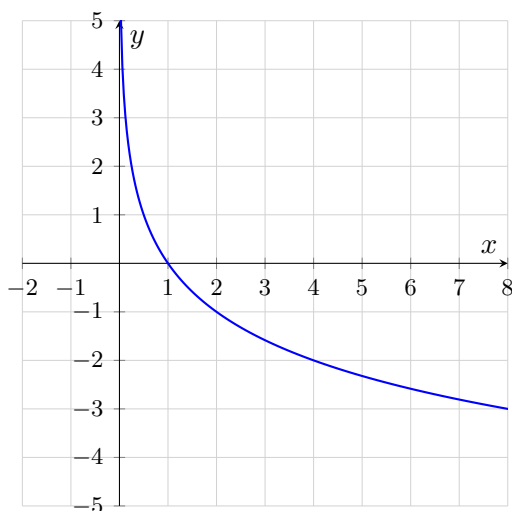
b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az értéktáblázat:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

b) A függvény grafikonja:



Törtfüggvények. Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, hogy $c \cdot x + d \neq 0$. Az

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$$

függvényeket *elsőfokú törtfüggvényeknek* nevezzük.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt!

a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!

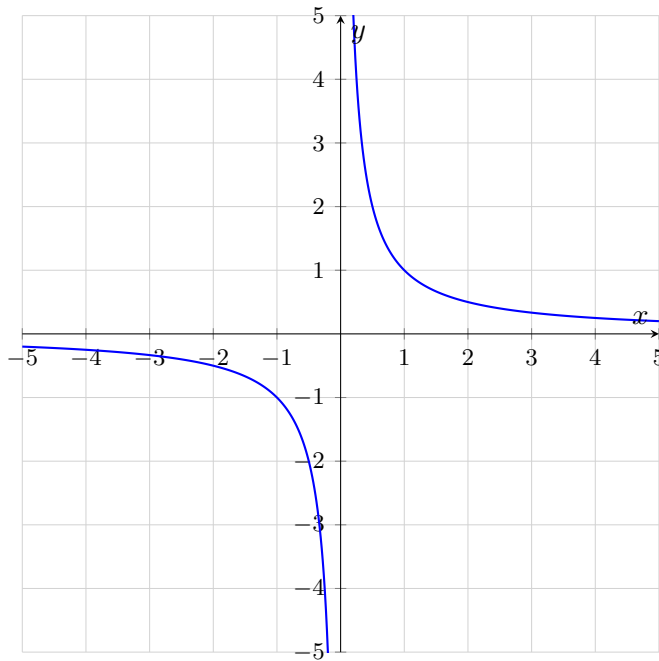
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet, ha van!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- d) Zérushely: nincs, mert az $\frac{1}{x} = 0$ egyenletnek nincs megoldása.
- e) A függvény nem korlátos sem alulról, sem felülről.
- f) Nincs minimuma, nincs maximuma.
- g) Az $] -\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
 A $]0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- h) A függvény páratlan, mert a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Példa. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$ függvényt!

- a) Készítsük el a függvényértékek táblázatát úgy, hogy az

$$x = -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$$

helyeken számoljuk ki a függvényértékeket!

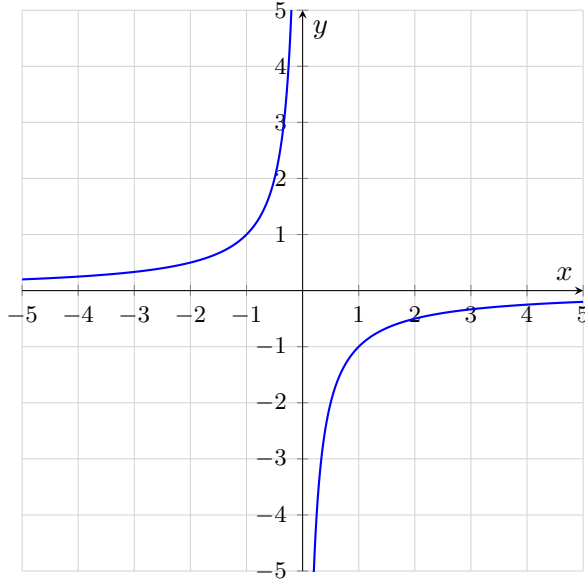
- b) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- c) Adjuk meg az értelmezési tartományt és értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet, ha van!
- e) Jellemezzük korlátosság és szélsőérték szerint!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!
- g) Vizsgáljuk paritás szerint!

Megoldás:

- a) Az értéktáblázat:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

- b) A függvény grafikonja:



- c) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- d) Zérushely: nincs, mert $-\frac{1}{x} = 0$ egyenletnek nincs megoldása.
- e) A függvény nem korlátos sem alulról, sem felülről.
- f) Nincs minimuma, nincs maximuma.
- g) Az $] -\infty; 0[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
A $]0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
- h) A függvény páratlan, mert $f(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} = -f(x)$, a grafikonja szimmetrikus az origóra.

Kidolgozott feladatok.

155. **Feladat.** Tekintsük az

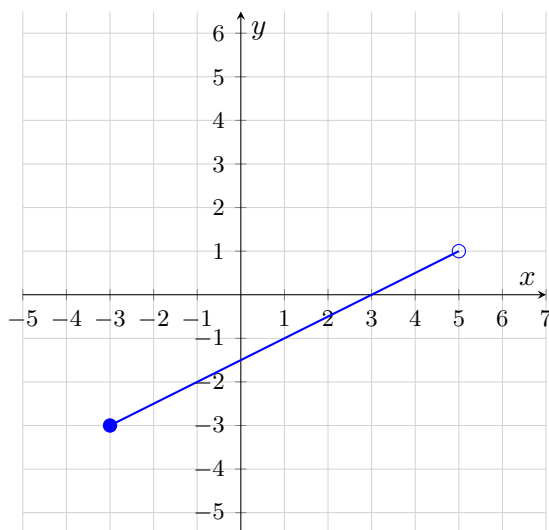
$$f: [-3; 5[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Olvassuk le a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-3; 5[$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-3; 1[$.
- d) A zérushely $x = 3$.

- e) A függvény alulról és felülől is korlátos, ezért korlátos.
- f) Minimumhely: $x = -3$, minimumérték: $y = -3$, maximuma nincs.
- g) Szigorúan monoton növekvő.

156. **Feladat.** Tekintsük az

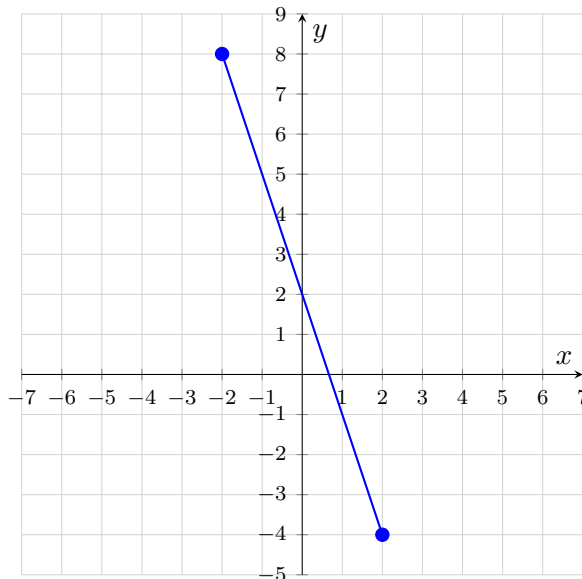
$$f: [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 2$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-2; 2]$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-4; 8]$.
 d) A zérushely a $-3x + 2 = 0$ egyenlet megoldása.

$$-3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Tehát a zérushely $x = \frac{2}{3}$.

- e) A függvény alulról és felülről is korlátos, ezért korlátos.
 f) Maximumhely: $x = -2$, maximumérték: $y = 8$.
 Minimumhely: $x = 2$, minimumérték: $y = -4$.
 g) Szigorúan monoton csökkenő a $[-2, 2]$ intervallumon.
 h) Nem páros, nem páratlan.

157. Feladat. Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes és illeszkedik az $A = (2; 5)$ és $B = (-3; 7)$ koordinátájú pontokra! Határozzuk meg a függvény zérushelyét!

Megoldás:

A keresett függvény grafikonja egyenes, így a függvényt

$$f(x) = m \cdot x + b$$

alakban keressük. Mivel az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(2) = m \cdot 2 + b \Rightarrow 5 = 2m + b.$$

Mivel a B pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(-3) = m \cdot (-3) + b \Rightarrow 7 = -3m + b.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az m és b ismeretleneket:

$$\left. \begin{array}{l} 2m + b = 5 \\ -3m + b = 7 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy

$$5m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$$

Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-\frac{4}{5} + b = 5 \Rightarrow b = \frac{29}{5}.$$

A keresett függvény tehát:

$$f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{29}{5}.$$

A függvény zérushelye:

$$-\frac{2}{5}x + \frac{29}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{29}{2} = 14,5.$$

158. Feladat. Tekintsük a síkon az $A = (1; 4)$ és $B = (5; -2)$ pontokat!

- Adjuk meg azt a függvényt, amelynek grafikonja egyenes és illeszkedik az A és B pontokra!
- Határozzuk meg a függvény zérushelyét!
- Ábrázoljuk a függvényt!

Megoldás:

- A keresett függvény grafikonja egyenes, így a függvényt

$$f(x) = m \cdot x + b$$

alakban keressük. Mivel az A pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(1) = m \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad 4 = m + b.$$

Mivel a B pont illeszkedik a függvény grafikonjára, ezért

$$f(5) = m \cdot 5 + b \quad \Rightarrow \quad -2 = 5m + b.$$

A fenti két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk meg az m és b ismeretleneket:

$$\left. \begin{array}{l} m + b = 4 \\ 5m + b = -2 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy

$$-4m = 6 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{3}{2}.$$

Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe:

$$-\frac{3}{2} + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{11}{2}.$$

A keresett függvény hozzárendelési szabálya tehát

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}.$$

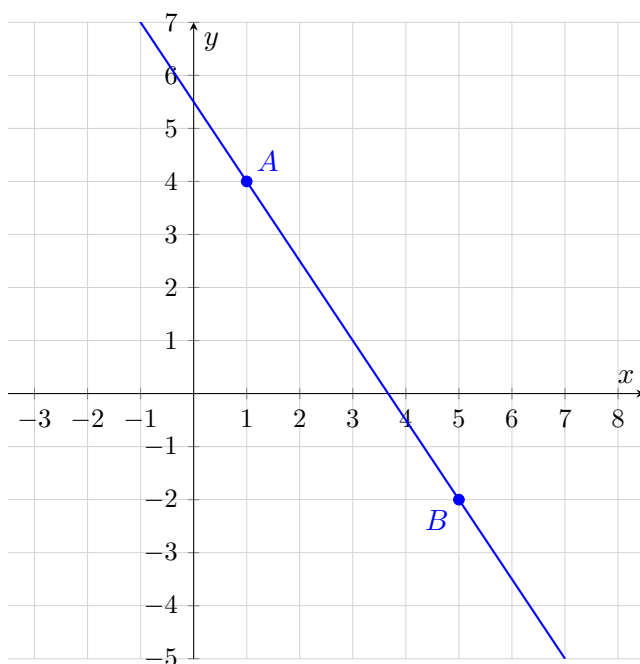
b) A függvény zérushelye az

$$-\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} = 0$$

egyenlet megoldása. Mindkét oldalt 2-vel szorozva, majd az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$-3x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{3} \approx 3,67.$$

c) A függvény grafikonja:



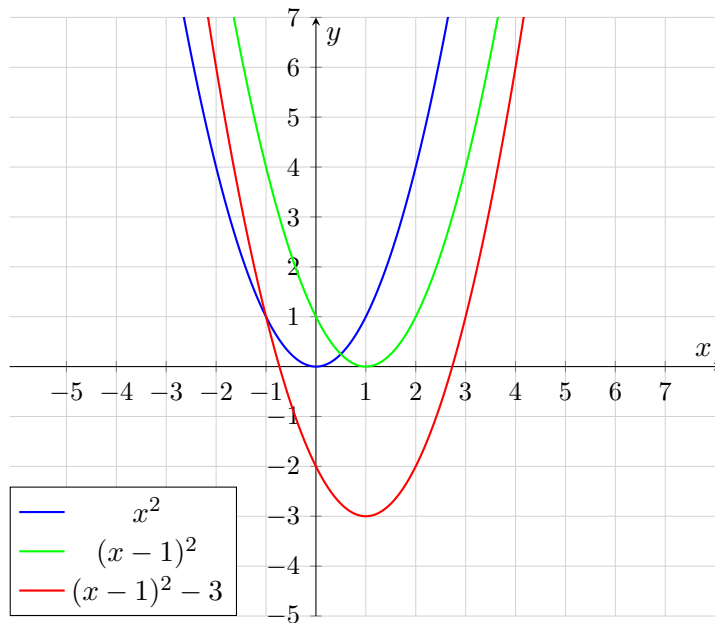
159. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ függvényt!

- Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az x^2 , $(x - 1)^2$ és $(x - 1)^2 - 3$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!

- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
 h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-3; \infty[$.
 d) A zérushelyhez megoldjuk az $f(x) = 0$ egyenletet. Mivel $(x-1)^2 - 3 = 0$, ezért $(x-1)^2 = 3$, így $x-1 = \pm\sqrt{3}$. Ezekből

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \text{ illetve } x_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

 e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
 f) Szélsőérték típusa: minimum, minimumhelye $x = 1$ -nél van, minimumérték $y = -3$.
 g) A $] -\infty; 1]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, $[1; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.
 h) Nem páros, nem páratlan.

160. **Feladat.** Tekintsük az

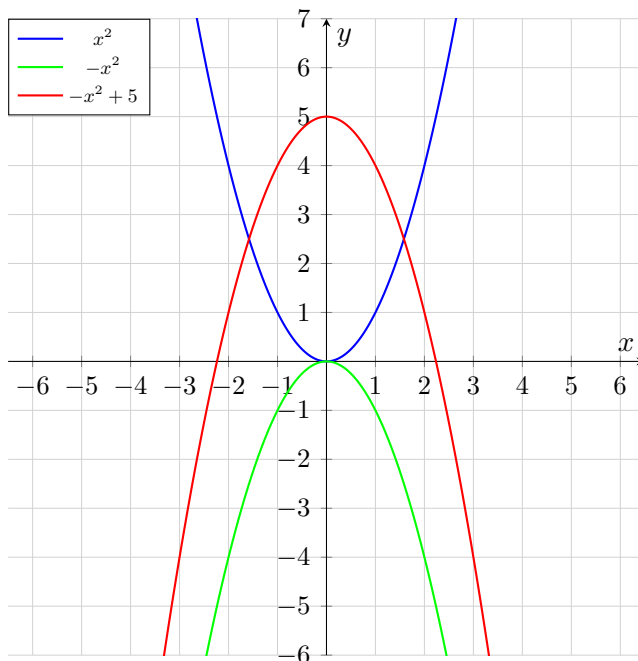
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -x^2 + 5$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben: legyen az x^2 , $-x^2$ és $-x^2 + 5$ is ábrázolva!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in] - \infty; 5]$.
- d) A zérushelyek az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai. Mivel $f(x) = -x^2 + 5$, ezért a $-x^2 + 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mindkét oldalhoz 5-öt hozzáadva azt kapjuk, hogy

$$x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}.$$

- e) A függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.
- f) Maximuma van. Maximumhely: $x = 0$, maximumérték: $y = 5$.
- g) A $] - \infty; 0]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[0; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- h) Paritás: páros, mert

$$f(-x) = -(-x)^2 + 5 = -x^2 + 5 = f(x).$$

161. **Feladat.** Tekintsük az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 + 3$$

függvényt!

- a) Rajzoljuk fel az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, vagyis az

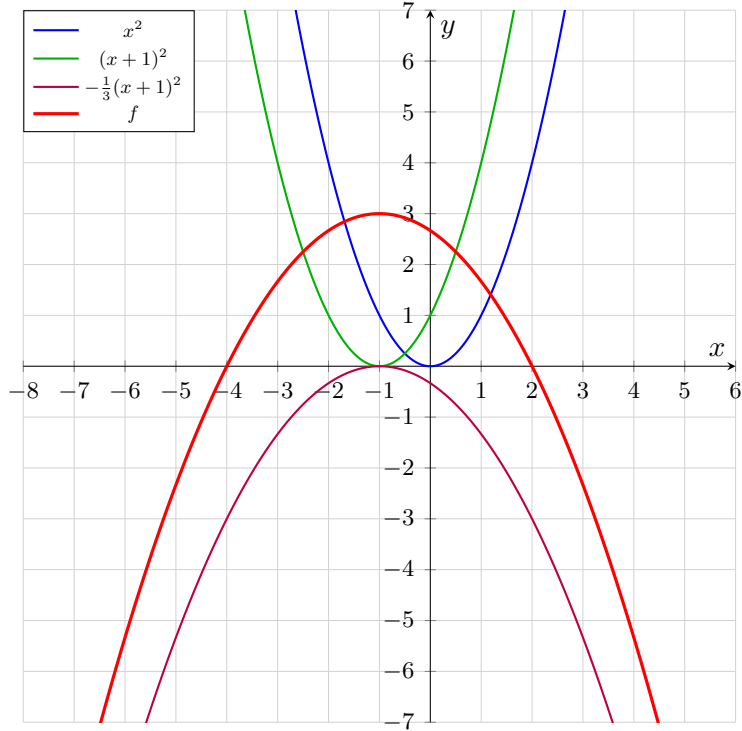
$$x^2, \quad (x+1)^2, \quad -\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2, \quad -\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 + 3$$

függvények is legyenek ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 3]$.

d) A zérushelyek meghatározásához az $f(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk.

Mivel $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 + 3$, ezért a megoldandó egyenlet

$$-\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 + 3 = 0.$$

Mindkét oldalból 3-at kivonva, majd az egyenlet mindkét oldalát -3 -mal szorozva azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{3} \cdot (x+1)^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 9,$$

így $x+1 = 3$, illetve $x+1 = -3$ adódik. Ezeket megoldva azt kapjuk, hogy

$$x_1 = 2 \text{ illetve } x_2 = -4.$$

- e) A függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos.
- f) Maximuma van, maximumhely: $x = -1$, maximumérték: $y = 3$.
- g) Monotonitás: a $] -\infty; -1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, a $[-1; \infty[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.
- h) Paritás: nem páros, nem páratlan.

162. **Feladat.** Egy adott terméket gyártó cég nyereségét (euróban) a

$$P(x) = -25x^2 + 1\,500x - 14\,000$$

másodfokú függvény írja le, ahol x a darabonkénti eladási ár (euróban). Határozzuk meg azt az egységárat, amely a lehető legnagyobb profitot eredményezi, valamint adjuk meg a maximális nyereség értékét!

Megoldás:

A nyereséget megadó függvény parabola, melynek maximumhelye az

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a}.$$

Nekünk $a = -25$, $b = 1\,500$, ezért

$$x_{\max} = \frac{-1\,500}{2 \cdot (-25)} = \frac{-1500}{-50} = 30.$$

Tehát a maximális profitot adó eladási ár: 30 euró/darab.

Mivel

$$P(30) = -25 \cdot 30^2 + 1\,500 \cdot 30 - 14\,000 = 8\,500,$$

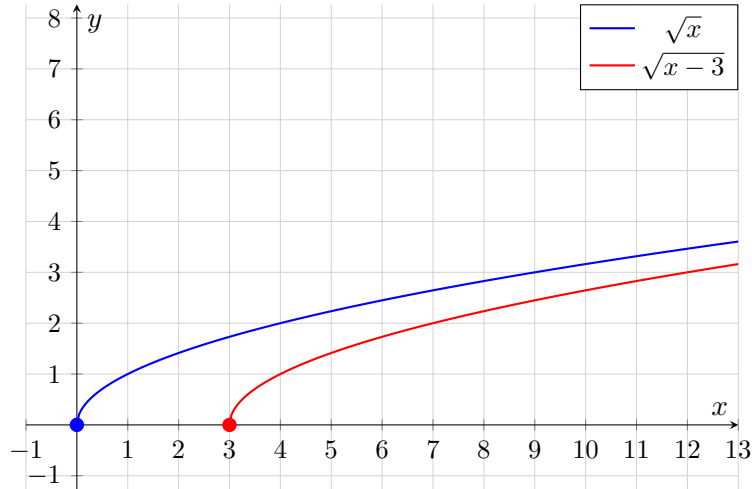
ezért a maximális profit 8 500 euró.

163. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x-3}$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, vagyis legyen a $\sqrt{x}$ és $\sqrt{x-3}$ is ábrázolva!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [3; \infty[$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in [0; \infty[$.

d) Zérushely: $x = 3$.

e) Alulról korlátos. Felülről nem korlátos.

f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 3$. Minimumérték: $y = 0$.

g) Szigorúan monoton növekvő.

164. Feladat. Tekintsük $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2} - 3$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, vagyis legyen a $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+2}$, $3 \cdot \sqrt{x+2}$, $3 \cdot \sqrt{x+2} - 3$ is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!

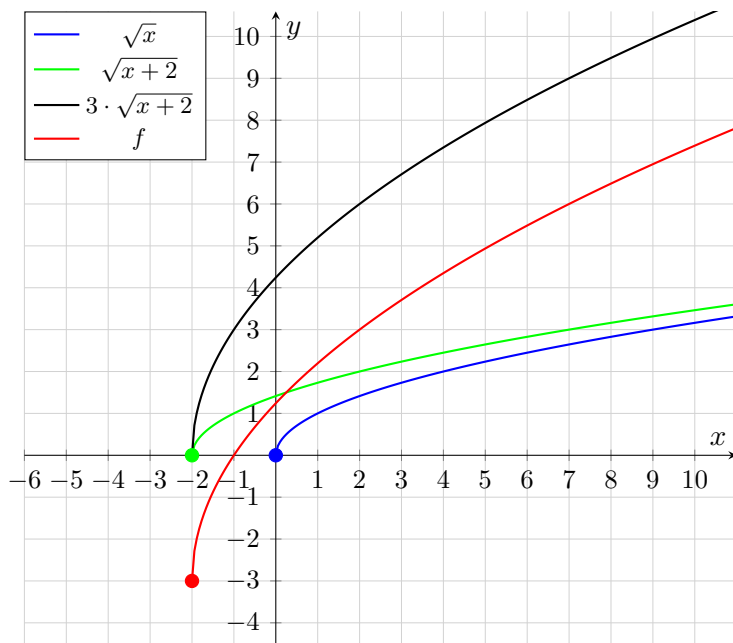
e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikon és a lépések:

b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-2; \infty[$.c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-3; \infty[$.d) Zérushely: $3 \cdot \sqrt{x+2} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Rightarrow x = -1$.

e) Alulról korlátos. Felülről nem korlátos.

f) Minimuma van. Minimumhely: $x = -2$. Minimumérték: $y = -3$.

g) Szigorúan monoton növekvő.

165. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = -\sqrt{x} + 2$ függvényt a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazán, amelyen a függvény értelmezve van!a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen a $\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$, $-\sqrt{x} + 2$ is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

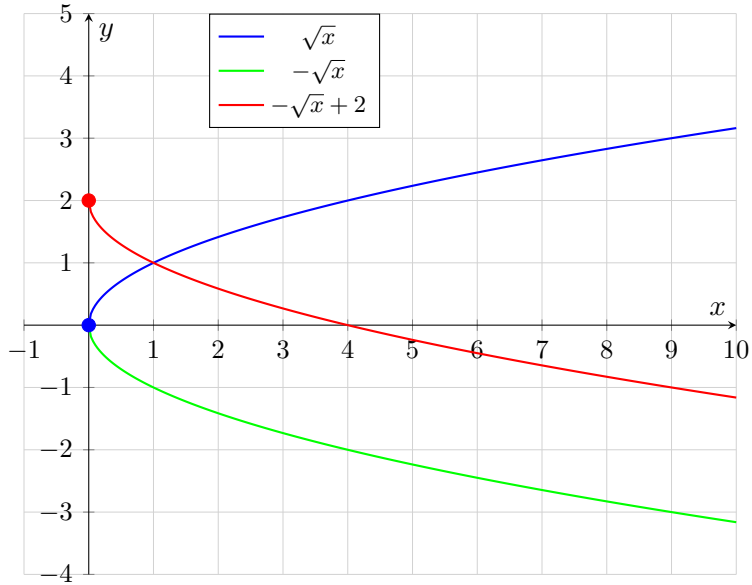
c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!

- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
 f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
 g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A grafikon és a lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0; \infty[$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in] - \infty; 2]$.
 d) Zérushely: $-\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$.
 e) Alulról nem korlátos. Felülről korlátos.
 f) Maximuma van. Maximumhely: $x = 0$. Maximumérték: $y = 2$.
 g) Szigorúan monoton csökkenő.

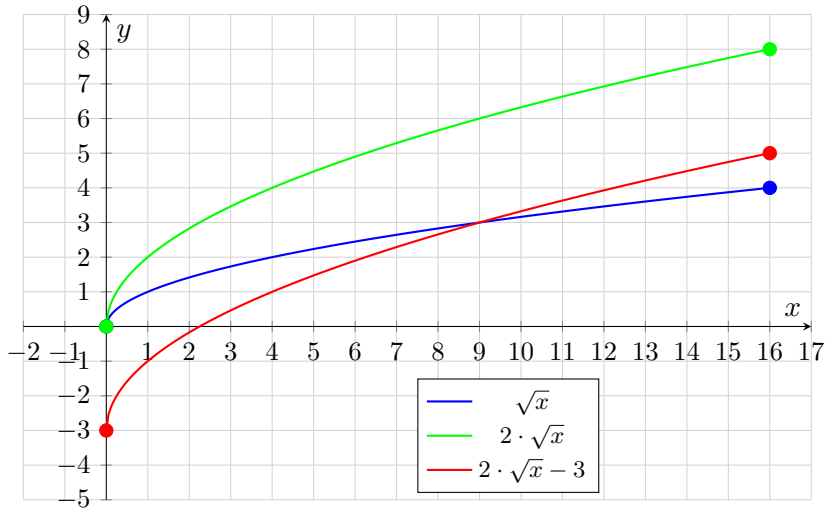
166. Feladat. Tekintsük az $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 3$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a $[0; 16]$ intervallumon, és mutassuk be a transzformációs lépéseket a $g(x) = \sqrt{x}$ függvényből kiindulva!
 b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
 c) Adjuk meg az értékkészletet!

- d) Határozzuk meg a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük a függvényt monotonitás szerint a $[0, 16]$ intervallumon!

Megoldás:

- a) A grafikon és a lépések:



- b) Az értelmezési tartomány: $D_f: x \in [0; 16]$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-3; 5]$.
- d) Zérushely: $2\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25$.
- e) Alulról és felülről is korlátos.
- f) Minimuma és maximuma is van.
Minimumhely: $x = 0$, minimumérték: $y = -3$.
Maximumhely: $x = 16$, maximumérték: $y = 5$.
- g) Szigorúan monoton növekvő.

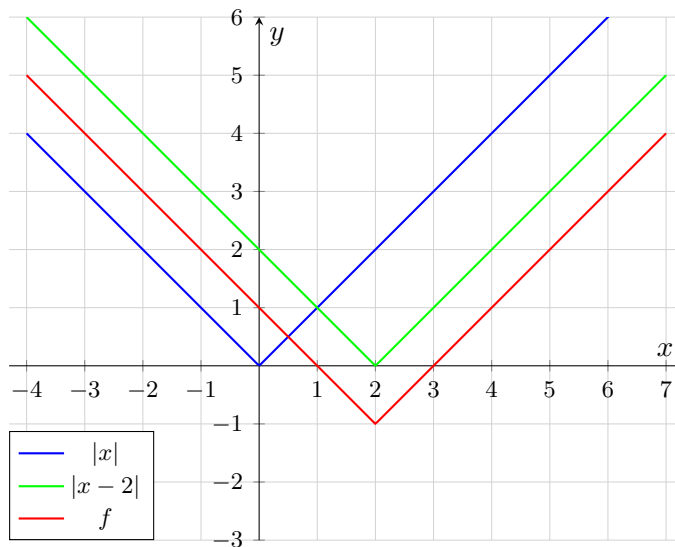
167. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| - 1$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az $|x|$, $|x - 2|$ és $|x - 2| - 1$ is ábrázolva!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!
- h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



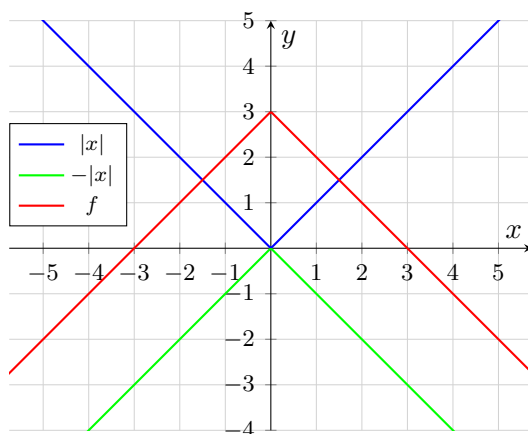
- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-1; \infty[$.
- d) A zérushelyhez $|x - 2| - 1 = 0 \Rightarrow |x - 2| = 1$, ezért $x - 2 = 1$ vagy $x - 2 = -1$, azaz $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.
- e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
- f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 2$. Minimumérték: $y = -1$.
- g) Szigorúan monoton csökkenő a $] - \infty; 2]$ intervallumon, szigorúan monoton növekvő a $[2; \infty[$ intervallumon.
- h) Nem páros, nem páratlan.

168. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -|x| + 3$ függvényt!

- Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az $|x|$, $-|x|$ és $-|x| + 3$ is ábrázolva!
- Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- Határozzuk meg az értékkészletet!
- Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
- Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- Határozzuk meg a szélsőértékét!
- Jellemezzük monotonitás szerint!
- Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
- Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 3]$.
- $-|x| + 3 = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$.
- Felülről korlátos. Alulról nem korlátos.
- Maximuma van. Maximumhely: $x = 0$. Maximumérték: $y = 3$.
- Szigorúan monoton növekvő a $] -\infty; 0]$ intervallumon, szigorúan monoton csökkenő a $[0; \infty[$ intervallumon.
- Páros, mert a grafikon szimmetrikus az y tengelyre.

169. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x - 1| - 1$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyen az

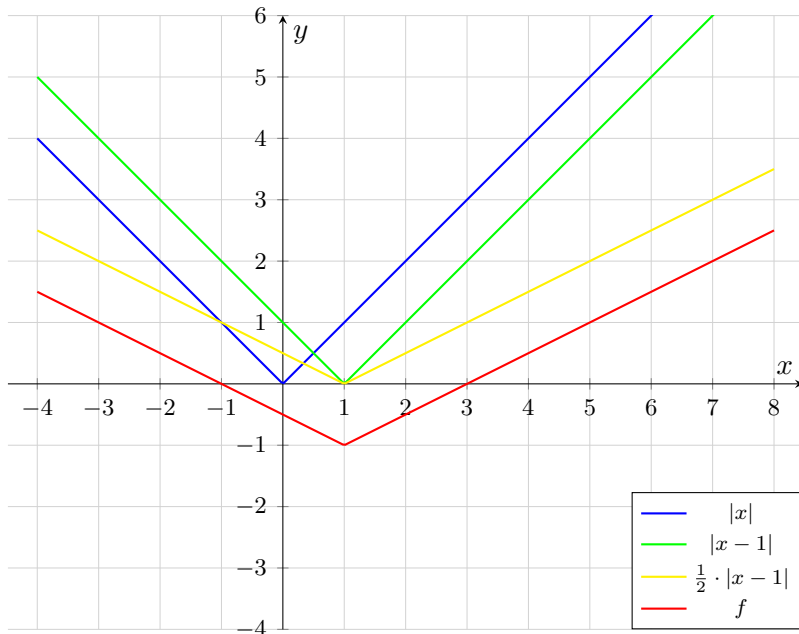
$$|x|, \quad |x - 1|, \quad \frac{1}{2} \cdot |x - 1|$$

függvények is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
 c) Határozzuk meg az értékkészletet!
 d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
 e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
 f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
 g) Jellemezzük monotonitás szerint!
 h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.
 c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-1; \infty[$.
 d) Az $f(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot |x - 1| - 1,$$

ezért a megoldandó egyenlet

$$\frac{1}{2} \cdot |x - 1| - 1 = 0.$$

Mindkét oldalhoz 1-et hozzáadva, majd az egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot |x - 1| = 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 1| = 2,$$

így $x - 1 = 2$ vagy $x - 1 = -2$ adódik. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x_1 = 3 \text{ illetve } x_2 = -1.$$

- e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
 f) Minimuma van. Minimumhely: $x = 1$. Minimumérték: $y = -1$.
 g) $A] - \infty; 1]$ -en szigorúan monoton csökkenő, az $[1; \infty[$ -en szigorúan monoton növekvő.
 h) Nem páros és nem páratlan.

170. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3 \cdot |x + 1| + 4$ függvényt!

- a) Rajzoljuk fel a függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek az

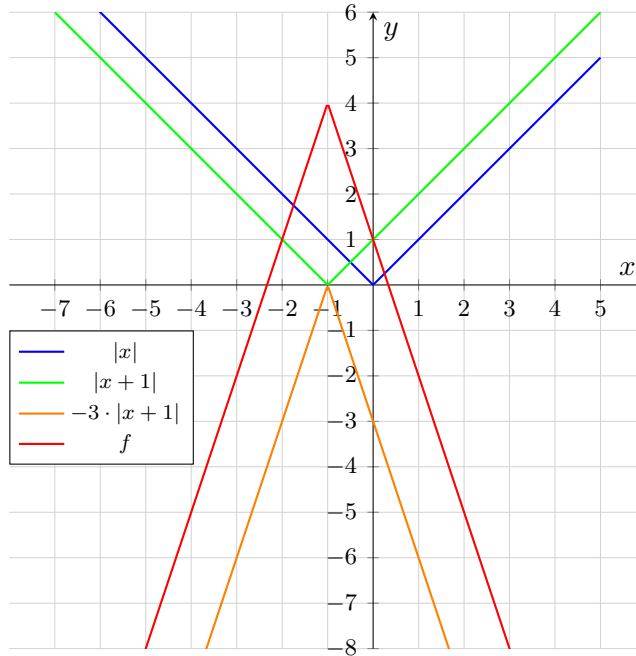
$$|x|, \quad |x + 1|, \quad -3 \cdot |x + 1|, \quad -3 \cdot |x + 1| + 4$$

is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
 c) Határozzuk meg az értékkészletet!
 d) Számoljuk ki a zérushely(ek)et!
 e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
 f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
 g) Jellemezzük monotonitás szerint!
 h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-\infty; 4]$.

d) A zérushelyeket a $-3 \cdot |x+1| + 4 = 0$ egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$|x+1| = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad x+1 = -\frac{4}{3}, \text{ vagy } x+1 = \frac{4}{3},$$

tehát $x = -1 \pm \frac{4}{3}$, azaz

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{7}{3}.$$

e) Felülről korlátos, alulról nem korlátos.

f) Maximuma van. Maximumhely: $x = -1$. Maximumérték: $y = 4$.

g) $A]-\infty; -1]$ -en szigorúan monoton növekvő, a $[-1; \infty[$ -en szigorúan monoton csökkenő.

h) Nem páros és nem páratlan.

171. **Feladat.** Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x-1} - 3$ függvényt!

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek a

$$2^x, \quad 2^{x-1}, \quad 2^{x-1} - 3$$

függvények is ábrázolva!

b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!

c) Határozzuk meg az értékkészletet!

d) Számoljuk ki a zérushelyet!

e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!

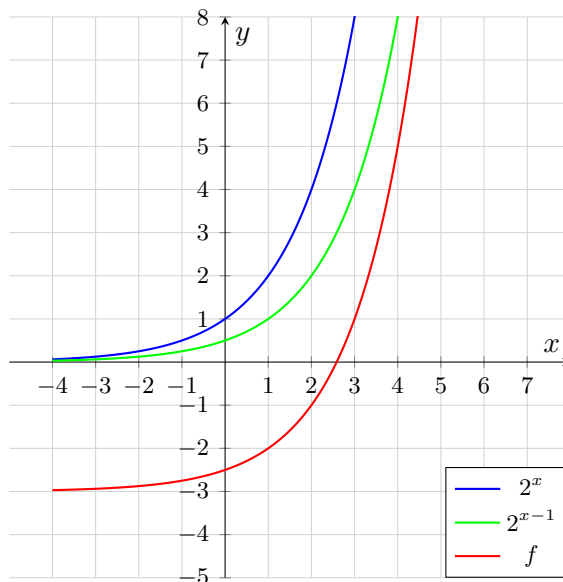
f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

g) Jellemezzük monotonitás szerint!

h) Jellemezzük paritás szerint!

Megoldás:

a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in \mathbb{R}$.

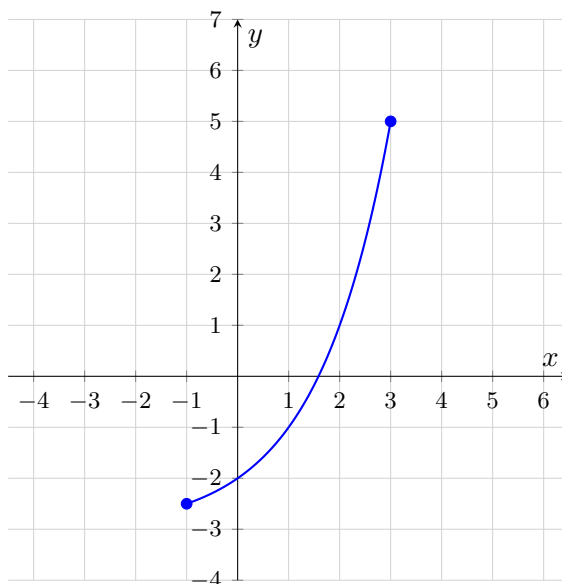
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in]-3; \infty[$.
- d) Zérushely: $2^{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow 2^{x-1} = 3 \Rightarrow x = 1 + \log_2 3$.
- e) Alulról korlátos, felülről nem korlátos.
- f) Nincs minimuma, nincs maximuma.
- g) Szigorúan monoton növekvő.
- h) Nem páros, nem páratlan.

172. **Feladat.** Tekintsük az $f: [-1; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 3$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!
- g) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A grafikon:



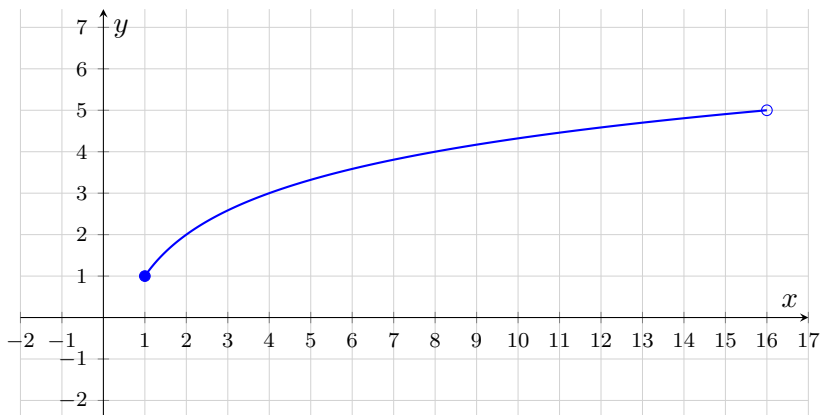
- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [-1; 3]$.
- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [-\frac{5}{2}; 5]$.
- d) A zérushelyet a $2^x - 3 = 0$ egyenlet megoldása adja. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy
- $$2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3.$$
- e) Alulról és felülről is korlátos.
- f) Minimuma és maximuma is van.
- Minimumhely: $x = -1$. Minimumérték: $y = -\frac{5}{2}$.
- Maximumhely: $x = 3$. Maximumérték: $y = 5$.
- g) Szigorúan monoton növekvő.

173. **Feladat.** Tekintsük az $f: [1; 16[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x) + 1$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!
- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Határozzuk meg a szélsőértékét!

Megoldás:

- a) A grafikon:



- b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in [1; 16[$.

- c) Értékkészlet: $R_f: y \in [1; 5[$.
- d) Zérushely: nincs.
- e) Alulról és felülről is korlátos.
- f) Minimuma van, maximuma nincs.

Minimumhely: $x = 1$, minimumérték: $y = 1$.

174. **Feladat.** Tekintsük az $f:]2; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x-2) - 2$ függvényt!

- a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját függvénytranszformációs lépésekben, azaz legyenek a

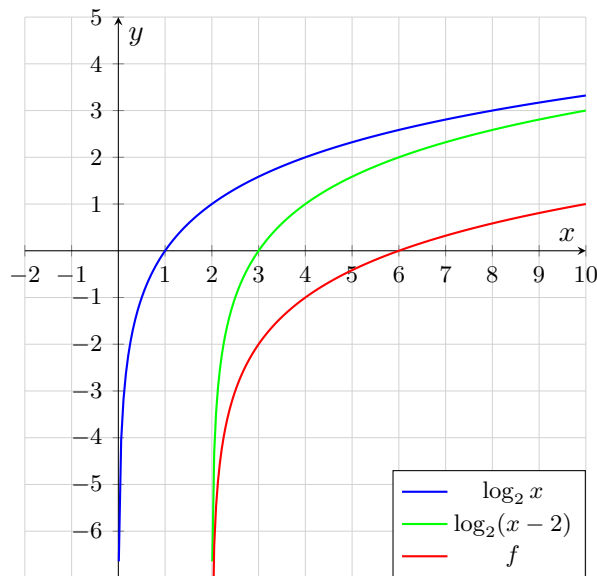
$$\log_2 x, \quad \log_2(x-2), \quad \log_2(x-2) - 2$$

függvények is ábrázolva!

- b) Adjuk meg az értelmezési tartományt!
- c) Határozzuk meg az értékkészletet!
- d) Számoljuk ki a zérushelyet!
- e) Jellemezzük korlátosság szerint a függvényt!
- f) Jellemezzük monotonitás szerint!

Megoldás:

- a) A függvény grafikonja és a transzformációs lépések:



b) Értelmezési tartomány: $D_f: x \in]2; \infty[$.

c) Értékkészlet: $R_f: y \in \mathbb{R}$.

d) A zérushely meghatározásához a

$$\log_2(x - 2) - 2 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\log_2(x - 2) = 2 \Rightarrow x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6.$$

e) A függvény nem korlátos sem alulról, sem felülről.

f) Szigorúan monoton növekvő.

5.4. Függvények gazdasági alkalmazásai

175. **Feladat.** Egy autó benzintartályában lévő üzemanyag mennyiségét d kilométer megtétele után (literben) a

$$V(d) = -0,12d + 55,$$

összefüggés adja meg.

- Magyarázzuk el, hogy mit jelent a $V(200)$ és számoljuk ki az értékét!
- Magyarázzuk el, hogy mit jelent az, hogy $V(d) = 12$, majd oldjuk meg az egyenletet!
- Milyen d értékek nem értelmezhetők?

Megoldás:

- A $V(200)$ azt jelenti, hogy mennyi üzemanyag van a tartályban 200 km megtétele után. A $V(200)$ értéke:

$$V(200) = -0,12 \cdot 200 + 55 = -24 + 55 = 31.$$

Ez azt jelenti, hogy 200 km megtétele után 31 liter üzemanyag marad az autóban.

- A $V(d) = 12$ azt jelenti, hogy mennyi utat tett meg az autó, amikor 12 liter üzemanyag maradt a tankban. Mivel $V(d) = 12$, ezért

$$-0,12d + 55 = 12$$

adódik. Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$-0,12d = -43,$$

így

$$d = \frac{-43}{-0,12} \approx 358,33 \approx 358 \text{ km}.$$

Tehát az autó benzintartályában körülbelül 358 km megtétele után lesz 12 liter üzemanyag.

- Egyrészt d nem lehet negatív, mert nem tudunk negatív távolságot megtenni. Másrészt d nem lehet nagyobb annál a maximális távolságnál sem, amit az autó egy teljes tank benzinnel képes megtenni, azaz amikor $V(d) = 0$. Ekkor

$$-0,12d + 55 = 0 \quad \Rightarrow \quad d = \frac{55}{0,12} \approx 458.$$

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$d \in [0; 458].$$

176. **Feladat.** Zsófi sportbankettet szervez. A terem bérlete \$350-ba kerül, és személyenként 18 dollárt kell fizetni a vacsoráért.

- a) Fejezzük ki a C -vel jelölt összköltséget a bankettre érkező emberek számának n függvényeként!
- b) Milyen jelöléssel adhatjuk meg a bankett költségét, ha 120 ember megy el? Számoljuk ki a kapott értéket!
- c) Milyen jelölést használhatunk arra, hogy meghatározzuk, hány ember vehet részt a banketten, ha Zsófi maximális kerete \$1 400? Számoljuk ki ezt az értéket!
- d) Milyen n értékek nem értelmezhetők?

Megoldás:

- a) A keresett összköltség függvény

$$C(n) = 18n + 350.$$

- b) A C függvénynek a 120 helyen vett helyettesítési értékét keressük, amit úgy jelölünk, hogy $C(120)$. Felhasználva, hogy $C(n) = 18n + 350$ azt kapjuk, hogy

$$C(120) = 18 \cdot 120 + 350 = 2\,160 + 350 = 2\,510.$$

Tehát a bankett költsége abban az esetben, ha 120 fő vesz részt rajta, 2 510 dollár.

- c) Keressük, hogy hány ember vehet részt, ha a költség \$1 400, azaz keressük azt a legnagyobb n -et, amikor $C(n) \leq 1\,400$. Felhasználva, hogy $C(n) = 18n + 350$ azt kapjuk, hogy

$$18n + 350 \leq 1\,400.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve

$$18n \leq 1\,050 \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{1\,050}{18} \approx 58,33$$

adódik. Tehát legfeljebb 58 fő vehet részt.

- d) A résztvevők száma nem lehet negatív, és nem lehet nagyobb sem a terem kapacitásánál, sem annál a létszámnál, amire a költségkeret elegendő, így

$$n \in [0; a],$$

ahol a a terem befogadóképessége.

177. **Feladat.** Egy Perth felé haladó autó útját az

$$d(t) = -80t + 320$$

összefüggés írja le, ahol d a Perth-től mért távolság km-ben, t pedig a vezetés ideje órában.

- a) Az út elején milyen messze volt az autó Perth-től?
b) Milyen t értékek esetén nem értelmezhető a kifejezés?

Megoldás:

- a) Az út elején $t = 0$, így

$$d(0) = -80 \cdot 0 + 320 = 320.$$

Tehát az autó kezdetben 320 km-re volt Perth-től.

- b) Nem értelmezhető negatív idő, azaz

$$t < 0 \text{ nem lehetséges.}$$

Továbbá nem életszerű, hogy az autó már Perth-en túl haladjon. Perth-be akkor érkezik, amikor $d(t) = 0$, azaz

$$0 = -80t + 320 \Rightarrow 80t = 320 \Rightarrow t = 4 \text{ óra.}$$

Tehát a függvény értelmezési tartománya:

$$t \in [0; 4].$$

178. **Feladat.** Egy brit távközlési cég a következő roaming adatcsomagot kínálja: £30 alapdíj, valamint £8 minden egyes gigabájt adatforgalom után.

- a) Fejezzük ki az összköltséget, C -t a felhasznált adatmennyiség g (GB) függvényeként!
b) Milyen g értékek nem értelmezhetők?
c) Ha egy utazás során 12 GB adatot használnak el, ez mennyibe fog kerülni?
d) Milyen jelöléssel fejezhetjük ki, hogy legfeljebb £110 lehet a számla, és legfeljebb mekkora adatforgalom engedhető meg ekkor?

Megoldás:

- a) Az összköltség: $C(g) = 8g + 30$.
 b) Negatív adatmennyiség nem értelmezhető, ezért $g \geq 0$.
 c) Mivel

$$C(12) = 8 \cdot 12 + 30 = 96 + 30 = 126,$$

ezért a roamingköltség £126.

- d) Keressük azt a g értéket, amelyre $C(g) = 110$ teljesül. Ekkor

$$8g + 30 = 110 \Rightarrow 8g = 80 \Rightarrow g = 10.$$

Tehát legfeljebb 10 GB adatforgalom engedhető meg ahhoz, hogy a számla ne haladja meg a £110-t.

179. **Feladat.** A Celsius-fokban mért hőmérséklet Fahrenheit-fokra átszámítható a

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32$$

képlettel.

- a) Mit jelent $F(22)$ és mennyi az értéke?
 b) Mit jelent az, hogy $F(C) = 68$, és mennyi C értéke?
 c) Számoljuk ki, hogy hány Fahrenheit-foknál fagy meg a víz!
 d) Számoljuk ki, hogy hány Fahrenheit-foknál forr a víz!
 e) A kekszeket tipikusan 400°F -on sütik. Hány Celsius-fok ez?

Megoldás:

- a) Az $F(22)$ a 22 Celsius-foknak megfelelő Fahrenheit-hőmérséklet. Értéke

$$F(22) = \frac{9}{5} \cdot 22 + 32 = \frac{198}{5} + 32 = 39,6 + 32 = 71,6^\circ\text{F}.$$

- b) Az $F(C) = 68$ azt jelenti, hogy hány Celsius-foknak felel meg 68 Fahrenheit-fok. Ehhez meg kell oldanunk a

$$68 = \frac{9}{5}C + 32$$

egyenletet, amire azt kapjuk, hogy

$$\frac{9}{5}C = 36 \Rightarrow C = \frac{36 \cdot 5}{9} = 20^\circ\text{C}.$$

- c) A víz 0°C -on fagy, ezért

$$F(0) = \frac{9}{5} \cdot 0 + 32 = 32^\circ\text{F}.$$

d) A víz 100°C -on forr, így

$$F(100) = \frac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 180 + 32 = 212^\circ\text{F}.$$

e) Meg kell határoznunk a

$$400 = \frac{9}{5}C + 32$$

egyenlet megoldását, amire azt kapjuk, hogy

$$\frac{9}{5}C = 368 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{368 \cdot 5}{9} = \frac{1840}{9} \approx 204,4^\circ\text{C}.$$

Tehát körülbelül 204°C .

180. **Feladat.** Egy vállalat összköltség-függvénye

$$TC(q) = 10 - 6q + 2q^2, \quad q > 2.$$

Mekkora kibocsátásnál lesz az összköltség 150 font?

Megoldás:

A feladat szövege alapján a megoldandó egyenlet:

$$10 - 6q + 2q^2 = 150.$$

Ezt nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$2q^2 - 6q + 10 - 150 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2q^2 - 6q - 140 = 0,$$

amit 2-vel elosztva

$$q^2 - 3q - 70 = 0.$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$q_{1,2} = \frac{3 \pm 17}{2},$$

így

$$q_1 = \frac{3 + 17}{2} = 10, \quad q_2 = \frac{3 - 17}{2} = -7.$$

A feladat szerint $q > 2$, ezért csak

$$q = 10$$

lehetséges.

181. **Feladat.** Egy termék piaci keresleti görbéje a

$$p(q) = 120 - 4\sqrt{q}$$

összefüggéssel adható meg, ahol p az egységár (font), q pedig a keresett mennyiség (darab).

- Mekkora lesz a keresett mennyiség, ha az ár $p = 80$ font?
- Mekkora árat hajlandó fizetni a fogyasztó, ha a keresett mennyiség $q = 49$ darab?
- Milyen q értékek mellett van értelme gazdaságilag a modellnek, azaz mikor nem negatív az ár?

Megoldás:

- Behelyettesítve a $p = 80$ értéket a keresleti függvénybe azt kapjuk, hogy

$$80 = 120 - 4\sqrt{q}.$$

így

$$80 - 120 = -4\sqrt{q} \quad \Rightarrow \quad -40 = -4\sqrt{q}$$

adódik. Mindkét oldalt osztva -4 -gyel azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{q} = 10.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve

$$q = 10^2 = 100$$

adódik. Tehát $p = 80$ font esetén a keresett mennyiség $q = 100$ darab.

- Tudjuk, hogy $q = 49$. Ezt helyettesítve a függvénybe

$$p = 120 - 4\sqrt{49} = 120 - 4 \cdot 7 = 120 - 28 = 92$$

adódik. Tehát $q = 49$ darabnál a fogyasztók $p = 92$ font árat hajlandók fizetni.

- Az ár akkor értelmezhető gazdaságilag, ha $p \geq 0$:

$$120 - 4\sqrt{q} \geq 0.$$

Kivonva mindkét oldalból 120-at azt kapjuk, hogy

$$-4\sqrt{q} \geq -120.$$

Mindkét oldalt -4 -gyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{q} \leq 30$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$q \leq 900.$$

Mivel a mennyiség nem lehet negatív, $q \geq 0$.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$q \in [0; 900].$$

182. Feladat. Egy termék keresleti függvénye:

$$p(q) = 50 - 5\sqrt{q},$$

ahol p az ár (fontban), q pedig az eladott mennyiség (darab). A vállalat költségfüggvénye:

$$C(q) = 12 + 3q.$$

- a) Írjuk fel a bevételi függvényt!
- b) Határozzuk meg a profitfüggvényt!

Megoldás:

- a) A bevételi függvény:

$$R(q) = p(q) \cdot q = (50 - 5\sqrt{q})q = 50q - 5q\sqrt{q}.$$

- b) A profitfüggvény:

$$\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = (50q - 5q\sqrt{q}) - (12 + 3q).$$

Egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = 47q - 5q\sqrt{q} - 12.$$

183. Feladat. Egy cég napi profitja (ezer forintban) a termelt mennyiség (q darab) függvényében a következőképpen modellezhető:

$$\Pi(q) = 90 - 3 \cdot |q - 30|.$$

- a) Mit jelent $\Pi(30)$ ebben a szövegkörnyezetben, és mennyi az értéke?
- b) Határozzuk meg azokat a q értékeket, amelyeknél a profit $\Pi(q) = 60$ (ezer Ft)!
- c) Milyen q értékek mellett nem negatív a profit?

Megoldás:

- a) A $\Pi(30)$ értéke a napi profit, ha a cég $q = 30$ darab terméket állít elő. Értéke

$$\Pi(30) = 90 - 3 \cdot |30 - 30| = 90 - 3 \cdot 0 = 90,$$

tehát ekkor a profit 90 ezer forint.

b) A $\Pi(q) = 60$ feltétel szerint

$$90 - 3 \cdot |q - 30| = 60.$$

Kivonva mindkét oldalból 90-et azt kapjuk, hogy

$$-3 \cdot |q - 30| = -30.$$

Mindkét oldalt elosztva -3 -mal

$$|q - 30| = 10$$

adódik. Ebből

$$q - 30 = 10 \quad \text{vagy} \quad q - 30 = -10$$

következik, tehát

$$q_1 = 40, \quad q_2 = 20.$$

Azaz 20 illetve 40 darabos termelésnél a profit 60 ezer Ft.

c) A profit nem negatív, ha

$$\Pi(q) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 90 - 3 \cdot |q - 30| \geq 0.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$-3 \cdot |q - 30| \geq -90.$$

Mindkét oldalt osztva -3 -mal, az egyenlőtlenség iránya megfordul, így

$$|q - 30| \leq 30$$

adódik. Ekkor

$$-30 \leq q - 30 \leq 30 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq q \leq 60.$$

Tehát a profit nem negatív, ha a termelt mennyiség $q \in [0; 60]$.

184. Feladat. Egy webáruház szállítási díja (forintban) a megrendelt csomag tömegének (x kg) függvényében a következőképpen alakul:

$$S(x) = 1800 + 150 \cdot |x - 4|.$$

- Mit jelent $S(4)$ és $S(6)$ ebben a szöveggörnyezetben, és mennyi az értékük?
- Mekkora tömeg esetén lesz a szállítási díj 2250 Ft?
- Milyen x értékek mellett nem több a szállítási díj 2400 Ft-nál?

Megoldás:

a) Az $S(4)$ értéke a szállítási díj, ha a csomag tömege 4 kg:

$$S(4) = 1\,800 + 150 \cdot |4 - 4| = 1\,800 + 150 \cdot 0 = 1\,800 \text{ Ft.}$$

Az $S(6)$ a szállítási díj, ha a csomag tömege 6 kg:

$$S(6) = 1\,800 + 150 \cdot |6 - 4| = 1\,800 + 150 \cdot 2 = 1\,800 + 300 = 2\,100 \text{ Ft.}$$

b) A 2 250 Ft-os díj feltétele:

$$S(x) = 2\,250 \quad \Rightarrow \quad 1\,800 + 150 \cdot |x - 4| = 2\,250.$$

Vonjuk ki 1 800-at. Ekkor

$$150 \cdot |x - 4| = 450$$

adódik. Osztvá mindkét oldalt 150-nel

$$|x - 4| = 3.$$

adódik. Ekkor

$$x - 4 = 3 \quad \text{vagy} \quad x - 4 = -3,$$

tehát

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 1.$$

Azaz 1 kg-os és 7 kg-os csomagnál is 2 250 Ft a szállítási díj.

c) A szállítási díj nem több 2 400 Ft-nál, ha

$$S(x) \leq 2\,400 \quad \Rightarrow \quad 1\,800 + 150|x - 4| \leq 2\,400.$$

Kivonva 1 800-at azt kapjuk, hogy

$$150 \cdot |x - 4| \leq 600.$$

Osztvá 150-nel

$$|x - 4| \leq 4.$$

adódik. Így az abszolútértékes egyenlőtlenségből

$$-4 \leq x - 4 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 8.$$

adódik.

Tehát a szállítási díj legfeljebb 2 400 Ft, ha a csomag tömege $x \in [0; 8]$ kg.

185. Feladat. Egy telefon akkumulátorának töltöttsége (százalékban) a használat t (órában mért) idejének függvényében

$$B(t) = -8t + 100$$

összefüggéssel írható le.

a) Magyarázzuk el, mit jelent $B(6)$, és számoljuk ki az értékét!

- b) Magyarázzuk el, mit jelent az, hogy $B(t) = 20$, majd oldjuk meg az egyenletet!
- c) Milyen t értékek nem értelmezhetők a megadott függvény?

Megoldás:

- a) A $B(6)$ azt jelenti, hogy mekkora (hány százalékos) a töltöttség 6 óra használat után. Az értéke:

$$B(6) = -8 \cdot 6 + 100 = -48 + 100 = 52.$$

Tehát 6 óra után 52% töltöttség marad.

- b) A $B(t) = 20$ összefüggés azt jelenti, hogy mennyi idő telik el addig, amíg a töltöttség 20%-ra csökken. Az egyenlet megoldására

$$-8t + 100 = 20 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-80}{-8} = 10.$$

adódik. Tehát 10 óra múlva lesz 20% a töltöttség.

- c) Nem értelmezhető negatív idő, és nem életszerű a negatív töltöttség sem. Mivel $B(t) = 0$ esetén

$$-8t + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{100}{8} = 12,5.$$

Tehát az értelmezési tartomány:

$$t \in [0; 12,5].$$

186. Feladat. Egy osztálykiránduláson a busz bérlete 45 000 Ft, és személyenként 3 200 Ft-ot kell fizetni a belépőkre.

- a) Fejezzük ki az összköltséget a résztvevők számának n függvényeként!
- b) Milyen jelöléssel adhatjuk meg a kirándulás költségét, ha $n = 28$? Adjuk meg ekkor a kirándulás költségét!
- c) Milyen jelölést használhatunk arra, hogy meghatározzuk, hányan mehetnek, ha a maximális keret 135 000 Ft? Számoljuk ki az eredményt!
- d) Milyen n értékek nem értelmezhetőek?

Megoldás:

- a) Az összköltség függvény

$$C(n) = 3200n + 45\,000.$$

- b) A $C(28)$ a 28 résztvevőre eső teljes költség:

$$C(28) = 3200 \cdot 28 + 45\,000 = 89\,600 + 45\,000 = 134\,600.$$

Tehát 28 fő esetén 134 600 Ft a teljes költség.

- c) A keret feltétele, hogy

$$C(n) \leq 135\,000 \Rightarrow 3200n + 45\,000 \leq 135\,000.$$

Rendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$3200n \leq 90\,000 \Rightarrow n \leq \frac{90\,000}{3200} = 28,125.$$

Tehát legfeljebb 28 fő mehet.

- d) A résztvevők száma nem lehet negatív, és nem lehet nagyobb sem a rendelkezésre álló férőhelyeknél, sem annál a létszámnál, amire a keret elegendő, ezért

$$0 \leq n \leq a,$$

ahol a a busz befogadóképessége.

187. **Feladat.** Egy város lakosságát (főben) az eltelt idő t (év) függvényében az alábbi exponenciális modell írja le:

$$N(t) = 120\,000 \cdot 1,018^t.$$

- Magyarázzuk el, mit jelent $N(10)$, és számoljuk ki az értékét!
- Magyarázzuk el, mit jelent az, hogy $N(t) = 150\,000$, majd oldjuk meg az egyenletet (közelítve)!
- Ábrázoljuk a $N(t)$ függvényt $0 \leq t \leq 30$ intervallumon!
- Milyen t értékek nem értelmezhetők a szövegkörnyezetben?

Megoldás:

- a) Az $N(10)$ azt jelenti, hogy hány fő lesz a városban 10 év múlva.

$$N(10) = 120\,000 \cdot 1,018^{10} \approx 120\,000 \cdot 1,195 \approx 143\,400.$$

Tehát 10 év múlva kb. 143 400 fő lesz a lakosság.

- b) Az $N(t) = 150\,000$ azt jelenti, hogy hány év múlva éri el a lakosság a 150 000 főt.

$$120\,000 \cdot 1,018^t = 150\,000.$$

Osztvá 120 000-rel:

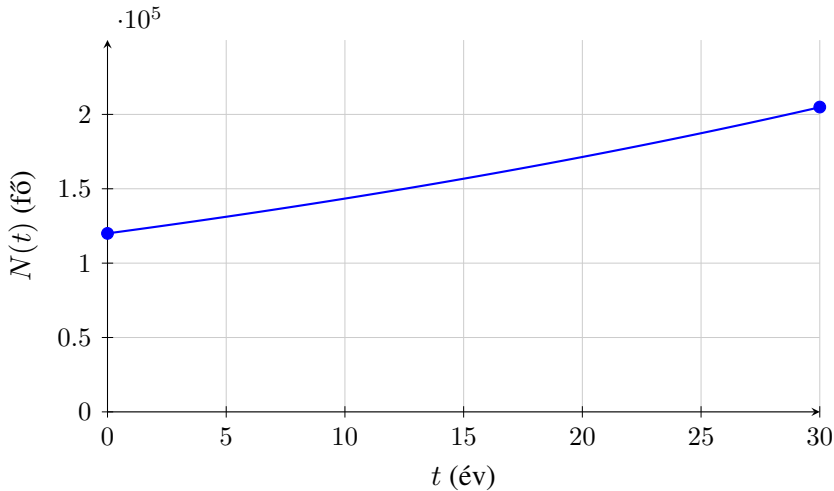
$$1,018^t = 1,25.$$

Logaritmust véve:

$$t = \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,018)} \approx \frac{0,2231}{0,01784} \approx 12,5.$$

Tehát kb. 12,5 év múlva éri el a lakosság a 150 000 főt.

c) A függvény grafikonja:



d) A szövegkörnyezetben az idő nem lehet negatív, ezért

$$t \geq 0.$$

188. **Feladat.** Egy vállalat egy új termékének keresleti modellje szerint az egységár (ezer Ft-ban) a napi eladott mennyiség q (darab) függvényében:

$$p(q) = 60 - 5\sqrt{q}.$$

- Magyarázzuk el, mit jelent $p(16)$, és számoljuk ki az értékét!
- Fejezzük ki a napi bevételt (ezer Ft-ban) a mennyiség függvényében!
- Milyen q értékek mellett van értelme gazdaságilag a modellnek, azaz mikor nem negatív az ár?
- Ábrázoljuk a $p(q)$ függvényt a gazdaságilag értelmezhető tartományon!

Megoldás:

- A $p(16)$ azt jelenti, hogy mekkora az egységár, ha $q = 16$ darabot adnak el:

$$p(16) = 60 - 5\sqrt{16} = 60 - 5 \cdot 4 = 60 - 20 = 40.$$

Azt kaptuk, hogy $q = 16$ esetén az egységár 40 ezer Ft.

b) A bevétel a darabszám és az egységár szorzata:

$$R(q) = p(q) \cdot q = (60 - 5\sqrt{q}) \cdot q = 60q - 5q\sqrt{q}.$$

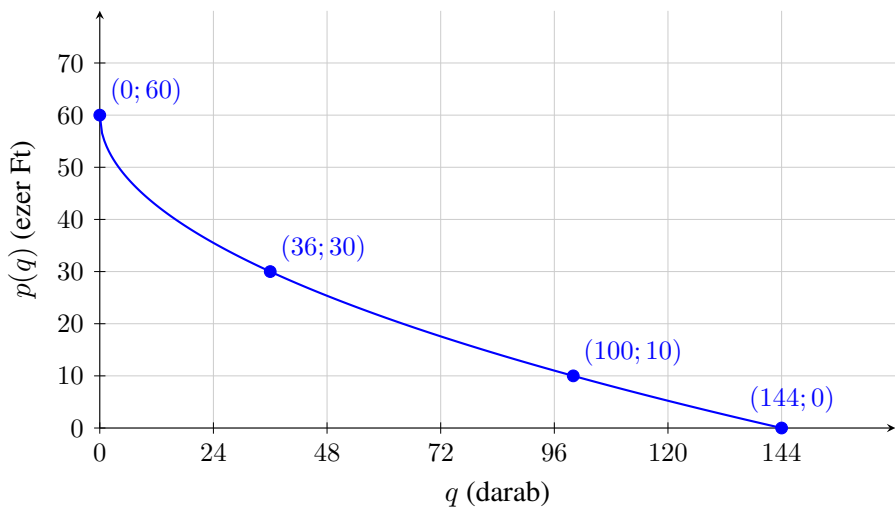
c) Gazdaságilag akkor értelmezhető, ha $p(q) \geq 0$ és $q \geq 0$. Ha $p(q) \geq 0$, akkor

$$60 - 5\sqrt{q} \geq 0 \Rightarrow -5\sqrt{q} \geq -60 \Rightarrow \sqrt{q} \leq 12,$$

így $q \leq 144$, ezért az értelmezési tartomány

$$q \in [0; 144].$$

d) A függvény ábrázolása:



189. **Feladat.** Egy termék keresleti függvénye:

$$p(q) = 80 - 4\sqrt{q},$$

ahol p az ár (fontban), q pedig az eladott mennyiség (darab). A vállalat költségfüggvénye:

$$C(q) = 8q + 200.$$

- Írjuk fel a bevételi függvényt!
- Határozzuk meg a profitfüggvényt!
- Milyen q értékek mellett van értelme gazdaságilag a modellnek, azaz mikor nem negatív az ár?
- Ábrázoljuk a keresleti függvényt a gazdaságilag értelmezhető tartományon!

Megoldás:

a) A bevételi függvény:

$$R(q) = p(q) \cdot q = (80 - 4\sqrt{q})q = 80q - 4q\sqrt{q}.$$

b) A profitfüggvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = (80q - 4q\sqrt{q}) - (8q + 200).$$

A zárójeleket felbontva és elvégezve az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = 72q - 4q\sqrt{q} - 200.$$

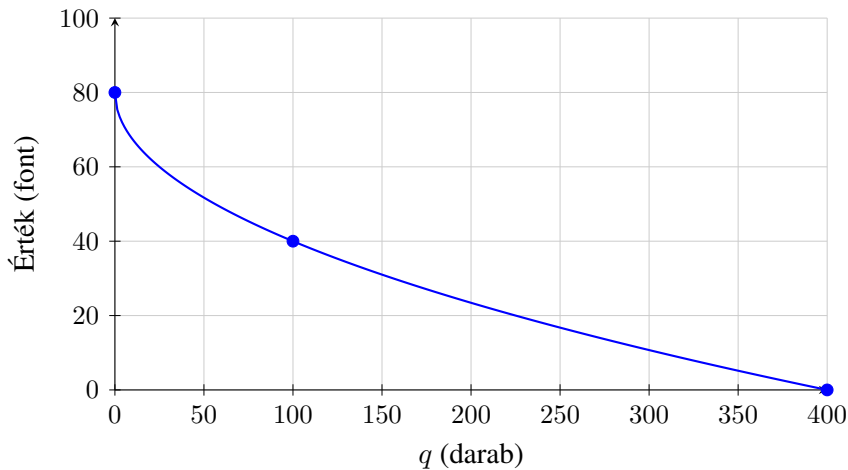
c) Gazdaságilag akkor értelmezhető, ha $p(q) \geq 0$ és $q \geq 0$. Mivel $p(q) \geq 0$, ezért

$$80 - 4\sqrt{q} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{q} \leq 20,$$

így $q \leq 400$. Tehát

$$q \in [0; 400].$$

d) A függvény grafikonja:

190. **Feladat.** Egy város lakosságát (főben) az eltelt idő t (év) függvényében az alábbi modell írja le:

$$N(t) = 250\,000 \cdot 0,992^t.$$

a) Magyarázzuk el, mit jelent $N(15)$, és számoljuk ki az értékét!b) Magyarázzuk el, mit jelent az, hogy $N(t) = 220\,000$, majd oldjuk meg az egyenletet (közelítve)!

- c) Ábrázoljuk a $N(t)$ függvényt $0 \leq t \leq 40$ intervallumon!
 d) Milyen t értékek nem értelmezhetők a szöveggörnyezetben?

Megoldás:

- a) Az $N(15)$ azt jelenti, hogy hány fő lesz a városban 15 év múlva. Értéke:

$$N(15) = 250\,000 \cdot 0,992^{15} \approx 250\,000 \cdot 0,887 \approx 221\,750.$$

Tehát 15 év múlva kb. 221 750 fő lesz a lakosság.

- b) Az $N(t) = 220\,000$ azt jelenti, hogy hány év múlva csökken a lakosság 220 000 főre. Ennek megválaszolásához a

$$250\,000 \cdot 0,992^t = 220\,000$$

egyenletet kell megoldanunk. Mindkét oldalt elosztva 250 000-rel azt kapjuk, hogy

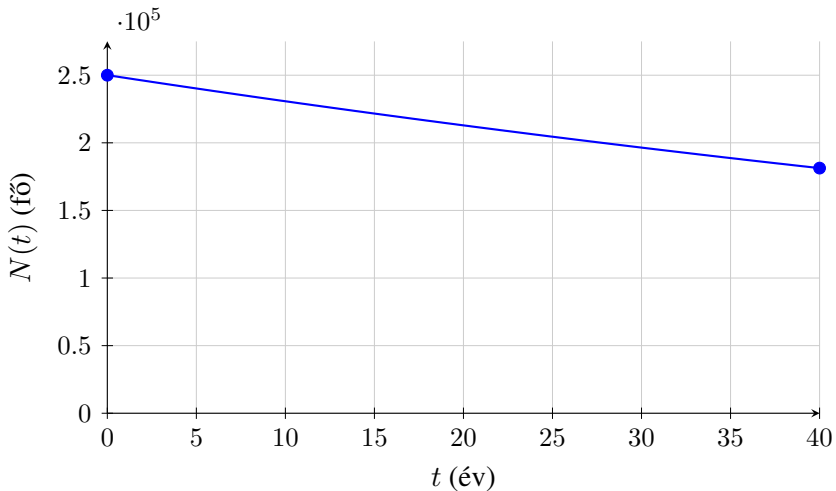
$$0,992^t = 0,88.$$

A logaritmus definíciója szerint

$$t = \log_{0,992} 0,88 \approx 15,9.$$

Tehát a 16. évben csökken 220 000 főre a lakosság.

- c) Az ábrázoláshoz például:



- d) A szöveggörnyezetben az idő nem lehet negatív, ezért

$$t \geq 0.$$

191. **Feladat.** Egy vállalat termelésének összköltsége (ezer Ft-ban) a termelt mennyiség q (darab) függvényében:

$$C(q) = 500 + 20q + 2q^2,$$

a piaci ár pedig (ezer Ft-ban) állandó:

$$p = 90.$$

- a) Írjuk fel a bevételi függvényt $TR(q)$!
- b) Határozzuk meg a profitfüggvényt $\Pi(q)$!
- c) Ábrázoljuk a $TC(q)$ és $TR(q)$ függvényeket!
- d) Határozzuk meg, mekkora termelésnél lesz a profit 0?
- e) Milyen q értékek nem értelmezhetőek a szöveggörnyezetben?

Megoldás:

- a) A bevételi függvény:

$$R(q) = p \cdot q = 90q.$$

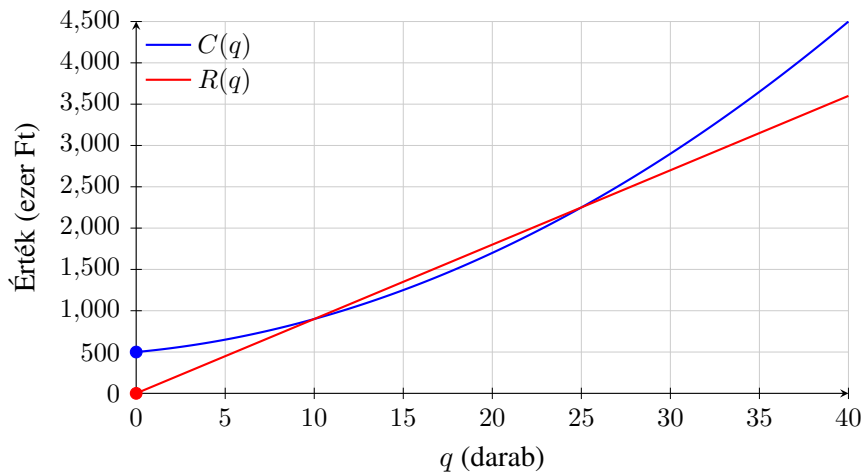
- b) A profitfüggvény:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 90q - (500 + 20q + 2q^2).$$

Elvégezve a zárójel felbontását és az összevonást, azt kapjuk, hogy

$$\Pi(q) = -2q^2 + 70q - 500.$$

- c) A grafikonok például:



d) A profit 0, ha

$$-2q^2 + 70q - 500 = 0.$$

Mindkét oldalt osztva -2 -vel azt kapjuk, hogy

$$q^2 - 35q + 250 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával

$$q_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1000}}{2} = \frac{35 \pm 15}{2}.$$

adódik, így

$$q_1 = 25, \quad q_2 = 10.$$

Tehát $q = 10$ és $q = 25$ darabnál lesz a profit 0.

e) A termelt mennyiség nem lehet negatív, ezért

$$q \geq 0.$$

Tartalomjegyzék

1. fejezet: Algebrai alapismeretek.	5
1.1. Ellentett, reciprok, abszolútérték	6
1.2. Hatványozás azonosságai	8
1.3. Gyökvonás azonosságai	14
1.4. Műveletek polinomokkal, nevezetes azonosságok	16
1.5. Algebrai törtek	21
1.6. A logaritmus fogalma és azonosságai	28
1.7. Gazdasági alkalmazások	30
1.8. Összefoglaló feladatok	35
2. fejezet: Egyenletek megoldása.	41
2.1. Elsőfokú egyenletek	42
2.2. Másodfokú egyenletek	46
2.3. Exponenciális egyenletek	50
2.4. Logaritmikus egyenletek	55
2.5. További egyenletek	58
2.6. Gazdasági alkalmazások	63
2.7. Összefoglaló feladatok	69
3. fejezet: Egyenletrendszerek megoldása.	77
3.1. Elsőfokú egyenletrendszerek	78
3.2. Másodfokú egyenletrendszerek	84
3.3. További egyenletrendszerek	90
3.4. Gazdasági alkalmazások	93
3.5. Összefoglaló feladatok	101
4. fejezet: Egyenlőtlenségek megoldása.	107
4.1. Elsőfokú egyenlőtlenségek	108
4.2. Másodfokú egyenlőtlenségek	117

4.3. Gazdasági alkalmazások	125
4.4. Összefoglaló feladatok	128
5. fejezet: Függvények.	135
5.1. Függvények tulajdonságai	136
5.2. Függvénytranszformációk	142
5.3. Elemi függvények és grafikonjaik	152
5.4. Függvények gazdasági alkalmazásai	194