Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Invariance equations for two-variable means

Baják Szabolcs

Témavezető: Dr. Páles Zsolt
egyetemi tanár

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012.

Introduction

The theory of functional equations has applications in many areas of mathematics, e.g. in geometry (e.g. [1], [10], [11], [27]), in information theory (e.g. [3], [14], [20], [36]), in probability theory (e.g. [9], [33], [41]) and also in economics and in social sciences (e.g. [2], [4], [26]).

Investigations of mean values were done even by the scientists of antiquity, they knew many different means and also their properties, e.g. they proved the inequality of arithmetic and geometric means. But the first results concerning functional equations involving means can be connected to papers of Jensen and Sutô in the early 20th century ([31], [32], [43], [44]).

In the last few decades research of mean values and their properties has become a very important and popular area of the theory of functional equations. Many general classes of means were defined (e.g. [28], [29], [34], [35], [42]), and these provided many new fields of research, e.g. equality and comparison problems, Hölder and Minkowski-type inequalities. The topic of the dissertation, the Gauss composition or invariance of means, is also one of the new areas of research connected to mean values. Very intensive investigations have been done concerning this problem in the last few years with several significant results (e.g. [12], [13], [15], [16], [17], [18], [19], [21], [22], [23], [24], [25], [30], [37], [38], [39], [40], [45], [46]). The results presented in the dissertation continue these investigations and also generalize some of the former theorems.

First we introduce the necessary notions and define the means which we work with. We also define the Gauss composition of means and give its characterization using the invariance equation. We demonstrate some well-known examples of invariance of means.

In the second chapter we present in details some preliminary results of the new theorems. These include the solutions of the invariance equations for quasi-arithmetic and weighted quasi-arithmetic means. Then we give the solution of the invariance equation for a generalization of the quasi-arithmetic means.

In the third chapter we deal with Gini and Stolarsky means. With the help of a common generalization of these means we can consider the invariance equations when the means involved are either Gini or Stolarsky means as special cases of a more general equation. In this chapter we solve these equations, using also the computer algebra package Maple V Release 9.

1 Preliminaries, terminology

Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a nonvoid open interval. A two-variable continuous function $M : I^2 \to I$ is called a mean on I if

$$\min(x, y) \leqslant M(x, y) \leqslant \max(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

holds. If both inequalities are strict whenever $x \neq y$, then M is called a strict mean on I. A mean M on I is said to be symmetric if $M(x, y) = M(y, x)$ holds for all $x, y \in I$. A mean M on $\mathbb{R}_+$ is called homogeneous if $M(tx, ty) = tM(x, y)$ holds for all $t,\ x,\ y \in \mathbb{R}_+$.

Classical examples for two-variable symmetric strict and homogeneous means on $\mathbb{R}_+$ are the arithmetic, geometric and harmonic means. The power means are well-known generalizations of these means. The power mean of exponent p is defined as

$$M_p(x, y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{if } p \neq 0, \\ \sqrt{xy}, & \text{if } p = 0. \end{cases}$$

The two-variable Gini and Stolarsky means are two substantial generalizations of the power means. In the most general case (i.e., when $p \neq q$), the Gini mean of two positive real numbers x and y is defined by

$$G_{p,q}(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{x^q + y^q}\right)^{\frac{1}{p-q}},$$

and if $(p-q)pq(x-y) \neq 0$ the Stolarsky mean of two positive real numbers x and y is

$$S_{p,q}(x,y) := \left(\frac{q(x^p - y^p)}{p(x^q - y^q)}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Another important class of mean values is the class of quasi-arithmetic means. The quasi-arithmetic mean (generated by the strictly monotone continuous function φ) of x and y from a nonvoid open interval I is

$$\mathcal{M}_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right).$$

A possible generalization of the quasi-arithmetic means is the following: If the continuous, strictly monotone functions φ_1 and φ_2 are strictly monotone in the same sense on an interval I, the generalized quasi-arithmetic mean is defined by

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}(x,y) := \varphi^{-1}(\varphi_1(x)+\varphi_2(y)) \qquad (x,\ y \in I), \tag{1}$$

where

$$\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2), \qquad \varphi := \varphi_1 + \varphi_2.$$

If $M, N : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ are two strict means, their Gauss composition $K = M \otimes N$ is the unique strict mean solution K of the functional equation

$$K(x,y) = K\big(M(x,y), N(x,y)\big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+), \tag{2}$$

which is the invariance equation.

In the thesis we solve the invariance equations for the above generalization of the quasi-arithmetic means and also for Gini and Stolarsky means.

2 Generalized quasi-arithmetic means

The invariance of the arithmetic mean with respect to two quasi-arithmetic means (the so-called Matkowski-Sutô problem) was first solved by Sutô, and later the same solutions were found by Matkowski under weaker regularity assumptions ([43], [44], [38]). The solution of this problem supposing only natural regularity of the problem was given by Daróczy and Páles ([23]). They also solved the general invariance equation for quasi-arithmetic means. The invariance equation for weighted quasi-arithmetic means was solved by Jarczyk ([30]). The next theorem, which describes the invariance of the arithmetic mean with respect to the mean defined in (1), generalizes the result of Daróczy and Páles under 4-times continuous differentiability.

Theorem. (Baják–Páles [5]) *Let φ_1, φ_2 and ψ_1, ψ_2 be 4-times continuously differentiable functions defined on a nonempty open interval I such that $\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) > 0$ and $\psi_1'(x)\psi_2'(x) > 0$ (i.e., φ_1, φ_2 and ψ_1, ψ_2 are strictly monotone in the same sense, respectively) for $x \in I$. Then, for every x and y in I, the functional equation*

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(y)\right) + (\psi_1 + \psi_2)^{-1}\left(\psi_1(x) + \psi_2(y)\right) = x + y$$

holds if and only if

(i) either there exist real constants p, a_1, a_2, c_1, c_2, b_1, b_2, d_1, d_2 with $p \neq 0$, $a_1 a_2 > 0$, $c_1 c_2 > 0$ and $a_1 c_1 = a_2 c_2$ such that, for $x \in I$,

$$\varphi_1(x) = a_1\, \mathrm{e}^{px} + b_1\,, \qquad \varphi_2(x) = a_2\, \mathrm{e}^{px} + b_2\,,$$

and

$$\psi_1(x) = c_1\, \mathrm{e}^{-px} + d_1\,, \qquad \psi_2(x) = c_2\, \mathrm{e}^{-px} + d_2\,;$$

(ii) or there exist real constants a, b, c, d_1, d_2 with $ac \neq 0$ such that, for $x \in I$,

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = ax + b\,,$$

and

$$\psi_1(x) = c\,\varphi_2(x) + d_1\,, \qquad \psi_2(x) = c\,\varphi_1(x) + d_2.$$

3 Gini and Stolarsky means

We discuss the invariance equations when the three means involved are either Gini or Stolarsky means, which results six equations. First we reformulate the general invariance equation given in (2).

Lemma. (Baják–Páles [8]) *If $M, N : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ are homogeneous (resp. symmetric) strict means, then their Gauss composition $M \otimes N$ is also homogeneous (resp. symmetric). Furthermore, if $K : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ is a homogeneous strict mean then $K = M \otimes N$, i.e., the invariance equation*

$$K(x, y) = K\big(M(x, y), N(x, y)\big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

holds if and only if the single-variable function $F_{K,M,N} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$F_{K,M,N}(u) := \ln K\left(M(\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{-u}), N(\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{-u})\right) - \ln K(\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^{-u}) \qquad (u \in \mathbb{R}),$$

vanishes everywhere on $\mathbb{R}$. In the case when K, M, N are analytic functions, $F_{K,M,N}$ is also analytic and vanishes on $\mathbb{R}$ if and only if

$$F^{(k)}_{K,M,N}(0) = 0$$

for all $k \in \mathbb{N}$. If, additionally M, N and K are symmetric strict means, then $F_{K,M,N}$ is an even function and $F_{K,M,N}$ vanishes on $\mathbb{R}$ if and only if the derivatives above vanish for all even $k \in \mathbb{N}$.

If r and s are two different real parameters and μ is a Borel probability measure on $[0, 1]$, the two-variable mean

$$M_{r,s,\mu}(x, y) = \left(\frac{\int\limits_0^1 (x^t y^{1-t})^r \mathrm{d}\mu(t)}{\int\limits_0^1 (x^t y^{1-t})^s \mathrm{d}\mu(t)} \right)^{\frac{1}{r-s}}$$

is a common generalization of both the Gini and the Stolarsky means. If μ is equal to $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ (where δ_x stands for the Dirac measure concentrated at x), we get the Gini mean $G_{r,s}$, and if μ is equal to the Lebesgue measure, we get the

Stolarsky mean $S_{r,s}$. This means that each of the six invariance equations can be considered as a particular case of the equation

$$M_{p,q,\kappa}(M_{a,b,\mu}(x,y), M_{c,d,\nu}(x,y)) = M_{p,q,\kappa}(x,y) \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+),$$

where each of μ, ν and κ is equal to the Lebesgue measure on $[0,1]$ or to the measure $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$.

In view of the lemma, the above invariance equation holds if and only if, for all $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(u) &:= \ln\left(M_{p,q,\kappa}(M_{a,b,\mu}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u}), M_{c,d,\nu}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u}))\right) \\ &\qquad - \ln\left(M_{p,q,\kappa}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u})\right) = 0, \end{aligned}$$

i.e., for all $k \in \mathbb{N}$,

$$F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(0) = 0.$$

To get a more useful representation of the means $M_{r,s,\mu}$, we introduce the function $L_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ by

$$L_\mu(z) := \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\mu_k\right),$$

where μ_k denotes the kth central moment of the measure μ. Assuming that μ is symmetric with respect to $\frac{1}{2}$ it follows that $\mu_{2k-1} = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. With the help of function L_μ, we can express the main expression of the mean $M_{r,s,\mu}$ in the following form:

Lemma. (Baják–Páles [8]) *If μ be a Borel probability measure on* $[0,1]$ *and $r, s \in \mathbb{R}$, then*

$$M_{r,s,\mu}(x,y) = \exp\left(M^*_{r,s,\mu}(\ln x, \ln y)\right) \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+),$$

where $M^*_{r,s,\mu} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ is defined by

$$M^*_{r,s,\mu}(u,v) := \frac{u+v}{2} + \frac{L_\mu(r(u-v)) - L_\mu(s(u-v))}{r-s}.$$

To simplify the calculations, we consider an approximation of the mean $M_{r,s,\mu}$. If μ is a Borel probability measure and $m \in \mathbb{N}$, define the functions

$$L_{\mu;m}(z) := \ln\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}\mu_k\right) \qquad (z \in \mathbb{R}),$$

and, if $r,s\in\mathbb{R}$,

$$M_{r,s,\mu;m}(x,y)=\exp\left(M^*_{r,s,\mu;m}(\ln x,\ln y)\right)\qquad(x,y\in\mathbb{R}_+),$$

where $M^*_{r,s,\mu;m}:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+$ is defined by (suppressing the exceptional case $r=s$)

$$M^*_{r,s,\mu;m}(u,v):=\frac{u+v}{2}+\frac{L_{\mu;m}(r(u-v))-L_{\mu;m}(s(u-v))}{r-s}.$$

The following lemma states that instead of the functions $M_{r,s,\mu}$ and L_μ, we can use the truncated functions $M_{r,s,\mu;m}$ and $L_{\mu;m}$ to compute the higher-order derivatives needed in the calculations.

Lemma. (Baják–Páles [8]) *Let μ be a Borel probability measure. Then, for all $m,i\in\mathbb{N}_0$ with $i\leqslant m$,*

$$(L^{(i)}_\mu(0))=(L^{(i)}_{\mu;m}(0)).$$

Furthermore, for all $r,s\in\mathbb{R}$ and $m,i,j\in\mathbb{N}_0$ with $i+j\leqslant m$,

$$\partial_1^i\partial_2^j M_{r,s,\mu}(1,1)=\partial_1^i\partial_2^j M_{r,s,\mu;m}(1,1).$$

As an immediate consequence of the lemma, the computation of the higher order derivatives $F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}$ at 0 can be replaced by the computation of the derivatives $F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa;m},M_{a,b,\mu;m},M_{c,d,\nu;m}}$ at 0 provided that $k\leqslant m$.

Corollary. (Baják–Páles [8]) *Let $a,b,c,d,p,q\in\mathbb{R}$ and μ,ν,κ be Borel probability measures on $[0,1]$. Then, for all $k,m\in\mathbb{N}_0$ with $k\leqslant m$,*

$$F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(0)=F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa;m},M_{a,b,\mu;m},M_{c,d,\nu;m}}(0).$$

This means that it is sufficient to check these conditions while solving the invariance equations. We can consider each equation as the suitable special case of the identity

$$F_{M_{p,q,\kappa;k},M_{a,b,\mu;k},M_{c,d,\nu;k}}(u)=\\ M^*_{p,q,\kappa;k}(M^*_{a,b,\mu;k}(u,-u),M^*_{c,d,\nu;k}(u,-u))-M^*_{p,q,\kappa;k}(u,-u)=0.$$

Using the method established above, with the help of the computer algebra system Maple we give the solutions of the invariance equations involving Gini and Stolarsky means. The following theorem describes the case when the three means are all Gini means with possibly different parameters.

Theorem. (Baják–Páles [6]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$G_{p,q}(G_{a,b}(x,y), G_{c,d}(x,y)) = G_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

holds if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*
(ii) $\{a, b\} = \{c, d\} = \{p, q\}$*, i.e., all the three means are equal to each other;*
(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $G_{p,q}$ *is the geometric mean and* $G_{a,b} = G_{-c-d}$*;*
(iv) there exist $u, v \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{u + v, v\}$*,* $\{c, d\} = \{u - v, -v\}$*, and* $\{p, q\} = \{u, 0\}$ *(in this case,* $G_{p,q}$ *is a power mean);*
(v) there exists $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{3w, w\}$*,* $c + d = 0$*, and* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(in this case,* $G_{p,q}$ *is a power mean and* $G_{c,d}$ *is the geometric mean);*
(vi) there exists $w \in \mathbb{R}$ *such that* $a + b = 0$*,* $\{c, d\} = \{3w, w\}$*, and* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(in this case,* $G_{p,q}$ *is a power mean and* $G_{a,b}$ *is the geometric mean).*

The next theorem gives the solution of the invariance equation for Stolarsky means.

Theorem. (Baják–Páles [7]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$S_{p,q}(S_{a,b}(x,y), S_{c,d}(x,y)) = S_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

is valid if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*
(ii) $\{a, b\} = \{c, d\} = \{p, q\}$*, i.e., all the three means are equal to each other;*
(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $S_{p,q}$ *is the geometric mean and* $S_{a,b} = S_{-c,-d}$*.*

The following theorems completely describe the solutions of the mixed equations, i.e., when the three means involved are either Gini or Stolarsky means.

Theorem. (Baják–Páles [8]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$G_{p,q}(S_{a,b}(x,y), G_{c,d}(x,y)) = G_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

is valid if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*
(ii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$ *and* $\{c, d\} = \{p, q\} = \{0, w\}$*, i.e., all the three means are equal to each other, and they are also equal to the power mean of exponent* w*;*
(iii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$*,* $\{c, d\} = \{0, -w\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $G_{p,q}$ *is the geometric mean and the two means* $S_{a,b}$ *and* $G_{-c,-d}$ *are equal to each other, and are equal to the power mean of exponent* w*;*
(iv) there exists $w \in \mathbb{R}$ *such that* $a + b = 0$*,* $\{c, d\} = \{3w, w\}$*, and* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(in this case,* $G_{p,q}$ *is a power mean and* $S_{a,b}$ *is the geometric mean);*
(v) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$*,* $\{c, d\} = \{-w, -2w\}$ *and* $\{p, q\} = \{0, -w\}$*, i.e.,* $S_{a,b}$ *is the power mean of exponent* w *and* $G_{p,q}$ *is the power mean of exponent* $-w$*.*

Theorem. (Baják–Páles [8]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$G_{p,q}(S_{a,b}(x,y), S_{c,d}(x,y)) = G_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

is valid if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*
(ii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{c, d\} = \{w, 2w\}$ *and* $\{p, q\} = \{0, w\}$*, i.e., all the three means are equal to each other, and they are equal to the power mean of exponent* w*;*
(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $G_{p,q}$ *is the geometric mean and* $S_{a,b} = S_{-c,-d}$*.*

Theorem. (Baják–Páles [8]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$S_{p,q}(G_{a,b}(x, y), G_{c,d}(x, y)) = S_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

is valid if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*

(ii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{c, d\} = \{0, w\}$ *and* $\{p, q\} = \{w, 2w\}$*, i.e., all the three means are equal to each other, and they are equal to the power mean of exponent* w*;*

(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $S_{p,q}$ *is the geometric mean and* $G_{a,b} = G_{-c,-d}$*;*

(iv) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 3w\}$*,* $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *and* $c + d = 0$*, i.e.,* $G_{c,d}$ *is the geometric mean and* $S_{p,q}$ *is the power mean of exponent* $2w$*;*

(v) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{c, d\} = \{w, 3w\}$*,* $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *and* $a + b = 0$*, i.e.,* $G_{a,b}$ *is the geometric mean and* $S_{p,q}$ *is the power mean of exponent* $2w$*.*

Theorem. (Baják–Páles [8]) *Let $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Then the invariance equation*

$$S_{p,q}(G_{a,b}(x, y), S_{c,d}(x, y)) = S_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

is valid if and only if one of the following possibilities holds:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, i.e., all the three means are equal to the geometric mean;*

(ii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{0, w\}$ *and* $\{c, d\} = \{p, q\} = \{w, 2w\}$*, i.e., all the three means are equal to each other, and they are equal to the power mean of exponent* w*;*

(iii) there exists a $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{0, w\}$*,* $\{-c, -d\} = \{w, 2w\}$ *and* $p + q = 0$*, i.e.,* $S_{p,q}$ *is the geometric mean and the two means* $G_{a,b}$ *and* $S_{-c,-d}$ *are equal to each other, and are equal to the power mean of exponent* w*;*

(iv) *there exists a* $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 3w\}$, $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *and* $c + d = 0$, *i.e.,* $S_{c,d}$ *is the geometric mean and* $S_{p,q}$ *is the power mean of exponent* $2w$;

(v) *there exists a* $w \in \mathbb{R}$ *such that* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$, $\{c, d\} = \{-w, -2w\}$ *and* $\{p, q\} = \{w, 2w\}$, *i.e.,* $S_{c,d}$ *is the power mean of exponent* $-w$ *and* $S_{p,q}$ *is the power mean of exponent* w.

Bevezetés

A függvényegyenletek elméletének a matematika számos területén, pl. a geometriában (pl. [1], [10], [11], [27]), az információelméletben (pl. [3], [14], [20], [36]), a valószínűségelméletben (pl. [9], [33], [41]), valamint a közgazdaságtanban és a társadalomtudományokban is (pl. [2], [4], [26]) vannak alkalmazásai.

A középértékekkel kapcsolatos kutatások régre nyúlnak vissza, már az ókoriak is számos közepet ismertek, illetve azoknak bizonyos tulajdonságait is leírták, pl. a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget is bizonyították. A középértékeket tartalmazó függvényegyenletek vizsgálatának talán legrégibb eredményei Jensen illetve Sutô 20. század elején megjelent dolgozatai ([31], [32], [43], [44]).

A elmúlt néhány évtizedben a középértékek vizsgálata a függvényegyenletek elméletének egyik fontos és részletesen kutatott területe lett. Számos általános középosztályt definiáltak (pl. [28], [29], [34], [35], [42]), és ezekre vontakozóan sok új probléma merült fel, amelyből több új kutatási irány származott, pl. a közepekre vonatkozó egyenlőségi illetve összehasonlítási problémák, valamint a Hölder- és a Minkowski-típusú egyenlőtlenségek vizsgálata. Szintén ide tartozik a disszertációban vizsgált témakör, a középértékek Gauss-kompozíciója vagy invarianciája. Ez a probléma az utóbbi néhány évben intenzíven kutatott területté vált, melyben számos jelentős eredmény született mind hazai, mind külföldi kutatók részéről (pl. [12], [13], [15], [16], [17], [18], [19], [21], [22], [23], [24], [25], [30], [37], [38], [39], [40], [45], [46]). A jelen dolgozatban található eredmények kapcsolódnak a korábbi vizsgálatokhoz, illetve közülük néhányat általánosítanak is.

A disszertációban először bevezetjük a szükséges fogalmakat, definiáljuk azokat a középosztályokat, amelyekkel dolgozni fogunk. Értelmezzük közepek Gauss-kompozícióját és jellemezzük a közepekre vonatkozó invariancia egyenlet segítségével. Néhány jól ismert példát is bemutatunk közepek invarianciájára.

A 2. fejezetben a disszertációban bemutatásra kerülő új eredmények néhány előzményét részletesebben is tárgyaljuk. Ezek a kvázi-aritmetikai, illetve a súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre vonatkozó invariancia egyenletek. Ezután az invariancia egyenletet a kvázi-aritmetikai közepek egy általánosítására oldjuk meg.

A 3. fejezetben Gini és Stolarsky közepekkel foglalkozunk. Egy közös általánosítás segítségével azokat az invariancia egyenleteket, melyekben Gini vagy Stolarsky közepek szerepelnek, egy általánosabb egyenlet speciális eseteiként tárgyalhatjuk. A fejezet ezen egyenletek megoldásait mutatja be, melyhez a Maple V Release 9 komputeralgebra rendszert is használjuk.

1 Előzmények, terminológia

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres, nyílt intervallum. Egy folytonos, kétváltozós $M : I^2 \to I$ függvény közép I-n, ha

$$\min(x, y) \leqslant M(x, y) \leqslant \max(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

teljesül. Ha mindkét egyenlőtlenség szigorú minden $x \neq y$ esetén, akkor M egy szigorú közép I-n. Az I-n értelmezett M közép szimmetrikus, ha $M(x, y) = M(y, x)$ teljesül minden x, $y \in I$-re. Az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett M közép homogén, ha $M(tx, ty) = tM(x, y)$ teljesül minden t, x, $y \in \mathbb{R}_+$ esetén.

A számtani, a mértani és a harmonikus közép klasszikus példák $\mathbb{R}_+$-on értelmezett kétváltozós, szimmetrikus, homogén szigorú közepekre. Szintén jól ismert ezek egy közös általánosítása, a p paraméterű hatványközép:

$$M_p(x, y) := \begin{cases} \left(\dfrac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ha } p \neq 0, \\ \sqrt{xy}, & \text{ha } p = 0. \end{cases}$$

A kétváltozós Gini- illetve Stolarsky közepek fontos általánosításai a hatványközepeknek. A legáltalánosabb esetben (azaz $p \neq q$ esetén) az x és y

pozitív valós számok Gini közepe a

$$G_{p,q}(x,y) = \left(\frac{x^p + y^p}{x^q + y^q}\right)^{\frac{1}{p-q}},$$

valamint $(p-q)pq(x-y) \neq 0$ esetén az x és y pozitív valós számok Stolarsky közepe az

$$S_{p,q}(x,y) := \left(\frac{q(x^p - y^p)}{p(x^q - y^q)}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

formulával értelmezett.

A kvázi-aritmetikai közepek szintén nagyon fontos középosztályt alkotnak. Ha x és y egy nemüres, nyílt intervallum elemei és φ egy szigorúan monoton, folytonos függvény, akkor

$$\mathcal{M}_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right)$$

az x és y (φ által generált) kvázi-aritmetikai közepe.

Ezen középosztály egy lehetséges általánosítása a következő: Legyenek φ_1 és φ_2 szigorúan monoton, folytonos függvények úgy, hogy az I intervallumon a két függvény azonos értelemben szigorúan monoton, ekkor

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\varphi}}(x,y) := \varphi^{-1}(\varphi_1(x) + \varphi_2(y)) \qquad (x,\ y \in I), \tag{3}$$

az x és y általánosított kvázi-aritmetikai közepe, ahol

$$\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2), \qquad \varphi := \varphi_1 + \varphi_2.$$

Ha $M, N : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ két szigorú közép, akkor a két közép $K = M \otimes N$ Gauss kompozíciója a

$$K(x,y) = K\big(M(x,y), N(x,y)\big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+) \tag{4}$$

függvényegyenlet, az ún. invariancia egyenlet egyértelmű olyan K megoldása, amely maga is szigorú közép.

A dolgozatban a kvázi-aritmetikai közepek fenti általánosítására, illetve a Gini és a Stolarsky közepekre vonatkozó invariancia egyenleteket tanulmányozzuk és oldjuk meg.

2 Általánosított kvázi-aritmetikai közepek

A számtani közép két kvázi-aritmetikai középre vonatkozó invarianciáját (az ún. Matkowski–Sutô problémát) először Sutô oldotta meg, majd Matkowski ugyanazokat a megoldásokat találta gyengébb regularitás mellett ([43], [44], [38]). Ennek a problémának a természetes regularitási feltételek melletti általános megoldását Daróczy és Páles adták meg ([23]). Ugyanitt megoldották a kvázi-aritmetikai közepekre vonatkozó általános invariancia egyenletet. A súlyozott kvázi-aritmetikai közepekkel felírt invariancia egyenlet megoldása Jarczyk nevéhez fűződik ([30]). Daróczy és Páles eredményét négyszeres folytonos differenciálhatóságot feltételezve általánosítja a következő tétel, mely a számtani közép invarianciáját írja le az (3) képlettel definiált általánosított kvázi-aritmetikai közepekre vonatkozóan.

Tétel. (Baják–Páles [5]) *Legyenek φ_1, φ_2 és ψ_1, ψ_2 négyszer folytonosan differenciálható függvények egy I nemüres, nyílt intervallumon úgy, hogy $\varphi_1'(x)\varphi_2'(x) > 0$ és $\psi_1'(x)\psi_2'(x) > 0$ (azaz φ_1, φ_2 illetve ψ_1, ψ_2 azonos értelemben szigorúan monoton) minden $x \in I$ esetén. Ekkor a*

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^{-1}\left(\varphi_1(x) + \varphi_2(y)\right) + (\psi_1 + \psi_2)^{-1}\left(\psi_1(x) + \psi_2(y)\right) = x + y$$

függvényegyenlet pontosan akkor teljesül minden x, $y \in I$ esetén, ha

(i) *vagy léteznek p, a_1, a_2, c_1, c_2, b_1, b_2, d_1, d_2 valós konstansok, melyekre $p \neq 0$, $a_1 a_2 > 0$, $c_1 c_2 > 0$ és $a_1 c_1 = a_2 c_2$ teljesül úgy, hogy bármely $x \in I$ esetén*

$$\varphi_1(x) = a_1\,\mathrm{e}^{px} + b_1\,, \qquad \varphi_2(x) = a_2\,\mathrm{e}^{px} + b_2\,,$$

és

$$\psi_1(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-px} + d_1\,, \qquad \psi_2(x) = c_2\,\mathrm{e}^{-px} + d_2\,;$$

(ii) *vagy léteznek a, b, c, d_1, d_2 valós konstansok, melyekre $ac \neq 0$ teljesül úgy, hogy bármely $x \in I$ esetén*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = ax + b\,,$$

és

$$\psi_1(x) = c\,\varphi_2(x) + d_1\,, \qquad \psi_2(x) = c\,\varphi_1(x) + d_2.$$

3 Gini és Stolarsky közepek

Az invariancia egyenlet azon eseteit tárgyaljuk, melyekben az előforduló közepek mindegyike Gini vagy Stolarsky közép. Először átfogalmazzuk az invariancia egyenlet (4) alatti általános alakját:

Lemma. (Baják–Páles [8]) *Legyenek $M, N : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ homogén (szimmetrikus) szigorú közepek. Ekkor ezen két közép $M \otimes N$ Gauss kompozíciója szintén homogén (szimmetrikus). Továbbá, ha $K : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ homogén szigorú közép, akkor $K = M \otimes N$ - azaz teljesül a*

$$K(x, y) = K\big(M(x, y), N(x, y)\big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet - pontosan akkor, ha az

$$F_{K,M,N}(u) := \ln K\left(M(e^u, e^{-u}), N(e^u, e^{-u})\right) - \ln K(e^u, e^{-u}) \qquad (u \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett $F_{K,M,N} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós függvény azonosan eltűnik az egész számegyenesen. Abban az esetben, ha K, M, N analitikus függvények, akkor $F_{K,M,N}$ szintén analitikus és pontosan akkor tűnik el az egész számegyenesen, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_{K,M,N}^{(k)}(0) = 0.$$

Ha még ezen felül M, N és K szimmetrikus szigorú közepek, akkor az $F_{K,M,N}$ függvény páros, és pontosan akkor tűnik el az egész számegyenesen, ha a fenti deriváltak eltűnnek minden páros k esetén.

Ha r és s két különböző valós paraméter és μ egy Borel valószínűségi mérték a $[0, 1]$ intervallumon, akkor az

$$M_{r,s,\mu}(x, y) = \left(\frac{\int_0^1 (x^t y^{1-t})^r d\mu(t)}{\int_0^1 (x^t y^{1-t})^s d\mu(t)}\right)^{\frac{1}{r-s}}$$

módon értelmezett kétváltozós közép a Gini és a Stolarsky közepek közös általánosítása. Amennyiben a μ mérték megegyezik a $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ mértékkel (ahol

δ_x az x pontba koncentrált Dirac mértéket jelöli), akkor a fenti közép a $G_{r,s}$ Gini közepet adja, illetve ha μ a Lebesgue-mérték, akkor pedig az $S_{r,s}$ Stolarsky közepet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az általunk vizsgált hat invariancia egyenlet tekinthető az

$$M_{p,q,\kappa}(M_{a,b,\mu}(x,y), M_{c,d,\nu}(x,y)) = M_{p,q,\kappa}(x,y) \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+)$$

egyenlet hat különböző speciális esetének, ahol μ, ν és κ vagy a $[0,1]$ intervallumon értelmezett Lebesgue mértékkel, vagy a $\frac{\delta_0+\delta_1}{2}$ mértékkel egyenlők. A lemma alapján az invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha minden $u \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} F_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(u) := \ln\big(&M_{p,q,\kappa}(M_{a,b,\mu}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u}), M_{c,d,\nu}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u}))\big) \\ &- \ln\big(M_{p,q,\kappa}(\mathrm{e}^u,\mathrm{e}^{-u})\big) = 0, \end{aligned}$$

azaz

$$F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(0) = 0$$

minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Ahhoz, hogy az $M_{r,s,\mu}$ közép egy, a számolások során használhatóbb alakját megkapjuk, értelmezzük az

$$L_\mu(z) := \ln\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\mu_k\right)$$

függvényt, ahol μ_k a μ mérték k-adik centrált momentumát jelöli. Feltéve, hogy μ szimmetrikus az $\frac{1}{2}$-re, $\mu_{2k-1} = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Az L_μ függvény segítségével az $M_{r,s,\mu}$ közép fenti alakja a következő formában is írható:

Lemma. (Baják–Páles [8]) *Legyenek $r, s \in \mathbb{R}$ és μ egy Borel valószínűségi mérték a* $[0,1]$ *intervallumon. Ekkor*

$$M_{r,s,\mu}(x,y) = \exp\big(M^*_{r,s,\mu}(\ln x, \ln y)\big) \qquad (x,y \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $M^*_{r,s,\mu} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ a következő módon értelmezett:

$$M^*_{r,s,\mu}(u,v) := \frac{u+v}{2} + \frac{L_\mu(r(u-v)) - L_\mu(s(u-v))}{r-s}.$$

Hogy a számolásokat tovább egyszerűsítsük, megadjuk az $M_{r,s,\mu}$ közép egy approximációját. Ha $m \in \mathbb{N}$ és μ egy Borel valószínűségi mérték, akkor legyen

$$L_{\mu;m}(z) := \ln\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}\mu_k\right) \qquad (z \in \mathbb{R}),$$

valamint $r, s \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$M_{r,s,\mu;m}(x, y) = \exp\left(M^*_{r,s,\mu;m}(\ln x, \ln y)\right) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $M^*_{r,s,\mu;m} : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ a következő módon értelmezett:

$$M^*_{r,s,\mu;m}(u, v) := \frac{u + v}{2} + \frac{L_{\mu;m}(r(u - v)) - L_{\mu;m}(s(u - v))}{r - s}.$$

Az alábbi lemma azt állítja, hogy a magasabbrendű deriváltak számolása során az $M_{r,s,\mu}$ és L_μ függvények helyett dolgozhatunk az $M_{r,s,\mu;m}$ és $L_{\mu;m}$ csonkított függvényekkel.

Lemma. (Baják–Páles [8]) *Legyen μ egy Borel valószínűségi mérték. Ekkor minden olyan $m, i \in \mathbb{N}_0$ esetén, melyekre $i \leqslant m$, teljesül, hogy*

$$(L^{(i)}_\mu(0)) = (L^{(i)}_{\mu;m}(0)).$$

Továbbá, minden $r, s \in \mathbb{R}$ és $m, i, j \in \mathbb{N}_0$ esetén, melyekre $i + j \leqslant m$, igaz, hogy

$$\partial^i_1\partial^j_2 M_{r,s,\mu}(1, 1) = \partial^i_1\partial^j_2 M_{r,s,\mu;m}(1, 1).$$

A lemma azonnali következményeként kapjuk, hogy a számításainkban $k \leqslant m$ esetén az $F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}$ deriváltak 0-beli értéke helyett használhatjuk az $F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa;m},M_{a,b,\mu;m},M_{c,d,\nu;m}}$ deriváltak 0-beli értékét.

Következmény. (Baják–Páles [8]) *Legyenek $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ és μ, ν, κ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett Borel valószínűségi mértékek. Ekkor minden $k, m \in \mathbb{N}_0$ esetén, melyekre $k \leqslant m$, teljesül, hogy*

$$F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa},M_{a,b,\mu},M_{c,d,\nu}}(0) = F^{(k)}_{M_{p,q,\kappa;m},M_{a,b,\mu;m},M_{c,d,\nu;m}}(0).$$

Tehát az invariancia egyenletek megoldása során elegendő a fenti feltételeket vizsgálni. Mindegyik egyenlet tekinthető az

$$F_{M_{p,q,\kappa;k},M_{a,b,\mu;k},M_{c,d,\nu;k}}(u) = \\ M^*_{p,q,\kappa;k}(M^*_{a,b,\mu;k}(u,-u), M^*_{c,d,\nu;k}(u,-u)) - M^*_{p,q,\kappa;k}(u,-u) = 0$$

egyenlet megfelelő speciális esetének.

A fenti módszer alapján, a Maple komputeralgebra rendszer segítségével megadjuk a Gini illetve Stolarsky közepekre vonatkozó invariancia egyenletek megoldását. A következő tétel azt az esetet tárgyalja, amikor az egyenletben előforduló három közép mindegyike Gini közép, melyeknek paraméterei különbözőek is lehetnek.

Tétel. (Baják–Páles [6]) *Legyenek $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor a*

$$G_{p,q}(G_{a,b}(x,y), G_{c,d}(x,y)) = G_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

- *(i)* $a + b = c + d = p + q = 0$, *azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*
- *(ii)* $\{a, b\} = \{c, d\} = \{p, q\}$, *azaz a három közép egyenlő;*
- *(iii)* $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *és* $p + q = 0$, *azaz* $G_{p,q}$ *a geometriai közép és* $G_{a,b} = G_{-c-d}$;
- *(iv) léteznek* $u, v \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{u + v, v\}$, $\{c, d\} = \{u - v, -v\}$ *és* $\{p, q\} = \{u, 0\}$ *(ebben az esetben* $G_{p,q}$ *hatványközép);*
- *(v) létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{3w, w\}$, $c + d = 0$ *és* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(ekkor* $G_{p,q}$ *hatványközép és* $G_{c,d}$ *a geometriai közép);*
- *(vi) létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $a + b = 0$, $\{c, d\} = \{3w, w\}$ *és* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(ekkor* $G_{p,q}$ *hatványközép és* $G_{a,b}$ *a geometriai közép).*

Az alábbi tételben megadjuk a Stolarsky közepekre vonatkozó invariancia egyenlet megoldását.

Tétel. (Baják–Páles [7]) *Legyenek $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. Ekkor az*

$$S_{p,q}(S_{a,b}(x,y), S_{c,d}(x,y)) = S_{p,q}(x,y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$, *azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*
(ii) $\{a, b\} = \{c, d\} = \{p, q\}$, *azaz a három közép egyenlő;*
(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *és* $p + q = 0$, *azaz* $S_{p,q}$ *a geometriai közép és* $S_{a,b} = S_{-c,-d}$.

A következő tételekben jellemezzük a vegyes egyenleteket, azaz azokat az eseteket, amikor a közepek Gini és Stolarsky közepek is lehetnek.

Tétel. (Baják–Páles [8]) *Legyenek* $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. *Ekkor a*

$$G_{p,q}(S_{a,b}(x, y), G_{c,d}(x, y)) = G_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$, *azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*
(ii) létezik $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$ *és* $\{c, d\} = \{p, q\} = \{0, w\}$, *azaz a három közép egyenlő, és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*
(iii) létezik $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$, $\{c, d\} = \{0, -w\}$ *és* $p + q = 0$, *azaz* $G_{p,q}$ *a geometriai közép és az* $S_{a,b}$ *és* $G_{-c,-d}$ *közepek egyenlők, és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*
(iv) létezik $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $a + b = 0$, $\{c, d\} = \{3w, w\}$ *és* $\{p, q\} = \{2w, 0\}$ *(ekkor* $G_{p,q}$ *hatványközép és* $S_{a,b}$ *a geometriai közép);*
(v) létezik $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$, $\{c, d\} = \{-w, -2w\}$ *és* $\{p, q\} = \{0, -w\}$, *azaz* $S_{a,b}$ *a* w *paraméterű hatványközép és* $G_{p,q}$ *a* $-w$ *paraméterű hatványközép.*

Tétel. (Baják–Páles [8]) *Legyenek* $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. *Ekkor a*

$$G_{p,q}(S_{a,b}(x, y), S_{c,d}(x, y)) = G_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetke valamelyike fennáll:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$, *azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*

(ii) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{c, d\} = \{w, 2w\}$ *és* $\{p, q\} = \{0, w\}$*, azaz a három közép egyenlő, és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*

(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *és* $p + q = 0$*, azaz* $G_{p,q}$ *a geometriai közép és* $S_{a,b} = S_{-c,-d}$.

Tétel. (Baják–Páles [8]) *Legyenek* $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. *Ekkor az*

$$S_{p,q}(G_{a,b}(x, y), G_{c,d}(x, y)) = S_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*

(ii) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{c, d\} = \{0, w\}$ *és* $\{p, q\} = \{w, 2w\}$*, azaz a három közép egyenlő, és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*

(iii) $\{a, b\} = \{-c, -d\}$ *és* $p + q = 0$*, azaz* $S_{p,q}$ *a geometriai közép és* $G_{a,b} = G_{-c,-d}$*;*

(iv) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 3w\}$, $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *és* $c + d = 0$*, azaz* $G_{c,d}$ *a geometriai közép és* $S_{p,q}$ *a* $2w$ *paraméterű hatványközép;*

(v) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{c, d\} = \{w, 3w\}$, $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *és* $a + b = 0$*, azaz* $G_{a,b}$ *a geometriai közép és* $S_{p,q}$ *a* $2w$ *paraméterű hatványközép.*

Tétel. (Baják–Páles [8]) *Legyenek* $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$. *Ekkor az*

$$S_{p,q}(G_{a,b}(x, y), S_{c,d}(x, y)) = S_{p,q}(x, y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

invariancia egyenlet pontosan akkor teljesül, ha a következő esetek valamelyike fennáll:

(i) $a + b = c + d = p + q = 0$*, azaz mindhárom közép megegyezik a geometriai középpel;*

(ii) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{0, w\}$ *és* $\{c, d\} = \{p, q\} = \{w, 2w\}$*, azaz a három közép egyenlő, és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*

(iii) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{0, w\}$, $\{-c, -d\} = \{w, 2w\}$ *és* $p + q = 0$*, azaz* $S_{p,q}$ *a geometriai közép és a* $G_{a,b}$ *és* $S_{-c,-d}$ *közepek egyenlők és megegyeznek a* w *paraméterű hatványközéppel;*

(iv) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 3w\}$, $\{p, q\} = \{2w, 4w\}$ *és* $c + d = 0$, *azaz* $S_{c,d}$ *a geometriai közép és* $S_{p,q}$ *a* $2w$ *paraméterű hatványközép;*

(v) *létezik* $w \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $\{a, b\} = \{w, 2w\}$, $\{c, d\} = \{-w, -2w\}$ *és* $\{p, q\} = \{w, 2w\}$, *azaz* $S_{c,d}$ *a* $-w$ *paraméterű hatványközép és* $S_{p,q}$ *a* w *paraméterű hatványközép.*

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966.

[2] J. Aczél, *Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 38–49.

[3] J. Aczél and Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

[4] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[5] Sz. Baják and Zs. Páles, *Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **77** (2009), 133-145.

[6] Sz. Baják and Zs. Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means*, Comput. Math. Appl. **58** (2009), 334-340.

[7] Sz. Baják and Zs. Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means*, Appl. Math. Comput., Volume 216, Issue 11 (2010), 3219-3227.

[8] Sz. Baják and Zs. Páles, *Solving invariance equations involving homogeneous means with the help of computer*, Appl. Math. Comput., submitted.

[9] J. A. Baker, *A functional equation from probability theory*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 3, 767–773.

[10] W. Benz, *Functional equation problems in geometry*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 11–17.

[11] W. Benz, *A common characterization of Euclidean and hyperbolic geometry by functional equations*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), no. 3, 495–510.

[12] J. Błasińska-Lesk, D. Głazowska, and J. Matkowski, *An invariance of the geometric mean with respect to Stolarsky mean-type mappings*, Results Math. **43** (2003), no. 1-2, 42–55.

[13] P. Burai, *A Matkowski–Sutô type equation*, Publ. Math. Debrecen **70** (2007), no. 1-2, 233–247.

[14] Z. Daróczy, *On the Shannon measure of information*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **19** (1970), 9–24.

[15] Z. Daróczy, *On a class of means of two variables*, Publ. Math. Debrecen **55** (1999), no. 1-2, 177–197.

[16] Z. Daróczy, *Matkowski-Sutô type problem for conjugate arithmetic means*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 89–100, Dedicated to Professor Zenon Moszner on the occasion of his seventieth birthday.

[17] Z. Daróczy, *Functional equations involving means and Gauss compositions of means*, Nonlinear Anal. **63** (2005), no. 5-7, e417–e425.

[18] Z. Daróczy and G. Hajdu, *On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **69** (2005), no. 1-2, 58–67.

[19] Z. Daróczy, G. Hajdu, and C. T. Ng, *An extension theorem for a Matkowski-Sutô problem*, Colloq. Math. **95** (2003), no. 2, 153–161.

[20] Z. Daróczy and Gy. Maksa, *Nonnegative information functions*, Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ. Debrecen, Debrecen, 1977), North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 67–78.

[21] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Extension theorems for the Matkowski-Sutô problem*, Demonstratio Math. **33** (2000), no. 3, 547–556.

[22] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 2, 521–530.

[23] Z. Daróczy and Zs. Páles, *Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 1-2, 157–218.

[24] Z. Daróczy and Zs. Páles, *The Matkowski–Sutô problem for weighted quasi-arithmetic means*, Acta Math. Hungar. **100 (3)** (2003), 237–243.

[25] J. Domsta and J. Matkowski, *Invariance of the arithmetic mean with respect to special mean-type mappings*, Aequationes Math. **71** (2006), no. 1-2, 70–85.

[26] W. Eichhorn, *Functional equations in economics*, Applied Mathematics and Computation, vol. 11, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.

[27] Ger, Roman *On a system of functional equations occurring in projective geometry*, Rad. Mat., **2** (1992), no. 3-4, 189–200.

[28] C. Gini, *Di una formula compressiva delle medie*, Metron **13** (1938), 3–22.

[29] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.

[30] J. Jarczyk, *Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen **71** (2007), no. 3-4, 279–294.

[31] J. L. W. V. Jensen, *Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelvaerdier*, Nyt. Tidsskrift for Mathematik **16 B** (1905), 49–69.

[32] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entere les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179–193.

[33] K. Lajkó and F. Mészáros, *Functional equations stemming from probability theory*, Tatra Mt. Math. Publ. **44**, (2009), 65–80.

[34] L. Losonczi, *Equality of Cauchy mean values*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 1-2, 217–230.

[35] L. Losonczi, *Comparison and subhomogeneity of integral means*, Math. Inequal. Appl. **5** (2002), no. 4, 609–618.

[36] Gy. Maksa, *The general solution of a functional equation arising in information theory*, Acta Math. Hungar. **49** (1987), no. 1-2, 213–217.

[37] Z. Makó and Zs. Páles, *The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), no. 1, 8–23.

[38] J. Matkowski, *Invariant and complementary quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **57** (1999), no. 1, 87–107.

[39] J. Matkowski, *On invariant generalized Beckenbach-Gini means*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 219–230.

[40] J. Matkowski, *Lagrangian mean-type mappings for which the arithmetic mean is invariant*, J. Math. Anal. Appl. **309** (2005), no. 1, 15–24.

[41] Rao, C. Radhakrishna and Shanbhag, D. N. *Choquet-Deny type functional equations with applications to stochastic models*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, (1994).

[42] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag. **48** (1975), 87–92.

[43] O. Sutô, *Studies on some functional equations I.*, Tôhoku Math. J., **6** (1914), 1–15.

[44] O. Sutô, *Studies on some functional equations II.*, Tôhoku Math. J., **6** (1914), 82–101.

[45] S. Toader and G. Toader, *Complementaries with respect to Stolarsky means*, Automat. Comput. Appl. Math. **16** (2007), no. 2, 341–348.

[46] S. Toader and G. Toader, *Complementaries of Greek means with respect to Gini means*, Int. J. Appl. Math. Stat. **11** (2007), no. N07, 187–192.

Előadások

1. *A nonlinear form of the Hahn–Banach separation theorem*, 2nd International Students' Conference on Analysis, 2006, Sikfőkút (Noszvaj), Hungary.
2. *A nonlinear form of the Hahn–Banach separation theorem*, 6th joint conference on Mathematics and Computer Science (MaCS 06), 2006, Pécs, Hungary.
3. *On a Matkowski–Suto type equation*, 7th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2007, Będlewo, Poland.
4. *On a Matkowski–Suto type equation*, 3rd International Students' Conference on Analysis, February 3–6, Szczyrk, Poland.
5. *Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means*, Conference on Inequalities and Applications '07, 2007, Noszvaj, Hungary.
6. *Further results in solving functional equations with computer*, 8th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Poroszló, Hungary.
7. *Notes on approximating the Euclidean circle in square grids*, 4th International Students' Conference on Analysis, 2008, Zamárdi, Hungary.
8. *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means*, Numbers, Functions, Equations '08, 2008, Noszvaj, Hungary.
9. *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means*, institute seminar, Hausdorff Research Institute for Mathematics, 2008, Bonn, Germany.
10. *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means*, 9th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2009, Będlewo, Poland.

11. *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means*, 5th International Students' Conference on Analysis, 2009, Szare, Poland.
12. *Invariance equations for Gini and Stolarsky means*, 13th International Conference on Functional Equations and Inequalities, 2009, Małe Ciche, Poland.
13. *Invariance equations involving Gini and Stolarsky means*, 6th International Students' Conference on Analysis, 2010, Sikfőkút (Noszvaj), Hungary.
14. *Invariance equations involving Gini and Stolarsky means*, 10th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2010, Zamárdi, Hungary.
15. *The solution of invariance equations involving homogeneous means with the help of computer*, 48th Internation Symposium on Functional Equations, 2010, Batz-sur-Mer, France.
16. *Gauss composition of homogeneous means*, János Bolyai Memorial Conference, August 30–September 4, Budapest, Hungary–Marosvásárhely, Romania.
17. *A nonlinear form of the Hahn–Banach separation theorem*, Conference on Inequalities and Applications '10, 2010, Hajdúszoboszló, Hungary.
18. *On the equality problem in a general class of functions*, 11th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2011, Wisła, Poland.
19. *On the equality problem in a general class of means*, 7th International Students' Conference on Analysis, 2011, Wisła, Poland.
20. *Gauss composition and invariance equation for two-variable means*, 49th Internation Symposium on Functional Equations, 2011, Graz, Austria.

Publikációk

1. J. Farkas, Sz. Baják and B. Nagy, *Approximating the Euclidean circle in the square grid using neighbourhood sequences*, Pure Math. Appl. (PU.M.A.) **17** (2006), no. 3-4, 309–322.
2. Sz. Baják and Zs. Páles, *Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **77** (2009), 133-145.
3. Sz. Baják and Zs. Páles, *A separation theorem for nonlinear inverse images of convex sets*, Acta Math. Hungar. **124** (2009), no. 1-2, 125–144.
4. Sz. Baják and Zs. Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means*, Comput. Math. Appl. **58** (2009), 334-340.
5. Sz. Baják and Zs. Páles, *Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means*, Appl. Math. Comput., Volume 216, Issue 11 (2010), 3219-3227.
6. Sz. Baják and Zs. Páles, *Solving invariance equations involving homogeneous means with the help of computer*, Appl. Math. Comput., submitted.

A disszertációban ismertetett új eredmények a 2., a 4., az 5. (megjelent) és a 6. (közlésre benyújtott) cikkeken alapulnak.