Abstract of PhD thesis
Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

# Graph labelings with restrictive conditions
# Gráfcímkézések korlátozó feltételekkel


**Veronika Halász**


Supervisor/Témavezető
Dr. Zsolt Tuza


University of Debrecen
PhD School in Informatics

Debreceni Egyetem
Informatikai Tudományok Doktori Iskola



Debrecen, 2015

**Prepared at**
the University of Debrecen
PhD School in Informatics

**Készült**
a Debreceni Egyetem
Informatikai Tudományok Doktori Iskolájának
Elméleti számítástudomány, adatvédelem és kriptográfia
programja keretében

# 1 Introduction

In the highly influential paper [1], Hale introduced graph coloring problems with motivation from frequency assignment. This is the following: The radio channels are represented by nonnegative integers and have to be assigned to transmitters efficiently, such that the channels would not interfere with each other. It means that close transmitters receive different channels, and very close transmitters receive channels greater apart.

Since then, several coloring models have been proposed for this kind of problems, perhaps the most intensively studied one is $L(2,1)-$labeling. First investigated by Griggs and Yeh in [2], it requires to assign nonnegative integer labels to the vertices of a given graph $G$ in such a way that vertices having a common neighbor must get distinct labels, and the labels of adjacent vertices must differ at least by 2. The graph invariant $\lambda_{2,1}(G)$ is defined as the smallest possible value of the largest label in such a labeling of $G$.

Analogously, an $L(j_1, j_2)-$labeling of $G$ is an assignment of nonnegative integer labels to the vertices of $G$ in such a way that the labels of adjacent vertices differ by $j_1$ or more, and those of vertices at distance 2 apart differ at least by $j_2$. A comprehensive survey of $L(j_1, j_2)-$labeling and bounds on the minimum $\lambda_{j_1,j_2}(G)$ of the largest label, with nearly 200 references, was given by Calamoneri in [3] .

These notions extend in a natural way to larger distances, too. Let $j_1, j_2, ..., j_s \in \mathbb{N}$ be any integers. It is traditionally assumed that $j_1 \geq j_2 \geq ... \geq j_s$, due to motivation and practical considerations from frequency assignment, although one would get nontrivial theoretical problems without this restriction, too. An $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$labeling of a graph $G = (V, E)$ is an assignment $\varphi : V \to \{0, 1, 2, ...\}$ such that $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq j_i$ for all pairs of vertices $u, v$ whose distance in $G$ is equal to $i$ $(i = 1, 2, ..., s)$. The *span* of an $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$labeling $\varphi$ is the largest label assigned by $\varphi$ to the vertices. In analogy to $\lambda_{2,1}$, $\lambda_{j_1,j_2,...,j_s} = \min_\varphi \max_{v \in V}(\varphi(v))$ is defined as the smallest possible span taken over all $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$labelings of $G$.

The labeling gives a partition on the vertex set of the graph. Another type of graph partition is when the edge set of the graph is partitioned in a specified way. In general, an edge decomposition of a graph $G = (V, E)$ is a collection of graphs

$G_i = (V_i, E_i)$ such that each $G_i$ is a subgraph of $G$, any two $G_i$, $G_j$ $(i \neq j)$ are edge-disjoint, and their union contains all edges of $G$.

The study of edge decompositions started with the famous paper [4] of Kirkman in 1847. Still, after more than one and a half centuries, quite recently Bondy and Szwarcfiter introduced a natural side condition [5] which has led to an interesting new direction.

# References


**[1]** W. K. Hale, Frequency assignment: theory and application, Proc. IEEE, 68 (1980), 1497-1504.

**[2]** J. R. Griggs, R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance two. SIAM J. Discrete Math., 5 (1992), pp. 586-595

**[3]** T. Calamoneri: The $L(h,k)-$labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. Comput. J. 54 (2011), 1344-1371. (A later version is available online at http://wwwusers.di.uniroma1.it/~calamo/PDF-FILES/survey.pdf)

**[4]** T. P. Kirkman, On a problem in combinations, Cambridge and Dublin Math. J. 2 (1847), 191-204.

**[5]** J. A. Bondy and J. L. Szwarcfiter, Induced decompositions of graphs, Journal of Graph Theory 72 (2013), 462-477.

# 2 Objectives

During my theoretical work I dealt with a special vertex labeling of two graph classes, namely the $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$labeling of trees and unit interval graphs. The studied values were known for $L(2,1)-$ and $L(3,2,1)-$labelings, I generalized them for arbitrary natural number $j$.

In addition to the theoretical studies I examined the problem in practical terms. I chose the mixed integer linear programming for these studies. I formalized the distance-constrained labeling problem in terms of integer programming. This allowed me to make some comparisons between the graph model and a bit more precise model of the frequency assignment problem that was introduced by me.

The last section of the thesis is about edge-decomposition. The main result here is the solution of a quite recently defined problem.

# 3 Results

## 1. Computing bounds for $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$labeling numbers - Theoretical

### A) Trees

i) I constructed the so-called level-wise regular trees, that contain each tree with given diameter and level-wise maximum degrees as a subtree. Because of the containment the labeling number of that is the greatest one among all.

ii) First, I gave a lower bound for the radio number of the above trees using the minimum weighted Hamiltonian paths in the weighted power graphs. The power graphs are complete, so the orderings defining minimum weighted Hamiltonian paths had to be found among all possible ones. After that I counted the weights exactly.

iii) I proved that there exist proper labelings of the level-wise regular trees with the above values as radio numbers. So the counted values for the weights of the minimum Hamiltonian paths give upper bounds for the $L(d, d-, ..., 2, 1)-$ labeling numbers of all trees with the same parameters ($d$ denotes the diameter).

**B) Unit interval graphs**

i) I determined the unit interval graphs that contain all unit interval graphs with given $\omega$ clique number as subgraphs.

ii) I computed the $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$circular labeling number of the paths.

iii) I gave an upper bound for the $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$labeling numbers of the graphs from i) using the value from ii).

## 2. Study of a more precise model of the frequency assignment with mixed integer linear programming - Applied

i) I introduced a new model for the frequency assignment problem (a call it euclidean model), which describes it more precise. I chose the test graphs, for that the calculations in the following were done.

ii) I formalized the problem in terms of mixed integer linear programming in the case of both models.

iii) I performed some comparisons between the running times of the calculations for the two models. In order to get them more effective I made several attempts to improve the formulations.

## 3. Edge decompositions - Theoretical

i) I gave an upper bound for the number of edges of graphs with $n$ vertices, whose edge set is decomposable into edge-disjoint induced subgraphs isomorphic to $F$, if $F$ is a graph without isolated vertices, and $F$ is not a complete multipartite graph, and then the similar upper bounds also for some special cases of these graphs $F$.

ii) Using the above result an open problem stated in a recent paper of Bondy and Szwarcfiter was solved.

iii) In the case of the complete multipartite graphs $F$, excluded only the completeness, a similar estimation was given for the number of edges of graphs with $n$ vertices, whose edge set is decomposable into edge-disjoint induced subgraphs isomorphic to $F$.

# 4. Bevezetés

A frekvenciakiosztásra irányuló gráfszínezési problémákat Hale vezette be egy igen meghatározó cikkében [1]. Ez a következő: a rádiócsatornákat nemnegatív egész számok reprezentálják, és ezeket kell hozzárendeli az adókhoz hatékonyan úgy, hogy a csatornák között ne lépjen fel interferencia. Ez azt jelenti, hogy az egymáshoz közeli adók különböző csatornákat, a nagyon közel lévőek pedig nagyobb távolságra eső csatornákat kapnak.

Ezt követően több színezési modell is született ezen fajta problémára, ezek közül talán az $L(2,1)-$címkézés a leginkább tanulmányozott. Ezzel először Griggs és Yeh foglalkozott [2], a feladat az, hogy egy adott $G$ gráf csúcsaihoz kell nemnegatív egész címkéket rendelni oly módon, hogy a közös szomszéddal rendelkező csúcsok címkéje különböző legyen, a szomszédosakénak különbsége pedig legalább 2 legyen. A gráf $\lambda_{2,1}(G)$-vel jelölt paramétere $G$ összes lehetséges jó címkézésének maximális címkéje közül a legkisebb.

Ezzel analóg módon, $G$ egy $L(j_1, j_2)-$címkézésénél úgy kell természetes számokat rendelni $G$ csúcsaihoz, hogy a szomszédos csúcsok címkéje legalább $j_1$-gyel, a másodszomszédoké pedig legalább $j_2$-vel különbözzön. Az $L(j_1, j_2)-$címkézésről és $\lambda_{j_1,j_2}(G)$ minimumának korlátairól, becsléseiről Calamoneri közölt egy részletes összefoglalót [3], közel 200 hivatkozással együtt.

A fenti kifejezések természetes módon terjeszthetőek ki nagyobb távolságokra is. Legyenek $j_1, j_2, ..., j_s \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes számok. Mivel a probléma a frekvenciakiosztás modelljeként alakult ki, hagyományosan feltesszük, hogy $j_1 \geq j_2 \geq ... \geq j_s$, bár ezen megkötés nélkül is egy nemtriviális elméleti problémát definiálhatnánk. Egy $G(V, E)$ gráf $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$címkézése egy olyan $\varphi : V \to \{0, 1, 2, ...\}$ hozzárendelés, amelynél $|\varphi(u) - \varphi(v)| \geq j_i$ bármely két $u, v$ csúcsra fennáll, melyek távolsága $i$, $(i = 1, 2, ..., s)$. Egy $\varphi$-vel jelölt $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$címkézés sávszélessége a $\varphi$ által a csúcsokhoz rendelt címkék legnagyobbika. $\lambda_{2,1}$-gyel analóg módon az $\lambda_{j_1,j_2,...,j_s} = \min_\varphi \max_{v\in V}(\varphi(v))$ paramétert $G$ összes lehetséges $L(j_1, j_2, ..., j_s)-$címkézésének sávszélességei közül a minimumként definiáljuk.

A címkézések a gráf csúcsosztályának egy partícionálását eredményezik. Egy másik fajta gráfbeli partícionálás során a gráf élhalmazát partícionáljuk egy bizonyos elv szerint. Általánosan, egy $G(V, E)$ gráf éldekompozíciója a $G_i = (V_i, E_i)$

gráfok egy összessége, ahol az összes $G_i$ egy részgráfja $G$-nek, bármely két $G_i$, illetve $G_j$ $(i \neq j)$ éldiszjunkt, és az uniójuk tartalmazza $G$ összes élét.

Az éldekompozíciók vizsgálatát Kirkman kezdte el 1847-ben egy híres cikkével [4]. Majdnem másfél évszázaddal később, csak a közelmúltban definiált Bondy és Szwarcfiter egy ehhez kapcsolódó problémát [5], amely egy új, érdekes kutatási irányt eredményezett.

## Hivatkozások


**[1]** W. K. Hale, Frequency assignment: theory and application, Proc. IEEE, 68 (1980), 1497-1504.

**[2]** J. R. Griggs, R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance two. SIAM J. Discrete Math., 5 (1992), pp. 586-595

**[3]** T. Calamoneri: The $L(h, k)-$labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. Comput. J. 54 (2011), 1344-1371. (A later version is available online at http://wwwusers.di.uniroma1.it/~calamo/PDF-FILES/survey.pdf)

**[4]** T. P. Kirkman, On a problem in combinations, Cambridge and Dublin Math. J. 2 (1847), 191-204.

**[5]** J. A. Bondy and J. L. Szwarcfiter, Induced decompositions of graphs, Journal of Graph Theory 72 (2013), 462-477.

# 5. Célkitűzések

Elméleti munkám során egy speciális csúcscímkézéssel foglalkoztam két gráfosztályra vonatkozóan, méghozzá a fák és az egységintervallum-gráfok $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$címkézésével. A vizsgált paraméterek már ismertek voltak az $L(2,1)-$ és az $L(3,2,1)-$címkézések esetén, én ezeket általánosítottam tetszőleges $j$ természetes számra.

Az elméleti kutatás mellett gyakorlati szempontokból is vizsgáltam a problémát. Ezen vizsgálatokhoz a vegyes egészértékű-lineáris programozást választottam módszerként. A távolság szerint korlátozott címkézés problémáját formalizáltam az egészértékű programozás nyelvén. Ez lehetővé tette számomra néhány összehasonlítás elvégzését a gráfelméleti modell és a frekvenciakiosztási probléma egy precízebb modellje között. Ez utóbbit én definiáltam.

Az értekezés utolsó fejezete éldekompozíciókról szól. A fő eredmény egy a közelmúltban definiált probléma megoldása.

# 6. Eredmények

## 1. Korlátok kiszámítása $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$címkézési számra - Elméleti

### A) Fák

i) Megkonstruáltam az úgynevezett szintenként reguláris fákat, amelyek adott átmérő és szintenkénti maximális fokszámok mellett az összes többi ilyen paraméterű fát tartalmazzák részgráfként. Az összes közül mindig ezeknek a legnagyobb a címkézési száma a tartalmazás miatt, így ez egyben felső korlát is a többiére nézve.

ii) Először a fenti fák rádiócímkézési számára kerestem alsó korlátot a súlyozott hatványgráfbeli minimális súlyú Hamilton-utak segítségével. A hatványgráfok teljesek, tehát az összes lehetséges sorrend közül találni kellett egy-egy olyat, amelyik minimális súlyú utat definiál. Ezek után pontosan kiszámoltam a súlyokat.

iii) Bebizonyítottam, hogy ezen értékek mint rádiócímkézési számok mellett létezik jó rádiócímkézése a szintenként reguláris fáknak. Tehát a kiszámolt értékek a minimális Hamilton-utak súlyaira vonatkozóan valójában felső korlátot adnak az összes azonos paraméterű fa $L(d, d-, ..., 2, 1)-$címkézési számára ($d$ az átmérőt jelöli).

**B) Egységintervallum-gráfok**

i) Meghatároztam azokat az egységintervallum-gráfokat, amelyek adott $\omega$ klikkszám mellett az összes $\omega$ klikkszámú egységintervallum-gráfot tartalmazzák részgráfként.

ii) Meghatároztam az utak $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$cirkuláris címkézési számát.

iii) A ii)-beli érték felhasználásával adtam egy felső korlátot az i)-ben meghatározott gráf $L(j, j-1, ..., 2, 1)-$címkézési számára, amely a tartalmazások miatt felső korlát az összes azonos klikkszámú egységintervallum-gráféra is.

## 2. A frekvenciakiosztás egy precízebb modelljének vizsgálata vegyes egészértékű-lineáris programozással - Alkalmazott

i) Bevezettem egy új modellt (euklideszinek nevezem) a frekvenciakiosztási feladatra, amely precízebben írja le azt. Kiválasztottam azokat a tesztgráfokat, amelyekre az összehasonlítások vonatkoztak a továbbiakban.

ii) Formalizáltam a problémát a vegyes egészértékű-lineáris programozás nyelvén mindkét modell esetében.

iii) Összehasonlításokat végeztem a két modellbeli számítások futási időigényére vonatkozóan. A hatékonyabbá tétel érdekében több módon változtattam az euklideszi modell formalizmusán.

## 3. Éldekompozíciók - Elméleti

i) Az izolált csúcs nélküli, nem teljes multipartícionális $F$ gráfok esetére, illetve ezek néhány speciális esetére külön is, megadtam egy-egy felső korlátot az $n$

csúcsú, $F$-fel izomorf éldiszjunkt részgráfokra felbontható élhalmazú gráfok élszámára.

ii) Ennek felhasználásával lett megválaszolva egy probléma, amelyet a közelmúltban írt cikkben vetett fel Bondy és Szwarcfiter.

iii) Csupán a teljességet kizárva, a teljes multipartícionális $F$ gráfok esetére is meg lett adva egy hasonló becslés az $n$ csúcsú, $F$-fel izomorf éldiszjunkt részgráfokra felbontható élhalmazú gráfok élszámára.

# 7 Publications/Publikációk

1. Veronika Halász, Zsolt Tuza: Asymptotically optimal induced decompositions, Applicable Analysis and Discrete Mathematics 8 (2014), pp. 320-329, DOI: 10.2298/AADM140718009H, 5-Year Impact Factor: 0,847

2. Veronika Halász, Zsolt Tuza: Distance-constrained labeling of complete trees, Discrete Mathematics 338 (2015), pp. 1398-1406, DOI: 10.1006/j.disc.2015.02.016, 5-Year Impact Factor: 0,598

## Presentation/Előadás

1. Veronika Halász, Zsolt Tuza: Distance-constrained labelings of trees, Workshop Cycles and Colourings, 7-12. 9. 2014, High Tatras, Slovakia