



**A matematikai problémamegoldás
iskolai alkalmazásairól**

doktori értekezés tézisei

**On school applications
of the mathematical problem-solving**

PhD thesis

Kovács András

Debreceni Egyetem

Debrecen, 2006.

Tartalomjegyzék

1. Témaválasztás	1.
2. Kutatási célok, módszerek	2.
3. Kutatási hipotézisek	3.
4. Kutatási eredmények	5.
5. Összegzés	8.

Contents

1. On the choice of the topic	10.
2. Objectives and methods of the research	11.
3. Hypotheses of the research	12.
4. Results of the research	14.
5. Summary	17.
6. Bibliográfia/Bibliography	18.
6. Publikációk/List of Publications	19.

1. Témaválasztás

1984-ben, az egyetem elvégzése után kezdtem középiskolai matematikatanárként dolgozni. Az eltelt években kollégáimmal együtt azt figyeltük meg, hogy a tanulók tudása évről-évre, folyamatosan romlik. 1995-től egyetemen tanítom a tanárszakos hallgatókat. Az itteni tendencia sajnos ugyanezt a mintát követi. Ezt a szubjektív és helyi tapasztalatot hazai és nemzetközi felmérések igazolták. Így a Magyarországon működő Országos Közoktatási Intézet a 80-as évek közepétől a (4., 6., 8. 10. és 12. évfolyamokra kiterjedően évfolyamonként több ezer tanuló bevonásával) *MONITOR* néven 6 alkalommal felmérést végzett. Ezek a kulturális eszköztudást, azaz az információk megszerzésének képességét mérték. A kapott eredmény azt mutatta, hogy „a teljesítménycsökkenés jelentős”, sőt a tanulói „teljesítmények szóródása is növekedett”. 2000-ben és 2003-ban 15 esztendőes tanulókkal, (a modern társadalomban való hatékony és sikeres részvételhez elengedhetetlen eszköztudás mértékének megállapítására) *PISA* néven ismertté vált felmérést végeztek. A PISA-felmérés megerősítette a MONITOR vizsgálat legfontosabb tanulságait.

Mivel legjobbjaink a világ élvonalában vannak, ezért az oktatás hatékonyságának javítása leginkább a gyengébb tanulókkal való eredményesebb foglalkozással érhető el. Világos, hogy a kevésbé jó tanulókra nem a sikeres, hanem inkább a hibás problémamegoldás jellemző. Ezért a célunk az, hogy a problémamegoldó gondolkodás lépéseinek felhasználásával olyan könnyen alkalmazható eljárást próbáljunk kidolgozni, amelynek ismeretében a matematikát oktató tanárok eredményesebben tudnak segíteni a lemaradó tanulóikon. Az elképzelésünk szerint egy ilyen eljárás alkalmas lehet például a hibák leírására és csoportosítására.

Ha a tanár ismeri a diákok hibáit, és tudja, hogy ezek milyen hibás problémamegoldásból származnak, akkor könnyebben hozzá tud kezdeni a hibák kijavításához. Emiatt először a hibák olyan vizsgálatát tűztük ki célul, amely figyelembe veszi a problémamegoldó gondolkodást. A hibakutatás témáját Sümegi László későbbi kollégám ajánlotta 1994-ben a figyelmembe. Ezt a kezdeti vizsgálataimat egészítette ki egy teljesebb rendszerré témavezetőm, Nagy Péter, aki az elmélet teljesen új alkalmazási területeire mutatott rá.

A problémamegoldás hibákon keresztül kidolgozott elméletének ismeretében tudatosan próbáltuk meg szétbontani a feladatokat összetevőire, és vizsgáltuk meg, hogyan lehet ezek alkalmazásával tudatossá, tehát megtanulhatóvá tenni a tanulóknak magát a problémamegoldó gondolkodást. Egy másik, tanárokkal végzett kísérletben a problémamegoldó folyamathoz kapcsolódó kérdésekre válaszolva, tudatosan próbáltuk meg elemezni a tevékenységünket. Ahhoz hasonlóan jártunk el, ahogyan azt könyvében Pólya György is tanácsolta. A kérdéseket azonban megpróbáltuk úgy formálni, hogy alkalmasak legyenek új körülmények közötti (például számítógépes) használatra.

2. Kutatási célok, módszerek

A disszertációt képező elméleti elgondolás kísérleti alapját a hibákra vonatkozó gyakorlati vizsgálat képezi. Kutatási módszerünknek az általánosan szokásos-, a probléma megoldásban részt vevő személyek szóbeli megnyilvánulása alapján vezetett jegyzőkönyvek kiértékelésére épülő eljárás helyett iskolai írásbeli számonkérések elemzését végeztük el, melyet az esetleges kérdéses esetekben egészítettünk ki szóbeli megkérdezésekkel. (A dolgozatok saját és kollégáim tanítási gyakorlatából származnak.)

A hibák kategorizálásakor néhány alapvető követelménynek eleget kell tennünk. A csoportokat úgy kell kialakítanunk, hogy valamennyi hibát egyértelműen be tudjuk sorolni a megfelelő osztályba és a kategorizálás viszonylag könnyen végrehajtható tevékenység kell, hogy legyen.

Ennek a munkának az elején iskolai dolgozatokban előforduló algebrai átalakítások hibáit dolgoztuk fel. Az algebrai átalakításokkal kapcsolatos hibák felismerése és csoportba sorolása a többinél egyszerűbb. Az általános, több területet felölelő problémák helyett; konkrét, egy matematikai témakörön belüli feladatmegoldás gondolatmenetének tanulmányozása tapasztalataink szerint csak megkönnyíti az egyes gondolkodási lépések és az ezekhez kötődő hibák felismerését, de a jellegüket nem változtatja meg.

A problémamegoldó gondolkodás ismeretében a tanulókat segítő utasításokat alkottunk. Ezeket 1999-től az egyetemen szervezett tanártovábbképzéseinken próbáltuk ki.

3. Kutatási hipotézisek

A magyarországi matematikaoktatás hagyományosan a Pólya-féle heurisztikus módszert követi. Kézenfekvő tehát, hogy akkor is ehhez forduljunk, ha a sikeres problémamegoldás helyett a problémamegoldási folyamat hibáit kívánjuk megvizsgálni.

A matematikának a gyakorlati tapasztalatok általánosításából létrejött Pólya-féle elgondolását össze lehet kapcsolni a pszichológus Lénárd Ferencnek a gondolkodási folyamatot leíró, tudományos kísérletek jegyzőkönyveiből született elméletével. A kétféle megközelítés együtt olyan eredményt szolgáltat, amely egy lehetséges felépítését adhatja az iskolai problémamegoldó gondolkodásnak, és ezáltal segítséget nyújthat

(1) a matematikai hibák leírásához;

(2) a matematikai problémamegoldást segítő kérdések, illetve utasítások megfogalmazásához.

Lénárd Ferenc elgondolása – bizonyos módosításokkal – itt is alkalmazható. E szerint a gondolkodás mindig két, különböző szinten lejátszódó folyamat eredménye.

A *gondolkodási fázisok* a gondolkodási folyamat egészére vonatkozó lépéseket jelentenek. Az ezekből felépített makrostruktúra szerkezete véleményünk szerint a következő:

1. Ténymegállapítás

2. Megoldási javaslat

3. Kritika

A kapott eredményhez úgy jutottunk, hogy a Lénárd elgondolásában szereplő, dőlt betűvel jelölt következő fázisokat elhagytuk.

(F1) A *probléma módosítása* mint gondolkodási fázis a megoldási javaslat – Pólyánál tervekészítés – egyfajta típusát jellemzi, ezért úgy tekintettük, hogy ez nem alkot önálló részt a gondolkodási fázisok között.

(F2) A *mellékes mozzanatok említése* is a tervekészítés hibáját jelzi. Ez a lépés az általunk vizsgált iskolai környezetben nem volt kimutatható.

(F3-F5) Az *érzelmi kategóriákat* (csodálkozás, tetszés; bosszankodás; kételkedés) nem vizsgáljuk, mivel ezt a dolgozatokból nem tudtuk meghatározni.

(F6) A *munka feladása* a megoldási javaslat hibájára, hiányosságára vezethető vissza. Mint hiba, az ott előforduló hibák következményének tekinthető, nem pedig önálló gondolkodási lépésnek.

A gondolkodási lépéseket nem csak az egész gondolkodási folyamat, hanem az egyes lépések kis környezetei, az úgynevezett mikrostruktúra részei is befolyásolják. Úgy gondoljuk, hogy ilyen módon az alábbi *gondolkodási műveletekhez* jutunk.

- a) Analízis
- b) Szintézis
- c) Összefüggések felfogása
- d) Kiegészítés
- e) Rendezés
- f) Analógia.

Ezzel a felépítéssel úgy is sikerült a céljainkat megvalósítani, hogy Lénárd öt gondolkodási műveletét nem használtuk fel.

(M1) Az *elvonás* (absztrahálás) valamely egész egy tulajdonságát emeli ki. Mivel ez is az egésznek részeire bontásakor jelentkezik, így az elvonást az analízis specifikus formájának tekintjük.

(M2-M3) Az *összehasonlítás* és az *elvont adatok összehasonlítása* tárgyak, illetve fogalmak azonosságát vagy különbözőségét tárja fel. Ez a két utóbbi lépés az összefüggések felfogása speciális esetének tekinthető.

(M4-M5) Miután Lénárd a kiegészítés alapeseteként tárgyalja az *általánosítást* (generalizálást) és a *konkretizálást*, így felépítésünkben az kell, hogy következzen, ezeket mi sem vesszük a gondolkodási műveleteknél figyelembe.

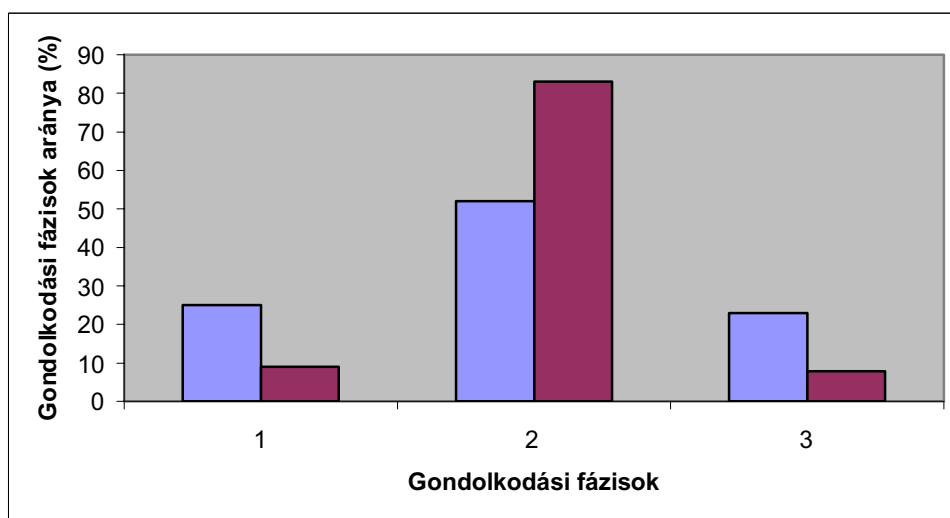
Hipotézisünk szerint a matematikai problémamegoldás folyamata leírható az előzőekben felvázolt struktúrával.

4. Kutatási eredmények

A kutatási hipotézisünk igazolására megmutatjuk, hogy az iskolai matematika oktatásban előforduló hibák kategorizálására a felvázolt elképzelés lehetőséget ad. Ezen kívül példát adunk arra, hogyan lehet a problémamegoldás szerkezetét felhasználni a tanulók megsegítésére.

1995-ben kezdtünk el a hibákkal foglalkozni. 1274 olyan algebrai feladat megoldását vontuk be a vizsgálatokba, amelyekben valamilyen hibát találtunk. Az 1274 hibás feladatmegoldásban összesen 1509 helytelen dolgot találtunk.

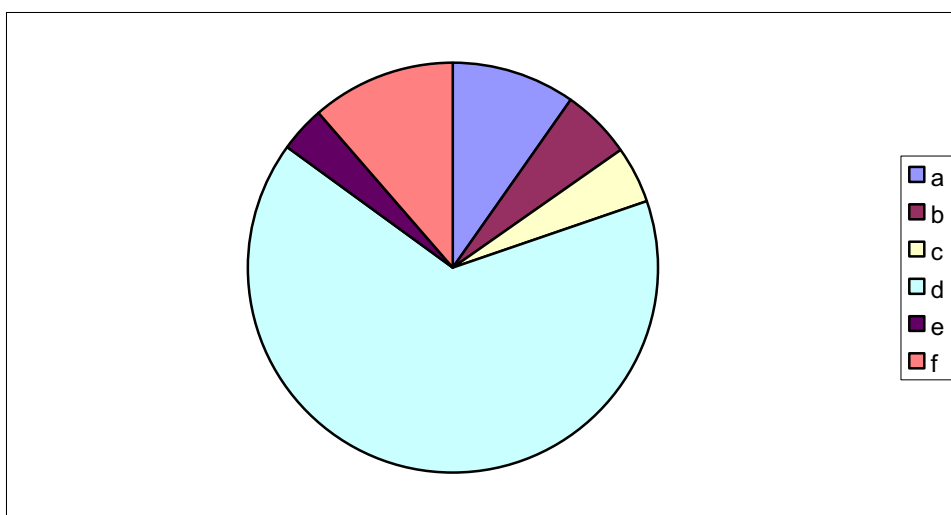
A Lénárd által és az általunk közzétett számadatok összehasonlítását érdemes grafikonon is ábrázolni. (A Lénárd által kapott értékeket mindig a bal oldali oszlop jelöli.)



A fenti ábra egy sor érdekes tényre utal: most kettőt emelünk ki közülük.

- (i) Mivel az algebrai átalakítások feltételeinek meghatározása (az érettségi követelmények szerint) nem kötelező, így a ténymegállapítás szintje meglehetősen alacsony.
- (ii) A magyar matematika érettségi a kritikát nem mindig tartja fontosnak. Sajnálatos módon az algebrai átalakítások után sem kötelező ennek a lépésnek a végrehajtása.

A mikrostruktúra elemei grafikonon ábrázolhatók. Az általunk megkapott eredményeket azonban most nem tudjuk összehasonlítani Lénárd megfelelő méréseivel. Ezért itt az adatokat elegendő kördiagramon szemléltetni.



Ha a gondolkodási fázisok és műveletek közül kihagyjuk a fölösleges vagy más helyen már szereplő kategóriákat, akkor a gondolkodási folyamat e két összetevője közötti kapcsolatok már egyértelműen szemléltethetők. Ezt úgy végezzük el, hogy egy gondolkodási fázist rögzítve végigmegyünk az összes általunk megvizsgált gondolkodási műveleten és megszámloljuk, hogy az egyes esetekben hány hiba fellépését tapasztaljuk. Ezt követően egy másik makrostruktúrabeli elemmel elvégezzük ugyanezt addig, amíg minden lehetséges párosítást figyelembe nem vettünk. A besorolásokat egyértelműen elvégezve mind az 1509 különböző hibának meg kell találni a helyét.

	a) analízis	b) szintézis	c) összefüggések felfogása	d) kiegészítés	e) rendezés	f) analógia
1. ténymegállapítás	31	27	24	12	31	11
2. megoldási javaslat	92	32	20	933	17	160
3. kritika	23	26	22	39	9	—

Pólya György elgondolása a problémamegoldó folyamathoz csatlakozó gondolkodás lépéseit nem bontja le kis, elemi szintekig. A rendszernek a matematikában való felhasználását viszont nagyban megnövelik azok a segítő

tanácsok, rávezető kérdések, amelyek a problémamegoldás szerkezeti részeire világítanak rá. Ez a felépítés azonban nem tekinthető véglegesnek és lezártnak. Ha munkánkat Pólya György szellemiségének megfelelően kívánjuk folytatni, akkor a problémamegoldó gondolkodásra vonatkozó kérdéseinket érdemes az előzőekben ismertetett táblázat figyelembevételével megterveznünk. (Vastag betűvel a Pólya-féle változatot jelöltük.)

- (1/a) Mi a feladat? **Mi van megadva?** Válaszd szét az adatokat és a megoldani kívánt problémát részekre.
- (1/b) Elegendők-e az adatok a probléma megoldásához?
⋮
- (2/c) **Nem talákoztál már a feladattal? Esetleg a mostanítól egy kissé eltérő formában?**
⋮
- (3/d) **Nem tudnád másképp is levezetni az eredményt?**
⋮
- (3/f) A részletek kis megváltoztatásával kapott rokon (speciális, általános) problémák eredményei igazolják a megoldást?

A pszichológia felhasználásával így egy olyan módszerhez juthatunk, amely a hibák elemzésén és csoportosításán túlmenően azok kijavítására is alkalmas. Egyben megbizonyosodtunk arról, hogy a problémamegoldó gondolkodás általunk felvázolt struktúrája ma is alkalmas a heurisztikus matematikaoktatás megtervezésére.

5. Összegzés

Megbizonyosodtunk arról, hogy a problémamegoldó gondolkodás általunk felvázolt struktúrája alkalmas a matematikai hibák csoportosítására.

Ezen túlmenően segítségével a tanulóknak új szituációk között is hasznos, általános érvényű tanácsokat adhatunk. Az elgondolás azonban nem tekinthető lezártnak: néhány további feladatot az alábbiakban megemlítünk.

- (1) Úgy gondoljuk, hogy a későbbiekben célszerű lenne egy pedagóguscsoportnak témakörönként és osztálytípusonként feltérképezni a leggyakrabban előforduló hibákat.
- (2) A problémamegoldó gondolkodás szerkezetének részletes leírása lehetővé teszi, hogy a tananyaghoz igazodva minden gondolkodási lépéshez konstruáljunk kérdéseket. Ezek még tovább növelhetik Pólya elméletének iskolai alkalmazhatóságát.
- (3) Fel lehetne mérni az elmélet alkalmazásának esetleges teljesítménynövelő hatását.
- (4) Ki lehetne terjeszteni a vizsgálatokat más tantárgyakra és más tanulói csoportokra. (Ennek során elképzelhető, hogy hozzá kell majd nyúlni a felvázolt struktúrához. Például a mellékes mozzanatok említésének felbukkanása Lénárdéhoz hasonló körülmények között nagy valószínűséggel megtörténik.)

A matematikai oktatás eredményességének csökkenése megköveteli, hogy minden, az oktatással foglalkozó szakember saját területén az eddigieknél jobb, hatékonyabb módszereket keressen. Talán nem a hibáknak a tanulói gondolkodáson keresztül történő elemzése lesz az a jelentős lépés, amely megfordítja a kedvezőtlen folyamatokat. De talán ez a dolgozat is segít felhívni a figyelmet egy olyan elhanyagolt területre, amelynek fejlesztése már hosszú idő óta súlyos adósságunk.

1. On the choice of the topic

I finished my university studies in 1984 and then I started to teach mathematics in a vocational high school. My colleagues and I observed the fact that our pupils' knowledge decreased year by year. I teach the future teachers at university from 1995. Unfortunately the tendency was the same on both places. This experience was verified by national and international surveys. So the National Institute for Public Education operating in Hungary, has started the survey project *MONITOR* in the middle 1980s, which measured several thousands of students in years 4, 6, 8, 10 and 12 on six occasions. These surveys measured students' real-life skills, the ability to acquire information and apply knowledge in society. The results showed that students' "attainment decreased considerably", moreover "the variation in attainment increased". In 2000 and in 2003 a survey called *PISA* was carried out, which measured 15-years-olds' real-life skills. (The interpretation of real-life skills in this study was very similar to that used by the *MONITOR* survey.) The *PISA* survey reinforced the most significant findings of *MONITOR*.

Because of our good students in mathematics are among the best students of the world, so we can reach the increasing of efficiency of the education with successfull dealing with the less talented students. It is clear that the unsuccessful students are characterized not by the good but the wrong problem-solving. Therefore our aim – that with application of steps of the problem-solving thinking – is to find such a method that the mathematics teachers could help their pupils more effectively with full knowledge of this method.

Such a method could be suitable for the description and grouping of the mistakes, too. If teachers know their student's mistakes then they could start to correct these mistakes easily. Our goal is the examination of mistakes are based on problem-solving thinking at first. For this reason we will survey the history of the Hungarian theories concerning the mathematics mistakes of students.

My latter colleague, László Sümegi recommended the topic of the mistakes into our consideration in 1994. This initial examinations was completed by our director of studies, Péter T. Nagy who showed brand-new applications of this conception for a more complete system.

Knowing the structure of problem-solving thinking, which discussed we – through mistakes – earlier, we try to analyse these problems and we examined how can make studiable the problem-solving thinking for the students. We tried to plan our work by means of answering questions which were connected with problem-solving process in the experiment. We did it in that way how Pólya advised in his books. But we had to transform the well-known questions because these questions must be suitable for under new circumstances as computerize.

2. Objectives and methods of the research

A practical examination gives the experimental base of the theoretical conception of the dissertation. We examined mathematics problems of students' exercise first of all and we completed our procedure oral asking very rarely – only if it was necessary. (The school exercises were arisen from my colleagues and myself.)

We shall have to satisfy some requirements if we want to range mistakes among certain groups. It is important that (1) we have to range every mistakes in one group; (2) we could do our grouping easily.

In this experiment we examined mistakes of problem-solving in mathematics learning We started to examine algebraic mistakes because this kind of mistakes could be recognized easily. We think that it is not influence our result.

Knowing the problem-solving thinking we composed instructions to help for students. We have tried these ones out in teacher training courses which we organized from 1999.

3. Hypotheses of the research

The traditional mathematics education in Hungary follows the Pólya-model. It is evident that we shall have to turn this procedure if we should like to examine the mistakes of the false process of problem-solving.

In this dissertation we attempt to connect an abstract theory of psychology concerning problem-solving thinking and a more practical conception of the problem-solving activity of mathematics, which is based on Pólya's idea. In this way we can get a structure of problem-solving, which has scientific bases and at the same time it is useful (1) in description of mathematics mistakes; (2) in composition of questions or instructions which could help in mathematical problem-solving.

Lénárd Ferenc's ideas, considering a few changes, can also be applied here. According to this theory, thinking is always the result of two processes taking place on a different level.

The *phases of thinking* mean steps relating to the whole of the thinking process. We think that the construction of the macro-structure including these steps is as follows:

1. Fact-finding
2. Suggestion for problem-solving
3. Criticism

We have got our above mentioned results in such a way that we have lost the following phases of Lénárd which is printed in italics.

(P1) According to Pólya, one of the most important ways of the devising a plan is looking for a related, a more general, a more special or an analogous problem, i. e. the *modification of the problem*. In this way we consider this Lénárd's phase a part of devising a plan or in another way a part of suggestion for problem-solving.

(P2) *Mentioning accessory elements* shows mistakes of the suggestion for problem-solving. But this step was not typical in the examined school-environment.

(P3-P5) We can not measure *the affective categories* (wonder, delight; annoyance; scepticism), so these are uninteresting things for us.

(P6) If somebody do not finish his or her idea then we can observe *giving up the activity*. So it could trace back to a mistake of the problem-solving, that is in our opinion we can not consider this step separate thinking steps.

The steps of thinking are influenced not only by the whole thinking process, but by the small surroundings of the individual steps, the parts of the so-called micro-structure as well.

We think that in this way we can get to the following *operations in thinking*:

- a) Analysis
- b) Synthesis
- c) Comprehension of relations
- d) Addition
- e) Putting things and relations in order
- f) Analogy

We were succeed in building our system though we did not use Lénárd's five thinking operations. Namely

(O1) *Abstracting* emphasizes a property of a whole thing, which is not considerable as an independent unit. We consider *abstracting* a special part of the *analysis*.

(O2-O3) *Comparing* and *comparing of abstract data* could be consider a kind of comprehension of relations. So we can leave these operations.

(O4-O5) Lénárd considered *generalizing* and *putting things and relations concretely* as cases of addition, so it is natural that we leave the last two operations out of consideration.

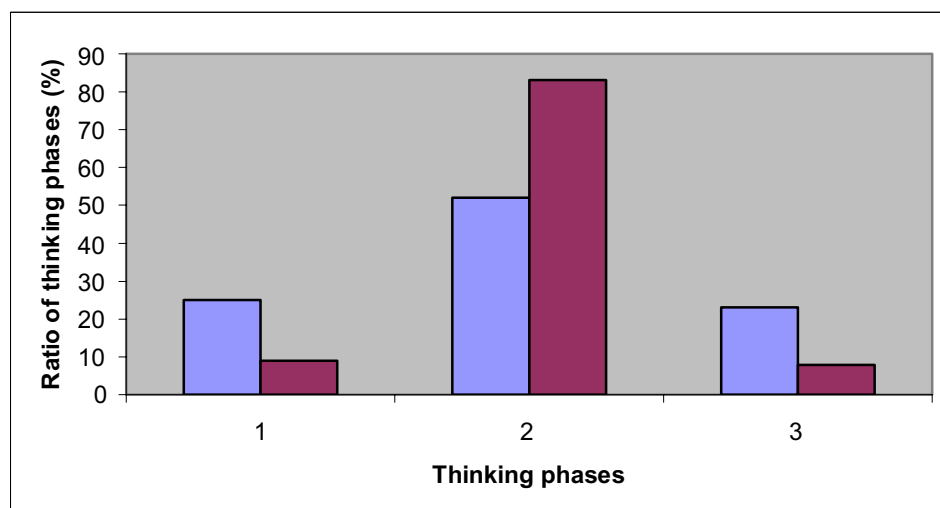
According to our hypotheses the process of the mathematical problem-solving could be described with the previous structure.

4. Results of the research

In order to verify our hypotheses of the research we must show that our conception gives a possibility for categorizing of mistakes. Apart from this method we gives an example of using problem-solving thinking for the purpose of students' learning.

We started an experiment concerning with mistakes in 1995. We reviewed 1274 bad solutions in algebraic problems, and found 1509 mistakes in these probles.

Our system differs from Lénárd's. But in spite of the differences it is worth comparing these ideas. (The left columns shows the Lénárd's data.)

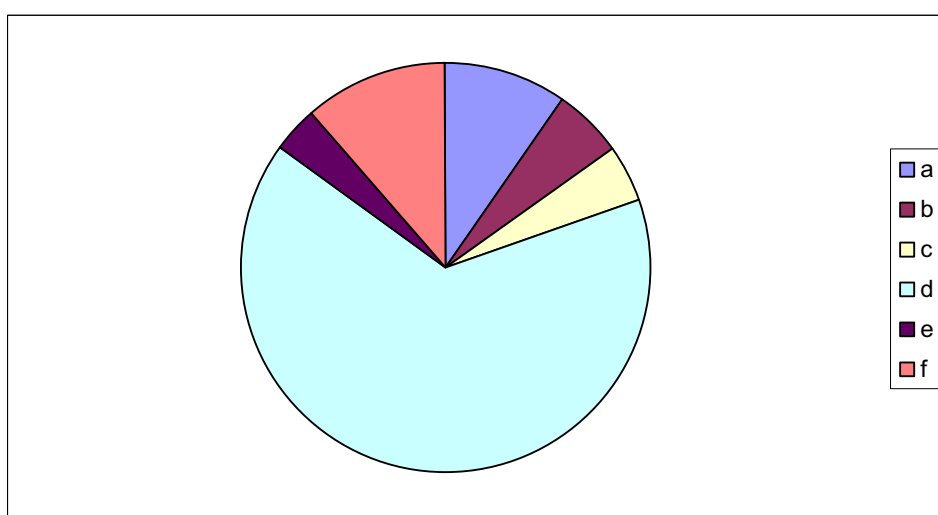


This figure above shows a lot of interesting facts. Let us see two of them.

(i) Since the determination of the conditions is not compulsory in Hungary so the level of fact-finding rather low.

(ii) It could be seen that the Hungarian mathematics curriculum do not consider criticism as an important thing. Unfortunately after transformations this step is not compulsory, too.

We can draw the elements of the microstructure with a kind of chart. But we could not compare our results with Lénárd's analogous measurements.



Let us take the two types of thinking into consideration at the same time. Then we have to find the place of every mistakes. We have got the following result.

	a) analysis	b) synthesis	c) comprehension of relations	d) addition	e) putting things and relations in order	f) analogy
1. fact-finding	31	27	24	12	31	11
2. suggestion for problem-solving	92	32	20	933	17	160
3. criticism	23	26	22	39	9	—

Because this system consists of only a few steps, Pólya divided on the process of problem-solving with a lot of questions and instructions. So this structure became very useful for every student and mathematics teacher. As he built his system not with scientific method, it may be further completed, if new mathematical problems should arise. If we want to continue our work in accordance with Pólya's idea, we have to plan our questions and instructions concerning problem-solving thinking with the help of our table. Let's give a few questions and instructions for example. (We denoted the Pólya's instructions with bold-face letters.)

- (1/a) What is the problem? **What are the data?** Divide the data and the problem into parts.
- (1/b) Are the data sufficient for problem-solving?
⋮
- (2/c) **Could you solve a part of the problem?**
⋮
- (3/d) **Can you derive the solution differently?**
⋮
- (3/f) Do the related (special, general) results of problems verify your solution?

Using psychology in this research we can create a method which is suitable not only for the analysis and classification of mistakes but for their correction, too. And we are convinced of the fact that our structure of problem-solving should be suitable for planning of the heuristic mathematics teaching nowadays, too.

5. Summary

Finally we make mention of didactical aims of this experiment. We are convinced of the fact that our structure of problem-solving should be suitable for categorizing of mathematics mistakes. Beyond that thing we could give some helpful and general advices for students. They could apply these ones among new situations. But this conception seemed to be not an absolutely closed territory. We may further mention some another problems.

- (1) We think that it will be suitable to group the typical mistakes of all school-topics. It would be very useful for teachers who could repair mistakes of their students easier with the help of the list.
- (2) With the help of the knowledge of the problem-solving thinking we can find more questions easily for our students. We can repair applicability of the original theory with these supplements.
- (3) It may measure the effectiveness of the application of our method.
- (4) It may spread the examinations over other school-subjects and other learning groups. (It is imaginable that we have to correct our method during that time. It could happen that the phase mentioning accessory elements comes up under similar situations like to Lénárd's and so on.)

The decreasing of the successfulness of the mathematics teaching requires every experts to search effective teaching methods. Perhaps the analysis of the mistakes will not be the most important thing that can turn back the unfavourable processes. But we hope that this paper help to draw attention to such an unattended area what each one of us would develop.

6. Bibliográfia/Bibliography

Ambrus András (2005). Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Beke Manó (1900). Typikus hibák a matematikai tanításban. Magyar Paedagógia, 520-530.

Bruner J. S. (1974). Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat, Budapest.

Dienes Zoltán (1973). Építsük fel a matematikát. Gondolat, Budapest.

Gimes Györgyné (1994). Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Horváth György (1984). A tartalmas gondolkodás. Tankönyvkiadó, Budapest.

Lakatos Imre (1981). Bizonyítások és cáfolatok. Gondolat, Budapest

Lavrentyev-Ljusztjernyik (1953). Variációszámítás. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Lénárd Ferenc (1978). A problémamegoldó gondolkodás. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Mason, J. (1961). Thinking mathematically. Addison Wesley, Amsterdam.

Mosonyi Kálmán (1972). Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórákon. Tankönyvkiadó, Budapest.

Pólya György (1957). A gondolkodás iskolája. Gondolat, Budapest.

Rubinstein, Sz.L (1960). Gondolkodáslélektani vizsgálatok. Gondolat, Budapest.

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, New York.

Skemp, R.R. (1975). A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, Budapest.

Sternberg, R. J.-Ben-Zeev, T. (1998). A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest.

Vári Péter: Monitor '95 (Országos Közoktatási Intézet, Budapest, 1997.)

Vári Péter: PISA-vizsgálat 2000 (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.)

6. Publikációk/List of Publications

Referált cikkek/Referred publications

1. Les nouvelles possibilités dans la formation des enseignants 43-48.o.
(Bulletin de l'IREM 2000. april, with Bognár Katalin and Juhász Katalin)
2. Problem-solving in mathematics with the help of computers (Teaching Mathematics and Computer Science 2003(2), 405-422. o., Institute of Mathematics University of Debrecen)
3. Writing a Textbook – As we do it (Teaching mathematics and Computer Science 2004(1), 185-203. o., Institute of Mathematics University of Debrecen, with Czeglédy István)
4. Problems in problem-solving (under issue in ProMath Research Report)

Konferencia kiadványok/Conference lectures

5. A pedagógusképzés új lehetőségei (Informatika a Felsőoktatásban '99 konferenciakiadványa 326-331. o., with Juhász Katalin)
6. Kísérlet a pedagógusképzés megújítására (Networkshop '2000 konferenciakiadványa, with Juhász Katalin)

Tankönyvek/Textbooks

7. Matematika 9. (Műszaki Könyvkiadó (MK), 2002., with Czeglédy István, Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán, Róka Sándor)
8. Matematika 10. (MK, 2003., with Czeglédy István, Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán)
9. Matematika 11. (MK, 2004., with Czeglédy István, Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán)
10. Matematika 12. (MK, 2005., with Czeglédy István, Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán)
11. Matematika a nyelvi előkészítő tagozat számára (MK, 2005., with Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Hajdu Sándor, Kovácsné Pető Andrea)

Oktatási segédanyagok/Educational aids

- 12.Válogatott érettségi-felvételi feladatok matematikából (Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft (TKK), 1996., 1997., 1998., 2000.)
- 13.Válogatott érettségi-felvételi feladatok fizikából (TKK, 1997., 1998.)
- 14.Összefoglaló a matematika érettségi-felvételi vizsgához (TKK, 1998.)
- 15.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 9. osztály Tanulói példány (MK, 2003., with Czeglédy István)
- 16.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 9. osztály Tanári példány (MK, 2003., with Czeglédy István)
- 17.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 10. osztály Tanulói példány (MK, 2004., with Czeglédy István)
- 18.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 10. osztály Tanári példány (MK, 2004., with Czeglédy István)
- 19.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 11. osztály Tanulói példány (MK, 2005., with Czeglédy István)
- 20.Témazáró felmérő feladatsorok Matematika 11. osztály Tanári példány (MK, 2005., with Czeglédy István)
- 21.Matematika 9. feladatainak megoldása (MK, 2003., with Czeglédy István, Hajdu Sándor)
- 22.Matematika 10. feladatainak megoldása (MK, 2004., with Czeglédy István, Hajdu Sándor)

Egyéb írások/Other publications

- 23.A függvénytranszformációk tanításáról (A matematika tanítása, 1994. november 12-14. o.)
- 24.Kiből (ne) legyen tanár, avagy alkalmassági vizsgálat a pedagógusképzésben? (Új Katedra 1994/95. május-június 42-43. o., 1995/96. szeptember 26. o.)
- 25.Gondolkodási hibák a középiskolai matematikatanítás során (Doktori disszertáció, KLTE TTK Matematikai és Informatikai Intézet, 1995.)