Doktori (PhD) értekezés tézisei

EFFECTIVE RESULTS IN THE THEORY OF DIOPHANTINE EQUATIONS

Rábai Zsolt

Témavezető: Dr. Pink István

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.

Bevezetés

A számelméletben a diofantikus egyenletek, és az ezen egyenletek megoldására szolgáló algoritmusok köszponti szerepet töltenek be. Disszertációnkban a történelmi és frissebb eljárásokat kombinálva saját észrevételeinkkel oldunk meg diofantikus egyenletekre vonatkozó problémákat. A továbbiakban röviden ismertetjük a fejezetek fő eredményeit.

I

A pozitív egészekből álló (a, b, c) hármast Pitagoraszi számhármasnak nevezzük, ha

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Tovább, az (a, b, c) hármas *primitív Pitagoraszi számhármas*, ha a, b és c relatív prímek. Legyenek a, b és c ismert pozitív egész számok, és tekintsük az

$$a^x + b^y = c^z, \tag{1}$$

egyenletet pozitív egész x, y és z ismeretlenekben. A (1) egyenlet Pitagoraszi hármasokat alapként használó változatának vizsgálata hosszú múltra tekint vissza. 1955-ben Sierpiński bizonyította, hogy a legkisebb Pitagoraszi hármasra, azaz $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ esetén (1) egyetlen megoldása az $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Hasonló eredményekre jutott Jeśmanowicz is 1956-ban. Megmutatta, hogy ha

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)\},$$

akkor (1) egyetlen megoldása ismét az $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Eredményei alapján kimondta a következő sejtést (továbbiakban *Jeśmanowicz sejtés*

1. Sejtés Legyen (a, b, c) egy primitív pitagoraszi számhármas, melyre $a^2 + b^2 = c^2$. Ekkor az (1) egyenlet egyetlen megoldása $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Bár az 1. Sejtés és általánosításai azóta is igen aktívan kutatott terület, a sejtés még mindig nyitott.

1990 óta sok előrelépés történt az 1. Sejtés bizonyításának irányában. 1993-ban Takakuwa és Asaeda, valamint Takakuwa (lásd [65], [67], [66]) bizonytotta az 1. Sejtést (a, b, c) hármasok számos végtelen családjára. 1995 és 2000 között Le (lásd [33], [34], [35]) sikerrel alkalmazta a logaritmusok lineáris formáinak felméletét kvantitatív eredmények bizonyítására. 1994-ben Terai [70] bevezette az 1. Sejtés egy általánosítását (a továbbiakban Terai-sejtés). Az elkövetkező években számos speciális esetben bizonyította is (lásd például [71], [68], [69]). Az utóbbi néhány évben Miyazaki számos fontos eredménnyel járult hozzá a területez. Mind az eredeti, mint a Terai-féle sejtést bizonyította hármasok számos végtelen családjára (lásd például [46], [48]). Egy alapos összefoglaló Jeśmanovicz sejtéssel és általánosításaivel kapcsolatos a klasszikus és újabb eredményekkel megtalálható [49]-ben. Adott pozitív N esetén jelölje $\mathrm{rad}(N)$ az N radikálját (azaz az N különböző prímosztóinak szorzatát), és $\mathrm{ord}_2(N)$ az N 2-rendjét (azaz a legnagyobb olyan k egész számot, melyre $2^k|N$). Néhány friss cikkükben, Miyazaki [50] valamint Miyazaki, Yuan és Wu [64] bizonyították az alábbi eredményeket.

1. Tétel Ha $c \equiv 1 \pmod{b}$, akkor az 1. Sejtés igaz.

2. Tétel Legyen b_0 egy osztója b-nek, melyre b_0 osztható $\mathrm{rad}(b)$-vel. Tegyük fel hogy az 1. Sejtés igaz, ha

$$c \equiv 1 \pmod{b_0}.$$

Ekkor az 1. Sejtés szintén teljesül minden $c \equiv 1 \pmod{b_0/2}$ esetén.

3. Tétel Ha $c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}$, akkor az 1. Sejtés igaz.

Vegyük észre, hogy b mindig páros, így a 3. Tétel valóban kibővítése az 1. Tételnek. Miyazaki vette észre [47]-ben, hogy ha (a, b, c) egy primitív pitagoraszi hár-

mas és $c = b + 1$, akkor

$$c + b = a^2.$$

Ez alapján a következő problémát fogalmazta meg. Legyen (a, b, c) egy adott Pitagoraszi számhármas, melyre $a^2 + b^2 = c^2$, és tekintsük a

$$c^x + b^y = a^z \tag{2}$$

egyenletet pozitív egész x, y és z ismeretlenekben.

2. Sejtés A fenti feltételekkel a (2) egyenlet egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ ha $c = b + 1$. Ha $c > b + 1$ akkor a (2) egyenletnek nincs megoldása.

Ez utóbbi a Jeśmanovicz probléma *kevert* variánsa. Miyazaki [47] igazolta a sejtést, $c \equiv 1 \pmod{b}$ esetén. Ezt az eredményt tartalmazza a következő lemma.

Lemma 1. *Ha* $c \equiv 1 \pmod{b}$*, akkor a 2. Sejtés igaz.*

Munkánkban általánosítjuk Miyazaki eredményét a $c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}$ esetre.

II

Tekintsük az

$$x^2 + D = y^n, \tag{3}$$

általánosított Ramanujan-Nagell egyenletet, ahol $D > 0$ adott egész szám és x, y, n pozitív egész ismeretlenek és $n \geq 3$. Az általános elliptikus egyenletekre vonatkozó eredmények nyilvánvalóan szolgáltatnak effektív végességi eredményeket erre az egyenlettípusra is (lásd például [2], [57], [59] és az ott található hivatkozásokat).

Az (3) egyenletre vonatkozó első eredmény V. A. Lebesgue-től [36] származik, akik megmutatta, hogy az egyenletnek $D = 1$ esetén nincs megoldása. Később

az általánosított Ramanujan-Nagell egyenletet sokan vizsgálták. Egy összefoglaló ezekből az eredményekből megtalálható [76]-ban. Munkánkban rekurzív sorozatokra vonatkozó eredményeket kombinálunk elliptikus görbékre vonatkozó eredményekkel, és megadjuk a (3) egyenlet összes megoldását abban az esetkben, amikor D prímosztói 5 és 17.

III

A számelmélet egy klasszikus problémája az algebrai számok racionálisakkal történő approximációja. A problémakör legisertebb eredménye Liouville alábbi tétele.

Theorem 1. *(Liouville, 1844) Ha α egy adott $n \geq 2$ fokú algebrai szám, akkor létezik egy konstans $c(\alpha)$ hogy minden $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ esetén, melyre $y > 0$,*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| > \frac{c(\alpha)}{y^n}.$$

Diofantikus egyenletekre vonatkozó alkalmazások szempontjából fontos, hogy csökkenteni tudjuk az n kitevőt, azaz hasonló egyenlőtlenségek igazolása valamilyen $\lambda < n$ kitevővel. Teljes általánosságban az első ilyen eredmény Thue-tól származik [72] aki a következő eredményt igazolta.

Theorem 2. *(Thue, 1909) Ha α egy legalább $n \geq 3$ fokú algebrai szám, akkor adott $\varepsilon > 0$ esetén, létezik egy olyan konstans $c(\alpha, \varepsilon)$ hogy minden x és $y > 0$ egész esetén*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| > \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{y^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}}.$$

Ez alapján Thue megmutatta, hogy ha $F(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ egy legalább $n \geq 3$ fokú irreducibilis binér forma, valamint m rögzített nem nulla egész szám, akkor a kapcsolódó

$$F(x, y) = m \tag{4}$$

Thue egyenletnek csak véges sok megoldása van x és y ismeretlen egészekben. Ez az eredmény azonban ineffektív abban az értelemben, hogy nem szolgáltat eljárást a $c(\alpha, \varepsilon)$ konstans kiszámolására, így segítségével nem lehetséges a kapcsolódó egyenlet megoldásainak meghatározása.

Bár a Thue egyenletekkel kapcsolatos effektív eredmények irodalma rendkívül kiterjedt, számos különböző technikát felvonultatva (például az algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira vonatkozó alsó korlátok; lásd [7]), munkánkban az ilyen típusú egyenletek megoldásai számának korlátozására törekszünk a megoldások mérete helyett. Etekintetben ismert, hogy a (4) egész megoldásainak száma korlátozható egy csak az F fokszámától és m különböző prímosztóinak számától függő állandóval (lásd például Bombieri és Schmidt [16]). Munkánkban a binom Thue egyenletek és egyenlőtlenségek vizsgálatára szorítkozunk. Ezekeben az egyenletekben a megoldások száma m függvényében korlátozható (lásd Mueller és Schmidt [51]). Tekintsük az

$$|ax^n - by^n| = c, \tag{5}$$

egyenletet, ahol a, b és c adott pozitív egészek, x, y és n ismeretlen egészek. Siegel [60], Thue korábbi munkáját élesítve megmutatta, hogy ha az a és b együtthatók elég nagyok c-hez és n-hez képest, akkor (5)-nek legfeljebb egy pozitív megoldása van. Később, Evertsenek [24] sikerült jelentősen erősíteni Siegel tételét. Mindkét eredmény az úgynevezett hipergeometrikus módszeren alapszik. Kapcsolódó eredmények még a területen, beleértve alkalmazásokat és általánosításokat, ahol a és b S-egyégek rögzített egészek helyett megtalálhatók például Mahler [43], [44], Baker [5], [4], [6], Chudnovsky [19] és további cikkekben, beleértve [1]. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [42], [17], [18], [30], [29], [25], [26], [27], [45] and [73]. Munkánkban [41], Bennett és De Weger [15] illetve Bennett [13] egy korábbi eredményét általánosítjuk, és megmutatjuk, hogy kivéve esetleg néhány (a, b, n) hármast, $c \leq 3$ esetén, (5)-nek legfeljebb egyetlen (triviális) megoldása

van.

IV

Legyen m egy rögzített $m \geq 3$ egész szám. Ekkor a

$$\text{Pyr}_m(x) = \frac{x(x+1)((m-2)x+5-m)}{6} \tag{6}$$

piramidális számnak nevezzük m és x paraméterekkel. A piramidális számok egy érdekes speciális esetei a

$$\text{Pyr}_3(x) = \binom{x}{3}$$

binomiális együtthatók $x \geq 3$ esetén, és az egymást követő háromszögszámok részösszegei. Dickson [23] szerint a piramidális számok első említése az ókori görögökhöz köthető. Részletes történelmi háttérért lásd [23]. A piramidális számok és általánosításaik, a figurális számok a diszkrét matematika és a számelmélet területén is fontos szerepet játszanak (Részletes bevezetőért a figuráléis számok témekörébe lásd [22]). A piramidális számok difoantikus tulajdonságai aktívan kutatott terület. Dickson [23] megmutatta, hogy bármely elég nagy egész szám nyolc piramidális szám összege. Richmond [55], valamint Deng és Yang [20] numerikus eredményeiből kiindulva lehetésges, hogy Dickson eredménye javítható. Számos olyan eredmény is született, ami a piramidális számok és más figurális számok egyenlőségét vizsgálja. 1962-ben, Segal [58] bizonyította, hogy 10 az egyetlen olyan piramidális szám, aminek a kétszerese is piramidális szám. 1998-ban, Brindza, Pintér és Turjányi [3] a piramidális és poligonális számok egyenlőségét vizsgálta.

1 A Jeśmanovicz sejtés kevert változata

Az első fejezetben elemi módszerek és modulo-aritmetika kombinálásával megadjuk egy végtelen egyenletcsalád összes megoldását. Legyen (a, b, c) egy

primitív Pitagorarszi számhármas, melyre $a^2 + b^2 = c^2$, és tekintsük a

$$c^x + b^y = a^z \tag{7}$$

egyenletet pozitív egész x, y és z ismeretlenekben.

3. Sejtés A fenti feltételekkel a (7) egyenlet egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 1, 2)$, ha $c = b + 1$. Ha $c > b + 1$ akkor (7)-nak nincs megoldása.

Ez utóbbi eredményt szokás a kevert Jeśmanovicz' problémának hívni. Miyazaki [47] bizonyította, hogy a 3. Sejtés igaz, ha $c \equiv 1 \pmod{b}$. Disszertációnkban ez utóbbi eredményét általánosítjuk. A fő eredményeink a következők.

4. Tétel Legyen b_0 egy osztója b-nek, melyre b_0 osztható b radikáljával. Tegyük fel hogy a 3. Sejtés igaz minden olyan (a, b, c) Pitagoraszi hármasra, melyre

$$c \equiv 1 \pmod{b_0}. \tag{8}$$

Ekkor a 3. Sejtés igaz minden olyan (a, b, c) hármas esetén, melyre

$$c \equiv 1 \pmod{b_0/2}. \tag{9}$$

5. Tétel A 3. Sejtés igaz minden olyan (a, b, c) hármas esetén, melyre

$$c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}.$$

További részletekért lásd [56].

2 Az általánosított Ramanujan-Nagell egyenlet

A második fejezetben Bilu, Hanrot és Voutier [75] egy Lucas-sorozatokra vonatkozó mély eredményét kombináljuk Ljunggren típusú és elliptikus görbékre vonatkozó eredményekkel, hogy meghatározzuk az

$$x^2 + 5^k 17^l = y^n \tag{10}$$

egyenlet összes megoldását x, y, k, l, n egész ismeretlenekben, melyekre

$$x \geq 1, y > 1, n \geq 3,\ k \geq 0,\ l \geq 0 \text{ and } \gcd(x, y) = 1. \tag{11}$$

Az utóbbi egyenletet gyakran hívják általánosított Ramanujan-Nagell egyenletnek. Az első, (10)-hez hasonló egyenletekre vonetkozó eredmények Lebesque-hez [36], Ljunggrenhez [37] és Nagellhez [52], [53] köthetők. Munkánkban analóg eredményeket bizonyítunk néhány szerző (például Luca és Togbe [39], [40]) friss eredményeivel. Fő eredményünk a következő.

6. Tétel Az (10) egyenlet (11) feltételnek eleget tevő összes megoldása

$$(x, y, k, l, n) \in \{(94, 21, 2, 1, 3), (2034, 161, 3, 2, 3), (8, 3, 0, 1, 4)\}.$$

További részletekért lásd [54].

3 Thue egyenlőtlenségek

A harmadik fejezetben a Baker módszer egy Laurent [32] által kidolgozott változatát kombináljuk hipergeometrikus approximációs technikákkal, hogy effektív korlátot adjunk binom Thue egyenlőtlenésgek egy végtelen családjának megoldásszámára. Ezzel Bennett egy korábbi eredményét [13] általánosítjuk. Fő eredményünk a következő.

7. Tétel Legyen c egy pozitív egész. Ekkor létezik a, b és n egészekből álló hármasok egy effektíven meghatározható S_c halmaza azzal a tulajdonsággal, hogy ha a, b és $n \geq 3$ olyan pozitív egészek, melyekre az

$$|ax^n - by^n| \leq c \tag{12}$$

egyenlőtlenségnek egynél több megoldása van x és y pozitív egészekben, akkor $(a, b, n) \in S_c$.

8. Tétel Ha S_c a fenti módon adott, akkor $S_3 \subseteq S_3^* \cup T_3$, ahol

$$S_3^* = \{(1,2,3),(2,1,3),(1,3,3),(3,1,3),(2,5,3),(5,2,3)\}$$

and

$$T_3 = \{(1,3,n),(3,1,n),(2,5,n),(5,2,n) \text{ ahol } 37 \leq n \leq 347,\ n \text{ prím}\}.$$

Ha $(a,b,n) \in S_3^*$, akkor a (12) egyenlőtlenség összes megoldása $c = 3$ esetén minden esetben $(x,y) = (1,1)$, valamint

(a,b,n)	$(1,2,3)$	$(2,1,3)$	$(1,3,3)$	$(3,1,3)$	$(2,5,3)$	$(5,2,3)$
(x,y)	$(5,4)$	$(4,5)$	$(3,2)$	$(2,3)$	$(19,14)$	$(14,19)$

További részletekért lásd [41].

4 Piramidális számok egyenlő értékei

Az utolsó fejezetben az úgynevezett Elliptikus logaritmusok módszerét alkalmazzuk egy piramidális számok egyenlő értékeire vonatkozó probléma megoldására. Ezt a módszert Stroeker és Tzanakis [62] fejlesztette ki, illetve tőlük függetlenül Gebel, Pethő és Zimmer [28]. Legyenek m és n adott pozitív egész számok, valamint $\text{Pyr}_m(x) = \dfrac{x(x+1)((m-2)x+5-m)}{6}$. Tekintsük a

$$\text{Pyr}_m(u) = \text{Pyr}_n(v), \tag{13}$$

egyenletet u és v pozitív egész ismeretlenekben. Fő eredményeink a következők.

9. Tétel Legyenek m és n adott pozitív egészek, melyekre $3 \leq \min(m,n)$ és $m \neq n$. Ekkor a (13) egyenletnek csak véges sok megoldása van u és v pozitív egészekben. Továbbá $\max(u,v) < C_1$, ahol C_1 egy effektíven meghatározható, csak m-től és n-től függő konstans.

10. Tétel Adott m és n egészekre, melyekre $3 \leq n < m \leq 10$, a (13) egyenlet összes megoldása (u, v) pozitív egészekben, melyre $(u, v) \neq (1, 1)$,

$$(m, n, u, v) \in \left\{ \begin{array}{c} (8,3,7,12), (9,3,2,3), (8,4,3,4), (10,4,55,87), \\ (7,5,6,7), (10,6,35,44), (9,7,152,170). \end{array} \right\} \tag{14}$$

További részletekért lásd [31].

Introduction

In number theory, Diophantine equations and algorithms for solving such equations play an important role. In our dissertation we combine some of the historical and more recent methods with our own observations to solve Diophantine equations. In what follows, we will describe the most important results of every chapter.

II

The triple of positive integers (a, b, c) is called a Pythagorean triple, if

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Also, (a, b, c) is called a *primitive Pythagorean triple*, if a, b and c are co-prime. Suppose that a, b and c are known positive integer numbers, and consider the exponential diophantine equation

$$a^x + b^y = c^z, \tag{15}$$

in positive integer unknowns x, y and z.

The study of equation (15) with Pythagorean triples as bases has a long history. In 1955, Sierpiński proved that for the smallest and most famous Pythagorean triple $(a, b, c) = (3, 4, 5)$, the corresponding equation (15) has the unique solution $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ (see [61]). Similar results were given by Jeśmanowicz in 1956. He showed that if

$$(a, b, c) \in \{(5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)\},$$

then the only solution of (15) is again $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Based on his results he proposed the following conjecture (also known as *Jeśmanowicz' conjecture*).

Conjecture 1. *Let* (a, b, c) *be a primitive Pythagorean triple such that* $a^2 + b^2 = c^2$. *Then the only solution of* (15) *is* $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.

Conjecture 1 and its generalizations have received a great deal of attention over the years, however the problem in its general form is still open.
Since 1990 a lot of progress has been made towards the proof of Conjecture 1. In 1993, Takakuwa and Asaeda, and Takakuwa (See [65], [67], [66]) proved Conjecture 1 for various infinite families of triples (a, b, c). In several papers between 1995 and 2009 Le ([33], [34], [35]) applied the theory of linear forms in logarithms to give quantitative results, and prove Conjecture 1 for many triples. In 1994, Terai [70] introduced a generalization of Conjecture 1 (known as Terai's conjecture). In the following years he proved it for several special cases (see for example [71], [68], [69]). In the last few years, Miyazaki made many important contributions to this field. He proved both Conjecture 1 and Terai's conjecture for various infinite families of triples (see for example [46], [48]). A comprehensive collection of classical and recent results on Jeśmanovicz' conjecture, and its generalizations can be found in [49].

For any positive integer N, denote by rad(N) the radical of N (i.e. the product of the distinct prime divisors of N), and ord$_2(N)$ the 2-order of N (i.e. the largest non-negative integer k, such that $2^k | N$). In their recent papers, Miyazaki [50] and Miyazaki, Yuan and Wu [64] proved (among others) the following theorems.

Theorem 3. *If* $c \equiv 1 \pmod{b}$, *then Conjecture 1 is true.*

Theorem 4. *Let* b_0 *be a divisor of* b, *such that* b_0 *is divisible by* $\mathrm{rad}(b)$. *Suppose that Conjecture 1 is true for*

$$c \equiv 1 \pmod{b_0}.$$

Then Conjecture 1 is true for all $c \equiv 1 \pmod{b_0/2}$.

Theorem 5. *If* $c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}$*, then Conjecture 1 is true.*

Note that here b is always even thus Theorem 5 is an improvement of Theorem 3. It was noted by Miyazaki in [47] that, if (a, b, c) is a primitive Pythagorean triple and $c = b + 1$, then

$$c + b = a^2.$$

From this, he proposed the following problem. Let (a, b, c) be a given primitive Pythagorean triple such that $a^2 + b^2 = c^2$, and consider the equation

$$c^x + b^y = a^z \tag{16}$$

in positive integer unknowns x, y and z.

Conjecture 2. *With the above conditions, equation* (16) *has the only solution* $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ *if* $c = b + 1$*. If* $c > b + 1$ *then* (16) *has no solutions.*

This is referred to as the *shuffle* variant of Jeśmanovicz' problem. In [47], Miyazaki proved that Conjecture 2 is true if $c \equiv 1 \pmod{b}$. This result is stated as the following lemma.

Lemma 2. *If* $c \equiv 1 \pmod{b}$*, then Conjecture 2 is true.*

In our work, we generalize Miyazakis work to the case where $c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}$.

III

Consider the generalized Ramanujan-Nagell equation

$$x^2 + D = y^n, \tag{17}$$

where $D > 0$ is a given integer and x, y, n are positive integer unknowns with $n \geq 3$. Results obtained for general superelliptic equations clearly provide effective

finiteness results for this equation, too (see for example [2], [57], [59], and the references given there).

The first result concerning the above equation was due to V. A. Lebesque [36] who proved that there are no solutions for $D = 1$. Later the so-called Ramanujan-Nagell equation was investigated by many. For a survey of such results on (17) see [76]. In our work we apply Recurrent sequences and results concerning elliptic curves to give all solutions to the case where the only prime divisors of D are 5 and 17.

IV

A classical problem in number theory is the approximation of algebraic numbers by rationals, underlying which one has a theorem of Liouville:

Theorem 6. *(Liouville, 1844) If α is a given algebraic number of degree $n \geq 2$, then there exists a constant $c(\alpha)$ such that, for every $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ with $y > 0$, we have*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| > \frac{c(\alpha)}{y^n}.$$

For applications to Diophantine equations, it is of utmost importance to reduce the exponent n here, i.e. to deduce like inequalities with some exponent $\lambda < n$. In full generality, the first such result was due to Thue [72] who proved the following theorem.

Theorem 7. *(Thue, 1909) If α is an algebraic number of degree $n \geq 3$, then, given $\varepsilon > 0$, there exists a constant $c(\alpha, \varepsilon)$ such that for all integers x and $y > 0$ we have*

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| > \frac{c(\alpha, \varepsilon)}{y^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}}.$$

From this result, Thue deduced that if $F(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ is an irreducible binary form of degree $n \geq 3$, and m is a fixed nonzero integer then the corresponding *Thue equation*

$$F(x, y) = m \tag{18}$$

has at most finitely many solutions in integers x and y. This result is, however, ineffective in the sense that it does not provide any way to actually compute $c(\alpha, \varepsilon)$, and hence cannot be applied to determine the solutions of the corresponding equations.

Whilst there is now a well-developed literature on effective solution of Thue equations, based upon a variety of techniques (including, for instance, lower bounds for linear forms in logarithms of algebraic numbers; see e.g. [7]), in our work, we concentrated on bounding the number of solutions to such equations, rather than their heights. In this regard, it is known that the number of solutions to equation (18) in integers is bounded above in terms of only the degree of F and the number of distinct prime divisors of m (see e.g. Bombieri and Schmidt [16]). We will restrict our attention to what is, in some sense, the simplest possible case, that of binomial Thue equations and inequalities. For these equations, the number of such solutions is bounded in terms of m alone (see Mueller and Schmidt [51]). In particular, we will consider equations of the form

$$|ax^n - by^n| = c, \tag{19}$$

where a, b and c are given positive integers, and x, y and n are unknown integers. Siegel [60], refining earlier work of Thue, showed that if the coefficients a and b are large enough compared to c and n, then (19) has at most one positive solution. Later, Evertse [24] was able to substantially sharpen Siegel's theorem. Both results depend on the so-called hypergeometric method. Related work in this area, including applications and generalizations to cases where a and b are taken to be

S-units rather than fixed, may be found in, for example, Mahler [43], [44], Baker [5], [4], [6], Chudnovsky [19] and many, many other papers, including [1]. [9], [10], [11], [12], [13], [14], [42], [17], [18], [30], [29], [25], [26], [27], [45] and [73]. In our work [41], we will extend a result of Bennett and De Weger [15] and Bennett [13], and prove that except for some triples (a, b, n), with $c \leq 3$, (19) has only the trivial solution.

V

Let m be a fixed integer with $m \geq 3$. Then the number

$$\text{Pyr}_m(x) = \frac{x(x+1)((m-2)x+5-m)}{6} \tag{20}$$

is called the pyramidal number with parameters m and x. Interesting aspects of pyramidal numbers are the binomial coefficients

$$\text{Pyr}_3(x) = \binom{x}{3}$$

with integers $x \geq 3$, and the successive partial sum of the series of triangular numbers. According to Dickson [23], the first mention of pyramidal numbers dates back to the ancient Greece. For detailed historical background, please refer to [23]. Pyramidal numbers and their generalizations, figurate numbers, play an important role in discrete mathematics and number theory. (For a detailed introduction into figurate numbers, consult [22].) The diophantine and arithmetic properties of pyramidal and figurate numbers have been widely investigated over the years. Dickson [23] proved, that every sufficiently large integer is the sum of eight pyramidal numbers. Numerical results due to Richmond [55] and Deng and Yang [20] make it is plausible that the result of Dickson can be improved.

There are also several classical results related to the equal values of pyramidal and other combinatorial numbers. In 1962, Segal [58] proved, that 10 is the only

pyramidal number whose double is also a pyramidal number. In 1998, Brindza, Pintér and Turjányi [3] investigated the equal values of pyramidal and polygonal numbers. They considered the equation

5 The shuffle variant of Jeśmanovicz' conjecture

Consider the equation

$$c^x + b^y = a^z \tag{21}$$

in positive integer unknowns x, y and z. Our main results are the following.

Theorem 8. *Let b_0 be a divisor of b, such that b_0 is divisible by $\mathrm{rad}(b)$. Suppose that Conjecture 2 is true for all Pythagorean triples (a, b, c) with*

$$c \equiv 1 \pmod{b_0}. \tag{22}$$

Then Conjecture 2 is true for all Pythagorean triples (a, b, c) with

$$c \equiv 1 \pmod{b_0/2}. \tag{23}$$

Theorem 9. *Conjecture 2 is true for all Pythagorean triples (a, b, c) with*

$$c \equiv 1 \pmod{b/2^{\mathrm{ord}_2(b)}}.$$

Combining Lemma 2 and Theorem 8, it is easy to verify Theroem 9. We will give a proof of Theorem 8. For further details, please see [56].

6 The generalized Ramanujan-Nagell Equation

In the current chapter we will use binary recurrent sequences to compute the solutions of the equation

$$x^2 + 5^k 17^l = y^n \tag{24}$$

in integer unknowns x, y, k, l, n satisfying

$$x \geq 1, y > 1, n \geq 3,\ k \geq 0,\ l \geq 0 \text{ and } \gcd(x, y) = 1. \tag{25}$$

Theorem 10. *Consider equation* (24) *satisfying* (25)*. Then all solutions of equation (24) are:*

$$(x, y, k, l, n) \in \{(94, 21, 2, 1, 3), (2034, 161, 3, 2, 3), (8, 3, 0, 1, 4)\}.$$

For more details, please see [54].

7 Thue Inequalities

In this chapter we will consider a classic use-case for Baker's method combined with hypergeometric approximation techniques. Suppose that a, b and c are given integers and consider the inequality

$$|ax^n - by^n| \leq c \tag{26}$$

in unknown integers x, y and n. Recall that S_c denotes the set of triples of positive integers a, b and $n \geq 3$ for which (26) has more than a single solution in positive integers x and y. Our main result is the following.

Theorem 11. *With S_c defined above, we have $S_3 \subseteq S_3^* \cup T_3$, where*

$$S_3^* = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 3), (3, 1, 3), (2, 5, 3), (5, 2, 3)\}$$

and

$$T_3 = \{(1, 3, n), (3, 1, n), (2, 5, n), (5, 2, n) \ \textit{with}\ 37 \leq n \leq 347,\ n \textit{ prime}\}.$$

For $(a, b, n) \in S_3^*$, the solutions in positive integers to inequality (26) *with $c = 3$ are, in each case, $(x, y) = (1, 1)$, and also*

(a, b, n)	$(1, 2, 3)$	$(2, 1, 3)$	$(1, 3, 3)$	$(3, 1, 3)$	$(2, 5, 3)$	$(5, 2, 3)$
(x, y)	$(5, 4)$	$(4, 5)$	$(3, 2)$	$(2, 3)$	$(19, 14)$	$(14, 19)$

In case $n = 3$, this theorem represents a slight sharpening of a classical result of Ljunggren [38], who considered equation (19) with $n = 3$ and $c \in \{1, 3\}$. It is very likely that $S_3 = S_3^*$ (which should be provable with a finite but currently infeasible amount of computation). We can, in any case, certainly prove a sharpened version of Theorem 11, with T_3 replaced by a somewhat smaller set, through more careful application of the hypergeometric method; in our opinion the effort involved would somewhat exceed the payoff. For more details, please see [41].

8 Equations concerning pyramidal numbers

In the last chapter we will apply linear forms in elliptic logarithms to solve a family of genus 1 equations. Set $\mathrm{Pyr}_m(x) = \dfrac{x(x+1)((m-2)x+5-m)}{6}$ and consider the equation

$$\mathrm{Pyr}_m(u) = \mathrm{Pyr}_n(v), \tag{27}$$

in positive integers u and v for given m and n. In what follows, we give effective upper bounds for the size of the solutions of (27). We apply the so-called Elliptic Logarithm method, which was developed by Stroeker and Tzanakis [62], and independently by Gebel, Pethő and Zimmer [28] and later improved by Stroeker and Tzanakis [63]. Two interesting special cases are studied by computational number-theoretic tools.

Before stating the main results, we would like to introduce another form of the problem. It is easy to see that (27) is equivalent to the equation

$$(m-2)u^3 + 3u^2 + (5-m)u = (n-2)v^3 + 3v^2 + (5-n)v \tag{28}$$

in positive integer unknowns u and v. With this latter form, the main results are the following.

Theorem 12. *Let m and n be given positive integers with $3 \leq \min(m,n)$ and $m \neq n$. Then the equation* (28) *has at most finitely many solutions in integer unknowns u and v. In fact $\max(u,v) < C_1$, where C_1 is an effectively computable positive constant depending only on m and n.*

Remark We would like to mention here, that Theorem 12 is also a direct consequence of the celebrated result of Baker and Coates (see [8]). However, the currently discussed Elliptic Logarithm method gives more practical bounds. Sadly, due to the nature of the method, it is currently not possible to make C_1 explicit in terms of m and n.

Using the techniques mentioned above and the program packages MAGMA [74], SAGE [21] and MAPLE, we prove

Theorem 13. *For given m and n with $3 \leq n < m \leq 10$, all solutions of* (28) *in (u,v) integers with $(u,v) \notin \{(0,0)(-1,-1),(-1,0),(0,-1),(1,1)\}$ are given in the following table.*

(m,n)	(u,v)
$(4,3)$	$(0,-2),(-1,-2)$
$(5,3)$	$(0,-2),(-1,-2),(-35,-51)$
$(6,3)$	$(0,-2),(-1,-2),(-16,-26)$
$(7,3)$	$(0,-2),(-1,-2),(-2,-4)$
$(7,5)$	$(-5,-6),(6,7)$
$(8,3)$	$(0,-2),(-1,-2),(7,12)$
$(8,4)$	$(-2,-3),(3,4)$
$(8,6)$	$(-276,-316)$
$(9,3)$	$(0,-2),(-1,-2),(-8,-16),(2,3)$
$(9,4)$	$(-13,-20)$
$(9,7)$	$(152,170)$
$(10,3)$	$(0,-2),(-1,-2)$
$(10,4)$	$(55,87)$
$(10,6)$	$(35,44)$

(29)

As a direct corollary to Theorem 13, we can state the following.

Corollary 1. *For given* m *and* n *with* $3 \leq n < m \leq 10$*, all solutions of* (27) *in positive integers* (u, v) *with* $(u, v) \neq (1, 1)$ *are given by*

$$(m, n, u, v) \in \left\{ \begin{array}{c} (8, 3, 7, 12), (9, 3, 2, 3), (8, 4, 3, 4), (10, 4, 55, 87), \\ (7, 5, 6, 7), (10, 6, 35, 44), (9, 7, 152, 170). \end{array} \right\} \tag{30}$$

For more details, please see [31].

References

[1] K. Győry A. Bazsó, A. Bérczes and Á. Pintér. On the resolution of equations $ax^n - by^n = c$ in integers x, y and $n \geq 3$, ii. *Publ. Math. Debrecen*, 76:227–25, 2010.

[2] B. Brindza A. Bérczes and L. Hajdu. On power values of polynomials. *Publ. Math. Debrecen,*, 53:375–381, 1998.

[3] Á. Pintér B. Brindza and S. Turjányi. On equal values of pyramidal and polygonal numbers. *Indag. Math. (N.S.)*, 9(2):183–185, 1998.

[4] A. Baker. Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 15:375–383, 1964.

[5] A. Baker. Rational approximations to certain algebraic numbers. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 14:385–398, 1964.

[6] A. Baker. Simultaneous rational approximations to certain algebraic numbers. *Proc. Cambridge Phil. Soc*, 63:693–702, 1967.

[7] A. Baker. Contributions to the theory of diophantine equations. *Phil. Trans. Roy. Soc. London,*, 263:173–208, 1968.

[8] A. Baker and J. Coates. Integer points on curves of genus 1. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 67(3):595–602, 1970.

[9] A. Bazsó. On binomial thue equations and ternary equations with s-unit coefficients. *Publ. Math. Debrecen*, 77:499–516, 2010.

[10] M. A. Bennett. Simultaneous rational approximation to binomial functions. *J. Austral. Math. Soc.*, 348:1717–1738, 1996.

[11] M. A. Bennett. Effective measures of irrationality for certain algebraic numbers. *J. Austral. Math. Soc.*, 62:329–344, 1997.

[12] M. A. Bennett. Explicit lower bounds for rational approximation to algebraic numbers. *Proc. London Math. Soc.*, 75:63–78, 1997.

[13] M. A. Bennett. Rational approximation to algebraic numbers of small height: the diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *J. Reine Angew. Math.*, 535:1–49, 2001.

[14] M. A. Bennett. Products of consecutive integers. *Bull. London Math. Soc.*, 36:683–694, 2004.

[15] M. A. Bennett and B. M. M. de Weger. On the diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$. *Math. Comp.*, 67:413–438, 1998.

[16] E. Bombieri and W. Schmidt. On thue's equation. *Invent. Math.*, 88:69–81, 1987.

[17] A. Bérczes and A. Pethő. On norm form equations with solutions forming arithmetic progressions. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3–4):281–290, 2004.

[18] A. Bérczes and A. Pethő. Computational experiences on norm form equations with solutions from an arithmetic progression. *Glas. Mat. Ser. III*, 41(61):1–8, 2006.

[19] G. V. Chudnovsky. On the method of thue-siegel. *Ann. of Math. (2)*, 117:325–382, 1983.

[20] Y. F. Deng and C. H. Yang. Waring's problem for pyramidal numbers. *Sci. China Ser. A*, 37(3):277–283, 1994.

[21] The Sage Developers. *Sage Mathematics Software (Version 6.4.1)*, 2015. `http://www.sagemath.org`.

[22] E. Deza and M. Deza. *Figurate numbers*. World Scientific, 2012.

[23] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis*. Courier Dover Publications, 2012.

[24] J. H. Evertse. *Upper Bounds for the numbers of solutions of diophantine equations*. PhD thesis, Leiden, 1983.

[25] K. Győry and Á. Pintér. Almost perfect powers in products of consecutive integers. *Monatsh. Math.*, 145:19–33, 2005.

[26] K. Győry and Á. Pintér. On the resolution of equations $ax^n - by^n = c$ in integers x, y and $n \geq 3$, i. *Publ. Math. Debrecen*, 70:483–501, 2007.

[27] K. Győry and Á. Pintér. Binomial thue equations, ternary equations and power values of polynomials (in russian). *Fundam. Prikl. Mat.*, 16(5):61–77, 2010.

[28] A. Pethő J. Gebel and H. G. Zimmer. Computing integral points on elliptic curves. *Acta Arith.*, 68(2):171–192, 1994.

[29] I. Pink K. Győry and Á. Pintér. Power values of polynomials and binomial thue-mahler equations. *Publ. Math. Debrecen*, 65:341–362, 2004.

[30] L. Hajdu K. Győry and N. Saradha. On the diophantine equation $n(n+d)\cdots(n+(k-1)d = by^l)$. *Canad. Math. Bull.*, 47:373–388, 2004.

[31] T. Kovács and Zs. Rábai. Equal values of pyramidal numbers. *Indag. Math.*, 29(5):1157–1166, 2018.

[32] M. Laurent. Linear forms in two logarithms and interpolation determinants ii. *Acta Arith.*, 133(4):325–348, 2008.

[33] M. Le. A note on Jeśmanowicz' conjecture. *Colloq. Math.*, 69(1):47–51, 1995.

[34] M. Le. On Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean numbers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(5):97–98, 1996.

[35] M. Le. A note on Jeśmanowicz' conjecture concerning primitive Pythagorean triplets. *Acta Arith.*, 138(2):137–144, 2009.

[36] V. A. Lebesgue. Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation xm= y2+ 1, nouv. *Ann. Math*, 9(9):178–181, 1850.

[37] W. Ljunggren. *Über einige Arcustangensgleichungen, die auf interessante unbestimmte Gleichungen führen*. Almqvist & Wiksell, 1943.

[38] W. Ljunggren. On an improvement of a theorem of t. nagell concerning the diophantine equation $ax^3 + by^3 = c$. *Math. Scand.*, 1:297–309, 1953.

[39] F. Luca and A. Togbe. On the diophantine equation $x^2+7^{2k} = y^n$. *Fibonacci Quarterly*, 54:322–326, 2007.

[40] F. Luca and A. Togbe. On the diophantine equation $x^2 + 2^a 5^b = y^n$. *Int. J. Number Theory 4,*, 6:973–979, 2008.

[41] I. Pink M. A. Bennett and Zs. Rábai. On the number of solutions of binomial thue inequalities. *Publ. Math. Debrecen*, 83(1-2):241–256, 2013.

[42] M. Mignotte M. A. Bennett, K. Győry and Á. Pintér. Binomial thue equations and polynomial powers. *Compos. Math.*, 142:1103–1121, 2006.

[43] K. Mahler. Ein beweis des thue-siegelschen satzes über die approximation algebraischer zahlen für binomische gleichungen. *Math. Ann.*, 105:267–276, 1931.

[44] K. Mahler. Zur approximation algebraischer zahlen, i: Über den grössten primteiler binärer formen. *Math. Ann.*, 107:691–730, 1933.

[45] M. Mignotte. A note on the equation $ax^n - by^n = c$. *Acta Arith.*, 75:287–295, 1996.

[46] T. Miyazaki. On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 80(3):413–422, 2009.

[47] T. Miyazaki. The shuffle variant of Jeśmanowicz' conjecture concerning Pyzhagorean triples. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 90(03):355–370, 2011.

[48] T. Miyazaki. Terai's conjecture on exponential Diophantine equations. *Int. J. Number Theory*, 7(4):981–999, 2011.

[49] T. Miyazaki. *On the exponential Diophantine equation* $a^x + b^y = c^z$. PhD thesis, Tokyo Metropolitan University, 2012.

[50] T. Miyazaki. Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples. *Journal of Number Theory*, 133(2):583–595, 2013.

[51] J. Mueller and W. Schmidt. Thue's equations and a conjecture of siegel. *Acta Math.*, 160:207–247, 1988.

[52] T. Nagell. Sur l'impossibilité de quelques équations a deux indeterminées. *Norsk. Mat. Forensings Skifter*, 13:65–82, 1923.

[53] T. Nagell. *Contributions to the theory of a category of Diophantine equations of the second degree with two unknowns*. Almqvist & Wiksells boktr., 1955.

[54] I. Pink and Zs. Rábai. On the diophantine equation $x^2 + 5^k 17^l = y^n$. *Commun. Math.*, 19(1):1–9, 2011.

[55] H. W. Richmond. Notes on a problem of the "Waring" type. *J. London Math. Soc.*, 19:38–41, 1944.

[56] Zs. Rábai. A note on the shuffle variant of jeśmanowicz' conjecture. *Tokyo J. Math.*, 40(1):153–163, 2017.

[57] A. Schinzel and R. Tijdeman. On the equation $y^m = p(x)$. *Acta Arith.*, 31:199–204, 1976.

[58] S. L. Segal. Mathematical Notes: A Note on Pyramidal Numbers. *Amer. Math. Monthly*, 69(7):637–638, 1962.

[59] T. N. Shorey and R. Tijdeman. *Exponential diophantine equations*. Cambridge–New York, 1986.

[60] C. L. Siegel. Die gleichung $ax^n - by^n = c$. *Math. Ann.*, 114:57–68, 1937.

[61] W. Sierpiński. On the equation $3^x + 4^y = 5^z$. *Wiadom. Mat.*, 1:194–195, 1955/56.

[62] R. J. Stroeker and N. Tzanakis. Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms. *Acta Arith.*, 67(2):177–196, 1994.

[63] R. J. Stroeker and N. Tzanakis. Computing all integer solutions of a genus 1 equation. *Math. Comput. Amer. Math. Soc.*, 72(244):1917–1933, 2003.

[64] P. Yuan T. Miyazaki and D. Wu. Generalizations of classical results on Jeśmanowicz' conjecture concerning Pythagorean triples, II. *Journal of Number Theory*, 141(1):184–201, 2014.

[65] K. Takakuwa and Y. Asaeda. On a conjecture on Pythagorean numbers. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 69(7):252–255, 1993.

[66] Kei Takakuwa. On a conjecture on Pythagorean numbers. III. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 69(9):345–349, 1993.

[67] Kei Takakuwa and You Asaeda. On a conjecture on Pythagorean numbers. II. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 69(8):287–290, 1993.

[68] N. Terai. The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$. III. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(1):20–22, 1996.

[69] N. Terai and K. Takakuwa. A note on the Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 73(9):161–164, 1997.

[70] Nobuhiro Terai. The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 70(1):22–26, 1994.

[71] Nobuhiro Terai. The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$. II. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 71(6):109–110, 1995.

[72] A. Thue. Über annäherungswerte algebraischer zahlen. *J. Reine Angew. Math.*, 135:284–305, 1909.

[73] R. Tijdeman. Some applications of baker's sharpened bounds to diophantine equations. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, 16(2):1–7, 1974.

[74] J. Cannon W. Bosma and C. Playoust. The magma algebra system I: The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3):235–265, 1997.

[75] G. Hanrot Y. Bilu and P. M. Voutier. Existence of primitive divisors of lucas and lehmer numbers. with an appendix by m. mignotte. *J. Reine Angew. Math.*, 539:75–122, 2001.

[76] F.S. Abu Muriefah Y. Bugeaud. The diophantine equation $x^2 + c = y^n$: a brief overview. *Revista Colombiana de Matematicas,*, 40:31–37, 2006.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/4/2020.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Rábai Zsolt
Neptun kód: HH2Z7Z
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10035332

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Bennett, M. A., Pink, I., **Rábai, Z.**: On the number of solutions of binomial Thue inequalities.
   Publ. Math. Debr. 83 (1-2), 241-256, 2013. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2013.5754
   IF: 0.519

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

2. Kovács, T., **Rábai, Z.**: Equal values of pyramidal numbers.
   Indag. Math.-New Ser. 29 (5), 1157-1166, 2018. ISSN: 0019-3577.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.010
   IF: 0.846

3. **Rábai, Z.**: A Note on the Shuffle Variant of Jeśmanowicz' Conjecture.
   Tokyo J. Math. 40 (1), 153-163, 2017. ISSN: 0387-3870.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3836/tjm/1502179220

4. Pink, I., **Rábai, Z.**: On the diophantine equation x^2+5^k17^l=y^n.
   Commun. Math. 19 (1), 1-9, 2011. ISSN: 1804-1388.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

5. Nagy, Á., **Rábai, Z.**, Vincze, C.: On a special class of generalized conics with infinitely many focal points.
   Teach. Math. Comp. Sci. 7 (1), 87-99, 2009. ISSN: 1589-7389.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

6. Bertók, C., Hajdu, L., Pink, I., **Rábai, Z.**: Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences.
   Int. J. Number Theory. 13 (261), [1-12], 2017. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042117500166
   IF: 0.536

7. **Rábai, Z.**, Bennett, M. A., Pink, I.: On the number of solutions of binomial Thue inequalities.
   Electron. Notes Discret. Math. 43, 299-304, 2013. ISSN: 1571-0653.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2013.07.047

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,901
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 1,365

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2020.01.07.

DEBRECENI EGYETEM * Egyetemi és Nemzeti Könyvtár *

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/4/2020.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Zsolt Rábai
Neptun ID: HH2Z7Z
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10035332

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Bennett, M. A., Pink, I., **Rábai, Z.**: On the number of solutions of binomial Thue inequalities.
Publ. Math. Debr. 83 (1-2), 241-256, 2013. ISSN: 0033-3883.
DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2013.5754
IF: 0.519

Foreign language scientific articles in international journals (3)

2. Kovács, T., **Rábai, Z.**: Equal values of pyramidal numbers.
Indag. Math.-New Ser. 29 (5), 1157-1166, 2018. ISSN: 0019-3577.
DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.indag.2018.01.010
IF: 0.846

3. **Rábai, Z.**: A Note on the Shuffle Variant of Jeśmanowicz' Conjecture.
Tokyo J. Math. 40 (1), 153-163, 2017. ISSN: 0387-3870.
DOI: http://dx.doi.org/10.3836/tjm/1502179220

4. Pink, I., **Rábai, Z.**: On the diophantine equation x^2+5^k17^l=y^n.
Commun. Math. 19 (1), 1-9, 2011. ISSN: 1804-1388.

DEBRECENI EGYETEM Egyetemi és Nemzeti Könyvtár

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

5. Nagy, Á., **Rábai, Z.**, Vincze, C.: On a special class of generalized conics with infinitely many focal points.
   Teach. Math. Comp. Sci. 7 (1), 87-99, 2009. ISSN: 1589-7389.

Foreign language scientific articles in international journals (2)

6. Bertók, C., Hajdu, L., Pink, I., **Rábai, Z.**: Linear combinations of prime powers in binary recurrence sequences.
   Int. J. Number Theory. 13 (261), [1-12], 2017. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042117500166
   IF: 0.536

7. **Rábai, Z.**, Bennett, M. A., Pink, I.: On the number of solutions of binomial Thue inequalities.
   Electron. Notes Discret. Math. 43, 299-304, 2013. ISSN: 1571-0653.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.endm.2013.07.047

Total IF of journals (all publications): 1,901
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,365

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

07 January, 2020