

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított kúpszeletek és alkalmazásaik

Nagy Ábris

Témavezető: Dr. Vincze Csaba



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016.

Bevezetés

Általánosított kúpszeleten az N - dimenziós valós koordinátatér olyan alakzatát értjük, melynek pontjaira egy rögzített K halmaz pontjaitól mért átlagos távolság ugyanakkora. A K halmaz elemeit nevezzük *fókuszoknak*. A fókuszok nem feltétlenül véges számosságú ponthalmazt alkotnak, mint ahogy a távolságmérés során sem feltétlenül az euklideszi távolság játszik szerepet. Mindezeken túl az átlagolási eljárásra vonatkozóan is különbözőképpen járhatunk el: súlyozott (de véges) összegek, integrál stb. Ebben a koncepcióba a szakirodalomban fellelhető általánosítások többsége beilleszthető, mint például a multifokális ellipszisek, amelyek pontjaira a véges K halmaz pontjaitól mért távolságok összege (vagy, ha úgy tetszik, számtani közepe) állandó. Természetesen a definícióban szereplő számtani közép helyett más közepeket is tekinthetünk. Súlyozott számtani közép alkalmazásával például hiperbolákat kaphatunk, továbbá ha a fókuszok között pontokon kívül egyeneseket is megengedünk, akkor a parabolákat is megkaphatjuk. C. Gross és T.-K. Strempel vetették fel a nem véges fókuszszereggel rendelkező kúpszeletek vizsgálatának problémáját a [3] dolgozatukat lezáró *nyitott problémák* fejezetben. Itt számtani közép helyett integrálás segítségével mérjük az átlagos távolságot. Integrálközelítő összegeket véve, ebben az esetben a kapott alakzatok tetszőleges pontossággal közelíthetők multifokális ellipszisekkel.

Kúpszeletek alkalmazása a differenciálgeometriában

A disszertációban az általánosított kúpszeletek egy differenciálgeometriai és egy tomográfiai alkalmazását mutatjuk be. A **differenciálgeometriai** alkalmazáshoz a fókuszhalmoz soka-ságstruktúrával ruházzuk fel és az általánosított kúpszeletek a következőképp definiáljuk.

0.1. Definíció. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ olyan korlátos, irányítható részsoka-ság, amelyre $\text{Vol } \Gamma < \infty$ az indukált Riemann-térfogatra nézve. Ekkor a Γ -hoz tartozó **általánosított kúpszeletfüggvényen** az

$$F_{\Gamma}(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol } \Gamma} \int_{\Gamma} \gamma \mapsto d(\underline{x}, \gamma) d\gamma \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^N)$$

leképezést értjük. Továbbá az

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F_{\Gamma}(\underline{x}) = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

alakú halmazokat **általánosított kúpszeleteknek** nevezzük, amelynek fókuszhalmoz Γ .

A Finsler-geometriában az alapsokaságon adott görbék ívhosszát a szokásos integrálformula segítségével mérjük, csak-hogy az érintővektorok hossza nem csupán a hely, hanem az irány függvénye is. A Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokasággá válik, ha megadható egy lineáris konnexió az alapsokaságon úgy, hogy az általa indukált párhuzamos eltolások

megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Ha a lineáris konnexió torziómentes, akkor a klasszikus Berwald-sokaságokat kapjuk. Ezek osztályozásával Szabó Zoltán [11] munkája foglalkozik. Az osztályozási tételhez vezető eredmények egyike, hogy a Berwald-terek kitüntetett (lineáris) konnexiója Riemann-metrizálható, azaz megadható olyan Riemann-féle metrikus tenzor az alapsokaságon, melynek Lévi-Civita konnexiója egybeesik a Berwald-tér kanonikus konnexiójával.

A probléma megfordítása a következő: tekintsünk egy Riemann-sokaságot és egy a sokaságon adott metrikus (nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexiót. Milyen feltételek mellett garantálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság létezése, melynek (egyik) kitüntetett konnexiója éppen ∇ ? A kérdésre a válasz az, hogy amennyiben a sokaság egy adott $p \in M$ pontjában vett euklideszi egységvektornak a holonómiacsoportra nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységgömbön, akkor a konnexió szigorú értelemben Berwald-metrizálható, azaz konstruálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság, hogy a ∇ által indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Szabó Zoltán ötletét átvéve, a feladat egy az origót a belsejében tartalmazó konvex test (egységgömbtest) konstrukciója a pont fölötti érintőtérben, mely a holonómiacsoporttal szemben invariáns és a határa nem kvadratikusan hiperfelület. Ezt a testet párhuzamos eltolással juttathatjuk el az (összefüggő) sokaság bármely pontjába. Az új egységgömbszereggel ellátva pedig a sokaság általánosított Berwald-sokasággá válik.

Tekintsük tehát az $\mathbb{R}^N$ euklideszi koordinátatér lineáris izometriacsoportjának egy G részcsoportját. Tegyük fel, hogy va-

lamely euklideszi egységvektor G csoportra nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységgömbön. A cél olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionál megadása a vektortéren, melyre nézve G elemei még izometriák maradnak. A Minkowski-funkcionálokkal szemben megkövetelt pozitív homogenitási tulajdonságra tekintettel elegendő egy olyan G -invariáns, az origót a belsejében tartalmazó konvex testet konstruálni, melynek határa nem kvadratikusan, hanem hiperfelület. A konstruált test, mint egységgömb, éppen a kívánt metrikus struktúrát származtatja. A fő eredmény az, hogy az invariáns test mindig megadható általánosított kúpszeletként.

A G csoport reducibilitása szerint két esetet különböztetünk meg. Reducibilis csoport esetén tekinthetjük az

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

gömbök valamelyikét, mint a G elemeire nézve invariáns halmazt (a csoport reducibilitásának megfelelően).

0.1. Tétel (Vincze, N. [6]). *Az $F_{S_k}(x) = \frac{c(l)}{\text{Vol } S_k}$ egyenlettel definiált általánosított kúpszelet nem ellipszoid, ahol*

$$c(l) := \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!} \quad \text{és} \quad l := k-1.$$

Következésképp olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.

Ha a G csoport irreducibilis, akkor tekintsük egy $\underline{z} \in S_{N-1}$ pont $\Gamma_{\underline{z}}$ orbitját.

0.2. Definíció. Azt a $\underline{z}_* \in S_{N-1}$ pontot, amelyben az

$$a := \min_{\|\underline{y}\|=1} \left(\max_{\gamma \in \text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{y}, \gamma) \right)$$

minimum fellép, a $\Gamma_{\underline{z}}$ orbit **minimax pontjának** nevezzük.

Tekintsük a

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq a \\ (t-a)e^{-\frac{1}{t-a}} & \text{ha } t > a. \end{cases}$$

függvényt. Standard kalkulus segítségével látható, hogy ez egy sima, konvex valós függvény. Legyen

$$g(t) := t + f(t)$$

és nézzük az

$$F(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(x, \gamma) d\gamma \quad \text{és} \quad \tilde{F}(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(x, \gamma)) d\gamma$$

függvényeket. Világos, hogy

$$F(\underline{z}_*) = \tilde{F}(\underline{z}_*) =: c$$

ahol $\underline{z}_*$ a $\Gamma_{\underline{z}}$ pálya minimax pontját jelöli.

0.2. Tétel (Vincze, N. [6]). Ha G olyan zárt, irreducibilis rész-csoportja az ortogonális csoportnak, amely nem tranzitív az egységömbön, akkor a

$$\int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = c \quad \text{és} \quad \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(\underline{x}, \gamma)) d\gamma = c$$

hiperfelületek legalább egyike olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.

Az előző két tétel és a fent leírt gondolatmenet alapján a következőt fogalmazhatjuk meg:

0.3. Tétel (Vincze, N. [6]). *Legyen M egy összefüggő Riemann-sokaság. Ha egy metrikus (de nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexió holonómia csoportjának lezártja nem tranzitív az érintőterek egységömbjein, akkor ∇ (szigorú értelemben) Berwald-metrizálható általánosított kúpszeletek segítségével.*

Kúpszeletek alkalmazása a geometriai tomográfiában

Ha az euklideszi távolság helyett az ún. taxicab/Manhattan normából származó távolságfüggvényt használjuk, akkor az átlagos távolságot mérő függvénynek és szinthalmazainak (az általánosított kúpszeleteknek) a **geometriai tomográfiában** vehetjük hasznát.

0.3. Definíció. *A $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényen az*

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K d_1(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y}$$

leképezést értjük.

A geometriai tomográfia célja, hogy információt szerezzünk olyan geometriai alakzatokról, amelyeknek csak metszeteit vagy vetületeit (esetleg mindkettőt) ismerjük. A geometriai szó itt arra utal, hogy a vizsgált objektum homogénnek tekinthető, ezért nem egy sűrűségfüggvényt kell visszaállítanunk, hanem csak az alakzat formája érdekel bennünket. A (párhuzamos) röntgenfüggvények olyan valós függvények, amelyek $\mathbb{R}^N$ egy korlátos, mérhető részhalmazának egy rögzített $N - 1$ -dimenziós altérrel való metszeteinek mértékét szolgáltatja.

0.4. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) egy korlátos, mérhető halmaz továbbá $\mathcal{H}$ egy $N - 1$ dimenziós altér $\mathbb{R}^N$ -ben, amelynek egy ortonormált bázisa $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$. Ekkor az E halmaznak a $\mathcal{H}$ altérrel párhuzamos **röntgenfüggvényének** nevezzük az

$$X_{\mathcal{H}}E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda_1((t\underline{w} + \mathcal{H}) \cap E)$$

leképezést, ahol $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1}, \underline{w})$ ugyanolyan irányítású ortonormált bázisa $\mathbb{R}^N$ -nek, mint az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$ kanonikus bázis.

Az $\underline{e}_1^\perp, \dots, \underline{e}_N^\perp$ alterekkel párhuzamos röntgenfüggvényeket koordináta-röntgenfüggvényeknek nevezzük és a következő módon jelöljük:

$$X_i K = X_{\underline{e}_i^\perp} K, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Ha $N = 2$, akkor bármely $N - 1$ -dimenziós altér ortonormált bázisa egyetlen $\underline{v}$ egységvektorból áll, így ebben az esetben $\underline{v}$ -irányú röntgenfüggvényről beszélhetünk.

A röntgenfüggvényekhez kapcsolódó rekonstrukciós feladat az, hogy találjuk meg az $\mathbb{R}^N$ tér egy kompakt részhalmazát,

amelynek csak néhány irányban vett röntgenfüggvénye adott. Mivel ez a probléma gyakran nehéznek bizonyul, ezért legtöbbször az is elegendő, ha tudunk mutatni egy olyan halmazzsorozatot, amely a rekonstruálandó halmazhoz konvergál valamilyen metrikára nézve (ez a metrika általában a kompakt halmazok Hausdorff-távolsága). A probléma nehézsége (többek között) abban áll, hogy egy kompakt halmaz röntgenfüggvényei általában nem folytonosak, sőt a szakadási helyek halmaza lehet megszámlálhatóan végtelen, sűrű részhalmaza a valós számoknak. A szakirodalomban ezért gyakran egy speciálisabb halmazosztály tagjainak rekonstrukcióját vizsgálják, mint például a konvex halmazok osztálya.

A következő tétel szerint bármely $\mathbb{R}^N$ -beli kompakt halmaz koordináta-röntgenfüggvényei helyettesíthetők az általánosított kúpszeletfüggvénnyel, amely a teljes $\mathbb{R}^N$ téren értelmezett konvex (és ezért folytonos) függvény.

0.4. Tétel (Vincze, N. [7]). *Tetszőleges $K, K^* \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazok esetén pontosan akkor teljesül $f_K = f_{K^*}$, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $X_i K = X_i K^*$ majdnem mindenütt.*

Ez a tétel lehetőséget ad számunkra, hogy a síkbeli konvex halmazoknál valamivel általánosabb hv-konvex (horizontálisan és vertikálisan konvex) halmazok rekonstrukciójára. Ehhez először egy lokalizációs tételre van szükségünk, amely konvergens halmazzsorozatok esetén az általánosított kúpszeletfüggvények konvergenciáját biztosítja.

Tetszőleges $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalap esetén legyen $\mathcal{M}_B^{hv}$ mindazon síkbeli, nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmazok összessége, amelyek határoló téglalapját tartalmazza B .

Jelölje $C(B)$ a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon értelmezett kétváltozós folytonos függvények terét ellátva a

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{(x_1, x_2) \in B} |f_L(x_1, x_2)|$$

normával.

0.5. Tétel (Vincze, N. [9]). *A $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow C(B), L \mapsto f_L$ leképezés folytonos, ahol f_L az L halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvénynek a B téglalapra való leszűkítését jelöli.*

Ennek közvetlen következménye a következő tétel.

0.6. Tétel (Vincze, N. [9]). *Ha $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ és $(L_n) \subset \mathcal{M}_B^{hv}$ olyan halmazsorozat, amelyre $f_{L_n} \rightarrow f_K$ a $C(B)$ függvényterben, akkor (L_n) bármely konvergens részsorozata konvergál egy olyan $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmazhoz (a Hausdorff-távolságra nézve), amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek K koordináta-röntgenfüggvényeivel. Továbbá, ha a K halmaz egyértelműen meghatározott a koordináta-röntgenfüggvényei által, akkor K' legfeljebb nullmértékű halmaztól eltekintve megegyezik K -val.*

Egy $K \subset \mathbb{R}^2$ halmazt síkidomnak nevezünk, ha kompakt, összefüggő, és $\text{cl}(\text{int}(K)) = K$, azaz K megegyezik belsejének lezártjával. Könnyen látható, hogy bármely síkbeli, kompakt, konvex halmaz pontosan akkor test, ha a belseje nem üres.

A fenti tétel segítségével egy elméleti algoritmus adható egy $\mathcal{M}_B^{hv}$ -beli síkidom rekonstrukciójára a koordináta-röntgenfüggvényei alapján.

Bemenet: $n \in \mathbb{N}$, és X_1K , X_2K , azaz a koordináta-röntgenfüggvényei egy K hv-konvex síkidomnak.

Az eljárás a következő lépésekből áll:

1. lépés: Meghatározzuk K határoló téglalapját a koordináta-röntgenfüggvények segítségével:

$$B = [a, b] \times [c, d] = \text{supp } X_1K \times \text{supp } X_2K,$$

ami a $K = \text{cl}(\text{int } K)$ tulajdonság és az összefüggőség miatt lehetséges.

2. lépés: Legyenek $t_i \in [a, b]$ és $s_i \in [c, d]$, $(i = 0, \dots, n)$ egymástól egyenlő távolságokra lévő osztópontok úgy, hogy $t_0 = a$, $t_n = b$ és $s_0 = c$, $s_n = d$. Tehát

$$t_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad s_i = c + i \frac{d-c}{n} \quad (i = 0, \dots, n)$$

3. lépés: Tekintsük ezután a $B_{ij}^n = [t_{j-1}, t_j] \times [s_i, s_{i-1}]$ $(i, j = 1, \dots, n)$ téglalapokat.

4. lépés: Jelöljük ki ezután az ellenőrzési pontok G_K^n halmazát a következőképp:

$$G_K^n := \left\{ \underline{y}_{ij} \in B_K \mid i, j = 1, \dots, n \right\},$$

ahol

$$\underline{y}_{ij} = \left(\frac{t_{j-1} + t_j}{2}, \frac{s_{i-1} + s_i}{2} \right) = \left(a + \frac{2j-1}{2n}(b-a), c + \frac{2i-1}{2n}(d-c) \right).$$

5. lépés: Számítsuk ki az f_K általánosított kúpszeletfüggvény értékeit az ellenőrzési pontokban a koordináta-röntgenfüggvények segítségével.

$$f_K(x_1, x_2) = \int_a^b |x_1 - t| X_1 K(t) dt + \int_c^d |x_2 - t| X_2 K(t) dt$$

6. lépés: Legyen $\mathcal{H}$ azon $L \in \mathcal{L}_B^{hv}$ halmazok gyűjteménye, amelyek előállnak valamely B_{ij}^n téglalapok uniójaként, továbbá eleget tesznek a

$$f_L(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij}) \quad (\underline{y}_{ij} \in G_K^n)$$

feltételnek.

7. lépés: Válasszuk azt az L_n halmazt $\mathcal{H}$ -ből, amelyre az

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})}{n^2}$$

kifejezés értéke minimális.

Kimenet: L_n

0.7. Tétel (Vincze, N. [8]). *Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ egy hv -konvex síkidom és jelölje (L_n) az algoritmus kimeneteként kapott L_n halmazokból képzett halmazsorozatot. Ekkor (L_n) bármely konvergens részsorozata egy olyan K^* kompakt, összefüggő, hv -konvex halmazhoz konvergál, amelynek koordináta-röntgenfüggvényeivel majdnem mindenütt megegyeznek a K röntgenfüggvényeivel.*

A fenti tétel úgy is megfogalmazható, hogy bármely $K \subset \mathbb{R}^2$ hv-konvex síkidom és $\varepsilon > 0$ esetén található $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $H(L_n, K^*) < \varepsilon$ valamely $K^* \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazzal, amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek a K röntgenfüggvényeivel.

Ez az algoritmus viszont megfogalmazható egy egészértékű lineáris programozási feladatként [8], amelyben $8n^2 - 5n + 2$ változó és $16n^2 - 9n + 5$ lineáris egyenlőtlenség szerepel.

Introduction

Generalized conics are the level sets of functions measuring the average distance from a given set of points K in the Euclidean coordinate space $\mathbb{R}^N$. Elements of the set K are called foci. The set K is not necessarily finite and the distance may also be different from the Euclidean distance. Moreover we can choose different types of averaging processes like taking finite weighted sums or integration. Most generalizations of conics found in the literature fit into this concept such as polyellipses, when the sum (or arithmetic mean) of the distances from the points of a given set is constant. It is natural to take any other type of mean instead of the standard arithmetic one. To include hyperbolas we can admit simple weighted sum of distances, while parabolas appear if we allow lines to be elements of the set of foci. C. Gross and T.-K. Strempel [3] posed the problem whether *which results* (of the classical case) *can be extended to the case of infinitely many focal points or to continuous set of foci*. In the case of an infinite set of points we can use integration over the set of

foci to calculate the average distance. If we apply finite integral sums we can see that these objects can be approximated by polyellipses.

Application in differential geometry

Applications of generalized conics in differential geometry and geometric tomography are presented in this PhD dissertation. For the application in **differential geometry** we consider the set of foci as manifolds and generalized conics are defined as follows.

1. Definition. *Let Γ be a bounded orientable submanifold in $\mathbb{R}^N$ such that $\text{vol } \Gamma < \infty$ with respect to the induced Riemannian volume form $d\gamma$. The **generalized conic function** corresponding to Γ is the mapping*

$$F_{\Gamma}(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol } \Gamma} \int_{\Gamma} \gamma \mapsto d(\underline{x}, \gamma) d\gamma \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^N).$$

Hypersurfaces of the form

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F_{\Gamma}(\underline{x}) = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

*are called **generalized conics** with foci $\gamma \in \Gamma$.*

In Finsler geometry arc length of curves in the base manifold is measured via line integrals where the length of tangent vectors doesn't depend only on position but on the direction also. A

Finslerian manifold is a generalized Berwald manifold if there is a linear connection on the base manifold such that parallel transport induced by the connection preserve the Finslerian length of tangent vectors. If this linear connection is torsion free, then we have (classical) Berwald manifold. Classification of Berwald manifolds is due to Zoltán Szabó [11]. One of the most important tools used for the classification is the fact that the Berwald connection of a Berwald manifold is Riemann-metrizable, i.e. there is a Riemannian metric on the manifold the Lévi-Civita connection is the Berwald connection.

The converse of this problem is the following: let M be a Riemannian manifold and let ∇ be a metrical (but not necessarily torsion free) linear connection on M . Under what conditions is there a non-Riemannian Finsler structure, such that the Berwald connection is ∇ ? The answer: if the orbit of a unit tangent vector in the point $p \in M$ with respect to the holonomy group is not dense in the (Euclidean) unit sphere, then the connection is strictly Berwald metrizable, i.e. there is a non-Riemannian generalized Berwald manifold with linear connection ∇ such that parallel transport induced by ∇ preserve the Finslerian length of tangent vectors. By a similar idea as Szabó's we must find a convex body in the tangent space containing the origin in its interior which is invariant under the elements of the holonomy group and has smooth boundary which is not a quadratic hypersurface. This induces a not Euclidean Minkowski functional in the tangent space having the elements of the holonomy group as linear isometries. Extending this functional by the help of the parallel transport with respect to the Riemannian structure we have a smooth collection of functionals such that it is invari-

ant under the parallel transport with respect to the Lévi-Civita connection.

Consider now a closed subgroup G of the group of linear isometries in the Euclidean space $\mathbb{R}^N$. Assume that the orbit of some unit vector under the elements of G is not dense on the unit sphere. Our goal is to find non-Euclidean Minkowski-functional in $\mathbb{R}^N$ such that the elements of G remain isometries. Because of the positive homogeneity of Minkowski functionals it is enough to find a G -invariant convex body containing the origin in its interior which has smooth boundary different from any quadratic hypersurface. This is the indicatrix of the desired functional. The main result of this work is that this body can be represented as a generalized conic.

We have two different cases of the problem according to the reducibility of G . If G is reducible we can take one of the Euclidean unit spheres

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

as the invariant set under the elements of G according to the reducibility.

If G is reducible we can take one of the Euclidean unit spheres

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

as the invariant set under the elements of G according to the reducibility.

1. Theorem (Vincze, N. [6]). *The generalized conic defined*

by formula $F_{S_k}(x) = \frac{c(l)}{\text{Vol } S_k}$, where

$$c(l) := \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!} \quad \text{and} \quad l := k-1$$

is not an ellipsoid. Consequently it induces a non-Euclidean Minkowski functional containing the elements of G as linear isometries.

If G is an irreducible group, then consider the orbit $\Gamma_{\underline{z}}$ of the element $\underline{z} \in S_{N-1}$.

2. Definition. The minimax point of Γ_z is such a point z_* on the sphere where the minimum

$$a := \min_{\|\underline{y}\|=1} \left(\max_{\gamma \in \text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{y}, \gamma) \right)$$

is attained.

Consider the function

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq a \\ (t-a)e^{-\frac{1}{t-a}} & \text{if } t > a. \end{cases}$$

By the help of the standard calculus it can be seen that it is a smooth convex function on the real line. Define

$$g(t) := t + f(t).$$

and take the functions

$$F(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_z} d(x, \gamma) d\gamma \quad \text{and} \quad \tilde{F}(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_z} g(d(x, \gamma)) d\gamma.$$

It is clear that

$$F(\underline{z}_*) = \tilde{F}(\underline{z}_*) =: c,$$

where $\underline{z}_*$ is the minimax point of Γ_z .

2. Theorem (Vincze, N. [6]). *If G is not transitive on the unit sphere, closed and irreducible then one of the hypersurfaces*

$$\int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = c \quad \text{and} \quad \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(\underline{x}, \gamma)) d\gamma = c$$

induces a not Euclidean Minkowski functional L such that G is the subgroup of the linear isometries with respect to L .

Finally we can state our main theorem.

3. Theorem (Vincze, N. [6]). *Let M be a connected Riemannian manifold; if the closure of the holonomy group of a metrical (but not necessarily torsion-free) linear connection ∇ is not transitive on the unit sphere in the tangent space then M can be changed into a non-Riemannian generalized Berwald manifold by generalized conics with respect to the Riemannian structure.*

Application in geometric tomography

If we use the distance function induced by the taxicab norm instead of the Euclidean distance, then we can find application of the average distance function and its level sets in **geometric tomography**.

3. Definition. *The **generalized conic function** corresponding to the compact set $K \subset \mathbb{R}^N$ is the mapping*

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K d_1(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y}.$$

Geometric tomography is the area of mathematics dealing with the retrieval of information about a geometric object from data about its intersections, or projections, or both. The word geometric is used here because we assume that the object is homogeneous in contrast to tomography. In other words we are only interested in the shape of the object. Parallel X-rays are functions that measure the intersection of a given set with hyperplanes parallel to a fixed subspace of co-dimension 1 of $\mathbb{R}^N$.

4. Definition. *Let $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) be a bounded, measurable set and $\mathcal{H}$ is a linear subspace of co-dimension 1 of $\mathbb{R}^N$ with an orthonormal basis $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$. Then the **X-ray** of the set E parallel to $\mathcal{H}$ is the mapping*

$$X_{\mathcal{H}}E: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \lambda_1((t\underline{w} + \mathcal{H}) \cap E),$$

where $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1}, \underline{w})$ an orthonormal basis of $\mathbb{R}^N$ with the same orientation as the standard basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$.

X-rays parallel to the subspaces $\underline{e}_1^\perp, \dots, \underline{e}_N^\perp$ are called coordinate X-rays and denoted by

$$X_i K = X_{\underline{e}_i^\perp} K, \quad (i = 1, \dots, N).$$

If $N = 2$, then subspaces of co-dimension 1 are 1-dimensional and any basis of such a subspace consist of only one vector $\underline{v}$. Thus we can say X-ray parallel to the direction $\underline{v}$ when the dimension is two.

The reconstruction problem concerning parallel X-rays is to reconstruct a compact subset of $\mathbb{R}^N$ if the parallel X-rays of this set into some directions are given. In many cases it is enough to construct a sequence of sets that converges to a compact set with respect to the Hausdorff distance, and has the given X-rays. This problem is hard in general, since X-rays of a compact set may be discontinuous, moreover, the set of discontinuities can form an infinite dense subset of $\mathbb{R}$. Therefore in the literature more specialized families of sets are investigated such as the collection of convex sets.

However, our following theorem states that the coordinate X-rays of any compact set $K \subset \mathbb{R}^N$ can be replaced by the generalized conic function corresponding to K which is a convex (and consequently continuous) function on $\mathbb{R}^N$.

4. Theorem (Vincze, N. [7]). *For compact bodies K and K^* in $\mathbb{R}^N$ $f_K = f_{K^*}$ if and only if $X_i K = X_i K^*$ for all $i \in \{1, \dots, N\}$ almost everywhere.*

This theorem allows us to obtain reconstruction result for a slightly wider class of sets than the convex sets in the plane, na-

mely for the class of hv-convex (horizontally and vertically convex) sets. First of all we need a localization theorem providing the convergence of generalized conic functions of a convergent sequence of planar hv-convex sets.

If $B = [a, b] \times [c, d]$ is an arbitrary rectangle then let $\mathcal{M}_B^{hv}$ denote the set of all non-empty, compact, connected, hv-convex subsets in the plane which are inside the rectangle B . Let $C(B)$ denote the set of all continuous functions of two variables defined on the rectangle $B = [a, b] \times [c, d]$ equipped with the norm

$$\|f\|_{\sup} := \sup_{(x_1, x_2) \in B} |f_L(x_1, x_2)|.$$

5. Theorem (Vincze, N. [9]). *The mapping $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow C(B)$, $L \mapsto f_L$ is continuous, where f_L is the generalized conics function corresponding to the set L restricted to the rectangle B .*

An immediate consequence of this theorem is the following:

6. Theorem (Vincze, N. [9]). *If $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ and $(L_n) \subset \mathcal{M}_B^{hv}$ is a sequence of sets such that $f_{L_n} \rightarrow f_K$ in $C(B)$, then any convergent subsequence of (L_n) converges to a set $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ (with respect to the Hausdorff distance) with the same coordinate X-rays as K almost everywhere. If the set K is determined by its coordinate X-rays then K' differs from K at most of a set of measure zero.*

A set $K \subset \mathbb{R}^2$ is called body if it is compact, connected, and $\text{cl}(\text{int}(K)) = K$, i.e. K is the closure of its interior. Note that any planar, compact, convex set is a body if and only if it has a non-empty interior.

We can establish an algorithm for the reconstruction of a body $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ by its coordinate X-rays with the help of the above theorem.

Input: $n \in \mathbb{N}$ and X_1K, X_2K , the coordinate X-rays of a connected hv-convex body $K \subset \mathbb{R}^2$.

The process involves the following basic theoretical steps:

STEP 1: Compute the bounding box

$$B = [a, b] \times [c, d] = \text{supp } X_1K \times \text{supp } X_2K,$$

as $K = \text{cl}(\text{int } K)$ and K is connected.

STEP 2: Let $t_i \in [a, b]$ and $s_i \in [c, d]$, $(i = 0, \dots, n)$ be equally spaced points with $t_0 = a$, $t_n = b$ and $s_0 = c$, $s_n = d$:

$$t_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad s_i = c + i \frac{d-c}{n} \quad (i = 0, \dots, n)$$

STEP 3: Define the rectangles $B_{ij}^n = [t_{j-1}, t_j] \times [s_i, s_{i+1}]$ $(i, j = 1, \dots, n)$.

STEP 4: The control grid G_K^n of K is defined as the set of the centers of the rectangles B_{ij}^n :

$$G_K^n := \left\{ \underline{y}_{ij} \in B_K \mid i, j = 1, \dots, n \right\},$$

where

$$\underline{y}_{ij} = \left(\frac{t_{j-1} + t_j}{2}, \frac{s_{i-1} + s_i}{2} \right) = \left(a + \frac{2j-1}{2n}(b-a), c + \frac{2i-1}{2n}(d-c) \right).$$

STEP 5: Calculate the values of the generalized conic function f_K in the points of the control grid with the help of the coordinate X-rays.

$$f_K(x_1, x_2) = \int_a^b |x_1 - t| X_1 K(t) dt + \int_c^d |x_2 - t| X_2 K(t) dt$$

STEP 6: Let $\mathcal{H}$ be the collection of all sets $L \in \mathcal{L}_B^{hv}$ such that L is the union of some rectangles B_{ij}^n presented in the third step and

$$f_L(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij}) \quad \left(\underline{y}_{ij} \in G_K^n \right).$$

STEP 7: Choose L_n from $\mathcal{H}$ that minimizes

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})}{n^2}.$$

Output: L_n

7. Theorem (Vincze, N. [8]). *Let $K \subset \mathbb{R}^2$ be an hv-convex body and (L_n) the sequence of the output sets. Then any convergent subsequence of (L_n) converges to a compact, connected, hv-convex planar set K^* such that K^* has the coordinate X-rays $X_1 K$ and $X_2 K$ almost everywhere.*

Another possible formulation of the above theorem is that for any hv-convex body $K \subset \mathbb{R}^2$ and $\varepsilon > 0$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such

that $H(L_n, K^*) < \varepsilon$ for some non-empty compact connected hv-convex set K^* having the same coordinate X-rays as K almost everywhere.

This algorithm can be turned into the solution of a linear integer programming problem [8] with $8n^2 - 5n + 2$ variables and $16n^2 - 9n + 5$ (linear) inequalities.

Hivatkozások

- [1] M. Barczy, Á. Nagy, Cs. Noszály, Cs. Vincze, a Robbins-Monro-type algorithm for computing global minimizer of generalized conic function *Optimization*, **64**, 1999–2020, (2015)
- [2] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New-York, 2006, second ed.
- [3] C. Gross, T.-K. Stempel, On generalizations of conics and on a generalization of the Fermat-Toricelli problem *American Mathematical Monthly* **105** (8), 732–743 (1998)
- [4] Á. Nagy, Zs. Rábai, Cs. Vincze, On a special class of generalized conics with infinitely many focal points *Teaching of Mathematics and Computer Science*, **7** (1), 87–99 (2009)
- [5] Á. Nagy and Cs. Vincze, Examples and notes on generalized conics and their applications *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, **26**, 359–375 (2010)

- [6] Á. Nagy, Cs. Vincze, An introduction to the theory of generalized conics and their applications *Journal of Geometry and Physics*, **61**, 815–828 (2011)
- [7] Á. Nagy, Cs. Vincze, On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography *Journal of Approximation Theory*, **164** (3), 371–390 (2012)
- [8] Á. Nagy, Cs. Vincze, Reconstruction of hv-convex sets by their coordinate X-ray functions *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **49**, 569–582 (2014)
- [9] Á. Nagy, Cs. Vincze, Generalized conic functions of hv-convex planar sets: continuity properties and relations to X-rays *Aequationes mathematicae*, **89** (4), 1015–1030 (2015)
- [10] Á. Nagy, Cs. Vincze, An algorithm for the reconstruction hv-convex planar bodies by finitely many and noisy measurements of their coordinate X-rays *Fundamenta Informaticae*, **141**, 169–189 (2015)
- [11] Z. I. Szabó, Positive definite Berwald spaces *Tensor N. S.*, **35**, 25–39 (1981)



Nyilvántartási szám: DEENK/248/2015.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Nagy Ábris
Neptun kód: CQ2IR1
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10035204

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) hazai folyóiratban (1)

1. **Nagy, Á.**, Rábai, Z., Vincze, C.: On a special class of generalized conics with infinitely many focal points.
Teach. Math. Comp. Sci. 7 (1), 87-99, 2009. ISSN: 1589-7389.

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (6)

2. Vincze, C., **Nagy, Á.**: Generalized conic functions of hv-convex planar sets: continuity properties and relations to X-rays.
Aequ. Math. 89 (4), 1015-1030, 2015. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-014-0322-2>
IF:0.918 (2014)
3. Barczy, M., **Nagy, Á.**, Noszály, C., Vincze, C.: A Robbins-Monro-type algorithm for computing global minimizer of generalized conic functions.
Optimization. 64 (9), 1999-2020, 2015. ISSN: 0233-1934.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/02331934.2014.919499>
IF:0.936 (2014)
4. Vincze, C., **Nagy, Á.**: An algorithm for the reconstruction of hv-convex planar bodies by finitely many and noisy measurements of their coordinate X-rays.
Fundam. Inform. 141 (2-3), 169-189, 2015. ISSN: 0169-2968.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3233/FI-2015-1270>
IF:0.717 (2014)





5. **Nagy, Á.**, Vincze, C.: Reconstruction of hv-convex sets by their coordinate X-ray functions.
J. Math. Imaging Vis. 49 (3), 569-582, 2014. ISSN: 0924-9907.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-013-0487-7>
IF:1.552
6. Vincze, C., **Nagy, Á.**: On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography.
J. Approx. Theory. 164 (3), 371-390, 2012. ISSN: 0021-9045.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2011.11.004>
IF:0.755
7. Vincze, C., **Nagy, Á.**: An introduction to the theory of generalized conics and their applications.
J. Geom. Phys. 61 (4), 815-828, 2011. ISSN: 0393-0440.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.12.003>
IF:0.818

Idegen nyelvű konferencia közlemény(ek) (2)

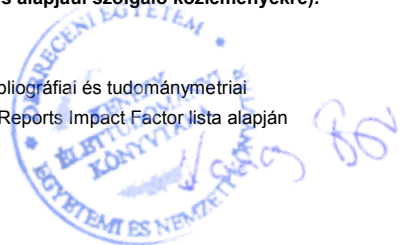
8. **Nagy, Á.**: A short review on the theory of generalized conics.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. 31 (1), 81-96, 2015. ISSN: 1786-0091.
(Colloquium on Differential Geometry and its Applications)
9. **Nagy, Á.**, Vincze, C.: Examples and notes on generalized conics and their applications.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh. 26 (2), 359-375, 2010. ISSN: 1786-0091.
(Workshop on Finsler geometry and its applications)

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 5,696

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapján szolgáló közleményekre): 5,696

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2015.12.03.





Registry number:
Subject:

DEENK/248/2015.PL
Ph.D. List of Publications

Candidate: Ábris Nagy

Neptun ID: CQ2IR1

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10035204

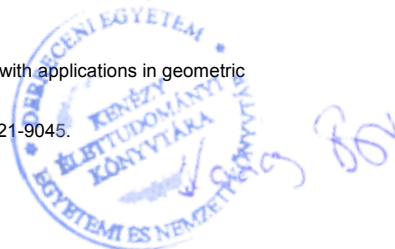
List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific article(s) in Hungarian journal(s) (1)

1. **Nagy, Á.**, Rábai, Z., Vincze, C.: On a special class of generalized conics with infinitely many focal points.
Teach. Math. Comp. Sci. 7 (1), 87-99, 2009. ISSN: 1589-7389.

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (4)

2. Vincze, C., **Nagy, Á.**: Generalized conic functions of hv-convex planar sets: continuity properties and relations to X-rays.
Aequ. Math. 89 (4), 1015-1030, 2015. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-014-0322-2>
IF:0.918 (2014)
3. **Nagy, Á.**, Vincze, C.: Reconstruction of hv-convex sets by their coordinate X-ray functions.
J. Math. Imaging Vis. 49 (3), 569-582, 2014. ISSN: 0924-9907.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-013-0487-7>
IF:1.552
4. Vincze, C., **Nagy, Á.**: On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography.
J. Approx. Theory. 164 (3), 371-390, 2012. ISSN: 0021-9045.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2011.11.004>
IF:0.755





5. Vincze, C., **Nagy, Á.**: An introduction to the theory of generalized conics and their applications.
J. Geom. Phys. 61 (4), 815-828, 2011. ISSN: 0393-0440.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.12.003>
IF:0.818

Foreign language conference proceeding(s) (2)

6. **Nagy, Á.**: A short review on the theory of generalized conics.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyh. 31 (1), 81-96, 2015. ISSN: 1786-0091.
(Colloquium on Differential Geometry and its Applications)
7. **Nagy, Á.**, Vincze, C.: Examples and notes on generalized conics and their applications.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyh. 26 (2), 359-375, 2010. ISSN: 1786-0091.
(Workshop on Finsler geometry and its applications)

List of other publications

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (2)

8. Barczy, M., **Nagy, Á.**, Noszály, C., Vincze, C.: A Robbins-Monro-type algorithm for computing global minimizer of generalized conic functions.
Optimization. 64 (9), 1999-2020, 2015. ISSN: 0233-1934.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/02331934.2014.919499>
IF:0.936 (2014)
9. Vincze, C., **Nagy, Á.**: An algorithm for the reconstruction of hv-convex planar bodies by finitely many and noisy measurements of their coordinate X-rays.
Fundam. Inform. 141 (2-3), 169-189, 2015. ISSN: 0169-2968.
DOI: <http://dx.doi.org/10.3233/FI-2015-1270>
IF:0.717 (2014)

Total IF of journals (all publications): 5,696

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,043

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóster have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

03 December, 2015