



Angol, belga, magyar, és spanyol matematikatanítási hagyományok
összehasonlítása

The Comparison of Mathematics Teaching Traditions in England, Belgium,
Hungary and Spain

Tézisek - Theses

Török Judit

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007



Angol, belga, magyar, és spanyol matematikatanítási hagyományok
Összehasonlítása

The Comparison of Mathematics Teaching Traditions in England, Belgium,
Hungary and Spain

Tézisek - Theses

Török Judit

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2007

BEVEZETÉS

Dolgozatomban négy különböző országban videóra vett – geometriai témájú - órasorozatot elemzek és hasonlítok össze. A felvételek a METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt keretében készültek és elemzésemhez is felhasználok a METE által kidolgozott eszközöket.

1. A SOKSZÖGEK TANÍTÁSÁNAK ELMÉLETI HÁTTERE, ELEMZÉSI SZEMPONTOK

Elemzésem során a következő szempontokat veszem figyelembe:

A geometriatanítás általános céljai

A geometriatanítás néhány lehetséges célját a következőképpen foglalja össze egy ICMI tanulmány (Villani et al. 1996):

- „ - a környező világ leírása, megértése és értelmezése
- példa mutatása axiomatikus elméletre
- gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára
- megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására
- eszközt teremteni más matematikai területeknek
- gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét”

Megvizsgálom, hogy ezek a célok mennyire valósultak meg.

A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

- Van Hiele szintek (Fuy et al. 1984)
- Definíciók és tulajdonságok (definíciók, osztályozás, szimmetriák) (Battista-Clemens, 1992, Fuy et al. 1984)
- Bizonyítások ” (Battista-Clemens, 1992)
- Az ábrák fogalmi vonatkozásai ” (Battista-Clemens, 1992, Alsina et al. 1987)

Módszertani eszközök

- Fogalmak és készségek elsajátítása
- A matematikai tartalom strukturálása
- Következtetési módok
- Eszközök használata az órákon

A METE (Mathematics Education Traditions of Europe) projekt eszközei

A METE az Európai Unió támogatásával létrejött kétéves (2003-2004) projekt, melynek célja öt európai ország matematikatanítási hagyományainak összehasonlítása, matematikatanítási módszereinek vizsgálata volt. A kutatásban résztvevő országok: Anglia, Belgium, Finnország, Magyarország és Spanyolország. (Andrews et al, 2004; Andrews, 2005, Török 2006)

Dolgozatomban a METE projekt keretében videóra vett órák egy részét (a Finnországban felvett órák kivételével a 7-8. osztályokban rögzített geometriaórákat) elemzem, felhasználva a projekt során közösen kidolgozott eszközöket.

Kódlap (CS)

A kvantitatív elemzést szolgáló adatok gyűjtéséhez egy kódlapot (CS: coding scheme) használtunk, amely három fő kategóriába sorolva tartalmazta megfigyelési szempontjainkat: matematikai fókusz, matematikai kontextus (kapcsolódik a valódi világhoz vagy nem, illetve eredeti adatokkal dolgoznak-e a tanulók vagy nem); módszertani eszközök. A matematikai fókusz alkategóriái: fogalmi, levezetés, strukturális, eljárás, hatékonyság, problémamegoldás, érvelés. A módszertani eszközök alkategóriái: korábbi ismeretek aktiválása, korábbi ismeretek gyakorlása, tanári magyarázat, gondolatok közzététele, felfedeztetés, tanári segítség, értékelés, motiválás, kérdve kifejtés, differenciálás.

Az órákat epizódokra bontottuk, ahol egy epizódnak tekintettük az órának azt a részét, melyen belül a tanár módszertani szándékai nem változnak. Minden felvett órához kitöltöttünk egy kódlapot, melyen epizódról epizódra bejelöltük, hogy szempontjaink közül melyek voltak megfigyelhetők az illető epizódban.

Szintézis-lap (LS)

Szintén minden órához elkészítettük az úgynevezett Reusser-sheet egy módosított változatát, a szintézis-lapot (LS: Lesson synthesis sheet), amely egy oldalra tömörítve ad képet az órán törtétekről. A lap tetején egy – az órára jellemző – fotó mellett az óra néhány fontos adata szerepel (iskola neve, tanár neve, osztály, dátum, az óra címe). Ezt két dupla soros idővonal követi, melyeken az óra menetének megfelelően percről percre színkódokkal jelöltük egyiken az órán folyó pedagógiai tevékenységfajtákat, másikon az éppen megfigyelhető munkaformákat (osztálymunka, egyéni munka, páros munka, csoportmunka).

A következő pedagógiai tevékenységeket különböztettük meg: elmélet vagy fogalomépítés, feladatmegoldás, megoldások megbeszélése, probléma vagy feladat kitűzése, házi feladattal kapcsolatos tevékenység, feladattal kapcsolatos szervezés, egyéb szervezés.

2. ESETTANULMÁNY - ANGLIA

A tanár elmondása szerint az osztályba számos gyenge memóriával, viselkedési zavarral olvasási vagy számolási nehézséggel küszködő gyerek jár, ezért az alapvető fogalmak megtanítását és memorizáltatását tartotta fő feladatának. A felvett órák anyaga: Párhuzamosok és merőlegesek, párhuzamosok, egyenlő oldalak és derékszögek a négyszögekben; Speciális négyszögtípusok és tulajdonságaik; Sokszögek.

Kvantitatív elemzés

A pedagógiai tevékenységek közül a legtöbb időt feladatmegoldással (az összidő 36%-a) és a megoldások megbeszélésével (30%) töltötték. Fogalmakkal kapcsolatos munka az idő 18%-át tette ki.

Az idő 78%-ában együtt dolgozott az egész osztály. Egyéni munkára az idő 19%-a jutott, páros munka az idő 3%-ában történt.

Matematikai fókusz tekintetében a tanár a fő hangsúlyt az alapvető fogalmak tisztázására fektette, az epizódok 85%-ában fordult elő a fogalmi fókusz. Ezt követi gyakoriságban az eljárási fókusz (45%). Minden órán előfordultak epizódok, melyekben a tanulóknak

indokolniuk kellett válaszaikat (érvelés). Levezetés vagy strukturális fókusz nem volt a megfigyelt órák során.

A matematikai kontextust az epizódok 85%-ában „nem valódi világ – kitalált adatok” jellemezték.

A módszertani eszközök közül a tanári segítség dominált (85%), jelentős volt még a közzétételt (60%) és a tanári magyarázatot (50%) tartalmazó epizódok aránya. Felfedeztetés és differenciálás nem fordult elő a megfigyelt órákon.

Kvalitatív elemzés

A geometriatanítás általános céljai

Valódi világgal kapcsolatos feladatok nem fordultak elő a megfigyelt órákon, de történetek utalások a hétköznapi életre és az idegen eredetű szakszavak nyelvi jelentésére.

A feldolgozott feladatok ha tartalmukban nem is, de kitűzési és feldolgozási módjukban változatos képet mutattak.

Logikai kapcsolatokra vonatkozó deduktív érvelést tartalmazó epizód nem fordult elő, ellenpélda keresésére egy ízben buzdította a tanár a diákokat.

A tanár többféleképpen igyekezett motiválni a gyerekeket.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanulók többnyire a 0. Van Hiele szinten dolgoztak, időnként érintve az első szintet. Minden feladat valamilyen ábrához kapcsolódott, a fő hangsúly elnevezések és jelölések tanítására esett. Tulajdonságcsoporthoz összefüggéseiről vagy a négyszögek osztályozásáról nem esett szó, levezetés, bizonyítás vagy több lépéses logikai láncon alapuló érvelés nem fordult elő.

Módszertani eszközök

A tanár néhány fő módszertani eszköze – saját bevallása szerint - a türelem volt.

Az elnevezések, jelölésmódok és definíciók memorizálását gyakori visszakérdezésekkel és ismétlésekkel próbálta segíteni, utalt az idegen eredetű szavak eredeti jelentésére. Folyamatos kérdésekkel igyekezett a tanulókat bevonni, változatos feladatokkal, játékkal tartotta ébren figyelmüket. A feladatok kitűzéséhez feladatlapokat, megbeszélésükhöz a feladatlap táblára vetített változatát használta.

3. ESETTANULMÁNY – BELGIUM

Az órákat Leuvenben egy jó iskola átlagos képességű hetedik osztályában vettük fel. Az órák témája: Négyszögek tulajdonságai; A négyszögek osztályozása; Szögek, szakaszfelező merőlegesek és szögfelezők; Négyszögek tulajdonságai és átlói; Négyszögek kerülete és területe, kockák és téglatestek.

Kvantitatív elemzés

A pedagógiai tevékenységek közül a legtöbb időt (az öt óra összidejének 60%-át) elméleti anyag töltötte ki. Az idő több mint ötödrészában (22%) dolgoztak a tanulók feladatokon.

Az anyagot az idő 93%-ában frontálisan dolgozták fel, csoportmunka nem fordult elő.

A matematikai fókuszfajták közül a leghangsúlyosabb a fogalmi (88%). Eljárások tanítása vagy gyakorlása az epizódok 42%-ában szerepelt. Előfordult néhány strukturális elem (23%), és néhány tanulói érvelést tartalmazó epizód (19%). Két epizód tartalmazott levezetést, problémamegoldás nem fordult elő a megfigyelt órák során.

A hétköznapi életből (valódi világ) vett példák vagy feladatok nem fordultak elő. Az epizódok 73%-ában dolgoztak a tanulók a tanár által megadott (kitalált) adatokkal, 19%-ában választhatták meg saját (eredeti) adataikat.

Felfedeztetés, motiválás és differenciálás nem fordult elő a megfigyelt órákon. A tanár a módszertani eszközök közül leggyakrabban a kérdve kifejtést (81%) és az ehhez kapcsolódó közzétételt (77%) használta, jelentős mennyiségű tanári magyarázat kíséretében (65%). Súlyt fektetett a korábbi ismeretek aktivizálására is (42%).

Kvalitatív elemzés

A geometriatanítás általános céljai

A környező világhoz kapcsolódó feladatok egyáltalán nem fordultak elő a megfigyelt órákon, bár néha történt utalás hétköznapi példára.

Az öt óra összidejének alig több mint ötödrésztében folyt feladatmegoldás. A feladatok nagy része jelölésekre vagy elnevezésekre, más része eljárások követésére vonatkozott. Problémamegoldás nem fordult elő.

Felfedeztetés a megfigyelt órákon nem fordult elő, tanulói érvelés is kevés, levezetés csak a tanár részéről.

Más matematikai területtel (algebrával) való kapcsolat felmerült a terület- térfogat- illetve felszínszámítás kapcsán.

A tanár nem próbálta motiválni a tanulókat.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanár elsősorban az 1. szinten mozog, gyakran visszatérve a 0. szintre. Úgy tűnik, a 2. szinten maga is bizonytalan.

Az egyes négyszögfajták definiálása során keverednek az exkluzív és intenzív kategóriák.

A tulajdonságok leíró jelleggel hangzanak el, a definíciók és az egyéb tulajdonságok közötti logikai kapcsolatra nem történik utalás.

A négyszögek osztályozása során a tanár súlyt fektet arra, hogy a tanulók lássák az egyes négyszögfajták egymással való kapcsolatát, de sem Venn-diagrammos szemléltetés, sem a szimmetriákra való utalás nem történt.

A tanár elsősorban precíz táblai rajzokkal (mindig standard pozícióban) igyekezett szemléltetni mondanivalóját, a téglatest felszínének és térfogatának kiszámításakor egy téglatest modellt használt. Az ábrák igen fontos szerepet játszottak az órákon, a legtöbb feladat kiindulópontja egy ábra volt.

Módszertani eszközök

A fő hangsúly az órákon elnevezések, jelölések és eljárások megtanítására és gyakorlására esett. A tanár fő eszköze a magyarázat és a kérdve kifejtés (demonstráció) volt. A feladatok megoldásához részletes instrukciókat adott.

4. ESETTANULMÁNY - MAGYARORSZÁG

Az órákat egy budapesti 6 osztályos gimnázium 8. évfolyamnak megfelelő osztályában vettük fel. Az osztály előzőleg a Pitagorasz-tételről és annak alkalmazásáról tanult. A felvett órák célja a sokszögekről tanult mindenféle ismeretek felelevenítése és a (4 osztályos) gimnáziumi felvételi vizsgára való felkészítés volt.

Kvantitatív elemzés

A pedagógiai tevékenységek közül a legtöbb időt feladatmegoldással (26%) és a megoldások megbeszélésével (30%) töltötték. A feladatok kitűzésére is jelentős időt fordított a tanár (21 %).

Az idő 85%-ában frontális munka folyt, 12%-ában egyénileg dolgoztak a gyerekek, páros munka nem fordult elő a megfigyelt órákon.

Az összes fókuszfajta előfordult az epizódok valamelyikében. A legnagyobb hangsúly a fogalomépítésre és az érvelésre esett (mindkettő az epizódok 70%-ára volt jellemző). Minden órán szerepelt problémamegoldás (45%) és strukturális epizód (40%). Viszonylag magas volt a hatékonysági elemet (40%) és az eljárásokat (30%) tartalmazó epizódok aránya is.

Valódi világgal kapcsolatos feladatra csak egy epizódban került sor. A tanár által megadott (kitalált) adatokkal az epizódok 95%-ában dolgoztak, míg eredeti adatokkal összesen három epizódban (15%).

Differenciálás és felfedeztetés nem fordult elő a megfigyelt órákon, minden más eszköz alkalmazásra került legalább két epizódban. Leghangsúlyosabb módszertani eszköze a tananyag tanári kérdésekre adott tanulói válaszokon keresztül történő feldolgozása, kérdve

kifejtés is és közzététel is az epizódok 90%-ában fordult elő. Minden órán szerepelt tanári magyarázat is (70%), és motiválás is (50%).

Kvalitatív elemzés

A geometriatanítás általános céljai

Valódi világhoz kapcsolódó feladat csak egyszer fordult elő, de a tanár nagy súlyt fektetett a feladatok értelmezésére, a megoldások szemléltetésére, matematikán belüli kapcsolatok bemutatására.

A kitűzött feladatok témájukban, nehézségi fokukban, kitűzési és feldolgozási módjukban is változatosak voltak.

A tanár ösztönözte a tanulókat a pontos fogalmazásra, a válaszok indoklására, az összes megoldás megtalálására. Több epizódban is előfordult levezetés, számos feladatra volt jellemző a matematika különböző területeinek összekapcsolása.

Fogalmi vonatkozások

A megfigyelt órákon a tanár mindvégig megköveteli a pontos fogalmazást, indoklást és az összes lehetséges eset számbavételét, azaz a 3. Van Hiele szintre igyekszik eljuttatni a tanulókat.

Új fogalmak bevezetésére nem került sor, a régebben tanultak elmélyítését szolgálták a vegyes feladatok, melyek megoldása során a tanulóknak kellett rájönnie, hogy milyen korábbi (többször nem csak geometriai) ismeret vezet célra.

A táblai rajzoknál a tanár nem törekedett a pontosságra, többször hangsúlyozta, hogy az adatok alapján kell eldönteni, milyen esetek lehetségesek.

Módszertani eszközök

A fő hangsúly az eddig tanult geometriai fogalmak felelevenítésére és elmélyítésére esett. Gyakorlásra illetve problémamegoldásra szánt feladatok épp úgy előfordultak, mint a

gyakorlati készségek fejlesztését szolgáló számítási feladatok vagy a matematika különböző területeit összekapcsoló, a fogalomépítést segítő, gondolkodásfejlesztő feladatok.

Láthattunk példát ötletet kívánó vagy felfedeztető jellegű (induktív következtetést igénylő) feladatra is és szigorú levezetésre (deduktív következtetés) is. A tanár gyakran saját magyarázataival egészítette ki vagy foglalta össze a megoldásokat (demonstráció).

A tanulók motiválását szolgálta a tanár értékelő megjegyzései mellett az első óra végi játék, a szemléltetőeszközök használata és az egyik feladat első megoldójának felajánlott ötös.

5. ESETTANULMÁNY- SPANYOLORSZÁG

Az órákat egy középiskola vegyes képességű 1. osztályában vettük fel, ahol a tanár által írt elektronikus tankönyv alapján dolgozták fel az anyagot. Az órák anyaga: Sokszögek: általános tulajdonságok, háromszögek szerkesztése, ismerkedés a Cabri programmal; A derékszögű háromszög, Pitagorasz-tétel és alkalmazásai; A háromszög nevezetes pontjai és vonalai.

Kvantitatív elemzés

A pedagógiai eszközök közül az elmélet anyag ismertetése (az idő 31%-a), feladatok kitűzése (25%) és megoldása (26%) dominált.

Az idő 74%-ában frontális munka folyt, míg 26%-ában a tanulók párokban dolgoztak a számítógépekkel.

A matematikai fókuszfajták közül a (többnyire az elektronikus tankönyv ill. a Cabri használatával kapcsolatos) eljárások (87%) és fogalmak (67%) tanítása dominált.

A matematikai kontextust mindvégig a „nem valódi világ, kitalált adatok” kategória jellemezte.

A tanár fő módszertani eszköze a magyarázat (100%) és segítségnyújtás (80%) volt, a számítógépek alkalmazásával motiválva a gyerekeket.

Kvalitatív elemzés

A megfigyelt órák menete meglehetősen hasonló volt. Minden óra tanári előadással kezdődött, melynek során a tanár PowerPoint segítségével áttekintette az óra témáját, majd kitűzte a feladatokat, bemutatta azok megoldási módját, részletes utasításokat adott a számítógép és az oktatóprogramok használatával kapcsolatban. Ezt követően a gyerekek párosával dolgoztak a számítógépekkel a feladatokon, míg a tanár körbejárva segített azoknak, akik elakadtak, időnként az egész osztálynak szóló magyarázatokkal szakítva meg a munkát.

A geometriatanítás általános céljai

Valódi világgal kapcsolatos feladatok nem fordultak elő, de történtek utalások hétköznapi példákra.

Témáját tekintve a feldolgozásra szánt anyag változatos volt.

A feladatok egy része felfedeztető jellegű volt, a tanár több ízben buzdította a tanulókat kísérletezésre, kérdések kitalálására, sejtések megalkotására. Gyakran azonban előre elmondta, hogy mit kell felfedezni, és általában nem követte bizonyítás a felfedezést.

A megtanult ismeretek és technikák a későbbi számításhoz geometriai feladatoknál illetve elemi geometriai sejtések megalkotásában is hasznos eszközt jelenthetnek. A tanári előadások során megfigyelhető volt néhány strukturális elem.

Fogalmi vonatkozások

A tankönyv (és a tanár) főleg a 2. Van Hiele szintet célozza meg, de nehezen ítéltető meg, a gyerekek szintje.

A megfigyelt órák során számos definíciót közöl a tanár, miközben áttekinti a tárgyalandó anyagot. A definíciókat és összefüggéseket az elektronikus tankönyvből kivetített ábrákkal szemlélteti. Egyedül a Pitagorasz-tétel esetében követi a két konkrét példán való szemléltetést bizonyítás.

A kapcsolódó feladatok megoldása során sok a softwarehasználatból adódó technikai probléma, melyek elterelik a figyelmet a matematikai tartalomról.

Bizonyítás, érvelés, indoklás a tanulók részéről egyáltalán nem történt, bizonyítéknak számított, amit a képernyőn láthattak.

Módszertani eszközök

A tanár a fogalmak kialakításának deduktív módját választotta: minden epizód tartalmazott tanári magyarázatot, részben a matematikai tartalommal, részben a számítógép használatával kapcsolatban.

A feldolgozandó anyag a rendelkezésre álló időhöz képest igen nagy volt, talán ez indokolta a tanár demonstratív óravezetését. A kitűzött feladatok között több felfedeztetésre alkalmas probléma szerepelt, de igen kis mértékben használták ki az ezekben rejlő lehetőségeket. Alig láthattunk tanulói megszólalást: a feladatok megoldását nem beszéltek meg, a tanár esetenként bemutatta a megoldást. Fő motivációs eszköznek a tanár a számítógépes feldolgozási módot szánta.

6. ÖSSZEHASONLÍTÁS

Pedagógiai tevékenységek

Belgiumban az órák nagy része az elméleti anyag feldolgozásával telt és Spanyolországban is ennek aránya a legmagasabb. Angliában és Magyarországon feladatok megoldása és megbeszélése dominált. A megoldások közös megbeszélése alig fordítottak időt Belgiumban és egyáltalán nem Spanyolországban.

Munkaformák

Mind a négy országban frontális munka töltötte ki az idő több mint 74%-át, különösen magas volt ennek a munkaformának az aránya Belgiumban (90%) és Magyarországon (85%). A fennmaradó időt Spanyolországban teljes mértékben páros munka töltötte ki, a másik három országban legnagyobb részt egyéni munkával töltötték. Csoportmunka nem fordult elő sem Belgiumban sem Spanyolországban, míg páros munkára nem láttunk példát sem Angliában sem Magyarországon.

Matematikai fókusz

Mind a négy országban jelentős a fogalmakkal kapcsolatos munkát tartalmazó epizódok aránya. Belgiumban és Angliában a fogalmak tanítása mellett elsősorban eljárások (pl. jelölési konvenciók) tanítása játszotta a legfontosabb szerepet, de közben Belgiumban összefüggések (struktúra) tanítására is sor került, míg Angliában nagyobb volt a problémamegoldást és érvelést tartalmazó epizódok aránya. Matematikai fókusz tekintetében a magyar órák voltak a

leggazdagabbak: Magyarországon a megfigyelt órák során mind a hét fókuszfajta előfordult (míg a többi országban 5-5), még hozzá a fogalmi és a levezetési fókusz kivételével mindegyik a legmagasabb arányban. Spanyolországban az eljárások (többnyire számítógépes) tanítására esett a fő hangsúly.

Matematikai kontextus

A kizárólag „tisztán matematikai” (nem valódi világ, kitalált adat) ismereteket és feladatokat tartalmazó epizódok aránya mind a négy országban meghaladta a 70%-ot, Spanyolországban csak ez a kontextusfajta fordult elő. Valódi világgal kapcsolatos epizódot csak Magyarországon láthattunk, de ott is csak egyetlen epizódban.

Módszertani eszközök

A megfigyelt órák során egyik országban sem fordult elő felfedeztetés vagy differenciálás.

Belgiumban a kérdve kifejtés és az ehhez kapcsolódó tanulói válaszok (közzététel) fordultak elő leggyakrabban, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal kísérve, míg motiválás nem fordult elő.

Angliában tanári segítség fordul elő a legtöbb epizódban. Ezt követi gyakoriságban – Belgiumhoz hasonlóan, bár kisebb mértékben - a közzététel és a tanári magyarázatok alkalmazása.

Magyarországon is a kérdve kifejtés és az ehhez kapcsolódó közzététel dominál, jelentős mennyiségű tanári magyarázattal. Egyedül Magyarországon fordult elő a 10 általunk megfigyelt módszertani eszköz közül legalább 8.

Spanyolországban minden epizódban sor került tanári magyarázatra és motiválásra (bár vitatható, hogy önmagában a számítógép használata tartós motivációt jelent-e). A kérdve kifejtés és közzététel aránya – a többi országhoz képest – igen alacsony.

A geometriatanítás általános céljai

Közvetlenül a valódi világhoz kapcsolódó feladat összesen mindössze egy (magyar) epizódban fordult elő, de mindenhol történtek utalások a hétköznapi életre.

Témájában és nehézségi szintjében a feldolgozott feladatanyag Magyarországon volt a legváltozatosabb, Angliában és Belgiumban a fő hangsúly elnevezések és jelölések tanítására és gyakoroltatására esett. Spanyolországban a feldolgozandó anyag és az ehhez kapcsolódó feladatok változatosak voltak, de nagy részüket a tanár oldotta meg.

A matematika más területeivel kapcsolatot teremtő epizódok aránya Magyarországon volt a legmagasabb.

Az angol tanár a rutinfeladatok változatos kitűzési módjával és játékkal, a magyar tanár érdekes feladatokkal, játékkal és szemléltető eszközökkel, a spanyol tanár pedig az anyag előzetes ismertetésével és számológépek használatával próbálta motiválni a tanulókat.

A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai

Mind a négy országban az epizódoknak legalább kétharmadára jellemező volt a fogalmi fókusz, vagyis mindenhol nagy hangsúly esett a fogalmak tanítására. Különbség volt azonban az egyes országok között abban, hogy milyen fogalmi szinten dolgoztak, és milyen módon közelítették meg az előforduló fogalmakat.

Angliában szinte kizárólag a 0. Van Hiele szinten dolgoztak a gyerekek, időnként érintve az 1. szintet. Belgiumban az 1. szint dominált, gyakran visszatértek a 0. szintre, de előfordultak a 2. szintet érintő kérdések is. Magyarországon főleg a 2. szinten folyt a munka, miközben a tanár a 3. szintet igyekezett elérhetővé tenni. Spanyolországban a kitűzött feladatok hol az 1. hol a 2. szintet célozzák, dedukcióra csak a tanár részéről láttunk példát.

Magyarországon nem került sor új fogalmak vagy definíciók tanítására, a régebben tanultakat ismételték át, illetve alkalmazták különböző feladatok megoldása során. Spanyolországban számos definíció hangzott el, mindig tanári közlésként. Angliában és Belgiumban előfordult, hogy a gyerekeknek kellett megalkotniuk vagy módosítaniuk egy definíciót. Egyik országban sem láttunk példát arra, hogy különbséget tettek volna egy-egy sokszögfajta definíciója és egyéb jellemző tulajdonságai között, vagy hogy megmutatták volna, hogy bizonyos tulajdonságokból hogyan következnek más tulajdonságok.

Wenn-diagrammos ábrázolás vagy a szimmetriatulajdonságokra való utalás egyik országban sem fordult elő.

A különböző ábrák és/vagy szemléltetőeszközök - a témából adódóan - mindenhol fontos szerepet játszottak az órákon, alkalmazásuk azonban nem mindig segítette a megfelelő fogalmak kialakítását vagy a fogalmi szintek fejlődését, igen kevés utalás történt arra, hogy mire következtethetünk egy ábrából, és mire nem.

Módszertani eszközök

Mind az anyag strukturálásában, mind a módszertani eszközök megválasztásában számos különbséget figyelhetünk meg a négy tanár között.

Angliában a tanár a sokszögekkel kapcsolatos legalapvetőbb tudnivalókat igyekezett megtanítani egy gyenge képességű osztályban, elsősorban elnevezésekre és jelölésekre helyezve a fő hangsúlyt. Ezt a viszonylag szűk területet viszont igen változatos formában dolgozta fel, és többféle módon motiválta a gyerekeket.

Belgiumban szintén nagy hangsúly esett az elnevezésekre és jelölésekre, de egy nagyobb, erősen strukturált anyagot dolgoztak fel. A tanár óravezetése erősen demonstratív volt, nem próbálta motiválni a gyerekeket.

Magyarországon – egy jó képességű 8. osztályban – a korábban tanult fogalmak elmélyítésére, feladat- és problémamegoldásban való alkalmazására esett a fő hangsúly. A kitűzött feladatok nagy része kapcsolt össze különböző matematikai területeket. Érdekes feladatokkal, szemléltetőeszközökkel és játékkal igyekezett motiválni a gyerekeket.

Spanyolországban a háromszögekkel kapcsolatos ismereteket dolgozták fel a tanár által írt - jól felépített; elméleti anyagot, gyakorló- és felfedeztető feladatokat is magába foglaló - elektronikus tankönyv alapján. A megfigyelt órák felépítése meglehetősen hasonló volt egymáshoz: az óra elején a tanár előadást tartott (PowerPoint) a feldolgozásra szánt anyagból (a későbbi órák során többszöri visszatéréssel a korábbiakra), kitűzte a (számítógéppel megoldandó) feladatokat és bemutatta azok megoldási módját, a tanulók motiválására a számítógép használatát szánta.

Felhasznált irodalom - Bibliography

Alsina C. et al. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*,. Síntesis, Madrid

Ambrus András (1995). *Bevezetés s matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest

Andrews, Paul (1994). *A snapshot of Hungarian teacher training*, Mathematics Teaching, 149, 2-5.

Andrews, P. (1995). *Return to Budapest*, Mathematics Teaching, 151, 23-25.

Andrews, P. (1997). *A Hungarian perspective on mathematics education: the results of a conversation with Sari Palfalvi, Eva Szeredi, Vera Sztrókay and Judit Torok*, Mathematics Teaching, 161, 14-17.

Andrews, P. (1999). *Looking behind the rhetoric: some new insights from Hungary*, Mathematics Teaching, 167, 6-10.

Andrews, P., Carillo, J., Clement, N., De Corte, E., Depaepe, F., Fried, K., Hatch, G., Malaty, G., Op't Eynde, P., Pálfalvi, S., Sayers, J., Sorvali, T., Szeredi, É., Török, J., Verschaffel, L. (2004). *International comparisons of mathematics teaching: searching for consensus in describing opportunities for learning*, paper presented to discussion group 11, international comparisons of mathematics education, of the 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10) Copenhagen, Denmark

Andrews, P. (2004). *Mathematics Education Traditions of Europe (METE) Project: Report on the initial analysis of the quantitative data*, Unpublished

Andrews, P. (2005). *Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: Methodological perspectives and instrument development*. Paper presented in a Symposium on "The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: Principles and outcomes" at the 11th Biennial EARLI Conference, Nicosia, Cyprus, August 23-27, 2005.

Carrillo, J. et al. (2004). *Report of the analysis of the Teaching of Polygons in Primary School*. Unpublished.

Clements, D.H. and Battista, M.T. (1992). *Geometry and spatial reasoning*. In D.A. Grouws (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: NCTM & Macmillan.

Csapó Benő szerk. (2002). *Az iskolai tudás*, Osiris Kiadó, Budapest

Csapó Benő (2003). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*, Akadémiai Kiadó, Budapest

Falus Iván szerk. (1996). *Bevezetés a pedagógiai kutatás rendszerébe*, Keraban Kiadó, Budapest

Fuys, D. Geddes, D. and Tischer, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Gedolf and Pierre M. van Hiele*, Columbus, OH: ERIC, ED 287 697.

Golhofer Erzsébet – Nahalka István szerk. (2001). *A pedagógusok pedagógiája*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Hatch, G. (1999). *Itt nem lenne ugyanaz!*, Új Pedagógiai Szemle XLIX évf. 10. szám 19-29

Kay, C. S. (1987) *Is a square a rectangle? The development of first grade students understanding of quadrilaterals with implications for the van Hiele theory of the development of geometric thought*. Dissertations Abstracts International. 47. 2934A (university Microfilms No. DA8626590)

Pálfalvi - Szeredi - Török (2005). *A matematika tanulása*, in: *Tanuljunk, de hogyan!?* 89-117, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Piaget J. (1928) *Judgement and reasoning in the child*. New York Harcourt, Brace and Co.

Pólya György (1977). *A gondolkodás iskolája* (IV. kiadás), Gondolat Kiadó, Budapest

Pólya György (1979). *A problémamegoldás iskolája I-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest

Senk S. I. (1989). *Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs.*, Journal for Research in Mathematics Education. 20. 309-521.

Skemp, R. R. (2005). *A matematikatanítás pszichológiája*, Edge Kiadó, Budapest

Somfai Zsuzsa (2002). *A matematika tantárgy helyzete a felsőtagozaton és a középiskolában*, Új Pedagógiai Szemle 2002/12, 99-115

Szendrei Julianna (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?*, Typotex Kiadó, Budapest

Radnainé Szendrei Julianna – Török Judit (2005). *Az önreflexió szerepe és megoldási lehetőségei az egyéni fejlesztésben*, in: A tanítás jobbításáért 39-68, Haxel Kiadó, Budapest

Szeredi Éva – Török Judit (1992). *The Experiences of Two Hungarians in Didsbury*, Didsbury Ideas Vol. 2 No, 2 36-42, Manchester Polytechnic, Manchester

Szeredi Éva – Török Judit (1999). *Some Tools to Compare Students Performances and Interpret Their Difficulties in Algebraic Tasks* 12p in: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik

Szeredi Éva – Török Judit (2004). *Report of the analysis of the Teaching of Polygons in Secondary School*. Unpublished.

Szeredi Éva – Török Judit (2005). *Teaching Polygons in Secondary School*, Paper presented in a Symposium on “The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) project: Principles and outcomes” at the 11th Biennial EARLI Conference, Nicosia, Cyprus, August 23-27, 2005.

Szeredi Éva – Török Judit (2007). *Teaching Polygons in the Secondary School: A Four Country Comparative Study*, Benyújtott és elfogadott cikk, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen (várható megjelenés 2007-ben)

Török Judit (1994). *Egy matematikatanár angliai tapasztalatai*, Új Pedagógiai Szemle XLIV évf. 7-8. szám, 83-92

Török Judit (2006). *The Mathematics Education Traditions of Europe (METE) Project*, Teaching Mathematics and Computer Science 4/2, 353-364, Debrecen

De Villiers, M. (1994). *The role of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics

Villani V. et al. (1996). *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century*. Discussion Document for an ICMI study. The International Commission on Mathematical Instruction.

INTRODUCTION

In my thesis I analyze and compare four series of geometry lessons which were recorded in four different European countries. The video records were taken as a part of the METE (Mathematics Education Traditions of Europe) project and as a part of my analysis I use tools developed by the project.

1. THEORETICAL BACKGROUND, TOOLS FOR ANALYSIS

In my analysis I consider the following perspectives on teaching and learning polygons:

General objectives of teaching geometry

A set of possible aims of teaching geometry are provided in a discussion document for an ICMI study (Villani et al. 1996):

- “- To describe, understand and interpret the real world and its phenomena.
- To supply an example of axiomatic theory.
- To provide a rich and varied collection of problems and exercises for individual student activity.
- To train learners to make guesses, state conjectures, provide proofs and find out examples and counterexamples.
- To serve as a tool for other areas of mathematics.
- To enrich the public perception of mathematics.”

Conceptual aspects of teaching polygons

- Van Hiele levels (Fuy et al. 1984)
- Definitions and properties (definitions, classification, symmetries) (Fuy et al. 1984, Battista-Clemens, 1992)
- Proofs (Battista-Clemens, 1992)
- Conceptual aspects of drawings (visual images) (Battista-Clemens, 1992, Alsina et al. 1987)

Didactic tools

- Methods of acquiring concepts and skills
- Structure
- Methods of reasoning (demonstration, induction, deduction)
- Materials used in the classroom

The tools of the METE (Mathematics Education Traditions of Europe) project

METE was a two year (2003-2004) project founded by the European Union with participants from five European countries: England, Belgium, Finland, Spain and Hungary. The aim of the project was a comparative study of the different ways in which mathematics is conceptualized and the different methods teachers use to present mathematics to learners of the age group 10-14. We collected data from live observations and from series of videotaped lessons on four standard topics and developed instruments for both qualitative and quantitative analysis. (Andrews et al 2004, Andrews 2005, Török 2006)

I analyze the secondary school lessons (class 7. or 8.) on polygons (except the Finnish ones) and use the following tools:

Coding scheme (CS)

For quantitative analysis of the lessons we developed a coding scheme (CS) with three basic categories: mathematical focus, mathematical context (which considers on one hand whether the task is related explicitly to the real world and on the other hand the genuineness of the data on which the task is based), and didactics. We agreed on the following subcategories:

The subcategories of *mathematical focus* are conceptual, derivational, structural, procedural, efficiency, problem solving and reasoning. The subcategories of *mathematical context*: real world fabricated data, not real world fabricated data, real world genuine data, not real world genuine data. The subcategories of *didactics*: activating prior knowledge, exercising prior

knowledge, explaining, sharing, exploring, coaching, assessing/evaluating, motivating, questioning, differentiation.

We divided the lessons into episodes and coded each subcategory episode by episode with 1 if it was present in the episode and with 0 if it was not present in the episode. We considered an episode as a period of the lesson while the teacher's didactic intentions are constant.

The lesson synthesis sheet (LS)

For qualitative analysis we used a lesson synthesis sheet (LS) based on the so called Reusser sheet. This sheet summarizes a lesson in one page. Beside a photo from the lesson and some details (country, school, class, teacher, date, topic and focus of the lesson) it contains two timelines to be colourcoded minute by minute according to the flow of the lesson. One timeline is for the pedagogic activities of the lesson (theory or conceptual development, working on problems or tasks, reporting solutions to problems or tasks, introducing a problem or activity, homework-related activities, task-related management, non task-related management), the other timeline indicates the social activities (whole class activity, individual activity, paired activity, group activity).

The lesson synthesis sheet also contains a brief description of the lesson.

2. CASE STUDY – ENGLAND

The records were taken in a low ability class where many of the pupils are classified as having Special Educational Needs. Therefore the teacher's main emphasis was on the most basic concepts. The content of the lessons: Parallels and perpendiculars, parallels, equal sides and right angles in quadrilaterals; Types and properties of special quadrilaterals; Polygons.

Quantitative analysis

The main pedagogic activities were working on problems (in 36% of the total time) and reporting the solutions (30%). Theory or conceptual development took 18% of the time.

Most of the time was spent on whole class work (78%). Students worked individually in 18% of the time and in pairs in 3% of the time.

The dominant mathematical focus was conceptual (85% of the episodes) followed by procedural (45%). All of the lessons contained at least one episode with reasoning, but no episode was observed with derivation or structure.

The mathematical context was mostly (85%) “not real world – fabricated data”.

The main didactic tool of the teacher was coaching (85%) and there were high scores for sharing (60%) and explaining (50%). No episodes contained exploration or differentiation.

Qualitative analysis

General objectives of teaching geometry

No real world problems were observed but there were some references to everyday objects and to the etymology of the names of different polygons.

The tasks showed a great variety in the ways they were presented and solved even if not in their content or difficulty level.

Deductive reasoning did not occur; there was one occasion when the teacher encouraged the students to look for a counterexample.

She tried to motivate the children in different ways.

Conceptual aspects of teaching polygons

The children worked mostly on Van Hiele level 0, sometimes touching level 1. All the tasks were connected to some kind of drawing; the main emphasis was on naming and signing. No connections were mentioned between properties, no proofs or more than one step logical reasoning occurred.

Didactic tools

The main didactic tool of the teacher – as she said – was patience.

She tried to help the students to memorize names, definitions and proper way of signing with frequent repetitions and revising. She tried to involve the students with continuous

questioning, varied tasks and a game. She used working materials like worksheets, individual whiteboards and projector.

3. CASE STUDY - BELGIUM

The records were taken in Leuven in a mixed ability class 7. The content of the lessons: Characteristics of quadrilaterals; Classification of quadrilaterals; perpendicular bisectors and bisectors of angles; Characteristics of quadrilaterals and their diagonals; Perimeter and area of quadrilaterals, cubes and cuboids.

Quantitative analysis

The main pedagogic activity was theory or conceptual development (60% of the total time) followed by working on problems (22%).

Almost all the time the whole class worked together (93%), no group activity occurred.

The dominant mathematical focus was conceptual (88%). Teaching or practicing procedures occurred in 42% of the episodes. We could observed some episodes with structure (23%) and reasoning (19%). Two episodes contained derivation, no problem solving was observed.

No real world problems occurred. They worked with fabricated data in 73% of the episodes and students can choose their own (genuine) data in 19% of the episodes.

No exploration or differentiation was observed. The main didactic tools of the teacher were questioning (81%) and sharing (77%) with frequent explanations (65%). She also put an emphasis on activating prior knowledge (42%).

Qualitative analysis

The general objectives of teaching geometry

There were no real world problems but sometimes the teacher mentioned everyday examples.

They worked on tasks in hardly more than the fifth of the total time, mostly in connection with naming, signing or following procedures. There was no problem solving or exploring, few occasions of reasoning. We could see example for reasoning only from the part of the teacher.

Connection with other areas of mathematics (algebra) was taken into consideration when calculating area, surface area and volume of cuboids.

The teacher did not try to motivate children..

Conceptual aspects of teaching polygons

They worked mostly on Van Hiele level 1, with frequent returning to level 0. Sometimes they touch level 2, but on this level even the teacher seems to be uncertain.

While defining the different types of quadrilaterals there is a mixture of exclusive and inclusive categories. No logic connections are mentioned between definitions and other properties.

No Wenn diagrams or symmetries were used for classification, but there was some emphasis on the connection between the different types of quadrilaterals.

Drawings and visual images played an important role during the lessons; the teacher made very precise drawings on the blackboard (always in standard position) and used a model when explaining the surface area and volume of cuboids.

Didactic tools

The main emphasis was on teaching and practicing naming, signing and procedures. The teacher used mostly the tools of explaining and questioning, in a demonstrative way. She gave detailed instructions for the ways of solving the exercises.

4. CASE STUDY – HUNGARY

The records were taken in Budapest, in a good ability class 8. They learnt previously about the Pythagoras theorem and its applications. The aims of the lessons were revising all the knowledge about polygons and prepare children for the entrance exam of four year gymnasia.

Quantitative analysis

The main pedagogic activities were working on problems (26% of the total time) and reporting solutions (30%). Introducing problems took also considerable time (21%).

They worked mostly in whole class (85%), individually in 12% of the time, no pair work was observed.

We could observe examples for all categories of mathematical focus. The main emphasis was on conceptual development and reasoning (both of them occurred in 70% of the episodes). We could see episodes containing problem solving (45%) and structural elements (40%) in every lesson. It was relatively high the number of episodes with efficiency (40%) and procedures (30%).

Only one episode contained a problem connected to real world. They worked with fabricated data (given by the teacher) in 95% of the episodes while with genuine data in three episodes (15%).

There was no differentiation or exploration, but each of the other categories of didactic tools could be observed in at least two episodes. The main tools of the teacher were questioning and sharing (both of them occurred in 90% of the episodes). Every lesson contained explanation (70%) and motivation (50%).

Qualitative analysis

The general objectives of teaching geometry

Only one problem was connected to real world.

The teacher put a great emphasis on making sense, on visualization and on creating connections between different areas of mathematics.

There was a great variety of tasks concerning difficulty level as well as the ways of introducing or solving them.

The teacher encouraged the children for precise wording, for reasoning, for finding all the possible solutions. We could observe some examples for derivation.

Conceptual aspects of teaching polygons

The teacher pushed the students toward using proper arguments and considering all possible cases, so he tried to move them on to Van Hiele level 3.

No new concepts were introduced; the main aim was a deeper understanding of the old ones through problems where the students had to find various (not only geometrical) tools for solution.

The teacher did not try to produce precise drawings on the blackboard and mentioned several times that base of reasoning should be the data and not what they see.

Didactic tools

The main emphasis was on revising and deepening earlier knowledge on geometry. The problems and exercises served the development of thinking and the development of both practical and problem solving skills.

We could observe examples for both inductive and deductive reasoning. The teacher often helped to reach the solution with his remarks and explanations, or summarized the solution in a demonstrative way.

He motivated the children with a competitive game, with teaching materials, and in one case with offering a good mark for the first solver.

5. CASE STUDY – SPAIN

The lessons were recorded in the 1st class of a secondary school (year 7), where they worked with an electronic textbook written by the teacher. The content of the lessons: Polygons: general characteristics, construction of triangles and familiarization with the software Cabri; The right triangle, Pythagoras Theorem and its applications; Important points and straight lines of a triangle.

Quantitative analysis

The dominant pedagogic activities were working on theory (31% of the time), introducing tasks (25%) and working on tasks (26%).

Whole class work (teacher's explanations) took 74% of the total time, in the remaining 26% of the time students worked in pairs with the computers.

The main focus of the lessons was on (mainly software related) procedures (in 87% of the episodes) and on concepts (67%).

The context was all along characterized as "not real world, fabricated data".

The main didactic tools of the teacher were explanation (100%) and coaching (80%).

The teacher motivated the children with the usage of computers.

Qualitative analysis

The lessons were quite similar to each other. All of them started with a PowerPoint presentation of the teacher about the topic, and then the teacher introduced the tasks and demonstrated the ways of solving those, giving detailed instructions about handling the software. After that the students worked in pairs on the tasks with the computers while the teacher walked around and helped them. Time by time he explained some things to the whole class.

General objectives of teaching geometry

There were no real world problems but some references were mentioned to everyday examples.

They worked on miscellaneous topics and varied tasks.

Part of the tasks were investigative, the teacher encouraged the students a couple of times for experimenting, inventing questions, making conjectures; but most of these times he told them in advance what should they discover and the discoveries were not followed by proofs.

The pieces of knowledge and the usage of software they learnt can be very useful tools in their later studies. We could observe some structural elements in the presentations of the teacher.

Conceptual aspects of teaching polygons

The textbook (and the teacher) aims Van Hiele level 2 but hard to decide the students' level. While presenting the topic the teacher mentioned several definitions. He showed examples for the definitions and relationships by projecting illustrations from the electronic textbook. Only in the case of Pythagoras theorem followed proof the concrete examples. The students had many technical problems with the software which made an obstacle in respect of dealing with the mathematical content. We could see no proving or reasoning from the part of the students.

Didactic tools

The teacher chose a deductive way for teaching concepts. All the episodes contained explanations either about the mathematical content or about the software. He tried to cover a quite large curriculum area during the lessons in a relatively short time and that could be the reason of his demonstrative style. Some tasks would have been quite good for investigation or exploration but they did not grasp the opportunities. We could hardly see any active contribution from the part of the students; they did not share the solutions. It was the teacher who sometimes presented the solutions. His considered enough tool for motivation the computers.

6. MAIN FINDINGS OF COMPARISON

Pedagogic activities

In Belgium and Spain most of the time was spent on theory or conceptual development. In England and Hungary working on problems and reporting solutions were the dominant activities. For discussing solutions hardly any time were spent in Belgium and none in Spain.

Social activities

Whole class activities dominate in all of the countries (more than 74% of the time in each of them) especially in Flanders (90%) and Hungary (85%). No group activity was observed in Flanders and Spain and no paired activity in England and Hungary. There was no individual activity during the Spanish lessons.

Mathematical focus

The ratio of episodes with conceptual focus is quite high in all the four countries. Beside that in England and Belgium the main focus is on procedures (e.g. naming and signing), but while in Belgium there some episodes with structure, in England there were more episodes with problem solving and reasoning. In Hungary all the seven type of mathematical focus occurred (while in the three other countries only 5-5) and with the exception of conceptual and procedural in the highest rate. The main emphasis in Spain was on (mostly software related) procedures.

Mathematical context

The ratio of episodes containing only “pure mathematical” tasks (not real world, fabricated data) was above 74% in all the four countries, in Spain it was 100%. Problem connected to real world occurred only in Hungary but only in one episode.

Didactic tools

We could see no examples in either of the countries for exploration or differentiation.

In Belgium, questioning, sharing and explaining are the main didactical tools, while there was no motivation.

In England coaching is dominant, followed by sharing and explaining.

In Hungary questioning and sharing were the main tools with high proportion of explaining. Only in Hungary were observed the occurrence at least 8 of the 10 observed didactic tools.

In Spain explaining and motivating characterized all of the episodes (however it is questionable if the usage of computers provides motivation during all the lessons). The rate of questioning and sharing – compared with the other countries – is very low.

General objectives of teaching geometry

Problem connected to the real world was observed only in one (Hungarian) episode; however we could find some traces of referring to reality in all the four countries.

We could observe the widest variety of problems in Hungary concerning the difficulty level and topic. In Belgium and England the main emphasis was on naming and signing. In Spain some of the tasks were interesting but most of them were solved by the teacher.

The rate of episodes creating connections with other areas of mathematics was the highest in Hungary.

The English teacher motivated the children with various ways of posing (routine) tasks and a game; the Hungarian teacher with interesting problems, competitive task and with materials; the Spanish teacher with explaining the content of the following lessons and with using computers.

Conceptual aspects of teaching polygons

In all the four countries there was a great emphasis on teaching concepts. However there were differences in the conceptual levels and in the ways of delivering the concepts.

English students worked mostly on Van Hiele level 0, sometimes reaching level 1. In Belgium level 1 was dominant, sometimes returning level 0 and some questions touched level 2. In Hungary students worked mostly on level 2, while the teacher tried to push them towards level 3. In Spain the tasks were aimed to level 1 or 2, but deduction occurred only from the part of the teacher.

In the Hungarian lessons there were no new concepts to acquire, they revisited and applied earlier knowledge while solving various problems. During the Spanish lessons many definitions could have been heard, always from the teacher. In Belgium and England sometimes the students created or modified a definition. We could observed no example of emphasizing the difference between the definition of a certain type of a polygon and the properties of it, or showing that how follows from some properties others properties.

Neither could we see examples of using Wenn diagrams, or symmetries for classification.

Drawings or visual images played quite naturally an important role in all of the lessons, but they did not always serve properly the conceptual development of the students. Hardly any

references could have been seen to question: what can we conclude from a drawing and what not.

Didactic tools

Both in structuring the mathematical content and in selecting the appropriate didactic tools we could observe many differences between the four teachers.

In England the main emphasis (in a low ability class) was on the most basic facts about polygons, i.e. naming and signing. However this relatively narrow content area was covered in many different ways while trying to motivate children in various ways.

In Belgium a great emphasis was also on naming and signing, but the content was larger and strongly structured. The teacher applied a demonstrative way and did not try to motivate children.

In Hungary - in a high ability class 8 – the main emphasis was on revisiting and deepening earlier knowledge, e.g. by solving problems which connects different areas of mathematics. The teacher tried to motivate children with interesting problems, models and competitive task.

In Spain the main topic was triangles, based on the – strongly structured, containing tasks for practicing and exploring - electronic textbook, written by the teacher. The structure of the lessons was almost the same: at the beginning of the lesson the teacher held a PowerPoint lecture on the topic, introduced the tasks and presented the way of solutions. His way of motivation was the usage of computer.