

DE TTK



1949

ÁLTALÁNOSÍTOTT BERWALD-SOKASÁGOK

doktori (PhD) értekezés

A szerző neve: Szakál Szilvia

A témavezető neve: Dr. Szilasi József

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. szeptember 27.

.....
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Szakál Szilvia doktorjelölt 2010-2012 között a fent megnevezett Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2012. szeptember 27.

.....
a témavezető aláírása

ÁLTALÁNOSÍTOTT BERWALD-SOKASÁGOK

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Szakál Szilvia okleveles matematika szakos tanár.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében.

Témavezető: Dr. Szilasi József

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, dr. Szilasi Józsefnek, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott nekem mind a tanulmányaim, mind a kutatásaim során. Közreműködése és tanácsai nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Komoly segítséget jelentett a Budapesti Corvinus Egyetem támogatása, amelyet ezúton is köszönök.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm Orosz-Kaiser Ágotának, hogy támogatott és technikai segítséget nyújtott a dolgozat elkészítéséhez.

A disszertáció elkészítését a
TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024
számú projekt támogatta.



TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	1
IRODALMI ELŐZMÉNYEK	5
1 JELÖLÉSEK ÉS NÉHÁNY ALAPVETŐ TÉNY	7
2 EHRESMANN-KONNEXIÓK	14
3 FINSLER-KONNEXIÓK	20
4 EHRESMANN-KONNEXIÓK FINSLER-SOKASÁGOKON	28
5 AZ ICHIYŌ-KONNEXIÓ	34
6 ÁLTALÁNOSÍTOTT BERWALD-SOKASÁGOK	42
7 WAGNER-ICHIYŌ-KONNEXIÓ ÉS WAGNER-SOKASÁGOK	49
8 PÉLDA: 1-FORMA FINSLER SOKASÁGOK.	54
9 KONFORM EKVIVALENS ICHIYŌ-STRUKTÚRÁK	58
ÖSSZEFOGLALÓ	65
SUMMARY	76
IRODALOMJEGYZÉK	87

BEVEZETÉS

Disszertációnk fő témája az általánosított Berwald-sokaságok vizsgálata. Ezeknél a Finsler-struktúra – azaz az energiafüggvény – igen természetes kapcsolatban áll egy, az alapsokaságon adott lineáris konnexióval, nevezetesen: az adott lineáris konnexió szerinti párhuzamos eltolás megtartja az érintővektorok Finsler-normáját. A definíció közvetlen következményeként adódik, hogy minden összefüggő általánosított Berwald-sokaság Finsler-Minkowski vektortéren modellezett Finsler-sokaság abban az értelemben, hogy bármely két pontjának érintőtere között létezik normatartó lineáris izomorfizmus. Az általánosított Berwald-sokaságokat az 1970-es években főleg japán kutatók, mindenekelőtt M. HASHIGUCHI, Y. ICHIJŌ és M. MATSUMOTO vizsgálták intenzíven. A legeredetibb gondolatok megítélésünk szerint ICHIJŌ munkáiban találhatók, amelyek jelen disszertációra is rendkívül ösztönzően hatottak. Ez az értekezés azonban mind kiindulópontjában, mind megközelítési módjában, mind pedig az alkalmazott technikai apparátus tekintetében jelentősen különbözik a tárgykör korábbi dolgozataitól, s vélhetően e nézőpontváltásnak köszönhetően sikerült egy sor olyan alapvető tényrt feltárni, amely eddig kívül maradt a látótéren. Az egész munka fogalmi kereteit a Finsler-sokaságoknak és -konnexióknak az az elmélete képezi, amelynek alapjait J. GRIFONE fektette le a 70-es évek elején, technikai apparátusként a vektorértékű differenciálformák és a hozzájuk csatolt derivációk Frölicher-Nijenhuis-féle kalkulusát használva. Ilyen módon rendkívül tömör, ugyanakkor áttekinthető megfogalmazások válnak lehetővé, a bizonyítások azonban sokszor lényegesen több ötletet igényelnek annál, mint ami a hagyományos tenzorkalkulus alkalmazása esetén megszokott. Munkánk e rövid történeti beágyazásának lezárásaként meg kell említenünk, hogy a 2000-es évekkel kezdődően (részben munkatársaival együttműködve) számos új gondolattal gazdagította a tárgykört TAMÁSSY LAJOS professzor. Ő egészen más megközelítést alkalmazott, amelynek lényege az induktrixok ún. affin deformációinak vizsgálata. Ily módon számos esetben bonyolult kalkulatív apparátus használata nélkül, egyszerű geometriai megfontolásokkal sikerült eredményeket nyernie, ill. korábbi eredményeket reprodukálnia.

Rátérünk a dolgozat tartalmi ismertetésére.

Az első fejezet az alapvető megállapodásokat valamint a továbbiakban felhasználásra kerülő fontos fogalmakat és tényeket tartalmazza.

A Finsler-sokaságok elméletében alapvető szerepet játszanak a lineáris konnexiók alkalmas, nemlineáris általánosításai, az ún. Ehresmann-konnexiók.

A második fejezet tárgyalja az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakat és konstrukciókat. Disszertációnkban Ehresmann-konnexión az érintősokaságon ható olyan $(1,1)$ -tenzort értünk, amely projektor és amelynek nulltere a vertikális résznyaláb. Megmutatjuk, hogy egy homogén Ehresmann-konnexiónak és a hozzá csatolt semisprayból származó Ehresmann-konnexiónak a különbségtenzora $\frac{1}{2}$ -szerese az Ehresmann-konnexió gyenge torziója potenciáljának (2.9 Lemma). Ebből közvetlenül kapjuk, hogy egy homogén Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatároz a gyenge torziója és a hozzá csatolt semispray.

A harmadik fejezetben bevezetjük a Finsler-konnexió fogalmát. A Finsler-sokaságok nyújtotta nagyobb általánosság a differenciálgeometriai kalkulációkhoz nélkülözhetetlen konnexiók értelmezésénél számos nehézség forrása. Ellentétben a Riemann-geometriával, nem áll rendelkezésre *egyetlen* kitüntetett konnexió. Manapság az az álláspont kezd kikristályosodni, hogy minden konkrét Finsler-geometriai probléma tárgyalásához meg lehet – és meg is kell – találni egy ahhoz leginkább adekvát Finsler-konnexiót. Ezt az elvet először M. MATSUMOTO fogalmazta meg explicite, s mint látni fogjuk, disszertációnk újabb megerősítését adja. A Finsler-geometriában igazán hatékonynak bizonyuló konnexiófogalom összetett képződmény. A következőkben Finsler-konnexión olyan párt fogunk érteni, amelyet egy az érintősokaságon adott kovariáns deriválás és egy Ehresmann konnexió alkot. A harmadik fejezetben szisztematikusan tanulmányozzuk az ún. horizontálisan liftelt Finsler-konnexiókat. Ekkor létezik olyan ∇ kovariáns derivált (ún. bázikus derivált) az M alapsokaságon, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$D_{X^h} Y^v = (\nabla_X Y)^v.$$

Felmerül a kérdés, hogy mi a kapcsolat egy horizontálisan liftelt Finsler-konnexió Ehresmann-konnexiója és a bázikus derivált által származtatott Ehresmann-konnexió között. Erre a 3.11 lemma ad választ, ahol megmutatjuk, hogy az említett Ehresmann-konnexiók pontosan akkor egyeznek meg, ha a (D, h) Finsler-konnexió h -deflexiója eltűnik.

A negyedik fejezetet a Finsler-sokaságok definíciójával indítjuk, majd leszármaztatjuk a kanonikus sprayt, amely a kanonikus Ehresmann konnexiót, az ún. Berwald-konnexiót származtatja. Az általánosított Berwald-sokaságok elméletének kidolgozásakor már az indulásnál szembetalálkozunk az egyértelműség kérdésével, nevezetesen: mennyiben határozza meg az adott Finsler-struktúra és a megadott lineáris konnexióra a korábban már említett normatartási követelmény a kérdéses lineáris konnexiót. Az ezzel kapcsolatos

eredménynek a leszámaztatásához szükség van a Finsler-sokaságokon adott Ehresmann-konnexiók alaposabb vizsgálatára. Ezeket az előkészületeket szintén a negyedik fejezet tartalmazza. Megmutatjuk, hogy egy Finsler-sokaságon adott konzervatív Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatározza az erős torziója (4.9 Tétel). Levezetjük a kapcsolatot egy a Finsler-sokaságon adott homogén, konzervatív Ehresmann-konnexió és a kanonikus konnexió között (4.11 Állítás).

Az ötödik fejezetben definiáljuk az ún. Ichijyō-konnexiót. Mint fentebb már jeleztük, kitüntetett Finsler-konnexió egy Finsler-sokaságon általában nem létezik: a vizsgálandó probléma jellegétől függően más és más kovariáns deriválási eljárás bizonyulhat hatékonynak. Úgy találtuk, hogy minden általánosított Berwald-sokaságon megadható, egy a vizsgálatuk szempontjából "legjobb" Finsler-konnexió. A Finsler-konnexiók ezen osztályát neveztük az Ichijyō-konnexiók osztályának. Maga ICHIJYŌ ezeket a konnexiókat direkt, koordinátás eljárással értelmezte. Nekünk sikerült megtalálnunk a konnexió-osztályt egyértelműen – és koordinátamentesen – leíró axiómákat, amelyekből a megfelelő kovariáns deriválás szabályai egyszerűen levezethetők. E Koszul-típusú formulák segítségével az Ichijyō-konnexiók (parciális) görbületei és torziói közvetlenül leszámaztathatókká váltak.

A hatodik fejezetben rögzítjük az általánosított Berwald-sokaságok definícióját. Lényegében ICHIJYŌ elgondolásait követve (és egyszerűsítve), az alapdefiníció a következő: egy (M, E, ∇) hármas általánosított Berwald-sokaság, ha (M, E) Finsler-sokaság, ∇ kovariáns derivált M -en és $d_{h_\nabla} E = 0$ (h_∇ a ∇ által származtatott Ehresmann-konnexió, d_{h_∇} a megfelelő d_* -típusú gradált deriváció). Könnyen látható, hogy ez a definíció ekvivalens a bevezető elején jelzettel. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy amennyiben (M, E, ∇) és $(M, E, \bar{\nabla})$ általánosított Berwald-sokaságok, úgy ∇ és $\bar{\nabla}$ pontosan akkor egyezik meg, ha a torziójuk egyenlő. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor M -en két spray is rendelkezésünkre áll, természetes módon: a ∇ kovariáns deriváltból származó S_∇ spray és a Finsler-struktúrából származó S_0 kanonikus spray. ∇ meghatároz egy h_∇ Ehresmann-konnexiót, S_0 pedig a Finsler-sokaság h_0 kanonikus-konnexiót indukálja; kérdés, hogy mi a kapcsolat S_∇ és S_0 , ill. h_∇ és h_0 között. Erre a kérdésre a dolgozat 4.8. és 4.11. állítása alapján a 6.3. következmény ad választ. A nyert elegáns relációk mind a jelen dolgozatbeli, mind pedig további, itt nem tárgyalt alkalmazások szempontjából igen hasznosak. Az általánosított Berwald-sokaságok speciális osztályát képezik a Berwald-sokaságok és a Wagner-sokaságok. Megmutatjuk, hogy egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha $(d_{t_\nabla} E)^\#$ kvadratikusan vektormező (6.10 Állítás). Itt

$t_{\nabla}^{\circ} h_{\nabla}$ gyenge torziójának a potenciálja, $(d_{t_{\nabla}^{\circ}} E)^{\#}$ a $(d_{t_{\nabla}^{\circ}} E)$ 1-formának az (M, E) fundamentális formája szerint megfelelő vektormező (ld. 4.3). A fejezet végén az Ichijyō-konnexió segítségével szükséges és elegendő feltételt adunk arra vonatkozóan, hogy egy Finsler-sokaság lokálisan Minkowski-sokasággá váljon (6.13 Tétel).

A hetedik fejezetben, a korábbi eredmények felhasználásával, a Wagner-sokaságok néhány érdekes karakterizáló tulajdonságát vezetjük le. Az itt kapott eredmények a Finsler-struktúrák konform megváltoztatásának elméletében nyerne fontos alkalmazást.

A nyolcadik fejezetben az ún. 1-forma metrikájú, paralelizálható Finsler-sokaságokat vizsgáljuk, elegáns új bizonyítást adva arra, hogy minden 1-forma metrikájú paralelizálható Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokaság. Úgy véljük, hogy mind ez a fejezet, mind pedig a megelőző meggyőzően demonstrálja az általánosított Berwald-sokaságokra itt kidolgozott új megközelítés hatékonyságát.

A záró, kilencedik fejezetben definiáljuk az ún. konform ekvivalens Ichijyō-struktúrákat. Részletesen leírjuk a konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák alapvető geometriai adatainak kapcsolatát (9.5 Állítás). Bebizonyítjuk, hogy konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák Ichijyō-konnexióinak parciális görbületei megegyeznek. A fejezet végén mindezeket az eredményeket alkalmazzuk az általánosított Berwald-sokaságokra. Megmutatjuk, hogy ha egy Ichijyō-struktúra konform ekvivalens egy általánosított Berwald-sokasággal, akkor az szükségképpen általánosított Berwald-sokaság (9.8 Állítás). Innen egyszerűen következik, hogy Wagner-sokaság konform megváltoztatása szintén Wagner-sokaság. Megmutatjuk ezután, hogy minden Wagner-sokaság esetén egy vele konform ekvivalens Berwald-sokaság konstruálható, és megfordítva, ha egy Finsler-sokaság konform ekvivalens egy Berwald-sokasággal, akkor az Wagner-sokaság, új bizonyítást nyerve ezzel M. HASHIGUCHI és Y. ICHIJYŌ egy fontos tételére.

IRODALMI ELŐZMÉNYEK

Tárgyalásunkban alapvető szerepet játszik a Finsler-sokaságoknak és -konnexióknak a J. GRIFONE által a hetvenes években kidolgozott elmélete [7], [8]. Disszertációnkra fogalmi vonatkozásban erős hatással voltak M. CRAMPIN [3], [4] dolgozatai is.

Munkánk során technikai eszközként elsősorban a vektorértékű differenciálformák és a hozzájuk csatolt derivációk A. FRÖLICHER és A. NIJENHUIS által kidolgozott kalkulusát alkalmazzuk [6].

Az általánosított Berwald-sokaságok fogalmát a kétdimenziós esetben és eltérő módon V. V. WAGNER vezette be 1943-ban [36]. Különbféle tenzoriális karakterizációjukkal azóta többen és ismételten foglalkoztak; mindenekelőtt M. HASHIGUCHI [11], Y. ICHIJO [15] és M. MATSUMOTO [22]. A japán iskola megközelítésében az általánosított Berwald-sokaságok elmélete a Finsler-konnexiók (meglehetősen komplikált) Matsumoto-elméletére lett alapozva, s a közvetlen geometriai tartalom eléggé háttérbe szorult. Üdítő kivételt képeznek Y. ICHIJO dolgozatai, amelyek munkánkat jelentősen inspirálták.

A kezdeteket és a folytatást illetően még TAMÁSSY LAJOS professzor és SZILASI JÓZSEF munkáit emelném ki [30].

1 JELÖLÉSEK ÉS NÉHÁNY ALAPVETŐ TÉNY

1.1 Disszertációnkban *sokaságon* véges dimenziójú sima sokaságot értünk, amelynek topológiája Hausdorff, megszámlálható bázisú és összefüggő. Bizonyos trivialitások elkerülése végett azt is fölteszük, hogy a sokaság dimenziója legalább 2. Egy M sokaságon értelmezett valós értékű sima függvények valós algebrájára a $C^\infty(M)$ jelölést használjuk.

1.2 Legyen M egy n -dimenziós sokaság. Ha

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

M összes érintőtereinek diszjunkt uniója és

$$\tau(v) := p, \text{ ha } v \in T_p M,$$

akkor $\tau: TM \rightarrow M$ n -rangú vektornyaláb, amelyet az M sokaság *érintőnyaláb*-jának nevezünk. Erre a τ , τ_M , vagy a legkevésbé pontos, de olykor kényelmes TM jelölést is használjuk. Az M sokaság *hasított érintőnyalábja*

$$\mathring{\tau}: \mathring{TM} \rightarrow M$$

ahol $\mathring{TM} := \bigcup_{p \in M} (T_p M \setminus \{0_p\})$ és $\mathring{\tau} := \tau \upharpoonright \mathring{TM}$.

Egy $f \in C^\infty(M)$ *függvény vertikális litje* az $f^v := f \circ \tau \in C^\infty(TM)$ függvény, *teljes liftje* az

$$f^c: TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f^c(v) := v(f)$$

sima függvény.

A $\tau: TM \rightarrow M$ érintőnyaláb sima szeléseit *vektormezőknek* nevezzük, ezek $C^\infty(M)$ -modulusát $\mathfrak{X}(M)$ jelöli. Az egyszerűség kedvéért az M sokaság és a TM érintősokaság vektormezőit (vagyis $\mathfrak{X}(M)$ és $\mathfrak{X}(TM)$ elemeit) egyaránt az $X, Y, Z, \dots$ szimbólumokkal jelöljük.

1.3 Ha $\varphi: M \rightarrow N$ sokaságok közötti sima leképezés, akkor ennek *deriváltja* az a

$$\varphi_*: TM \rightarrow TN$$

nyalábleképezés, amelynek tetszőleges $T_p M$ érintőtérre való leszűkítése a

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi); \quad v \in T_p M, \quad h \in C^\infty(N)$$

előírás szerint hat. Speciálisan a $\tau: TM \rightarrow M$ leképezés deriváltja egy

$$\tau_*: TTM \rightarrow TM$$

nyalábleképezést ad. Ha

$$T^\vee TM := \bigcup_{v \in TM} \text{Ker}(\tau_*)_v$$

és $\tau_{TM}^\vee$ a $\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM$ természetes projekció leszűkítése a $T^\vee TM$ -re, akkor

$$\tau_{TM}^\vee: T^\vee TM \rightarrow TM$$

$n = \dim M$ rangú résznyalábja a τ_{TM} érintőnyalábnak, amelyet τ_{TM} *vertikális résznyaláb*jának hívunk. $\tau_{TM}^\vee$ sima szeléseit TM -en adott vertikális vektormezőknek nevezzük, ezek $C^\infty(TM)$ -modulusát $\mathfrak{X}^\vee(TM)$ -mel jelöljük.

1.4 Tetszőleges $p \in M$ esetén jelentse j_p a $T_p M$ érintőtérnek a TM érintősokaságba való természetes inklúzióját:

$$j_p: T_p M \longrightarrow TM, \quad z \longmapsto j_p(z) := z.$$

Tetszőleges $z \in T_p M$ esetén a

$$((j_p)_*)_z: T_z T_p M \longrightarrow T_z TM$$

érintőleképezés injektív lineáris leképezés, amelynek képtere a $T_z^\vee TM$ z -beli vertikális altér:

$$\text{Im}((j_p)_*)_z = T_z^\vee TM.$$

Ily módon $((j_p)_*)_z$ lineáris izomorfizmus $T_p M$ z -beli érintőtere és a $T_z^\vee TM$ vertikális altér között. Tetszőlegesen rögzített $z, v \in T_p M$ vektorok esetén tekintsük a

$$c_{z,v}: \mathbb{R} \longrightarrow T_p M, \quad t \longmapsto c_{z,v}(t) := z + tv$$

parametrizált görbét. Ekkor $\dot{c}_{z,v}(0) \in T_{c_{z,v}(0)} T_p M = T_z T_p M$ és a

$$\tau_z: T_p M \longrightarrow T_z T_p M, \quad v \longmapsto \tau_z(v) := \dot{c}_{z,v}(0)$$

leképezés természetes izomorfizmus a $T_p M$ és a $T_z T_p M$ vektortér között. Fölhasználva az eddigi konstrukciókat, képezzük az

$$\omega_z := ((j_p)_*)_z \circ \tau_z : T_p M \longrightarrow T_z^v T M$$

leképezést. Ez a leképezés izomorfizmus $T_p M$ és $T_z^v T M$ között, hiszen lineáris izomorfizmusok kompozíciója.

Ha $\alpha_z := \omega_z^{-1}$ és $\alpha : T^v T M \longrightarrow T M$ úgy, hogy $\alpha \upharpoonright T_z^v T M := \alpha_z$, akkor α nyalábleképezés a $\tau_{T M}^v$ vertikális nyaláb és a τ_M érintőnyaláb között, amely a bázissokaságok között a τ projekciót indukálja. Az így konstruált α nyalábleképezést a $T^v T M$ és $T M$ közötti *kanonikus szűrjekciónak* hívjuk.

1.5 Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^v \in \mathfrak{X}^v(TM)$ és $X^c \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, melyekre bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^v f^c = (Xf)^v, \quad (1.1)$$

ill.

$$X^c f^c = (Xf)^c, \text{ és } X^c f^v = (Xf)^v \quad (1.2)$$

teljesül. Az X^v vektormezőt az X *vertikális liftjének*, X^c -t pedig a *teljes liftjének* nevezzük. Ugyancsak létezik $T M$ -en egy kanonikus vertikális vektormező, a C -vel jelölt *Liouville-vektormező*, amely az

$$C f^v = 0, \quad C f^c = f^c \quad (f \in C^\infty(M)) \quad (1.3)$$

feltételekkel karakterizálható. X^v , X^c és C most adott definícióinál a vektormezők derivációként való interpretációjára támaszkodtunk. Egyszerűen leírható ezeknek a vektormezőknek a pontonkénti hatása is, erre azonban a következőkben explicite nem lesz szükségünk. Későbbi számolásainkban viszont gyakran fogjuk alkalmazni a következő relációkat:

Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$[X^v, Y^v] = 0; \quad (1.4)$$

$$[X^c, Y^c] = [X, Y]^c, \quad [X^v, Y^c] = [X, Y]^v; \quad (1.5)$$

$$[C, X^v] = -X^v, \quad [C, X^c] = 0. \quad (1.6)$$

Az utóbbi két reláció azt fejezi ki, hogy a vertikális liftek 0-adfokú pozitív homogén, a teljes liftek elsőfokú pozitív homogén vektormezők.

Ha $(X_i)_{i=1}^n$ lokális bázisa az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$ -modulusnak, akkor $(X_i^\vee, X_i^c)_{i=1}^n$ lokális bázisa az $\mathfrak{X}(TM)$ $C^\infty(TM)$ -modulusnak. Létezik egy és csak egy olyan

$$J: \mathfrak{X}(TM) \rightarrow \mathfrak{X}(TM)$$

$(1, 1)$ -tenzor, TM vertikális endomorfizmusa, hogy

$$JX^\vee = 0, \quad JX^c = X^\vee, \quad \text{bármely } X \in \mathfrak{X}(M)\text{-re.} \quad (1.7)$$

Közvetlenül adódik, hogy ekkor

$$\text{Im } J = J(\mathfrak{X}(TM)) = \mathfrak{X}^\vee(TM) = \text{Ker } J; \quad (1.8)$$

$$J^2 = 0. \quad (1.9)$$

Értelmezzük tetszőleges $Z \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén a $[J, Z] \in \text{End}(\mathfrak{X}(TM))$ $(1, 1)$ -tenzort a

$$[J, Z]Y := [JY, Z] - J[Y, Z], \quad Y \in \mathfrak{X}(TM)$$

előírással. (Az így definiált zárójel a rövidesen bevezetésre kerülő Frölicher-Nijenhuis zárójel egy speciális esete.) Ekkor

$$[J, X^\vee] = 0, \quad [J, X^c] = 0 \quad (X \in \mathfrak{X}(M)); \quad (1.10)$$

$$[J, C] = J. \quad (1.11)$$

1.6 Az M sokaságon adott *semispray*n olyan

$$S: TM \rightarrow TTM, \quad v \mapsto S(v) \in T_v TM$$

leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$S \text{ } C^1\text{-osztályú } TM\text{-en, sima } \mathring{TM} \text{ fölött;} \quad (1.12)$$

$$JS = C. \quad (1.13)$$

Amennyiben - ráadásul -

$$[C, S] = S, \quad (1.14)$$

úgy *spray*ról beszélünk. Egy *sprayt affinnak* vagy *kvadratikusnak* nevezünk, ha C^2 -osztályú - és ennél fogva *sima* - TM -en.

Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és S semispray esetén

$$f^c = Sf^v. \quad (1.15)$$

Egyszerűen belátható, hogy ez a reláció független az S semispray megválasztásától. Ha S semispray M -en, akkor

$$\text{bármely } X \in \mathfrak{X}(TM) \text{ esetén } J[X, S] = X, \quad (1.16)$$

(*Grifone-azonosság*, ld.[7]).

1.7 Ha M egy sokaság, $\Omega^k(M)$ -mel ($k \in \mathbb{N}$) jelöljük az M -en adott k -adfokú differenciálformák $C^\infty(M)$ -modulusát, megállapodva abban, hogy $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$. $\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ gradált algebra a differenciálformák körében értelmezett $\wedge$ -szorzás által származtatott szorzással.

Amennyiben D_1 és D_2 r -ed- illetve s -edfokú gradált derivációja $\Omega(M)$ -nek, úgy a

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{rs} D_2 \circ D_1;$$

előírás egy $(r+s)$ -edfokú gradált derivációját értelmezi $\Omega(M)$ -nek, amelyet a D_1 és a D_2 deriváció gradált kommutátorának vagy egyszerűen kommutátorának nevezünk.

1.8 $\Psi^k(M)$ -mel ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) jelöljük az M -en adott vektorértékű k -formák $C^\infty(M)$ -modulusát; ez interpretálható az $[\mathfrak{X}(M)]^k \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ferdeszimmetrikus, $C^\infty(M)$ -multilineáris leképezések modulusaként. Ekkor $\Psi^1(M)$ elemei éppen az $(1,1)$ -típusú tenzormezők M -en. Megállapodunk abban, hogy $\Psi^0(M) := \mathfrak{X}(M)$.

1.9 Minden $K \in \Psi^k(M)$ vektorértékű formához hozzárendeljük az $\Omega(M)$ gradált algebra egy i_K -val és egy d_K -val jelölt gradált derivációját. Mindkét derivációt egyértelműen meghatározza a $C^\infty(M)$ és az $\Omega^1(M)$ fölötti hatása. Nevezetesen:

(i) i_K $(k-1)$ -edfokú gradált deriváció, amelyre

$$i_K \upharpoonright C^\infty(M) = 0; \quad i_K \omega := \omega \circ K, \quad \text{ha } \omega \in \Omega^1(M); \quad (1.17)$$

(ii) d_K k -adfokú gradált deriváció, amelyet a

$$d_K := [i_K, d] = i_K \circ d - (-1)^{k-1} d \circ i_K \quad (1.18)$$

formula értelmez (d a külső derivált operátora).

Megjegyzendő, hogy ha speciálisan $X \in \Psi^0(M) = \mathfrak{X}(M)$, akkor i_X a szokásos helyettesítési operátort, d_X pedig az X vektormező szerinti Lie-deriválást jelenti; ezt $\mathcal{L}_X$ -el is jelöljük.

Közvetlenül adódik, hogy

$$\text{ha } f \in C^\infty(M) \text{ és } K \in \Psi^k(M), \text{ akkor } d_K f = i_K df = df \circ K. \quad (1.19)$$

A d_K k gradált derivációt jellemzi, hogy a külső differenciálás d operátorával képzett gradált kommutátora eltűnik:

$$[d, d_K] = 0. \quad (1.20)$$

1.10 Azt mondjuk, hogy egy $K \in \Psi^k(TM)$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) vektori k -forma szemibázikus ha $J \circ K = 0$ és, tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén $i_{JX} K = 0$. Egy $K \in \Psi^k(TM)$ szemibázikus vektori forma potenciálja a

$$K^\circ := i_S K$$

$(k-1)$ -forma, ahol S tetszőleges semispray.

1.11 Amennyiben $K \in \Psi^k(M)$, $L \in \Psi^\ell(M)$, úgy a d_K és d_L deriváció gradált kommutátorát az 1.7-ban mondottak szerint a

$$[d_K, d_L] := d_K \circ d_L - (-1)^{k\ell} d_L \circ d_K$$

formula adja meg. Alapvető eredmény, hogy egyértelműen létezik egy $[K, L] \in \Psi^{k+\ell}(M)$ vektorértékű $(k+\ell)$ forma, amelyet a

$$d_{[K, L]} = [d_K, d_L]$$

összefüggés definiál; ezt a $[K, L]$ formát K és L Frölicher-Nijenhuis zárójelének nevezzük. Erre teljesül, hogy gradáltan kommutatív és kielégíti a gradált Jacobi-azonosságot, azaz tetszőleges $K^i \in \Psi^{k_i}(M)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) vektorértékű formák esetén

$$[K_1, K_2] = -(-1)^{k_1 k_2} [K_2, K_1]; \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} (-1)^{k_1 k_3} [K_1, [K_2, K_3]] + (-1)^{k_2 k_1} [K_2, [K_3, K_1]] \\ + (-1)^{k_3 k_2} [K_3, [K_1, K_2]] = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Vektori 0-formák esetén a Frölicher-Nijenhuis zárójel a vektormezők szokásos Lie-zárójelére redukálódik.

Ha speciálisan K és L vektori 1-formák, akkor érvényesek a következő fontos relációk:

$$[K, Y]X = [KX, Y] - K[X, Y]; \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} [K, L](X, Y) = [KX, LY] + [LX, KY] + K \circ L[X, Y] + L \circ K[X, Y] \\ - L[KX, Y] - L[X, KY] - K[LX, Y] - K[X, LY]; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$[fX, K] = f[X, K] + df \wedge i_X K - d_K f \otimes X; \quad (1.25)$$

$$[K, fL] = f[K, L] + d_K f \wedge L - df \wedge (K \circ L); \quad (1.26)$$

$$[K, \omega \otimes X] = d_K \omega \otimes X - d\omega \otimes KX + (-1)^r \omega \wedge [K, X]; \quad (1.27)$$

$$i_X \circ i_K = i_K \circ i_X + i_{KX}; \quad (1.28)$$

$$i_K \circ i_L = i_L \circ i_K + i_{L \circ K} - i_{K \circ L}; \quad (1.29)$$

$$i_X \circ d_K = -d_K \circ i_X + \mathcal{L}_{KX} + i_{[K, X]}; \quad (1.30)$$

$$i_K \circ d_X = d_X \circ i_K + i_{[K, X]}; \quad (1.31)$$

$$i_K \circ d_L = d_L \circ i_K + d_{L \circ K} - i_{[K, L]} \quad (1.32)$$

$$(X, Y \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M), \omega \in \Omega^r(M)).$$

1.12 Számolásaink során fontos szerepet fognak játszani az $\Omega(TM)$ algebra i_J és d_J gradált derivációi. Ezekre (ld. pl. [5]) érvényesek a következő relációk:

$$i_C \circ i_J = i_J \circ i_C; \quad (1.33)$$

$$[i_C, d_J] = i_J; \quad (1.34)$$

$$[i_J, \mathcal{L}_C] = i_J. \quad (1.35)$$

2 EHRESMANN-KONNEXIÓK

A Finsler-sokaságok elméletében alapvető szerepet játszanak a lineáris konnexeók alkalmas, nemlineáris általánosításai, az ún. Ehresmann-konnexeók.

2.1 Egy M sokaságon adott *Ehresmann-konnexi*ón olyan $h \in \Psi^1(TM)$ vektorértékű 1-formát értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

EC1 h sima $\dot{T}M$ fölött;

EC2 h projektor, azaz $h^2 = h$;

EC3 $\text{Ker } h = \mathfrak{X}^v(TM)$

$v := 1_{\mathfrak{X}(TM)} - h$ a h hoz tartozó *vertikális projektor*, az

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto X^h := hX^c \in \mathfrak{X}^h(TM)$$

leképezés a h -hoz tartozó *horizontális liftelés*. Amennyiben $\mathfrak{X}^h(TM) := \text{Im } h$, úgy $\mathfrak{X}^h(TM)$ részmodulusa $\mathfrak{X}(TM)$ -nek, ezt a h -ra nézve - *horizontális vektormezők* részmodulusának hívjuk. A TM -en adott vektormezők modulusa felbomlik az

$$\mathfrak{X}(TM) = \mathfrak{X}^v(TM) \oplus \mathfrak{X}^h(TM).$$

direkt összegre.

Korábban (ld. **1.5**) már jeleztük, hogy az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$ -modulus egy lokális bázisából a vertikális és teljes liftek képzésével lokális bázisa adható meg az $\mathfrak{X}(TM)$ $C^\infty(TM)$ -modulusnak. Ehresmann-konnexió birtokában teljes liftek helyett horizontális lifteket is alkalmazhatunk:

Ha $(X_i)_{i=1}^n$ lokális bázisa az $\mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$ modulusnak és h Ehresmann-konnexió M -en, akkor $(X_i^v, X_i^h)_{i=1}^n$ lokális bázisa az $\mathfrak{X}(TM)$ $C^\infty(TM)$ modulusnak.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy

$$h \circ J = 0, \quad J \circ h = J; \quad (2.1)$$

teljesül továbbá, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$JX^h = X^v, \quad J[X^h, Y^h] = [X, Y]^v, \quad h[X^h, Y^h] = [X, Y]^h. \quad (2.2)$$

2.2 Egy h Ehresmann-konnexióhoz a következő (geometriai tartalommal bíró) vektorértékű formákat csatoljuk:

$$H := [h, C] \in \Psi^1(TM) \quad - \quad h \text{ tenziója}; \quad (2.3)$$

$$t := [J, h] \in \Psi^2(TM) \quad - \quad h \text{ gyenge torziója, vagy egyszerűen torziója}; \quad (2.4)$$

$$T := i_S t + H \in \Psi^1(TM) \quad - \quad h \text{ erős torziója} \quad (2.5)$$

(S tetszőleges semispray);

$$\Omega := -\frac{1}{2}[h, h] \in \Psi^2(TM) \quad - \quad h \text{ görbületi tenzora}. \quad (2.6)$$

Azt mondjuk, hogy h eleget tesz a *homogenitási feltételnek*, röviden *homogén*, ha a tenziója eltűnik.

2.3 Az Ehresmann-konnexiók és a semisprayk közötti alapvető relációt - egymástól függetlenül - M. CRAMPIN és J. GRIFONE fedezte fel. Eredményüket az alábbiakban foglaljuk össze:

- (i) Amennyiben h Ehresmann-konnexió és $\tilde{S}$ tetszőleges semispray az M sokaság fölött, úgy $S := h\tilde{S}$ szintén semispray, amely független $\tilde{S}$ megválasztásától és eleget tesz a $h[C, S] = S$ összefüggésnek. Ezt a semisprayt a h -hoz tartozó vagy h -hoz csatolt semispraynek mondjuk.
- (ii) Ha egy $S: TM \rightarrow TTM$ semispray van adva, akkor

$$h := \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S]) \quad (2.7)$$

Ehresmann-konnexió, amelyet az S által származtatott Ehresmann-konnexiónak hívunk. Az így konstruált Ehresmann-konnexió (gyenge) torziója eltűnik, a hozzá tartozó semispray pedig $\frac{1}{2}(S + [C, S])$. Amennyiben S spray, úgy h eleget tesz a homogenitási feltételnek és a hozzátartozó semispray éppen az S spray.

- (iii) Egy Ehresmann-konnexió akkor és csak akkor származik semisprayból ((2.7) szerinti értelemben) ha gyenge torziója eltűnik.

2.4 Legyen adva egy M sokaság, s tegyük fel, hogy $h \in \Psi^1(TM)$ Ehresmann-konnexió. Létezik pontosan egy olyan $F \in \Psi^1(TM)$ vektorértékű 1-forma,

amely eleget tesz az

$$F \circ J = h \quad \text{és} \quad F \circ h = -J$$

összefüggéseknek. F majdnem-komplex struktúra a TM érintő sokaságon, amelyet a h -hoz csatolt majdnem-komplex struktúrának nevezünk. F explicité az

$$F = h[S, h] - J$$

formulával adható meg, ahol S a h -hoz tartozó semispray. F és a v vertikális projektor kapcsolatát a

$$J \circ F = v, \quad F \circ v = h \circ F$$

formulák adják.

2.5 Kovariáns derivált által származtatott Ehresmann-konnexió.

Tegyük fel hogy $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ kovariáns deriválás az M sokaságon. Ekkor ∇ egy mindenütt sima homogén $h_\nabla \in \Psi^1(TM)$ Ehresmann-konnexiót, azaz lineáris konnexiót származtat M -en, melyet jellemez, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$(\nabla_X Y)^v = [X^{h_\nabla}, Y^v]. \quad (2.8)$$

Megfordítva, minden minden sima homogén Ehresmann-konnexió meghatároz egy kovariáns deriválást M -en. Nevezetesen, legyen h lineáris konnexió M -en, v a hozzátartozó vertikális projektor, és tekintsük a

$$K := \alpha \circ v: TTM \rightarrow TM$$

leképezést, ahol $\alpha: T^v TM \rightarrow TM$ TM -re való kanonikus szürjekciója. A K leképezést az Ehresmann-konnexióhoz tartozó *konnexióleképezésnek* vagy *Dombrowski-leképezésnek* hívjuk. Ekkor

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y := K \circ TY \circ X$$

kovariáns deriválás M -en.

2.6 Megállapodás. Amennyiben $\tilde{h}$ egy további Ehresmann-konnexió, úgy a hozzá tartozó alapvető geometriai adatokat - csatolt semispray, tenzió, gyenge

és erős torzió, majdnem komplex struktúra, horizontális lift - értelemszerűen felülvonással jelöljük:

$$\tilde{S}, \tilde{H}, \tilde{t}, \tilde{T}, \tilde{F}, X^{\tilde{h}} \quad (X \in \mathfrak{X}(M)),$$

Ha ∇ kovariáns deriválás M -en, akkor az általa származtatott Ehresmann-konnexió adatainak jelölése:

$$S_{\nabla}, H_{\nabla}, t_{\nabla}, T_{\nabla}, F_{\nabla}, X^{h_{\nabla}}$$

(ahol, természetesen, $H_{\nabla} = 0$).

2.7 Ismert a következő tétel: *Ha a h és a $\tilde{h}$ Ehresmann-konnexió erős torziója megegyezik és ugyanaz a semispray tartozik hozzájuk, akkor $h = \tilde{h}$.*

A bizonyítást illetően ld. [5].

2.8 Lemma. *Legyenek h és $\tilde{h}$ homogén Ehresmann-konnexiók M -en. Ha minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén*

$$[X^h, Y^v] = [X^{\tilde{h}}, Y^v] \quad (2.9)$$

akkor $h = \tilde{h}$.

Bizonyítás. Felhasználjuk a következő ismert (és egyszerűen belátható) észrevételt:

$$\begin{aligned} &\text{egy } Z \in \mathfrak{X}(M) \text{ vektormező akkor és csak akkor} \\ &\text{vertikális lift, ha } JZ = 0 \text{ és } [J, Z] = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mivel

$$J(X^h - X^{\tilde{h}}) = JX^h - JX^{\tilde{h}} = X^v - X^v = 0,$$

az $X^h - X^{\tilde{h}}$ vektormező vertikális. A feltétel szerint $[X^h - X^{\tilde{h}}, Y^v] = 0$ tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén. Így, (2.10) felhasználásával azt kapjuk, hogy $X^h - X^{\tilde{h}}$ vertikális lift. Ekkor (ismét (2.10) alkalmazásával)

$$[J, X^h - X^{\tilde{h}}] = 0.$$

Kiértékelve mindkét oldalt egy tetszőleges S semisprayn

$$\begin{aligned} 0 &= [J, X^h - X^{\tilde{h}}] S = [JS, X^h - X^{\tilde{h}}] - J[S, X^h - X^{\tilde{h}}] \\ &= [C, X^h - X^{\tilde{h}}] - J[S, X^h - X^{\tilde{h}}] \end{aligned}$$

adódik. A jobb oldal első tagja h és $\tilde{h}$ homogenitása miatt eltűnik, másrészt $J[S, X^h - X^{\tilde{h}}] = X^{\tilde{h}} - X^h$ (1.16). Tehát bármely M -en adott X vektormező esetén $X^h = X^{\tilde{h}}$. Ez azt jelenti, hogy a két Ehresmann-konnexió, h és $\tilde{h}$ megegyezik. $\square$

2.9 Lemma. *Legyen h homogén Ehresmann-konnexió az M sokaságon és jelölje S a h -hoz csatolt semisprayt 2.3(i). Amennyiben $\tilde{h}$ az S által a 2.3(ii)-ben leírtak szerint származtatott Ehresmann-konnexió, úgy h és $\tilde{h}$ kapcsolatát a*

$$\tilde{h} = h - \frac{1}{2}t^\circ \quad (2.11)$$

összefüggés adja, ahol t a h gyenge torziója, t° pedig t potenciálja.

Bizonyítás. Mivel h eleget tesz a homogenitási feltételnek, a hozzá tartozó S semispray spray. $\tilde{h}$ gyenge torziója eltűnik, és mivel S spray $\tilde{h}$ szintén homogén, a hozzá tartozó semispray éppen az S spray. Tehát

$$\tilde{h}S = S, \quad hS = S.$$

Fennáll továbbá, hogy

$$K := \tilde{h} - h.$$

szemibázikus vektori 1-forma, ugyanis

$$J \circ K = K \circ J = 0.$$

Mivel

$$0 = \tilde{t} := [J, \tilde{h}] = [J, h + K] = [J, h] + [J, K] = t + [J, K],$$

azt kapjuk, hogy $t = -[J, K]$, és így

$$t^\circ = -[J, K]^\circ.$$

Mivel J és K egyaránt szemibázikus, a $[J, K]^\circ$ vektori 1-forma szintén szemibázikus forma, így ismeretéhez elegendő a teljes lifteken való hatását tudnunk. Figyelembe véve az előbbi észrevételeket, tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned} [J, K]^\circ(X^c) &= [J, K](S, X^c) = [JS, KX^c] + [KS, JX^c] \\ &\quad + J \circ K[S, X^c] + K \circ J[S, X^c] - J[S, KX^c] - J[KS, X^c] \\ &\quad - K[S, JX^c] - K[JS, X^c] = [C, KX^c] - J[S, KX^c] - K[S, X^v]. \end{aligned}$$

Az egyenlőség jobboldalán lévő első tag h és $\tilde{h}$ homogenitása miatt eltűnik:

$$[C, KX^c] = [C, \tilde{h}X^c] - [C, hX^c] = [C, X^{\tilde{h}}] - [C, X^h] = 0.$$

A második tagra kapjuk, hogy

$$J[S, KX^c] = -KX^c = (h - \tilde{h})X^c.$$

A harmadik tagot a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} K[S, X^v] &= \tilde{h}[S, X^v] - h[S, X^v] = \tilde{F} \circ J[S, X^v] - F \circ J[S, X^v] \\ &= -\tilde{F}X^v + FX^v = -\tilde{F} \circ JX^c + F \circ JX^c = (h - \tilde{h})X^c. \end{aligned}$$

Összefoglalva az eddigieket: bármely $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$[J, K]^\circ(X^c) = 2(\tilde{h} - h)X^c, \quad \text{azaz,} \quad [J, K]^\circ = 2(\tilde{h} - h).$$

Tehát $t^\circ = 2(h - \tilde{h})$, amiből közvetlenül adódik a kívánt összefüggés. $\square$

3 FINSLER-KONNEXIÓK

3.1 Egy M sokaságon adott *Finsler-konnexió*n olyan (D, h) párt értünk, ahol D kovariáns deriválás a TM vagy a $\mathring{TM}$ sokaságon, h pedig Ehresmann-konnexió M -en, és teljesülnek a következő feltételek:

$$Dh = 0 \text{ -- "D redukálható",} \quad (3.1)$$

$$DF = 0 \text{ -- "D majdnem komplex"} \quad (3.2)$$

(F a h -hoz tartozó majdnem komplex struktúra (2.4)). A $DC \in \Psi^1(TM)$ kovariáns differenciált, ahol C a Liouville vektormező, *deflexió-leképezés*nek nevezzük. Ha (D, h) Finsler-konnexió, akkor azt mondjuk, hogy a

$$h^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(hX) = D_{hX}C$$

leképezés a Finsler-konnexió h -*deflexió*ja;

$$v^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(vX) = D_{vX}C$$

a v -*deflexió*. A (3.1) feltételből következik, hogy egy horizontális vektormező bármely D szerinti kovariáns deriváltja horizontális, vertikális vektormező bármely D szerinti kovariáns deriváltja vertikális:

$$\text{ha } Y \in \mathfrak{X}^v(TM), \text{ akkor bármely } X \in \mathfrak{X}(TM) : D_X Y \in \mathfrak{X}^v(TM),$$

$$\text{ha } Y \in \mathfrak{X}^h(TM), \text{ akkor bármely } X \in \mathfrak{X}(TM) : D_X Y \in \mathfrak{X}^h(TM).$$

A vertikális vektormezők kovariáns deriváltjainak ismeretében a horizontális vektormezők kovariáns deriváltjai egyértelműen meghatározottak - és fordítva. Nevezetesen, ha X, Y tetszőleges vektormezők TM -en, akkor

$$D_{vX}hY = FD_{vX}JY, \quad D_{hX}hY = FD_{hX}JY.$$

Minden (D, h) Finsler konnexió természetes módon meghatároz két kovariáns differenciál operátort. Egy $\mathring{TM}$ -en adott $(r, s) \neq (0, 0)$ típusú A tenzor $D_h A$ -val illetve $D_v A$ -val jelölt h - és v -kovariáns differenciálja az

$$i_X D_h A := D_{hX} A \quad \text{és} \quad i_X D_v A := D_{vX} A \quad (X \in \mathfrak{X}(\mathring{TM})).$$

$(r, s+1)$ típusú tenzor. Speciálisan, ha Y tetszőleges vektormező $\mathring{TM}$ -en, akkor

$$(D_h Y)(X) = D_{hX} Y, \quad (D_v Y)(X) = D_{vX} Y.$$

3.2 Finsler-konexiók parciális görbületei és torziói. Legyen (D, h) Finsler-konexió az M sokaságon, és jelöljük $\mathbb{K}$ -val illetve $\mathbb{T}$ -vel D klasszikus görbületi-, illetve torziótenzorát. A $\mathbb{K}$ görbületi tenzort meghatározza három parciális görbületi tenzor, a $\mathbb{T}$ torziótenzort pedig öt parciális torziótenzor. Ezeket és elnevezéseiket a következő két táblázattal adjuk meg:

Parciális görbületek	
horizontális (h)	$\mathbb{R}(X, Y)Z := \mathbb{K}(hX, hY)JZ$
vegyes (hv)	$\mathbb{P}(X, Y)Z := \mathbb{K}(hX, JY)JZ$
vertikális (v)	$\mathbb{Q}(X, Y)Z := \mathbb{K}(JX, JY)JZ$

Parciális torziók	
h – horizontális $((h)h)$	$\mathbb{A}(X, Y) := h\mathbb{T}(hX, hY)$
h – vegyes $((h)hv)$	$\mathbb{B}(X, Y) := h\mathbb{T}(hX, JY)$
v – horizontális $((v)h)$	$\mathbb{R}^1(X, Y) := v\mathbb{T}(hX, hY)$
v – vegyes $((v)hv)$	$\mathbb{P}^1(X, Y) := v\mathbb{T}(hX, JY)$
v – vertikális $((v)v)$	$\mathbb{S}^1(X, Y) := v\mathbb{T}(JX, JY)$

3.3 Példa: Kovariáns derivált horizontális liftje. Tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált az M sokaságon, s legyen h_∇ a ∇ által származtatott Ehresmann-konexió. Létezik egy és csak egy olyan $\overset{h}{\nabla}$ kovariáns derivált a TM érintő sokaságon, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\overset{h}{\nabla}_{X^\vee} Y^\vee = 0, \quad (3.3)$$

$$\overset{h}{\nabla}_{X^{h_\nabla}} Y^\vee = (\nabla_X Y)^\vee = [X^{h_\nabla}, Y^\vee], \quad (3.4)$$

$$\overset{h}{\nabla}_{X^\vee} Y^{h_\nabla} = 0, \quad (3.5)$$

$$\overset{h}{\nabla}_{X^{h_\nabla}} Y^{h_\nabla} = (\nabla_X Y)^{h_\nabla} \quad (3.6)$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(M)).$

Ezt a $\overset{h}{\nabla}$ kovariáns deriváltat a ∇ *kovariáns derivált horizontális liftjének* nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\left(\overset{h}{\nabla}, h_{\nabla}\right)$ pár eleget tesz a (3.1) és (3.2) feltételnek, így $\left(\overset{h}{\nabla}, h_{\nabla}\right)$ Finsler-konnxio az M sokaságon.

3.4 Példa: Berwald-típusú Finsler konnxio. Adott h Ehresmann-konnxio mellett definiáljuk a

$$\overset{\circ}{D}: \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \rightarrow \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M), \quad (X, Y) \mapsto \overset{\circ}{D}_X Y$$

leképezést a következő formulákkal:

$$\overset{\circ}{D}_{JX} JY = J[JX, Y], \quad (3.7)$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} JY = v[hX, JY], \quad (3.8)$$

$$\overset{\circ}{D}_{JX} hY = h[JX, Y], \quad (3.9)$$

$$\overset{\circ}{D}_{hX} hY = hF[hX, JY]. \quad (3.10)$$

Legyen

$$\overset{\circ}{D}_X Y = \overset{\circ}{D}_{vX} vY + \overset{\circ}{D}_{hX} vY + \overset{\circ}{D}_{vX} hY + \overset{\circ}{D}_{hX} hY$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$. Ekkor $\overset{\circ}{D}$ kovariáns derivált $\overset{\circ}{T}M$ -en, és egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $\left(\overset{\circ}{D}, h\right)$ eleget tesz a (3.1) és (3.2) feltételnek.

3.5 A D_J^i operátor. Tekintsük a

$$D_J^i: \mathfrak{X}^v(TM) \rightarrow \Psi^1(TM), \quad JY \mapsto D_J^i JY := [J, JY].$$

leképezést. Felhasználva, hogy a vertikális endomorfizmus Nijenhuis-torziója eltűnik, azaz $\frac{1}{2}[J, J] = 0$, egyszerűen adódik, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(TM)$. vektormező esetén

$$D_{JX}^i JY := (D_J^i JY)(X) = J[JX, Y]. \quad (3.11)$$

Legyen h Ehresmann-konnexió az M sokaságon. Mivel $v = J \circ F$, tekinthetjük a

$$D_{vX}^i JY = D_{JFX}^i JY = J[vX, Y]$$

vektormezőt. A h Ehresmann-konnexió segítségével definiálhatjuk a D_J^i operátor prolongációját az $\mathfrak{X}^h(TM)$ horizontális résznyalábra oly módon, hogy tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén

$$D_J^i hY = D_J^i FJY := FD_J^i JY.$$

Ekkor

$$D_{JX}^i hY := (D_J^i hY)(X) = FD_{JX}^i JY = F \circ J[JX, Y] = h[JX, Y]. \quad (3.12)$$

A továbbiakban egy Ehresmann-konnexió jelenlétében D_J^i a prolongált operátort fogja jelenteni.

3.6 Definíció és lemma. *Legyen (D, h) Finsler-konnexió az M sokaságon, és tekintsük a D_J^i prolongált operátort. Ha*

$$\tilde{D} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \times \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \mapsto \tilde{D}_X Y := D_{hX} Y + D_{vX}^i Y \in \mathfrak{X}(\mathring{TM}),$$

akkor $(\tilde{D}, h)$ szintén Finsler-konnexió, amelyet a (D, h) Finsler-konnexióhoz csatoltnak nevezünk. $(\tilde{D}, h)$ vegyes görbületi tenzorára érvényes a következő összefüggés:

$$\tilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, D_{X^h} Z^v]Y^c; \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (3.13)$$

Bizonyítás. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $(\tilde{D}, h)$ valóban Finsler-konnexió.

Ha $\tilde{\mathbb{K}}$ a görbületi tenzora, akkor tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\tilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = \tilde{\mathbb{K}}(X^h, Y^v)Z^v = \tilde{D}_{X^h} \tilde{D}_{Y^v} Z^v - \tilde{D}_{Y^v} \tilde{D}_{X^h} Z^v - \tilde{D}_{[X^h, Y^v]} Z^v.$$

Itt

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{Y^v} Z^v &= D_{JY^c}^i JZ^c = J[Y^v, Z^c] = J[Y, Z]^v = 0; \\ \tilde{D}_{[X^h, Y^v]} Z^v &= \tilde{D}_{v[X^h, Y^v]} Z^v = D_{v[X^h, Y^v]}^i JZ^c \\ &= J[[X^h, Y^v], Z^c] = [J[X^h, Y^v], Z^c] - [J, Z^c][X^h, Y^v] = 0, \end{aligned}$$

mivel $[X^h, Y^v]$ vertikális és $[J, Z^c] = 0$. A fennmaradó második tagot tovább alakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -\tilde{D}_{Y^v}\tilde{D}_{X^h}Z^v &= -\tilde{D}_{Y^v}(D_{X^h}Z^v) = -D_{Y^v}^i(D_{X^h}Z^v) = -D_{JY^c}^i(JFD_{X^h}Z^v) \\ &= -[D_J^i(JFD_{X^h}Z^v)]Y^c = -[J, JFD_{X^h}Z^v]Y^c = -[J, D_{X^h}Z^v]Y^c. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a kívánt összefüggést. $\square$

3.7 Egy (D, h) Finsler konnexit *horizontálisan lifteltnek* nevezzük, ha létezik olyan ∇ kovariáns derivált az M sokaságon, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$D_{X^h}Y^v = (\nabla_X Y)^v.$$

Ekkor ∇ -t a (D, h) Finsler-konnexióhoz tartozó *bázikus deriváltnak* mondjuk.

3.8 Megjegyzések.

- (i) Egy horizontálisan liftelt Finsler-konnexió bázikus deriváltja egyértelműen meghatározott.
- (ii) Egy M sokaságon adott kovariáns derivált horizontális liftje (ld. **3.3**) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió.

3.9 Lemma. Egy (D, h) Finsler-konnexió akkor és csak akkor horizontálisan liftelt, ha a $(\tilde{D}, h)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a csatolt Finsler-konnexió $\mathbb{P}$ vegyes görbületi tenzora eltűnik. Figyelembe véve (3.13)-at, kapjuk, hogy bármely $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$0 = [J, D_{X^h}Z^v]Y^c = [Y^v, D_{X^h}Z^v] - J[Y^c, D_{X^h}Z^v] = [Y^v, D_{X^h}Z^v].$$

Mivel $D_{X^h}Y^v$ vertikális vektormező, és bármely $Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $[Z^v, D_{X^h}Y^v] = 0$, következik, hogy $D_{X^h}Y^v$ vertikális lift tetszőleges X, Y vektormezők esetén. Tekintsük a

$$\nabla: (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M); \quad (\nabla_X Y)^v := D_{X^h}Y^v$$

leképezést. Ekkor ∇ jól definiált kovariáns derivált M -en, tehát (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió.

Fordítva, ha (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió, amelyhez a ∇ bázikus derivált tartozik, akkor tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c &= \tilde{\mathbb{K}}(X^h, Y^v)Z^v = D_{X^h}D_{Y^v}Z^v - D_{Y^v}D_{X^h}Z^v - D_{[X^h, Y^v]}Z^v \\ &= -D_{Y^v}D_{X^h}Z^v = -D_{Y^v}(\nabla_X Z)^v = 0,\end{aligned}$$

tehát a csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik. $\square$

3.10 Következmény. *Egy Berwald-típusú Finsler-konnexió megegyezik a csatolt Finsler-konnexiójával, így egy Berwald-típusú Finsler konnexió pontosan akkor horizontálisan liftelt, ha a vegyes görbületi tenzora eltűnik.*

3.11 Lemma. *Tegyük fel, hogy (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió ∇ bázikus deriválttal, és legyen h_∇ a ∇ által származtatott lineáris konnexió. Ekkor*

$$D_{X^h}C = X^h - X^{h\nabla} \quad (X \in \mathfrak{X}(M)), \quad (3.14)$$

következésképpen h_∇ akkor és csak akkor egyezik meg a h Ehresmann-konnexióval, ha a (D, h) Finsler-konnexió h -deflexiója eltűnik.

Bizonyítás. Legyen $(U, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M -en. $\pi^{-1}(U)$ felett a Liouville vektormező előállítható a következő alakban:

$$C \upharpoonright \pi^{-1}(U) = (u^i)^c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}D_{X^h}C &= D_{X^h}(u^i)^c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \\ &= (X^h(u^i)^c) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v + (u^i)^c D_{X^h} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \\ &= (X^h(u^i)^c) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v + (u^i)^c \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \\ &\stackrel{(1)}{=} (X^h(u^i)^c) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v + (u^i)^c \left[X^{h\nabla}, \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (X^h(u^i)^c) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v + \left[X^{h\nabla}, (u^i)^c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \right] - (X^{h\nabla}(u^i)^c) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v \\
&= (X^h - X^{h\nabla})(u^i)^c \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^v + [X^{h\nabla}, C] \\
&\stackrel{(2)}{=} X^h - X^{h\nabla},
\end{aligned}$$

ahol az (1) és (2) lépésben felhasználtuk, hogy h_∇ egy M -en adott kovariáns deriváltból származik, és így alkalmazható (2.8). $\square$

3.12 Megjegyzés. Tegyük fel, hogy (D, h) olyan Finsler-konnexió, amelynek eltűnik a h -deflexiója. A lemma alapján ekkor annak szükséges feltétele, hogy (D, h) horizontálisan liftelt legyen az, hogy a h Ehresmann-konnexió *lineáris konnexió* legyen.

3.13 Következmény. Ha (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió eltűnő h -deflexióval, akkor a hozzá tartozó h -kovariáns deriváltak a

$$D_{hX} JY = v[hX, JY], \quad (3.15)$$

$$D_{hX} hY = hF[hX, JY]. \quad (3.16)$$

formulák szerint hatnak, ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$ tetszőleges.

3.14 Állítás. Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és tegyük fel, hogy h lineáris konnexió. Ebben az esetben (D, h) h -deflexiója akkor és csak akkor tűnik el, ha $D(v)hv$ torziója eltűnik.

Bizonyítás. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^1(X^h, Y^h) &= v\mathbb{T}(X^h, Y^v) = v(D_{X^h} Y^v - D_{Y^v} X^h - [X^h, Y^v]) \\
&= D_{X^h} Y^v - [X^h, Y^v].
\end{aligned}$$

Ha a (D, h) -hoz tartozó bázikus deriválás ∇ , akkor a feltétel szerint

$$D_{X^h} Y^v = (\nabla_X Y)^v = [X^{h\nabla}, Y^v].$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}^1(X^h, Y^h) = 0 \Leftrightarrow [X^{h\nabla}, Y^v] = [X^h, Y^v].$$

A 2.8 lemma figyelembevételével ez akkor és csak akkor teljesül, ha $h = h_\nabla$, ami ekvivalens azzal, hogy (D, h) h -deflexiója eltűnik (3.11). $\square$

3.15 Állítás. *Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és ∇ a hozzá tartozó bázikus derivált. Tegyük fel, hogy h az egész érintőtéren sima Ehresmann-konnexió. Ebben az esetben (D, h) h -deflexiója akkor és csak akkor esik egybe h tenziójával, ha $D(v)h$ torziója eltűnik.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $\mathbb{P}^1 = 0$ akkor $h^*DC = H$. Miként azt az előző bizonyítás során is láttuk, ha $\mathbb{P}^1 = 0$, akkor minden $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$D_{X^h}Y^v = [X^h, Y^v].$$

Innen könnyen adódik, hogy általánosan

$$D_{hX}JY = v[hX, JY]; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(TM). \quad (3.17)$$

Legyen S tetszőleges semispray M -en. Ekkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$D_{X^h}C = D_{X^h}JS \stackrel{(3.17)}{=} v[X^h, JS] = v[X^h, C] = H(X^c).$$

Ez azt jelenti, hogy $h^*DC = H$.

Fordítva, megmutatjuk, hogy ha $h^*(DC) = H$, akkor $\mathbb{P}^1 = 0$. Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt $D_{X^h}C = [X^h, C]$. Másrészt, mint 3.11-ben láttuk, $D_{X^h}C = X^h - X^{h\nabla}$. Így, figyelembe véve, hogy h_∇ homogén, következik, hogy

$$[C, X^h - X^{h\nabla}] = [C, X^h] = -(X^h - X^{h\nabla}).$$

Ez azt jelenti, hogy az $X^h - X^{h\nabla}$ vertikális vektormező nulladfokú homogén. Mivel h az egész érintőtéren sima, megállapíthatjuk ennek alapján, hogy $X^h - X^{h\nabla}$ vertikális lift. Így tetszőleges $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$0 = [X^h - X^{h\nabla}, Y^v] = [X^h, Y^v] - [X^{h\nabla}, Y^v];$$

következésképpen

$$\mathbb{P}^1(X^h, Y^h) = (\nabla_X Y)^v - [X^h, Y^v] = [X^{h\nabla}, Y^v] - [X^h, Y^v] = 0,$$

és ezt akartuk belátni. $\square$

4 EHRESMANN-KONNEXIÓK FINSLER-SOKASÁGOKON

4.1 Finsler-sokaságok. Legyen adva egy $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyet a továbbiakban *energiafüggvénynek* mondunk. Az (M, E) párt (vagy egyszerűen M -et) *Finsler-sokaságnak* nevezzük, ha teljesülnek a következők:

- (F1) bármely $a \in \mathring{TM}$ esetén $E(a) > 0$; $E(0) = 0$;
- (F2) E C^1 osztályú TM -en, sima $\mathring{TM}$ -en;
- (F3) $CE = 2E$, azaz E másodfokú pozitív homogén;
- (F4) az $\omega := dd_J E$ 2-forma, az ún. *fundamentális forma* nemelfajuló.

Ha (M, E) Finsler-sokaság, létezik pontosan egy olyan $S_0: TM \rightarrow TTM$ spray, amelyet $\mathring{TM}$ -en egyértelműen meghatároz az

$$i_{S_0} \omega = -dE \quad (4.1)$$

formula, s amely kiterjeszthető C^1 osztályú $S_0: TM \rightarrow TTM$ leképezéssé úgy, hogy $S_0(0) = 0$ teljesüljön. Ezt a sprayt a Finsler-sokaság *kanonikus spray*-jének nevezzük. A

$$\begin{aligned} \bar{g}: \mathfrak{X}^v(\mathring{TM}) \times \mathfrak{X}^v(\mathring{TM}) &\rightarrow C^\infty(\mathring{TM}) \\ (JX, JY) &\mapsto \bar{g}(JX, JY) := \omega(JX, Y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

leképezés jól definiált, nemelfajuló, szimmetrikus $C^\infty(TM)$ -bilineáris forma, amelyet (M, E) *vertikális* vagy *Riemann-Finsler metrikájának* nevezzük. Amennyiben $\bar{g}$ pozitív definit, úgy *pozitív definit Finsler-sokaságról* szólunk. Tegyük fel, hogy h egy Ehresmann-konnexió M -en. Ekkor $\bar{g}$ -t kiterjeszthetjük $\mathfrak{X}(TM)$ -re a következő előírással:

$$g(X, Y) := \bar{g}(JX, JY) + \bar{g}(vX, vY), \quad v := 1_{\mathfrak{X}(TM)} - h, \quad (4.3)$$

ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathring{TM})$ tetszőleges. Így egy g pseudo-Riemann metrikához jutunk $\mathring{TM}$ -en, amelyet $\bar{g}$ *h-menti prolongációjának* hívunk.

4.2 A Cartan-tenzorok. Legyen (M, E) Finsler-sokaság. Létezik pontosan egy olyan

$$\mathcal{C}: \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \times \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathring{TM}), \quad (X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$$

tenzor, amely eleget tesz a

$$J \circ \mathcal{C} = 0, \\ \bar{g}(\mathcal{C}(X, Y), JZ) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{JX} J^* \bar{g})(Y, Z) \quad (Z \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)). \quad (4.4)$$

feltételeknek. A $\mathcal{C}$ tenzor $\mathcal{C}_b$ leszállított tenzorát a

$$\mathcal{C}_b(X, Y, Z) := \bar{g}(\mathcal{C}(X, Y), JZ); \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M). \quad (4.5)$$

formulával értelmezzük. Az így megkonstruált $\mathcal{C}$ tenzort és a leszállítottját a Finsler-sokaság *1. Cartan tenzorának* nevezzük. Jól ismert tény, hogy

$$(M, E) \text{ akkor és csak akkor Riemannian sokaság, ha } \mathcal{C} = 0.$$

Tegyük fel, hogy h egy Ehresmann-konnexió M -en, és g a $\bar{g}$ vertikális metrika prolongációja h mentén. Az (M, E) Finsler-sokaság (h -ra vonatkozó) *2. Cartan tenzorán* a

$$J \circ \mathcal{C}' = 0$$

és

$$g(\mathcal{C}'(X, Y), JZ) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{hX} g)(JY, JZ). \quad (4.6)$$

előírásokkal értelmezett $\mathcal{C}'$ tenzort, valamint a vele metrikusan ekvivalens

$$\mathcal{C}'_b(X, Y, Z) := g(\mathcal{C}'(X, Y), JZ); \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \quad (4.7)$$

leszállított tenzort értjük.

4.3 Indexfelhúzó operátor és gradiens. Tekintsük az (M, E) Finsler-sokaságot és ennek $\omega := dd_J E$ fundamentális formáját. Ha β 1-forma $\mathring{T}M$ -en, jelöljük $\beta^\#$ -tel azt a vektormezőt amelyre

$$i_{\beta^\#} \omega = \beta \quad (4.8)$$

teljesül. Speciálisan, egy $f \in C^\infty(TM)$ függvény *gradiense* a

$$\text{grad}(f) := (df)^\#$$

vektormező. Vertikális lift, azaz egy $\alpha^\vee = \alpha \circ \pi$, $\alpha \in C^\infty(M)$ alakú függvény gradiense rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$\text{grad}(\alpha^\vee) \in \mathfrak{X}^\vee(\mathring{T}M); \quad (4.9)$$

$$[C, \text{grad}(\alpha^\vee)] = -\text{grad}(\alpha^\vee), \quad \text{azaz } \text{grad}(\alpha^\vee) \text{ nulladforkú homogén}; \quad (4.10)$$

$$(\text{grad}(\alpha^\vee))E = \alpha^c \quad (4.11)$$

(lásd [28], Prop. 1).

4.4 Egy (M, E) Finsler-sokaságon adott h Ehresmann-konnexiót *konzervatív*nak mondunk, ha $d_h E = 0$.

4.5 Lemma. Legyen h konzervatív Ehresmann-konnexió az (M, E) Finsler-sokaságon. Ekkor

$$d_H E = 0,$$

ahol H a h tenziója.

Bizonyítás. Tekintsük egy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt. Egyszerű számolással adódik, hogy $H(X^c) = [X^h, C]$, így

$$\begin{aligned} d_H E(X^c) &= dE(HX^c) = dE([X^h, C]) = [X^h, C]E \\ &= X^h(CE) - C(X^h E) = X^h(2E) = 0, \end{aligned}$$

az utolsó lépésben h konzervativságát alkalmazva. $\square$

4.6 Lemma. Ha ω az (M, E) Finsler sokaság fundamentális formája és h konzervatív Ehresmann-konnexió M -en, akkor

$$i_h \omega = \omega + i_t dE,$$

ahol t az Ehresmann-konnexió gyenge torziója.

Bizonyítás. Az

$$i_h \circ d_J \stackrel{(1.32)}{=} d_J \circ i_h + d_{J \circ h} - i_{[h, J]} \stackrel{(2.1), (2.4)}{=} d_J \circ i_h + d_J - i_t,$$

összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} i_h \omega &= i_h dd_J E \stackrel{(1.20)}{=} -i_h d_J dE = -d_J i_h dE \\ &\quad - d_J dE + i_t dE = dd_J E + i_t dE = \omega + i_t dE. \end{aligned}$$

(Figyelembe vettük, hogy $i_h dE = 0$, ugyanis a feltétel szerint h konzervatív.) $\square$

4.7 Következmény. Ha ω az (M, E) Finsler sokaság fundamentális formája és h konzervatív Ehresmann-konnexió M -en, amelynek gyenge torziója eltűnik, akkor $i_h \omega = \omega$.

4.8 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság, h konzervatív Ehresmann-konnexió, S pedig a hozzá csatolt semispray. Ekkor S előállítható az

$$S = S_0 + (d_{t^\circ} E)^\# ,$$

formula alapján, ahol S_0 a Finsler-sokaság kanonikus sprayje és t° a h Ehresmann-konnexió gyenge torziójának a potenciálja.

Bizonyítás. Számolásaink során felhasználjuk a következő relációkat:

$$i_{S_0} \circ i_t = i_t \circ i_{S_0} + i_{t^\circ} ,$$

$$i_h \circ i_{S_0} = i_{S_0} \circ i_h - i_{hS_0} = i_{S_0} \circ i_h - i_S .$$

Mivel h konzervatív

$$0 = d_h E = i_h dE = -i_h i_{S_0} \omega = i_S \omega - i_{S_0} i_h \omega .$$

Így – figyelembe véve, hogy $i_{S_0} dE = S_0 E = 0$, mert S_0 horizontális –, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} i_S \omega &= i_{S_0} i_h \omega \stackrel{4.6}{=} i_{S_0} (\omega + i_t dE) = i_{S_0} \omega + i_{S_0} i_t dE \\ &= i_{S_0} \omega + i_t i_{S_0} dE + i_{t^\circ} dE = i_{S_0} \omega + d_{t^\circ} E . \end{aligned}$$

A nyert eredmény felírható az

$$i_{S-S_0}\omega = d_{t^\circ}E$$

alakban. Innen (4.8) alapján kapjuk, hogy $S - S_0 = (d_{t^\circ}E)^\#$. $\square$

4.9 Tétel. *Legyenek h és $\tilde{h}$ konzervatív Ehresmann-konnexiók az (M, E) Finsler-sokaságon. Amennyiben h és $\tilde{h}$ erős torziója megegyezik, úgy $h = \tilde{h}$.*

Bizonyítás. Jelöléseinkben alkalmazni fogjuk a **2.6**-ban rögzített megállapodásokat. A feltétel szerint

$$d_h E = d_{\tilde{h}} E = 0, \quad T = \tilde{T}.$$

Tekintsük az (M, E) Finsler-sokaság S_0 a kanonikus sprayjét. Az előző bizonyítás során láttuk, hogy

$$i_{S\omega} - i_{S_0}\omega = d_{t^\circ}E, \quad i_{\tilde{S}\omega} - i_{S_0}\omega = d_{\tilde{t}^\circ}E.$$

Innen kivonással kapjuk, hogy

$$i_{S-\tilde{S}}\omega = d_{t^\circ}E - d_{\tilde{t}^\circ}E.$$

h erős torziója $T = t^\circ + H$, így

$$d_{t^\circ}E = d_{T-H}E = d_TE - d_HE = d_TE.$$

Hasonlóképpen,

$$d_{\tilde{t}^\circ}E = d_{\tilde{T}}E.$$

Az utolsó három egyenlőséget összevetve

$$i_{S-\tilde{S}}\omega = d_TE - d_{\tilde{T}}E = d_TE - d_TE = 0$$

adódik. Mivel ω nemelfajuló, következik, hogy $S = \tilde{S}$. Tehát a h és a $\tilde{h}$ Ehresmann-konnexióhoz ugyanaz a semispray tartozik, ami **2.7** alapján azt jelenti, hogy h és $\tilde{h}$ megegyezik. $\square$

4.10 A kanonikus konnexió (Berwald konnexió). Ha (M, E) Finsler sokaság, akkor létezik egy és csak egy olyan h_0 Ehresmann-konnexió, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

$$h_0 \text{ konzervatív, azaz, } d_{h_0} E = 0; \quad (4.12)$$

$$h_0 \text{ homogén}; \quad (4.13)$$

$$h_0 \text{ gyenge torziója eltűnik}. \quad (4.14)$$

Ezt az alapvető eredményt ebben a formában J. GRIFONE [7] fogalmazta meg. A szóbanforgó Ehresmann-konnexiót a Finsler-sokaság *kanonikus konnexiójának* vagy *Berwald-konnexiójának* nevezzük. Explicite:

$$h_0 = \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]), \quad (4.15)$$

ahol S_0 a kanonikus spray. Megjegyezzük, hogy a (4.13)–(4.14) feltételek helyettesíthetők h_0 erős torziójának az eltűnésével.

4.11 Állítás. *Tegyük fel, hogy h homogén, konzervatív Ehresmann-konnexió egy (M, E) Finsler-sokaságon. Ekkor a h_0 kanonikus konnexió segítségével h előállítható a*

$$h = h_0 + \frac{1}{2} t^\circ + \frac{1}{2} [J, (d_t^\circ E)^\#]$$

alakban.

Bizonyítás. Legyen S a h -hoz csatolt semispray, és jelöljük $\tilde{h}$ -mal az S által származtatott Ehresmann-konnexiót (2.7). Ekkor

$$\begin{aligned} h_0 &\stackrel{(4.15)}{=} \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]) \stackrel{4.8}{=} \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S] - [J, (d_t^\circ E)^\#]) \\ &= \tilde{h} - \frac{1}{2} [J, (d_t^\circ E)^\#] \stackrel{(2.11)}{=} h - \frac{1}{2} t^\circ - \frac{1}{2} [J, (d_t^\circ E)^\#], \end{aligned}$$

ami ekvivalens a kívánt formulával. □

5 AZ ICHIJYŌ-KONNEXIÓ

5.1 Hashiguchi-konnexió. Mint ismeretes egy Finsler-sokaságon számos nevezetes kovariáns deriválás értelmezhető; részletes tárgyalásukat illetően a [27] és [29] munkákra utalunk. Következő megfontolásainkhoz a $\left(\overset{H}{D}, h\right)$, ún. *Hashiguchi-konnexióra* lesz szükségünk. Ezt az alábbi axiómák karakterizálják:

$$\overset{H}{D} \text{ } v\text{-vegyes torziója eltűnik}; \quad (5.1)$$

$$\overset{H}{D} \text{ } v\text{-metrikus, azaz, } \overset{H}{D}_v g = 0; \quad (5.2)$$

$$\overset{H}{D} \text{ } v\text{-vertikális torziója eltűnik} \quad (5.3)$$

(g a vertikális metrika prolongációja h mentén).

A $\overset{H}{D}$ szerinti kovariáns deriváltak a következő képletek alapján számolhatók:

$$\overset{H}{D}_{JX} JY = J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y); \quad \overset{H}{D}_{hX} JY = v[hX, JY]; \quad (5.4)$$

$$\overset{H}{D}_{JX} hY = h[JX, Y] + FC(X, Y); \quad \overset{H}{D}_{hX} hY = hF[hX, JY] \quad (5.5)$$

($X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M)$, F a h -hoz csatolt majdnem-komplex struktúra).

Ha ráadásul

$$h \text{ konzervatív}; \quad (5.6)$$

$$\overset{H}{D} \text{ } h\text{-horizontális torziója eltűnik}; \quad (5.7)$$

$$\overset{H}{D} \text{ } h\text{-deflexiója eltűnik,} \quad (5.8)$$

akkor h a Finsler-sokaság kanonikus konnexiója. Ebben az esetben a $\left(\overset{H}{D}, h\right)$ Finsler-konnexiót az (M, E) Finsler-sokaság *klasszikus Hashiguchi-konnexiójának* nevezzük.

5.2 Tétel. *Tegyük fel, hogy (M, E) Finsler-sokaság, ∇ pedig kovariáns deriválás az M sokaságon. Legyen h_∇ a ∇ -ból származó Ehresmann-konnexió,*

és g jelentse a vertikális metrika prolongációját h_∇ mentén. Létezik egy és csak egy olyan $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Finsler-konnerió M -en, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

$$\overset{\nabla}{D} \text{ } v\text{-metrikus, azaz, } \overset{\nabla}{D}_v g = 0; \quad (5.9)$$

$$\overset{\nabla}{D} \text{ } v\text{-vertikális torziója eltűnik}; \quad (5.10)$$

$$a \left(\widetilde{D^\nabla}, h_\nabla \right) \text{ csatolt Finsler-konnerió} \quad (5.11)$$

vegyes görbületi tenzora eltűnik;

$$\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla \right) \text{ } h\text{-deflexiója eltűnik.} \quad (5.12)$$

A $\overset{\nabla}{D}$ szerinti kovariáns deriváltak a következő képletek szerint számíthatók ki:

$$\overset{\nabla}{D}_{JX} JY = J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y); \quad (5.13)$$

$$\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} JY = v_\nabla[h_\nabla X, JY]; \quad (5.14)$$

$$\overset{\nabla}{D}_{JX} h_\nabla Y = h_\nabla[JX, Y] + F_\nabla \mathcal{C}(X, Y); \quad (5.15)$$

$$\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} h_\nabla Y = h_\nabla F_\nabla[h_\nabla X, JY] \quad (5.16)$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$.

Bizonyítás. Először az *unicitás* igazolásával foglalkozunk részletesen, megmutatva, hogy (5.9)–(5.12) kikényszeríti a (5.13) és (5.14) deriválási szabályokat; ezekből (5.15) és (5.16) már automatikusan következnek.

Első lépés. Felhasználva $\overset{\nabla}{D}$ v -metrikusságát és a $(v)v$ -torzió eltűnését, levezetjük (5.13)-t. Mivel $\overset{\nabla}{D}$ v -metrikus, tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén érvényesek a következő relációk:

$$\begin{aligned}
X^\vee g(Y^\vee, Z^\vee) &= g\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^\vee, Z^\vee\right) + g\left(Y^\vee, \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Z^\vee\right), \\
Y^\vee g(Z^\vee, X^\vee) &= g\left(\overset{\nabla}{D}_{Y^\vee} Z^\vee, X^\vee\right) + g\left(Z^\vee, \overset{\nabla}{D}_{Y^\vee} X^\vee\right), \\
-Z^\vee g(X^\vee, Y^\vee) &= -g\left(\overset{\nabla}{D}_{Z^\vee} X^\vee, Y^\vee\right) - g\left(X^\vee, \overset{\nabla}{D}_{Z^\vee} Y^\vee\right).
\end{aligned}$$

Összeadva a megfelelő oldalakat, s felhasználva, hogy a $(v)v$ -torzió eltűnése miatt

$$\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^\vee - \overset{\nabla}{D}_{Y^\vee} X^\vee = [X^\vee, Y^\vee] = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g\left(2\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^\vee, Z^\vee\right) &= X^\vee g(Y^\vee, Z^\vee) + Y^\vee g(Z^\vee, X^\vee) - Z^\vee g(X^\vee, Y^\vee) \\
&= 2\mathcal{C}_b(X^c, Y^c, Z^c) = 2g(\mathcal{C}(X^c, Y^c), Z^\vee).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^\vee = \mathcal{C}(X^c, Y^c) = \mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}),$$

ami éppen (5.13) az $X = X^{h\nabla}$, $Y = Y^{h\nabla}$ esetben. Ebből azonban az általános formula is könnyen adódik.

Második lépés. Most (5.11) és (5.12) segítségével levezetjük (5.14)-et. Mint azt a 3.9 lemmában láttuk, az utóbbi feltételek garantálják, hogy $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ horizontálisan liftelt Finsler-konnexió. Így tehát egyértelműen létezik olyan $\tilde{\nabla}$ kovariáns derivált M -en amelyre igaz, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^\vee = \overset{\nabla}{D}_{X^{h\nabla}} Y^\vee.$$

Figyelembevétel az (5.12) feltételt és a 3.11 lemmát, rögtön kapjuk, hogy $\tilde{\nabla}$ megegyezik a tételben szereplő ∇ kovariáns deriválttal. Így

$$\overset{\nabla}{D}_{X^{h\nabla}} Y^\vee = (\nabla_X Y)^\vee = [X^{h\nabla}, Y^\vee],$$

ami az (5.14) formula helyességét igazolja.

Egzisztencia. Értelmezzük a

$$\overset{\nabla}{D} : \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \rightarrow \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \quad (X, Y) \mapsto \overset{\nabla}{D}_X Y$$

leképezést a

$$\overset{\nabla}{D}_X Y := \overset{\nabla}{D}_{v_{\nabla} X}(v_{\nabla} Y) + \overset{\nabla}{D}_{v_{\nabla} X}(h_{\nabla} Y) + \overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla} X}(v_{\nabla} Y) + \overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla} X}(h_{\nabla} Y)$$

előírással, ahol $\overset{\nabla}{D}$ az (5.13)–(5.16) formulák szerint hat. Egyszerű, de hosszadalmas számolással ellenőrizhető, hogy $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ Finsler-konnxio az M sokaságon, és eleget tesz az (5.9)–(5.12) axiómáknak. $\square$

5.3 Megjegyzések.

- (i) Az 5.2 Tételben megkonstruált Finsler-konnxiot a ∇ kovariáns derivált által indukált *Ichijyō-konnxiónak* nevezzük. Maga ICHIJYŌ ezt a deriválási szabályt közvetlen, koordinátás megadással értelmezte [16], [17].
- (ii) A vertikálisan és horizontálisan liftelt vektormezők kovariáns deriváltjai a következő formulák alapján számíthatók:

$$\overset{\nabla}{D}_{X^{\vee}} Y^{\vee} = \mathcal{C}(X^{h_{\nabla}}, Y^{h_{\nabla}}), \quad \overset{\nabla}{D}_{X^{h_{\nabla}}} Y^{\vee} = (\nabla_X Y)^{\vee}, \quad (5.17)$$

$$\overset{\nabla}{D}_{X^{\vee}} Y^{h_{\nabla}} = F_{\nabla} \mathcal{C}(X^{h_{\nabla}}, Y^{h_{\nabla}}), \quad \overset{\nabla}{D}_{X^{h_{\nabla}}} Y^{h_{\nabla}} = (\nabla_X Y)^{h_{\nabla}} \quad (5.18)$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$.

5.4 Állítás. *Legyen (M, E) Finsler-sokaság, ∇ kovariáns derivált M -en, és tekintsük a ∇ által indukált $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnxiot. Ekkor*

$$(\overset{\nabla}{D}_{JX} \mathcal{C})(Y, Z) = (\overset{\nabla}{D}_{JY} \mathcal{C})(X, Z), \quad (5.19)$$

ahol X, Y, Z tetszőleges vektormezők $\overset{\circ}{T}M$ -en.

Bizonyítás. Ha (5.19)-ben valamelyik vektormező vertikális, akkor az egyenlőség mindkét oldala zérus. Így a fenti egyenlőség teljesülését elegendő az $(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla})$ alakú hármasokra ellenőrizni, ahol X , Y és Z tetszőleges vektormezők M -en. Vegyünk egy további $U \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt és használjuk fel, hogy $\overset{\nabla}{D}$ v -metrikus. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} g \right) (\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) = X^\vee g(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) \\
&\quad - g\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} [\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla})], U^\vee \right) - g\left(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} U^\vee \right) \\
&= X^\vee g(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) - g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) \\
&\quad - g\left(\mathcal{C}\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla} \right), U^\vee \right) - g\left(\mathcal{C}\left(Y^{h\nabla}, \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Z^{h\nabla} \right), U^\vee \right) \\
&\quad - g\left(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} U^\vee \right) = X^\vee \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla} \right) - \mathcal{C}_b\left(Y^{h\nabla}, \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} Z^{h\nabla}, U^{h\nabla} \right) \\
&\quad - \mathcal{C}_b\left(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, \overset{\nabla}{D}_{X^\vee} U^{h\nabla} \right) - g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) \\
&= \left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C}_b \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) - g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right).
\end{aligned}$$

Innen, **5.3** (ii) alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) &= \left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C}_b \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \\
&= X^\vee \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) - \mathcal{C}_b(F_\nabla \mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}), Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, F_\nabla \mathcal{C}(X^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^{h\nabla}) - \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, F_\nabla \mathcal{C}(X^{h\nabla}, U^{h\nabla})).
\end{aligned}$$

Hasonló egyenlőség adódik a $g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{Y^\vee} \mathcal{C} \right) (X^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right)$ kifejezésre is. Ezután már egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) - \left(\overset{\nabla}{D}_{Y^\vee} \mathcal{C} \right) (X^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) &= X^\vee \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \\
&\quad - Y^\vee \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} X^\vee \left\{ Y^\vee [Z^\vee (U^\vee E)] \right\} - \frac{1}{2} Y^\vee \left\{ X^\vee [Z^\vee (U^\vee E)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} [X^\vee, Y^\vee] (Z^\vee (U^\vee E)) = 0.
\end{aligned}$$

Itt a $(*)$ lépésben felhasználtuk az 1. Cartan tenzor előállítására vonatkozó összefüggést [29]. Mivel $U \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges volt és g nemelfajuló, innen a kívánt

$$\left(\overset{\nabla}{D}_{X^\vee}\mathcal{C}\right)(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) = \left(\overset{\nabla}{D}_{Y^\vee}\mathcal{C}\right)(X^{h\nabla}, Z^{h\nabla})$$

egyenlőség következik. $\square$

5.5 Lemma. *Legyen ∇ kovariáns derivált M -en, és tekintsük a hozzá tartozó $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ Ichijyō-konnexiót. A $\overset{\nabla}{D}$ kovariáns derivált $\overset{\nabla}{\mathbb{T}}$ torzió tenzorára érvényesek a*

$$\overset{\nabla}{\mathbb{T}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = \left(\mathbb{T}_\nabla(X, Y)\right)^{h\nabla} + \Omega_\nabla(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}), \quad (5.20)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbb{T}}(X^{h\nabla}, Y^\vee) = -F_\nabla\mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}), \quad (5.21)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbb{T}}(X^\vee, Y^\vee) = 0, \quad (5.22)$$

felbontási formulák, ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathbb{T}_\nabla$ jelöli ∇ torzó tenzorát; Ω_∇ és F_∇ pedig a h_∇ Ehresmann-konnexió görbületi tenzora és a hozzá csatolt majdnem komplex struktúra.

5.6 Megjegyzés. A $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right)$ Ichijyō-konnexió parciális görbületeire és torzióira vonatkozó alapvető kiszámítási formulákat a következő táblázatokban foglaljuk össze:

Görbület	$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$
horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}(X, Y)Z = [J, \Omega_\nabla(X, Y)]h_\nabla Z + \mathcal{C}(F\Omega_\nabla(X, Y), Z)$
vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}(X, Y)Z = \left(\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X}\mathcal{C}\right)(h_\nabla Y, h_\nabla Z)$
vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{Q}}(X, Y)Z = \mathcal{C}(FC(X, Z), Y) - \mathcal{C}(X, FC(Y, Z))$

Torzió	$(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$
h – horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{h\nabla}$
h – vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{B}}(X^{h\nabla}, Y^{\vee}) = -F_{\nabla}\mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}^1(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}^1 = 0$
v – vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{S}}^1 = 0$

(F tetszőleges majdnem komplex struktúra TM -en).

A felírt formulák levezetése egyszerű, de hosszadalmas számolást igényel, amelytől itt eltekintünk.

5.7 Következmény. Egy Ichijyō-konnexió horizontális görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha a ∇ bázikus derivált görbülete, vagy – ami ezzel ekvivalens – a h_{∇} Ehresmann-konnexió görbületi tenzora eltűnik.

Bizonyítás. Elegendő annak megmutatása, hogy $\overset{\nabla}{\mathbb{R}}$ eltűnése ekvivalens Ω_{∇} eltűnésével. Ha $\Omega_{\nabla} = 0$, akkor 5.6 alapján $\overset{\nabla}{\mathbb{R}} = 0$ is teljesül. Fordítva, tegyük fel, hogy $\overset{\nabla}{\mathbb{R}} = 0$, és legyen S_{∇} a h_{∇} -hoz tartozó semispray. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}
0 &= \overset{\nabla}{\mathbb{R}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})S_{\nabla} \stackrel{5.6}{=} \left[J, \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) \right] S_{\nabla} + \mathcal{C}\left(F\Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}), S_{\nabla} \right) \\
&= \left[J, \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) \right] S_{\nabla} = \left[C, \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) \right] - J \left[S_{\nabla}, \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) \right].
\end{aligned}$$

Felhasználva a gradált Jacobi-azonosságot és figyelembe véve h_{∇} homogenitását, azonnal kapjuk, hogy a jobb oldalon az első tag eltűnik, míg a második tag éppen $-\Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$ -val egyenlő. Tehát Ω_{∇} eltűnik, és ezzel az állítást beláttuk. $\square$

5.8 Következmény. Egy $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla} \right)$ Ichijyō-konnexió vegyes görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha az első Cartan tenzor $\overset{\nabla}{D}$ szerinti h -kovariáns deriváltja eltűnik.

5.9 Következmény. Egy $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexió h -horizontális torziójának eltűnése ekvivalens ∇ torziótenzorának (vagy h_{∇} gyenge torziójának) eltűnésével.

Bizonyítás. A következő összefüggésből kiolvasható az állítás:

$$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h_{\nabla}}, Y^{h_{\nabla}}) = (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{h_{\nabla}} = (F_{\nabla} \circ t_{\nabla})(X^{h_{\nabla}}, Y^{h_{\nabla}}) \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)).$$

Az itt szereplő második egyenlőség igazolása megtalálható [27]-ben. $\square$

6 ÁLTALÁNOSÍTOTT BERWALD-SOKASÁGOK

6.1 Legyen (M, E) Finsler-sokaság és ∇ kovariáns derivált M -en. Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) hármas *általánosított Berwald-sokaság*, ha a h_∇ Ehresmann-konnexió konzervatív, azaz $d_{h_\nabla} E = 0$. Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaságot *Berwald-sokaságnak* nevezünk, ha ∇ szimmetrikus kovariáns derivált. Amennyiben ráadásul, ∇ görbületi tenzora is zérus, úgy *lokálisan Minkowski-sokaságról* beszélünk.

6.2 Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy ha (M, E, ∇) Berwald-sokaság, akkor a ∇ -ból származó h_∇ Ehresmann-konnexió éppen a sokaság Berwald-konnexiója, ennél fogva a ∇ kovariáns derivált egyértelmű. Ekkor ezt a Berwald-sokaság kovariáns deriváltjának nevezzük, és (M, E, ∇) helyett egyszerűen csak (M, E) -t írunk.

6.3 Következmény. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor

$$S_\nabla = S_0 + (d_{t_\nabla^\circ} E)^\#, \quad (6.1)$$

$$h_\nabla = h_0 + \frac{1}{2} t_\nabla^\circ + \frac{1}{2} \left[J, (d_{t_\nabla^\circ} E)^\# \right]. \quad (6.2)$$

(A jelölések a 2.6 megállapodás szerint értendők.)

Bizonyítás. A felírt formulák közvetlenül adódnak a 4.8 és 4.11 állításokból. $\square$

6.4 Tétel. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, E, \bar{\nabla})$ általánosított Berwald-sokaságok. A ∇ és $\bar{\nabla}$ kovariáns deriváltak akkor és csak akkor egyeznek meg, ha a torziójuk egyenlő.

Bizonyítás. Jelöljük ∇ illetve $\bar{\nabla}$ klasszikus torzió tenzorát $\mathbb{T}_\nabla$ -vel és $\mathbb{T}_{\bar{\nabla}}$ -val. Jól ismert tény (ld. [4]), hogy tetszőleges M -en adott X, Y vektormezők esetén

$$t_\nabla(X^c, Y^c) = [\mathbb{T}_\nabla(X, Y)]^\vee. \quad (6.3)$$

Tehát, ha $\mathbb{T}_\nabla = \mathbb{T}_{\bar{\nabla}}$, akkor a h_∇ és $h_{\bar{\nabla}}$ Ehresmann-konnexiók gyenge torziója megegyezik. Másrészt h_∇ és $h_{\bar{\nabla}}$ homogének, így erős torziójuk is egyenlő. Mivel h_∇ és $h_{\bar{\nabla}}$ konzervatív Ehresmann-konnexiók, ebből 4.9 alapján kapjuk, hogy $h_\nabla = h_{\bar{\nabla}}$, amiből pedig $\nabla = \bar{\nabla}$ adódik.

A megfordítás nyilvánvaló. $\square$

6.5 Állítás. *Legyen (M, E) Finsler-sokaság és tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált M -en. A következő állítások ekvivalensek:*

- (a) (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság;
- (b) a h_∇ -hoz tartozó $\mathcal{C}'_\nabla$ második Cartan tenzor eltűnik;
- (c) a $(\bar{D}, h_\nabla)$ Ichijyō-konnexió h_∇ -metrikus, azaz $\bar{D}_{h_\nabla} g = 0$.

Bizonyítás.

(a) $\implies$ (b). Felhasználva $\mathcal{C}'_\nabla$ definícióját és (3.4b)-t (ld.[29]) kapjuk, hogy tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned} 2(\mathcal{C}'_\nabla)_b(X^c, Y^c, Z^c) &:= 2g(\mathcal{C}'_\nabla(X^c, Y^c)JZ^c) = (\mathcal{L}_{h_\nabla X^c} g)(JY^c, JZ^c) \\ &= X^{h_\nabla} g(Y^\vee, Z^\vee) - g([X^{h_\nabla}, Y^\vee], Z^\vee) - g(Y^\vee, [X^{h_\nabla}, Z^\vee]) \\ &= X^{h_\nabla} [Y^\vee(Z^\vee E)] - [X^{h_\nabla}, Y^\vee](Z^\vee E) - Y^\vee([X^{h_\nabla}, Z^\vee]E) \\ &= Y^\vee[Z^\vee(X^{h_\nabla} E)] = 0, \end{aligned}$$

hiszen h_∇ konzervatív. Tehát $\mathcal{C}'_\nabla = 0$.

(b) $\iff$ (c). Tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\bar{D}_{X^{h_\nabla}} g)(Y^\vee, Z^\vee) &= X^{h_\nabla} g(Y^\vee, Z^\vee) - g(\bar{D}_{X^{h_\nabla}} Y^\vee, Z^\vee) - g(Y^\vee, \bar{D}_{X^{h_\nabla}} Z^\vee) \\ &= X^{h_\nabla} g(Y^\vee, Z^\vee) - g([X^{h_\nabla}, Y^\vee], Z^\vee) - g(Y^\vee, [X^{h_\nabla}, Z^\vee]) \\ &= 2g(\mathcal{C}'_\nabla(X^c, Y^c), Z^\vee), \end{aligned}$$

ami nyilvánvalóan azt mutatja, hogy (b) és (c) ekvivalensek.

(c) $\implies$ (a) Mivel az 5.12 axióma alapján $(\bar{D}, h_\nabla)$ h -deflexiója eltűnik, tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(c)}{=} \left(\overset{\nabla}{D}_{X^{h\nabla}} g \right) (C, C) = X^{h\nabla} g(C, C) - 2g \left(\overset{\nabla}{D}_{X^{h\nabla}} C, C \right) \\
&= 2X^{h\nabla} E = 2d_{h\nabla} E(X^c).
\end{aligned}$$

Ez igazolja, hogy $d_{h\nabla} E = 0$. □

6.6 Állítás. *Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor a $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ Ichijō-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy a $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C} = 0$ feltétel ekvivalens a vegyes görbületi tenzor eltűnésével, elegendő azt megmutatnunk, hogy $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C}$ eltűnik. Ezt két lépésben igazoljuk.

Első lépés. Először belátjuk, hogy $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C}_b = 0$. Ebből a célból elegendő azt ellenőrizni, hogy $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C}_b$ eltűnik az $(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla})$ alakú négyeseken, ahol X, Y, Z, U tetszőleges vektormezők M -en.

$$\begin{aligned}
&\left(\overset{\nabla}{D}_{U^{h\nabla}} \mathcal{C}_b \right) (X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) = U^{h\nabla} \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b(\overset{\nabla}{D}_{U^{h\nabla}} X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) - \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, \overset{\nabla}{D}_{U^{h\nabla}} Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, \overset{\nabla}{D}_{U^{h\nabla}} Z^{h\nabla}) = U^{h\nabla} \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b((\nabla_U X)^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) - \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, (\nabla_U Y)^{h\nabla}, Z^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}, (\nabla_U Z)^{h\nabla}) = \frac{1}{2} \{ U^{h\nabla} [X^\vee(Y^\vee(Z^\vee E))] \\
&\quad - [U^{h\nabla}, X^\vee][Y^\vee(Z^\vee E)] - X^\vee([U^{h\nabla}, Y^\vee](Z^\vee E)) \\
&\quad - X^\vee(Y^\vee[U^{h\nabla}, Z^\vee]E) \} = \frac{1}{2} X^\vee \{ Y^\vee[Z^\vee(U^{h\nabla} E)] \} = 0,
\end{aligned}$$

hiszen h_{∇} konzervatív. Tehát $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C}_b = 0$.

Második lépés. Most tekintsük a $\overset{\nabla}{D}_{h\nabla} \mathcal{C}$ tenzort. Mivel a 6.5 állítás szerint $\overset{\nabla}{D}$ h_{∇} -metrikus, tetszőleges M -en adott X, Y, Z, U vektormezők esetén

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} g \right) (\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) = X^{h\nabla} g(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) \\
&\quad - g \left(\bar{D}_{X^h} \mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) - g \left(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), \bar{D}_{X^{h\nabla}} U^\vee \right) \\
&= X^h g(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee) - g \left(\left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) \\
&\quad - g \left(\mathcal{C} \left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla} \right), U^\vee \right) - g \left(\mathcal{C} \left(Y^{h\nabla}, \bar{D}_{X^{h\nabla}} Z^{h\nabla} \right), U^\vee \right) \\
&\quad - g \left(\mathcal{C}(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), \bar{D}_{X^{h\nabla}} U^\vee \right) = X^{h\nabla} \mathcal{C}_b(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) \\
&\quad - \mathcal{C}_b \left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla} \right) - \mathcal{C}_b \left(Y^{h\nabla}, \bar{D}_{X^{h\nabla}} Z^{h\nabla}, U^{h\nabla} \right) \\
&\quad - \mathcal{C}_b \left(Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, \bar{D}_{X^{h\nabla}} U^{h\nabla} \right) - g \left(\left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) \\
&= \left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} \mathcal{C}_b \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}, U^{h\nabla}) - g \left(\left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right) \\
&\stackrel{1. \text{ lépés}}{=} - g \left(\left(\bar{D}_{X^{h\nabla}} \mathcal{C} \right) (Y^{h\nabla}, Z^{h\nabla}), U^\vee \right).
\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy g nem elfajuló, innen következik, hogy $\bar{D}_{h\nabla} \mathcal{C} = 0$. $\square$

6.7 Megjegyzés. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) általánosított Berwald sokaság, és legyen σ nem konstans sima függvény M -en. Ekkor

$$\bar{h}_\nabla := h_\nabla - d\sigma^\vee \otimes C \quad (\sigma^\vee := \sigma \circ \pi)$$

mindenütt sima, homogén Ehresmann-konnexió, így $\bar{h}_\nabla$ egy $\bar{\nabla}$ kovariáns deriválást származtat M -en. Közvetlen számolás mutatja, hogy a $\bar{\nabla}$ -hoz csatolt Ichijyō-konnexió vegyes görbülete eltűnik. Azonban $(M, E, \bar{\nabla})$ *nem* általánosított Berwald-sokaság, ugyanis $h_{\bar{\nabla}}$ nem konzervatív. Tehát a 6.6 állítás megfordítása általában nem teljesül.

6.8 Lemma. Legyen (M, E) Finsler-sokaság és jelölje h_0 a kanonikus konnexit. (M, E) akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha létezik M -en olyan ∇ kovariáns derivált, hogy bármely $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$(\nabla_X Y)^\vee = [X^{h_0}, Y^\vee]. \quad (6.4)$$

Ekkor ∇ éppen a Berwald-sokaság kovariáns deriváltja.

Bizonyítás. Figyelembe véve **6.2**-t, a feltétel szükségessége nyilvánvaló. Fordítva, ha egy ∇ kovariáns derivált teljesíti a (6.4) feltételt, akkor tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$[X^{h_0}, Y^\nabla] = [X^{h_\nabla}, Y^\nabla].$$

A 2.8 lemma alapján, ez azt jelenti, hogy h_0 és h_∇ megegyezik, amiből következik, hogy (M, E) Berwald-sokaság. $\square$

6.9 Tétel. *Egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha a klasszikus Hashiguchi-konnexió Ichijyō-konnexió.*

Bizonyítás.

Tekintsük az (M, E) Finsler-sokaságot. Jelölje h_0 a kanonikus konnexiót, és legyen $\left(\overset{H}{D}, h_0\right)$ a Hashiguchi-konnexió (**5.1**).

Szükségesség. Tegyük fel, hogy (M, E) Berwald-sokaság amelynek a kovariáns deriváltja ∇ . Ekkor a ∇ -ból származó Ehresmann-konnexió a kanonikus konnexió, azaz $h_\nabla = h_0$. Megmutatjuk, hogy a $\left(\overset{H}{D}, h_0\right)$ Hashiguchi-konnexió éppen a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla\right) = \left(\overset{\nabla}{D}, h_0\right)$ Ichijyō-konnexió. Ehhez elegendő azt ellenőrizni, hogy $\left(\overset{H}{D}, h_0\right)$ teljesíti az **5.2**-ben előírt axiómákat. (5.9) és (5.10) éppen a Hashiguchi-konnexió (5.2) és (5.3) axiómái. A $\left(\overset{\widetilde{H}}{D}, h_0\right)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzorának eltűnése egyszerűen következik **3.6** és **6.8** felhasználásával:

$$\overset{\widetilde{H}}{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, \overset{H}{D}_{X^{h_0}} Z^\nabla]Y^c = -[J, [X^{h_0}, Y^\nabla]]Y^c = -[J, (\nabla_X Y)^\nabla]Y^c = 0$$

$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$. Tehát (5.11) teljesül. Végül a következő egyszerű számolás mutatja, hogy $\left(\overset{H}{D}, h_0\right)$ h -deflexiója szintén eltűnik: ha S tetszőleges semispray M -en és $X \in \mathfrak{X}(\dot{T}M)$, akkor

$$h_0^*\left(\overset{H}{DC}\right)(X) = \overset{H}{DC}(h_0 X) = \overset{H}{D}_{h_0 X} C = \overset{H}{D}_{h_0 X} JS \stackrel{(5.4)}{=} v_0[h_0 X, C] = 0,$$

mivel h_0 homogén.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy létezik olyan ∇ kovariáns derivált M -en, hogy a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ Ichijyō-konnexió megegyezik a $\left(\overset{H}{D}, h_0\right)$ Hashiguchi-konnexióval. Ekkor $h_0 = h_{\nabla}$, következésképpen (6.4) teljesül és így (M, E) Berwald-sokaság. $\square$

6.10 Állítás. *Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha $(d_{t_{\nabla}} E)^{\#}$ kvadratikus vektormező.*

Bizonyítás. Emlékeztetünk rá (lásd [29]), hogy egy Finsler-sokaság pontosan akkor Berwald-sokaság, ha a kanonikus spray S_0 egész érintőtéren sima; ekkor S_0 szükségképpen kvadratikus. Mivel $(d_{t_{\nabla}} E)^{\#} \stackrel{(6.1)}{=} S_{\nabla} - S_0$, és S_{∇} szintén kvadratikus spray, következik az állítás. $\square$

6.11 Azt mondjuk, hogy az M sokaságon adott S_1 és S_2 spray *projektíven ekvivalens*, ha létezik olyan $\lambda : TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvény amelyre teljesülnek a következők:

- (i) λ sima $\dot{T}M$ -en és C^1 osztályú TM -en;
- (ii) $S_1 = S_2 + \lambda C$.

Ekkor λ automatikusan 1-homogén, azaz $C\lambda = \lambda$.

6.12 Állítás. *Legyen (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha a ∇ -hoz tartozó S_{∇} spray projektíven ekvivalens az S_0 kanonikus spray-vel, akkor $S_{\nabla} = S_0$, következésképpen (M, E) Berwald-sokaság.*

Bizonyítás. Figyelembe véve a (6.1) relációt, S_{∇} és S_0 pontosan akkor projektíven ekvivalensek, ha

$$(d_{t_{\nabla}} E)^{\#} = \lambda C,$$

ahol $\lambda : TM \rightarrow \mathbb{R}$ eleget tesz a 6.11-beli feltételeknek. Így egyrészt

$$i_{S_{\nabla}-S_0} \omega \stackrel{(6.1)}{=} i_{(d_{t_{\nabla}} E)^{\#}} \omega = i_{\lambda C} \omega = \lambda i_C \omega = \lambda d_J E,$$

másrészt

$$i_{S_{\nabla}-S_0} \omega = d_{t_{\nabla}} E$$

(lásd 4.8 bizonyítást). Összehasonlítva a két egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$d_{t_{\nabla}^{\circ}} E = \lambda d_J E.$$

Választva egy tetszőleges S semisprayt, innen

$$d_{t_{\nabla}^{\circ}} E(S) = \lambda d_J E(S).$$

Itt a bal oldal

$$d_{t_{\nabla}^{\circ}} E(S) \stackrel{(1.19)}{=} dE(t_{\nabla}^{\circ}(S)) = dE(t_{\nabla}(S, S)) = dE(0) = 0,$$

a jobb oldal

$$\lambda d_J E(S) = \lambda dE(JS) = \lambda dE(C) = \lambda CE = 2\lambda E,$$

következésképpen $\lambda E = 0$, és így λ eltűnik. $\square$

6.13 Tétel. *Az (M, E) Finsler-sokaság akkor és csak akkor lokálisan Minkowski-sokaság, ha létezik olyan torziómentes, eltűnő görbületes ∇ kovariáns derivált M -en, hogy a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ Ichijyō-konnexió " h_{∇} -metrikus", azaz $\overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla}} g = 0$.*

Bizonyítás.

Szükségesség. Ha (M, E) lokálisan Minkowski-sokaság, akkor – természetesen – egyszersmind Berwald-sokaság is. A feltétel szerint a Berwald sokaság ∇ kovariáns deriváltja torziómentes és lapos. Azonban (M, E, ∇) általánosított

Berwald-sokaság, s így a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ Ichijyō-konnexió h -metrikus (ld. 6.5).

Elegendőség. Ha ∇ torziómentes, lapos kovariáns derivált M -en és a $\left(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}\right)$ Ichijyō-konnexió h_{∇} -metrikus, akkor a 6.5 állítás alapján kapjuk, hogy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, és így h_{∇} konzervatív. Mivel h_{∇} szimmetrikus kovariáns deriváltból származik, a gyenge torziója és a tenziója egyaránt eltűnik. Ebből a Finsler-geometria alaplemmájának unicitás-része alapján következik, hogy h_{∇} a kanonikus konnexió, következésképpen (M, E) lokálisan Minkowski-sokaság. $\square$

7 WAGNER-ICHIJYŌ-KONNEXIÓ ÉS WAGNER-SOKASÁGOK

7.1 Legyen ∇ kovariáns derivált az M sokaságon. A $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ hármaszt (a ∇ által indukált) *Wagner-Ichijyō-konnexiónak* nevezzük, ha $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Ichijyō-konnexió (ld. **5.2**), α sima függvény M -en és a $\overset{\nabla}{D}$ kovariáns deriválás $\overset{\nabla}{\mathbb{A}}$ h -horizontális torziója eleget tesz az

$$\overset{\nabla}{\mathbb{A}} = d\alpha^\vee \wedge h_\nabla := d\alpha^\vee \otimes h_\nabla - h_\nabla \otimes d\alpha^\vee \quad (7.1)$$

összefüggésnek.

7.2 Állítás. Legyen $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla, \alpha)$ *Wagner-Ichijyō-konnexió* az M sokaságon. Ekkor

$$\mathbb{T}_\nabla(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)); \quad (7.2)$$

$$t_\nabla = d\alpha^\vee \wedge J := d\alpha^\vee \otimes J - J \otimes d\alpha^\vee; \quad (7.3)$$

$$t_\nabla^\circ = \alpha^c J - d\alpha^\vee \otimes C. \quad (7.4)$$

Bizonyítás. Legyenek X és Y tetszőleges vektormezők M -en. Mint azt korábban már láttuk,

$$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^c, Y^c) = (\mathbb{T}_\nabla(X, Y))^{h_\nabla}.$$

Azonban

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^c, Y^c) &\stackrel{(7.1)}{=} d\alpha^\vee(X^c)h_\nabla(Y^c) - d\alpha^\vee(Y^c)h_\nabla(X^c) = (X^c\alpha^\vee)Y^{h_\nabla} \\ &\quad - (Y^c\alpha^\vee)X^{h_\nabla} \stackrel{(1.2)}{=} (X\alpha)^\vee Y^{h_\nabla} - (Y\alpha)^\vee X^{h_\nabla} = [(X\alpha)Y - (Y\alpha)X]^{h_\nabla}, \end{aligned}$$

ami igazolja a (7.2) egyenlőséget.

Most megmutatjuk, hogy (7.3) szintén teljesül:

$$\begin{aligned}
 t_{\nabla}(X^c, Y^c) &\stackrel{(6.3)}{=} (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{\vee} \stackrel{(7.2)}{=} [d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X]^{\vee} \\
 &= (X\alpha)^{\vee}Y^{\vee} - (Y\alpha)^{\vee}X^{\vee} \stackrel{(1.2)}{=} (X^c\alpha^{\vee})Y^{\vee} - (Y^c\alpha^{\vee})X^{\vee} \\
 &= [(d\alpha^{\vee})X^c]J(Y^c) - [(d\alpha^{\vee})Y^c]J(X^c) \\
 &= (d\alpha^{\vee} \wedge J)(X^c, Y^c),
 \end{aligned}$$

és ebből következik a kívánt reláció. Végül, ha S tetszőleges semispray M -en, akkor

$$\begin{aligned}
 t_{\nabla}^{\circ}(X^c) &= t_{\nabla}(S, X^c) \stackrel{(7.3)}{=} d\alpha^{\vee}(S)JX^c - d\alpha^{\vee}(X^c)(JS) \\
 &= (S\alpha^{\vee})JX^c - d\alpha^{\vee}(X^c)C = \alpha^c JX^c - d\alpha^{\vee}(X^c)C \\
 &= (\alpha^c J - d\alpha^{\vee} \otimes C)X^c,
 \end{aligned}$$

és ezzel (7.4) is igazolást nyert. $\square$

7.3 Az (M, E, ∇, α) négyest *Wagner-sokaságnak* nevezzük, ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, α sima függvény M -en, és teljesül a

$$\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)) \quad (7.5)$$

reláció.

7.4 Megjegyzés. Az eddigiek alapján közvetlenül adódik, hogy ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a ∇ által indukált Ichijyō-konnexió Wagner-Ichijyō-konnexió.

7.5 Tétel. Legyen (M, E) Finsler-sokaság. Tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált α pedig egy sima függvény M -en. A következő állítások ekvivalensek:

(i) (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság.

(ii) A ∇ által indukált $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ Wagner-Ichijyō-konnexió h_{∇} -metrikus, azaz $\overset{\nabla}{D}_{h_{\nabla}}g = 0$.

(iii) A h_∇ Ehresmann-konneksió a

$$h_\nabla = h_0 + \alpha^c J - E[J, \text{grad } \alpha^\vee] - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^\vee \quad (7.6)$$

alakban állítható elő.

Bizonyítás.

(i) $\iff$ (ii) Ez közvetlen következménye a 7.4 megjegyzésnek és a 6.5-beli (a) $\iff$ (c) ekvivalenciának.

(i) $\implies$ (iii) Legyen X vektormező M -en. Kiszámítjuk a $d_{t_\nabla^\circ} E$ 1-forma hatását az X^c vektormezőn:

$$\begin{aligned} d_{t_\nabla^\circ} E(X^c) &= dE(t_\nabla^\circ(X^c)) = t_\nabla^\circ(X^c)E \stackrel{(7.4)}{=} [\alpha^c X^\vee - d\alpha^\vee(X^c)C]E \\ &= \alpha^c(X^\vee E) - 2Ed\alpha^\vee(X^c) \stackrel{(*)}{=} \alpha^c i_C \omega(X^c) - 2Ed\alpha^\vee(X^c) \\ &= \alpha^c i_C \omega(X^c) - 2Ei_{\text{grad } \alpha^\vee} \omega(X^c) = i_{(\alpha^c C - 2E \text{grad } \alpha^\vee)} \omega(X^c); \end{aligned}$$

a $(*)$ lépésnél felhasználva, hogy

$$X^\vee E = dE(JX^c) = d_J E(X^c) = i_C \omega(X^c).$$

Innen rögtön kapjuk, hogy

$$(d_{t_\nabla^\circ} E)^\# = \alpha^c C - 2E \text{grad } \alpha^\vee.$$

Összevetve ezt az eredményt (6.2)-vel, a következő adódik:

$$\begin{aligned} h_\nabla &= h_0 + \frac{1}{2}t_\nabla^\circ + \frac{1}{2}[J, \alpha^c C] - \frac{1}{2}[J, 2E \text{grad } \alpha^\vee] \\ &\stackrel{(7.4)}{=} h_0 + \frac{1}{2}(\alpha^c J - d\alpha^\vee \otimes C) + \frac{1}{2}\alpha^c[J, C] - \frac{1}{2}d\alpha^c \wedge i_C J \\ &\quad + \frac{1}{2}d_J \alpha^c \otimes C - E[J, \text{grad } \alpha^\vee] + dE \wedge i_{\text{grad } \alpha^\vee} J \\ &\quad - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^\vee = h_0 + \frac{1}{2}\alpha^c J - \frac{1}{2}d\alpha^\vee \otimes C \\ &\quad + \frac{1}{2}\alpha^c J + \frac{1}{2}d\alpha^\vee \otimes C - E[J, \text{grad } \alpha^\vee] - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^\vee \\ &= h_0 + \alpha^c J - E[J, \text{grad } \alpha^\vee] - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^\vee, \end{aligned}$$

s ez azt jelenti, hogy (i) $\implies$ (iii) teljesül.

(iii) $\implies$ (i) Először megmutatjuk, hogy a (7.6) alakban előállítható Ehresmann-konnexió konzervatív. Tetszőleges M -en adott X vektormező esetén

$$\begin{aligned} X^{h\nabla} &:= h\nabla X^c \stackrel{(7.6)}{=} X^{h_0} + \alpha^c X^\vee - E[J, \text{grad } \alpha^\vee] X^c - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^\vee(X^c) \\ &= X^{h_0} + \alpha^c X^\vee - E[X^\vee, \text{grad } \alpha^\vee] + E J[X^c, \text{grad } \alpha^\vee] - (X^\vee E) \text{grad } \alpha^\vee \\ &= X^{h_0} + \alpha^c X^\vee - E[X^\vee, \text{grad } \alpha^\vee] - (X^\vee E) \text{grad } \alpha^\vee. \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} d_{h\nabla} E(X^c) &= dE(X^{h\nabla}) = X^{h\nabla} E = \alpha^c(X^\vee E) - EX^\vee[\text{grad } \alpha^\vee(E)] \\ &\quad + E \text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E) - (X^\vee E) \text{grad } \alpha^\vee(E) \stackrel{(4.11)}{=} \alpha^c(X^\vee E) - E(X^\vee \alpha^c) \\ &\quad + E \text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E) - (X^\vee E) \alpha^c = E(\text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E) - X^\vee \alpha^c). \end{aligned}$$

Mivel egyrészt

$$\begin{aligned} \omega(\text{grad } \alpha^\vee, X^c) &= d(d_J E)(\text{grad } \alpha^\vee, X^c) = \text{grad } \alpha^\vee d_J E(X^c) \\ &\quad - X^c d_J E(\text{grad } \alpha^\vee) - d_J E([\text{grad } \alpha^\vee, X^c]) = \text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E) \\ &\quad - X^c dE(J \text{grad } \alpha^\vee) - dE(J[\text{grad } \alpha^\vee, X^c]) = \text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E), \end{aligned}$$

másrészt

$$\omega(\text{grad } \alpha^\vee, X^c) = d\alpha^\vee(X^c) = X^c \alpha^\vee = X^\vee \alpha^c,$$

ezért $\text{grad } \alpha^\vee(X^\vee E) = X^\vee \alpha^c$, következésképpen $d_{h\nabla} E(X^c) = 0$ – és ez volt az állítás. Tehát (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság.

Végezetül megmutatjuk, hogy ∇ torziótenzora (7.5) alakú. Ehhez először is jegyezzük meg, hogy

$$[J, [J, \text{grad } \alpha^\vee]] = 0, \tag{*}$$

ugyanis a Jacobi-azonosság felhasználásával

$$\begin{aligned} 0 &= [J, [J, \text{grad } \alpha^\vee]] - [J, [\text{grad } \alpha^\vee, J]] + [\text{grad } \alpha^\vee, [J, J]] \\ &= 2[J, [J, \text{grad } \alpha^\vee]]. \end{aligned}$$

Erre is tekintettel,

$$\begin{aligned}
 t_{\nabla} &:= [J, h_{\nabla}] \stackrel{(7.6)}{=} [J, h_0] + [J, \alpha^c J] - [J, E[J, \text{grad } \alpha^v]] - [J, d_J E \otimes \text{grad } \alpha^v] \\
 &= \alpha^c [J, J] + d_J \alpha^c \wedge J - d\alpha^c \wedge J \circ J - E[J, [J, \text{grad } \alpha^v]] \\
 &\quad - d_J E \wedge [J, \text{grad } \alpha^v] + dE \wedge J \circ [J, \text{grad } \alpha^v] - d_J d_J E \otimes \text{grad } \alpha^v \\
 &\quad + dd_J E \otimes J \text{grad } \alpha^v + d_J E \wedge [J, \text{grad } \alpha^v] \stackrel{(*)}{=} d_J \alpha^c \wedge J \\
 &= d\alpha^v \wedge J = d\alpha^v \otimes J - J \otimes d\alpha^v.
 \end{aligned}$$

Innen már következik (7.5), miként azt (7.3) bizonyításában láttuk. $\square$

7.6 Következmény. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a h_{∇} -hoz csatolt S_{∇} spray és az S_0 kanonikus spray kapcsolatát a

$$S_{\nabla} = S_0 + \alpha^c C - 2E \text{grad } \alpha^v \quad (7.7)$$

reláció adja.

Bizonyítás. Az előbbi bizonyítás során (i) $\implies$ (iii) igazolásakor láttuk, hogy $(d_{t_{\nabla}} E)^{\#} = \alpha^c C - 2E \text{grad } \alpha^v$. Figyelembe véve (6.1)-et, rögtön kapjuk a (7.7) relációt. $\square$

8 PÉLDA: 1-FORMA FINSLER SOKASÁGOK.

8.1 Finsler-Minkowski norma. Egy $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *Finsler-Minkowski normának* nevezzük, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

- (N1) $f(v) \geq 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$), $f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$ – *pozitivitás*;
- (N2) $f(\tau v) = \tau f(v)$ ($\tau \in [0, \infty[$, $v \in \mathbb{R}^n$) – *pozitív homogenitás*;
- (N3) $f \in C^3(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ – *differentiálhatóság*;
- (N4) az $F := \frac{1}{2}f^2$ függvény második Fréchet-deriváltja $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges pontjában pozitív definit szimmetrikus bilineáris függvény, azaz tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $F''(p): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$ -en – *erős konvexitás*.

Megadva $\mathbb{R}^n$ -en egy f Finsler-Minkowski normát, az $(\mathbb{R}^n, f)$ párt *Finsler-Minkowski vektortérnek* nevezzük.

Ha tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $v, w \in T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ esetén

$$\langle v, w \rangle_p := F''(p)(v, w) \quad (8.1)$$

akkor az így értelmezett

$$p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p \in T_2^0(T_p \mathbb{R}^n)$$

leképezés Riemann metrika az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sokaságon.

8.2 Legyen β 1-forma az M sokaságon. A továbbiakban jelöljük $\tilde{\beta}$ -al a

$$TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \tilde{\beta}(v) := \beta_{\pi(v)}(v)$$

függvényt. Fel fogjuk használni a következő észrevételt. Ha ∇ kovariáns derivált M -en, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $\beta \in \Omega(M)$ 1-forma esetén

$$X^{h\nabla} \tilde{\beta} = \widetilde{\nabla_X \beta}, \quad (8.2)$$

(Lásd [38], Lemma 2).

8.3 A következőkben tegyük fel, hogy M *paralelizálható* sokaság, és legyen $(X_i)_{i=1}^n$ ($X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \{1, \dots, n\}$) *paralelizációja* M -nek ([2], p. 117). Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizációhoz duális 1-formák $(\lambda^i)_{i=1}^n$ sorozatát. A 8.2-beli észrevétel alkalmazásával vezessük be a

$$\tilde{\lambda} := (\tilde{\lambda}^1, \dots, \tilde{\lambda}^n) : TM \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \tilde{\lambda}(v) = (\tilde{\lambda}^1(v), \dots, \tilde{\lambda}^n(v))$$

leképezést.

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Finsler-Minkowski norma, és legyen

$$\mathcal{L} := f \circ \tilde{\lambda}, \quad E := \frac{1}{2} \mathcal{L}^2.$$

Ekkor $\mathcal{L}$ Finsler-alapfüggvény, (M, E) pedig Finsler-sokaság. Az így definiált $\mathcal{L}$ alapfüggvényt *1-forma Finsler-függvénynek*, az (M, E) Finsler-sokaságot *1-forma Finsler-sokaságnak* nevezzük [22]. A következőkben (mellőzve az egyszerű számolásokat) megadjuk az (M, E) Finsler-sokaság alapvető geometriai adatait.

(a) (M, E) fundamentális 2-formája

$$\omega = \tilde{\lambda}^* df \wedge i_J \tilde{\lambda}^* df - (f \circ \tilde{\lambda}) d_J \tilde{\lambda}^* df$$

(ahol $*$ jelöli az 1-forma visszahúzását ("pull-back").

(b) Az (M, E) sokaság $\bar{g}$ vertikális metrikája a $\langle, \rangle$ Riemann metrika $\tilde{\lambda}$ általi visszahúzottja, azaz

$$\bar{g} = \tilde{\lambda}^* \langle, \rangle;$$

tehát $\tilde{\lambda}$ megőrzi a Finsler normát.

(c) Az (M, E) Finsler-sokaság (leszállított) első Cartan-tenzora a

$$\mathcal{C}_b = \frac{1}{2} \left(\eta \odot d_J(f \circ \tilde{\lambda}) + (f \circ \tilde{\lambda}) \overset{\circ}{D}_J \eta \right)$$

formula alapján állítható elő, ahol $(\overset{\circ}{D}, h)$ Berwald-típusú Finsler-konnexió, η pedig az

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M) \mapsto \eta(X, Y) := dd_J(f \circ \tilde{\lambda})(JX, Y) \in C^\infty(TM)$$

előírás által meghatározott $(0, 2)$ -típusú tenzor ($\odot$ a szimmetrikus szorzatot jelöli).

8.4 Állítás. Legyen (M, E) 1-forma metrikájú paralelizálható Finsler-sokaság. Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizáció által meghatározott ∇ kovariáns deriváltat ([2], 9.1.2), legyen továbbá h_∇ a ∇ -ból származó Ehresmann-konnexió. Ekkor (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha ráadásul ∇ torziótenzora eltűnik, akkor (M, E) lokálisan Minkowski-sokaság.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, azaz $d_{h_\nabla} E = 0$. Mivel a $(\lambda^i)_{i=1}^n$ duális 1-formák párhuzamosak a ∇ lineáris konnexióra vonatkozóan, bármely $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$0 = [(\nabla \lambda^i)(Y, X)]^\vee = [(\nabla_X \lambda^i)(Y)]^\vee \stackrel{1.2.8 [37]}{=} Y^\vee \widetilde{\nabla_X \lambda^i} \quad (1 \leq i \leq n);$$

következésképpen tetszőleges M -en adott X vektormezőre teljesül, hogy

$$\widetilde{\nabla_X \lambda^i} = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

Másrészt (8.2) alapján

$$X^{h_\nabla} \widetilde{\lambda^i} = \widetilde{\nabla_X \lambda^i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Innen következik, hogy bármely $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$X^{h_\nabla} \widetilde{\lambda^i} = d_{h_\nabla} \widetilde{\lambda^i}(X^c) = 0 \quad (1 \leq i \leq n),$$

így

$$d_{h_\nabla} \widetilde{\lambda^i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

amiből az összetett függvények differenciálási szabálya alapján kapjuk a kívánt $d_{h_\nabla} E = 0$ relációt.

Az állítás második részének az igazolásához tekintsük a $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Ichijyō-konnexiót. Mivel (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, **6.5** szerint $\overset{\nabla}{D}$ h -metrikus. Továbbá a ∇ kovariáns derivált nyilvánvalóan lapos és – a feltétel szerint – szimmetrikus, **6.13** alapján ezért következik, hogy (M, E) valóban lokálisan Minkowski-sokaság. $\square$

8.5 Görbületek és torziók. Tegyük fel, hogy (M, E) 1-forma metrikájú Finsler-sokaság. Legyen ∇ az M sokaság paralelizációja által meghatározott

kovariáns derivált, és tekintsük a $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexiót. Az előbbi megállapításokból és **5.6**-ból egyszerűen kapjuk $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ parciális görbületeit és torzióit, amelyeket a következő táblázatokban foglalunk össze:

Görbület	$(X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$
<i>horizontális</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}} = 0$
<i>vegyes</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}} = 0$
<i>vertikális</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{Q}}(X, Y)Z = \mathcal{C}(F(\mathcal{C}(X, Z), Y) - \mathcal{C}(X, F\mathcal{C}(Y, Z)))$

Torzió	$(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$
<i>h-horizontális</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{h\nabla}$
<i>h-vegyes</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{B}}(X^{h\nabla}, Y^{\nabla}) = -F_{\nabla}\mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
<i>v-horizontális</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}_1 = 0$
<i>v-vegyes</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}_1 = 0$
<i>v-vertikális</i>	$\overset{\nabla}{\mathbb{S}}_1 = 0$

(F tetszőleges majdnem komplex struktúra TM -en, $\mathcal{C}$ a **8.3(c)**-ben látott első Cartan-tenzor.)

9 KONFORM EKVIVALENS ICHIJYŌ-STRUKTÚRÁK

9.1 Az (M, E) és $(M, \bar{E})$ Finsler sokaságokat *konform ekvivalenseknek* nevezzük, ha létezik olyan $\varphi: TM \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív, sima függvény, hogy az energiafüggvényeikre fennáll az $\bar{E} = \varphi E$ összefüggés. Jól ismert tény, hogy φ vertikális lift (ld. például [28]), így mindig felírható $\exp \circ \sigma^v$, $\sigma \in C^\infty(M)$ alakban.

9.2 Lemma. *Az első Cartan-tenzor invariáns az energia függvény konform változtatásával szemben, azaz $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$.*

Bizonyítás. A klasszikus tenzorkalkulus nyelvén megfogalmazott bizonyítás megtalálható pl. [10]-ben, míg a [28] dolgozat egy koordinátamentes bizonyítást tartalmaz. $\square$

9.3 Az (M, E, ∇) hármast *Ichijyō-struktúrának* hívjuk, ha (M, E) Finsler-sokaság, amely el van látva a (D, h_∇) Ichijyō-konnexióval.

9.4 Konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák. Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) és $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ Ichijyō-struktúrák *konform ekvivalensek*, ha

- (i) (M, E) és $(M, \bar{E})$ konform ekvivalens Finsler-sokaságok, azaz $\bar{E} = (\exp \circ \sigma^v)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$,

és

- (ii) $\bar{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}d\sigma \otimes \text{id}$.

9.5 Állítás. *Megtartva 9.4 feltételeit és jelöléseit, érvényesek a következő összefüggések:*

$$h_{\bar{\nabla}} = h_\nabla - \frac{1}{2}d\sigma^v \otimes C; \quad (9.1)$$

$$\bar{D}_{JX}JY = D_{JX}JY, \quad (9.2)$$

$$\bar{D}_{h_{\bar{\nabla}}X}JY = D_{h_\nabla X}JY - \frac{1}{2}d\sigma^v(X)[C, JY] \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(TM)); \quad (9.3)$$

$$t_{\bar{\nabla}} = t_\nabla + \frac{1}{2}(d\sigma^c \circ J) \wedge J; \quad (9.4)$$

$$\overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}} = \overset{\circ}{t}_{\nabla} + \frac{1}{2}(\sigma^c J - (d\sigma^c \circ J) \otimes C); \quad (9.5)$$

$$H_{\overline{\nabla}} = H_{\nabla} = 0; \quad (9.6)$$

$$\Omega_{\overline{\nabla}} = \Omega_{\nabla}; \quad (9.7)$$

$$S_{\overline{\nabla}} = S_{\nabla} - \frac{1}{2}\sigma^c C, \text{ és így } S_{\overline{\nabla}} \text{ és } S_{\nabla} \text{ projektíven ekvivalens.} \quad (9.8)$$

Bizonyítás. (a) Egyszerű számolással adódik, hogy $h_{\nabla} - \frac{1}{2}d\sigma^v \otimes C$ valóban az egész TM érintőtérén sima Ehresmann-konnexió. Továbbá

$$\begin{aligned} [h_{\nabla} - \frac{1}{2}d\sigma^v \otimes C, C] &= [h_{\nabla}, C] - \frac{1}{2}[d\sigma^v \otimes C, C] = \frac{1}{2}[C, d\sigma^v \otimes C] \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_C d\sigma^v \otimes C + [C, C] \otimes d\sigma^v) = 0, \end{aligned}$$

és így $h_{\nabla} - \frac{1}{2}d\sigma^v \otimes C$ eleget tesz a homogenitási feltételnek. Most megmutatjuk, hogy ez az Ehresmann-konnexió megegyezik a $\overline{\nabla}$ -ból származó $h_{\overline{\nabla}}$ Ehresmann-konnexióval. Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén egyrészt

$$[X^{h_{\overline{\nabla}}}, Y^v] = (\overline{\nabla}_X Y)^v = (\nabla_X Y)^v + \frac{1}{2}(d\sigma(X)Y)^v = [X^{h_{\nabla}}, Y^v] + \frac{1}{2}(X\sigma)^v Y^v ;$$

másrészt

$$\begin{aligned} [X^{h_{\nabla}} - \frac{1}{2}d\sigma^v(X^c)C, Y^v] &= [X^{h_{\nabla}}, Y^v] - \frac{1}{2}[(X\sigma)^v C, Y^v] \\ &= [X^{h_{\nabla}}, Y^v] - \frac{1}{2}(X\sigma)^v [C, Y^v] + \frac{1}{2}Y^v(X\sigma)^v C = [X^{h_{\nabla}}, Y^v] + \frac{1}{2}(X\sigma)^v Y^v, \end{aligned}$$

következésképpen $[X^{h_{\overline{\nabla}}}, Y^v] = [X^{h_{\nabla}} - \frac{1}{2}d\sigma^v(X^c)C, Y^v]$. A 2.8 Lemma alkalmazásával innen a kívánt (9.1) egyenlőség adódik.

(b) Legyenek X és Y tetszőleges vektormezők M -en. Figyelembe véve az (5.13)–(5.16) számolási szabályokat kapjuk, hogy

$$\overline{D}_{X^v} Y^v = \overline{\mathcal{C}}(X^c, Y^c) \stackrel{9.2 \text{ Lemma}}{=} \mathcal{C}(X^c, Y^c) = D_{X^v} Y^v,$$

ahonnan következik (9.2). Mivel

$$\overline{D}_{X^{h_{\overline{\nabla}}}}Y^{\vee} = (\overline{\nabla}_X Y)^{\vee} = (\nabla_X Y)^{\vee} + \frac{1}{2}(d\sigma(X)Y)^{\vee} = D_{X^{h_{\nabla}}}Y^{\vee} + \frac{1}{2}d\sigma^{\vee}(X^c)Y^{\vee} ,$$

tetszőleges $f \in C^{\infty}(TM)$ esetén

$$\begin{aligned} \overline{D}_{X^{h_{\overline{\nabla}}}}fY^{\vee} - D_{X^{h_{\nabla}}}fY^{\vee} &= ((X^{h_{\overline{\nabla}}} - X^{h_{\nabla}})f)Y^{\vee} + f(\overline{D}_{X^{h_{\overline{\nabla}}}}Y^{\vee} - D_{X^{h_{\nabla}}}Y^{\vee}) \\ &= ((X^{h_{\overline{\nabla}}} - X^{h_{\nabla}})f)Y^{\vee} + \frac{1}{2}fd\sigma^{\vee}(X^c)Y^{\vee} \stackrel{(9.1)}{=} -\frac{1}{2}(d\sigma^{\vee}(X^c)C)fY^{\vee} \\ &\quad + \frac{1}{2}d\sigma^{\vee}(X^c)fY^{\vee} = -\frac{1}{2}d\sigma^{\vee}(X^c)((Cf)Y^{\vee} - fY^{\vee}) = -\frac{1}{2}d\sigma^{\vee}(X^c)[C, fY^{\vee}] , \end{aligned}$$

amiből kapjuk a (9.3) relációt.

(c)

$$\begin{aligned} t_{\overline{\nabla}} &:= [J, h_{\overline{\nabla}}] \stackrel{(9.1)}{=} [J, h_{\nabla} - \frac{1}{2}d\sigma^{\vee} \otimes C] = t_{\nabla} - \frac{1}{2}[J, d_J\sigma^c \otimes C] \\ &\stackrel{(22) [39]}{=} t_{\nabla} - \frac{1}{2}(d_J d_J\sigma^c \otimes C - dd_J\sigma^c \otimes JC - d_J\sigma^c \wedge [J, C]) \\ &= t_{\nabla} + \frac{1}{2}(d_J\sigma^c \wedge J) , \end{aligned}$$

tehát (9.4) teljesül.

(d) (9.5) ellenőrzése is egyszerű számolási feladat. Ha $S : TM \rightarrow TTM$ tetszőleges semispray és X egy vektormező M -en, akkor

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}}(X^c) &:= t_{\overline{\nabla}}(S, X^c) \stackrel{(9.4)}{=} \overset{\circ}{t}_{\nabla}(X^c) + \frac{1}{2}d_J\sigma^c(S)JX^c - \frac{1}{2}d_J\sigma^c(X^c)JS \\ &= (\overset{\circ}{t}_{\nabla} + \frac{1}{2}(\sigma^c J - d_J\sigma^c \otimes C))(X^c). \end{aligned}$$

(e) A bizonyítás (a) részében már megmutattuk, hogy $h_{\overline{\nabla}}$ szintén homogén, így $H_{\overline{\nabla}} = H_{\nabla} = 0$.

Felhasználva (9.1)-et, levezetjük (9.7)-et.

$$\Omega_{\overline{\nabla}} = -\frac{1}{2}[h_{\overline{\nabla}}, h_{\overline{\nabla}}] = -\frac{1}{2}\left([h_{\nabla}, h_{\nabla}] - [d\sigma^{\vee} \otimes C, h_{\nabla}] + \frac{1}{4}[d\sigma^{\vee} \otimes C, d\sigma^{\vee} \otimes C]\right)$$

A reláció jobb oldalán lévő második tag

$$[h_{\nabla}, d\sigma^{\vee} \otimes C] = d_{h_{\nabla}}d\sigma^{\vee} \otimes C - dd\sigma^{\vee} \otimes h_{\nabla}C - d\sigma^{\vee} \wedge [h_{\nabla}, C] = 0,$$

míg a harmadik tag

$$[d\sigma^\vee \otimes C, d\sigma^\vee \otimes C] = 2(d\sigma^\vee \wedge d_C d\sigma^\vee \otimes C - dd\sigma^\vee \wedge i_C d\sigma^\vee \otimes C) = 0;$$

következésképpen

$$\Omega_{\overline{\nabla}} = \Omega_{\nabla}.$$

(f) Legyen $\tilde{S}$ tetszőleges semispray M -en. Ekkor

$$S_{\overline{\nabla}} = h_{\overline{\nabla}} \tilde{S} \stackrel{(9.1)}{=} h_{\nabla} \tilde{S} - \frac{1}{2} d\sigma^\vee(\tilde{S})C = S_{\nabla} - \frac{1}{2}(\tilde{S}\sigma^\vee)C = S_{\nabla} - \frac{1}{2}\sigma^c C,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

9.6 Következmény. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák; legyen $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) σ konstans függvény, és így a konform változtatás hasonlóság.
- (ii) $h_{\nabla} = h_{\overline{\nabla}}$. (iii) $S_{\nabla} = S_{\overline{\nabla}}$. (iv) $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$.

Bizonyítás. Ha (i) teljesül, azaz $\sigma \in C^\infty(M)$ konstans, akkor $d\sigma^\vee = 0$. Így (9.1) alkalmazásával kapjuk, hogy (ii) teljesül.

Az (ii) $\Rightarrow$ (iii) implikáció nyilvánvaló.

Most tegyük fel, hogy $S_{\nabla} = S_{\overline{\nabla}}$; ekkor (9.8) alapján $\sigma^c C = 0$. Mivel C a 0-án kívül sehol sem 0, innen $\sigma^c = 0$ adódik, amiből következik, hogy σ konstans függvény. Így a (iii) $\Rightarrow$ (i) implikáció szintén igaz.

Meg kell még mutatnunk, hogy (i) és (iv) ekvivalensek. Ha $\sigma \in C^\infty(M)$ konstans, akkor $\sigma^c = 0$, és így (9.4) alapján rögtön kapjuk, hogy $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$. Fordítva, ha $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$ akkor $\overset{\circ}{t}_{\nabla} = \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}}$ is teljesül, és (9.5) felhasználásával kapjuk a

$$\sigma^c J = d_J \sigma^c \otimes C$$

relációt. Mindkét oldal szemibázikus nyomát véve ([39], p.134) azt kapjuk, hogy

$$n\sigma^c = i_{\tilde{S}} d_J \sigma^c, \text{ azaz } n\sigma^c = \sigma^c$$

($\tilde{S}$ tetszőleges semispray). Mivel $n \geq 2$, ebből következik, hogy $\sigma^c = 0$, következésképpen σ konstans. $\square$

9.7 Tétel. *Konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák Ichijyō-konnexióinak parciális görbületei megegyeznek.*

Bizonyítás. Megtartva a korábbi jelöléseket, tekintsük az (M, E, ∇) és $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ Ichijyō-struktúrákat.

(a) A horizontális görbületre vonatkozó állítás egyszerűen következik (9.1)-ből és (9.7)-ből, míg a 9.2 Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy a vertikális görbületük is megegyezik.

(b) Tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c &= \bar{D}_{X^{h\bar{\nabla}}} \bar{D}_{Y^v} Z^v - \bar{D}_{Y^v} \bar{D}_{X^{h\bar{\nabla}}} Z^v - \bar{D}_{[X^{h\bar{\nabla}}, Y^v]} Z^v \stackrel{(9.1), (9.2), (9.3)}{=} \\
 &= \bar{D}_{X^{h\bar{\nabla}}} D_{Y^v} Z^v - \bar{D}_{Y^v} \left(D_{X^{h\bar{\nabla}}} Z^v + \frac{1}{2} d\sigma^v(X^c) Z^v \right) - \bar{D}_{[X^{h\bar{\nabla}}, Y^v]} Z^v \\
 &\quad - \frac{1}{2} d\sigma^v(X^c) \bar{D}_{Y^v} Z^v \stackrel{(9.2)}{=} \bar{D}_{X^{h\bar{\nabla}}} D_{Y^v} Z^v - \bar{D}_{Y^v} D_{X^{h\bar{\nabla}}} Z^v - \frac{1}{2} d\sigma^v(X^c) \bar{D}_{Y^v} Z^v \\
 &\quad - D_{[X^{h\bar{\nabla}}, Y^v]} Z^v - \frac{1}{2} d\sigma^v(X^c) D_{Y^v} Z^v = D_{X^{h\bar{\nabla}}} D_{Y^v} Z^v - D_{Y^v} D_{X^{h\bar{\nabla}}} Z^v \\
 &\quad - D_{[X^{h\bar{\nabla}}, Y^v]} Z^v - \frac{1}{2} d\sigma^v(X^c) [C, D_{Y^v} Z^v] - d\sigma^v(X^c) \mathcal{C}(Y^c, Z^c) \\
 &= \mathbb{P}(X^c, Y^c) Z^c - d\sigma^v(X^c) \left(\frac{1}{2} [C, \mathcal{C}(Y^c, Z^c)] + \mathcal{C}(Y^c, Z^c) \right) = \mathbb{P}(X^c, Y^c) Z^c,
 \end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy $\mathcal{C}(X^c, Y^c) - 1$ -ed fokú homogén vektormező. $\square$

Alkalmazások általánosított Berwald-sokaságokra

9.8 Állítás. *Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ szintén általánosított Berwald-sokaság.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{E} = \varphi E$, $\varphi = \exp \circ \sigma^v$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Ekkor

$$d_{h\bar{\nabla}} \bar{E} = d_{h\bar{\nabla}}(\varphi E) = \varphi d_{h\bar{\nabla}} E + E d_{h\bar{\nabla}} \varphi,$$

így minden M -en adott X vektormező esetén

$$\begin{aligned}
 (d_{h_{\overline{\nabla}}} \overline{E})(X^c) &= \varphi(d_{h_{\overline{\nabla}}} E)(X^c) + E(d_{h_{\overline{\nabla}}} \varphi)(X^c) = \varphi(h_{\overline{\nabla}} X^c)E + E(h_{\overline{\nabla}} X^c)\varphi \\
 &\stackrel{(9.1)}{=} \varphi(X^{h_{\nabla}} E - \frac{1}{2}(X\sigma)^\vee C E) + E(X^{h_{\nabla}} \varphi - \frac{1}{2}(X\sigma)^\vee C \varphi) \\
 &= -\varphi(X\sigma)^\vee E + E X^{h_{\nabla}} (\exp \circ \sigma^\vee) = -\varphi(X\sigma)^\vee E + E \varphi(X^{h_{\nabla}} \sigma^\vee) \\
 &= -\varphi(X\sigma)^\vee E + \varphi(X\sigma)^\vee E = 0 .
 \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $h_{\overline{\nabla}}$ szintén konzervatív, és ezt akartuk belátni. $\square$

9.9 Következmény. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák, ahol $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $(\sigma \in C^\infty(M))$. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma$ szintén Wagner-sokaság.

Bizonyítás. Az előző állítás alapján $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ általánosított Berwald-sokaság és

$$t_{\overline{\nabla}} \stackrel{(9.4)}{=} t_{\nabla} + \frac{1}{2}(d\sigma^\vee \wedge J) \stackrel{(7.3)}{=} d\alpha^\vee \wedge J + \frac{1}{2}(d\sigma^\vee \wedge J) = d(\alpha + \frac{1}{2}\sigma)^\vee \wedge J .$$

Innen már közvetlenül adódik, hogy $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$, ahol $\overline{\alpha} := \alpha + \frac{1}{2}\sigma$, Wagner-sokaság. $\square$

9.10 Következmény (M. HASHIGUCHI – Y. ICHIJYŌ). Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Finsler-sokaság konform ekvivalens legyen egy Berwald-sokasággal az, hogy a Finsler-sokaság Wagner-sokaság legyen.

Bizonyítás. Legyen adva az (M, E) Finsler-sokaság.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ Berwald-sokaság, amely konform ekvivalens (M, E) -vel, nevezetesen $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Ha

$$\nabla := \overline{\nabla} - \frac{1}{2}d\sigma \otimes \text{id},$$

akkor **9.9** alapján $(M, E, \nabla, -\frac{1}{2}\sigma)$ Wagner-sokaság.

Elegendőség. Most tegyük fel, hogy (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság. Legyen $\overline{E} := (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $\sigma := -2\alpha$, $\overline{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}d\sigma \otimes \text{id}$.

Ekkor az $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ Ichijyō-struktúra konform ekvivalens (M, E, ∇) -vel, sőt $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \alpha + \frac{1}{2}\sigma)$ Wagner-sokaság. Azonban $\alpha + \frac{1}{2}\sigma = \alpha - \alpha = 0$, következésképpen $\overline{\nabla}$ torziója eltűnik és így $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ Berwald-sokaság. $\square$

ÖSSZEFOGLALÓ

Az alábbiakban fejezetről-fejezetre haladva tekintjük át a disszertáció tartalmát.

1. JELÖLÉSEK ÉS NÉHÁNY ALAPVETŐ TÉNY

Ebben a fejezetben rögzítjük jelöléseinket, megállapodásainkat és emlékeztetünk néhány olyan alapvető fogalomra és tényre, amelyekre a továbbiakban végig támaszkodni fogunk.

2. EHRESMANN-KONNEXIÓK

Ehresmann-konnexión olyan $\overset{\circ}{T}M$ fölött sima h vektorértékű 1-formát értünk, amely projektor ($h^2 = h$) és amelynek nulltere a vertikális résznyaláb. $v := 1_{\mathfrak{X}(TM)} - h$ a h hoz tartozó *vertikális projektor*.

Egy h Ehresmann-konnexióhoz a következő vektorértékű formákat csatoljuk:

$$\begin{aligned} H &:= [h, C] && - h \text{ tenziója;} \\ t &:= [J, h] && - h \text{ gyenge torziója;} \\ T &:= i_S t + H && - h \text{ erős torziója } (S \text{ tetszőleges semispray);} \\ \Omega &:= -\frac{1}{2}[h, h] && - h \text{ görbületi tenzora.} \end{aligned}$$

(A zárójel mindenütt Frölicher-Nijenhuis zárójelet jelent.) Azt mondjuk, hogy h *homogén*, ha a tenziója eltűnik.

TÉNY (Crampin-Grifone tétel).

- (i) Amennyiben h Ehresmann-konnexió és $\tilde{S}$ tetszőleges semispray az M sokaság fölött, úgy $S := h\tilde{S}$ szintén semispray, amely független $\tilde{S}$ megválasztásától és eleget tesz a $h[C, S] = S$ összefüggésnek. Ezt a semisprayt a h -hoz tartozó vagy h -hoz csatolt semispraynek mondjuk.
- (ii) Ha egy $S: TM \rightarrow TTM$ semispray van adva, akkor

$$h := \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S]) \tag{1}$$

Ehresmann-konnexió, amelyet az S által származtatott Ehresmann-konnexiónak hívunk. Az így konstruált Ehresmann-konnexió (gyenge)

torziója eltűnik a hozzá tartozó semispray pedig $\frac{1}{2}(S + [C, S])$. Amennyiben S spray, úgy h eleget tesz a homogenitási feltételnek és a hozzátartozó semispray éppen az S spray.

- (iii) Egy Ehresmann-konnexió akkor és csak akkor származik semisprayból ((1) szerinti értelemben) ha gyenge torziója eltűnik.

Egy h Ehresmann-konnexió birtokában az $F := h[S, h] - J$ formulával majdnem komplex struktúrát adunk meg, ahol S a h -hoz tartozó semispray.

Tény. Tegyük fel hogy $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ kovariáns deriválás az M sokaságon. Ekkor ∇ egy mindenütt sima homogén h_∇ Ehresmann-konnexiót, azaz lineáris konnexit szarmaztat M -en. Megfordítva, minden minden sima homogén Ehresmann-konnexió meghatároz egy kovariáns deriválást M -en.

2.9 Lemma. Legyen h homogén Ehresmann-konnexió az M sokaságon és jelölje S a h -hoz csatolt semisprayt. Amennyiben $\tilde{h}$ az S által a (1)- szerint származtatott Ehresmann-konnexió, úgy h és $\tilde{h}$ kapcsolatát a

$$\tilde{h} = h - \frac{1}{2}t^\circ$$

összefüggés adja, ahol t a h gyenge torziója, t° pedig t potenciálja.

3. FINSLER-KONNEXIÓK

Egy M sokaságon adott *Finsler-konnexión* olyan (D, h) párt értünk, ahol D kovariáns deriválás a TM vagy a $\mathring{TM}$ sokaságon, h pedig Ehresmann-konnexió M -en, és teljesülnek a következő feltételek:

$$Dh = 0 \quad - \quad "D \text{ redukálható}"$$

$$DF = 0 \quad - \quad "D \text{ majdnem komplex}"$$

(F a h -hoz tartozó majdnem komplex struktúra). Ha (D, h) Finsler-konnexió, akkor azt mondjuk, hogy a

$$h^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(hX) = D_{hX}C$$

leképezés a Finsler-konnexió *h-deflexiója*.

Legyen (D, h) Finsler-konnexió az M sokaságon, és tekintsük a D_j^i prolongált operátort. Ha

$$\tilde{D} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \times \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \mapsto \tilde{D}_X Y := D_{hX}Y + D_{vX}^i Y,$$

akkor $(\tilde{D}, h)$ szintén Finsler-konnexió, amelyet a (D, h) Finsler-konnexióhoz csatoltunk nevezünk. A 3.6 lemmában megmutatjuk, hogy $(\tilde{D}, h)$ vegyes görbületi tenzorára érvényes a következő összefüggés:

$$\tilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, D_{X^h}Z^v]Y^c; \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Egy (D, h) Finsler konnexiót *horizontálisan lifteltnek* nevezünk, ha létezik olyan ∇ kovariáns derivált az M sokaságon, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$D_{X^h}Y^v = (\nabla_X Y)^v.$$

Ekkor ∇ -t a (D, h) Finsler-konnexióhoz tartozó *bázikus derivált*nak mondjuk.

3.9 Lemma. Egy (D, h) Finsler-konnexió akkor és csak akkor horizontálisan liftelt, ha a $(\tilde{D}, h)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.

3.11 Lemma. Tegyük fel, hogy (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió ∇ bázikus deriválttal, és legyen h_∇ a ∇ által származtatott lineáris konnexió. Ekkor

$$D_{X^h}C = X^h - X^{h_\nabla} \quad (X \in \mathfrak{X}(M)),$$

következésképpen h_∇ akkor és csak akkor egyezik meg a h Ehresmann-konnexióval, ha a (D, h) Finsler-konnexió h -deflexiója eltűnik.

3.14 Állítás. Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és tegyük fel, hogy h lineáris konnexió. Ebben az esetben (D, h) h -deflexiója akkor és csak akkor tűnik el, ha $D(v)hv$ torziója eltűnik.

3.15 Állítás. Legyen (D, h) horizontálisan liftelt Finsler-konnexió és ∇ a hozzá tartozó bázikus derivált. Tegyük fel, hogy h az egész érintőtéren sima Ehresmann-konnexió. Ebben az esetben (D, h) h -deflexiója akkor és csak akkor esik egybe h tenziójával, ha $D(v)hv$ torziója eltűnik.

4. EHRESMANN-KONNEXIÓK FINSLER-SOKASÁGOKON

Legyen adva egy $E: TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyet a továbbiakban *energiafüggvénynek* mondunk. Az (M, E) párt (vagy egyszerűen M -et) *Finsler-sokaságnak* nevezzük, ha teljesülnek a következők:

(F1) bármely $a \in \mathring{TM}$ esetén $E(a) > 0$; $E(0) = 0$;

(F2) E C^1 osztályú TM -en, sima $\mathring{TM}$ -en;

(F3) $CE = 2E$, azaz E másodfokú pozitív homogén;

(F4) az $\omega := dd_J E$ *fundamentális forma* nemelfajuló.

Tény. Minden Finsler-sokaságon létezik pontosan egy olyan $S_0: TM \rightarrow TTM$ spray, amelyet $\dot{T}M$ -en egyértelműen meghatároz az

$$i_{S_0}\omega = -dE$$

formula, s amely kiterjeszthető C^1 osztályú $S_0: TM \rightarrow TTM$ leképezéssé úgy, hogy $S_0(0) = 0$ teljesüljön. Ezt a sprayt a Finsler-sokaság *kanonikus spray*-jének nevezzük.

Egy (M, E) Finsler-sokaságon adott h Ehresmann-konnexiót *konzervatívnak* mondunk, ha $d_h E = 0$.

4.8 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság, h konzervatív Ehresmann-konnexió, S pedig a hozzá csatolt semispray. Ekkor S előállítható az

$$S = S_0 + (d_{t^\circ} E)^\#$$

formula alapján, ahol S_0 a Finsler-sokaság kanonikus sprayje és t° a h Ehresmann-konnexió gyenge torziójának a potenciálja.

4.9 Tétel. Legyenek h és $\tilde{h}$ konzervatív Ehresmann-konnexiók az (M, E) Finsler-sokaságon. Amennyiben h és $\tilde{h}$ erős torziója megegyezik, úgy $h = \tilde{h}$.

Tény (*a Finsler-geometria alaplemmája*). Ha (M, E) Finsler sokaság, akkor létezik egy és csak egy olyan h_0 Ehresmann-konnexió, amely konzervatív és amelynek erős torziója eltűnik. A szóbanforgó Ehresmann-konnexiót a Finsler-sokaság *kanonikus konnexiójának* vagy *Berwald-konnexiójának* nevezzük. Explicit:

$$h_0 = \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]),$$

ahol S_0 a kanonikus spray.

4.11 Állítás. Tegyük fel, hogy h homogén, konzervatív Ehresmann-konnexió egy (M, E) Finsler-sokaságon. Ekkor a h_0 kanonikus konnexió segítségével h előállítható a

$$h = h_0 + \frac{1}{2} t^\circ + \frac{1}{2} [J, (d_{t^\circ} E)^\#]$$

alakban.

5. AZ ICHIJYŌ-KONNEXIÓ

5.2 Tétel. Tegyük fel, hogy (M, E) Finsler-sokaság, ∇ pedig kovariáns deriválás az M sokaságon. Legyen h_∇ a ∇ -ból származó Ehresmann-konnexió, és g jelentse a vertikális metrika prolongációját h_∇ mentén. Létezik egy és csak egy olyan $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Finsler-konnexió M -en, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- (I1) $\overset{\nabla}{D}$ v -metrikus, azaz, $\overset{\nabla}{D}_v g = 0$;
- (I2) $\overset{\nabla}{D}$ v -vertikális torziója eltűnik;
- (I3) a $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ csatolt Finsler-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik;
- (I4) $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ h -deflexiója eltűnik.

A $\overset{\nabla}{D}$ szerinti kovariáns deriváltak a következő képletek szerint számíthatók ki:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{D}_{JX} JY &= J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y), & \overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} JY &= v_\nabla[h_\nabla X, JY], \\ \overset{\nabla}{D}_{JX} h_\nabla Y &= h_\nabla[JX, Y] + F_\nabla \mathcal{C}(X, Y), & \overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} h_\nabla Y &= h_\nabla F_\nabla[h_\nabla X, JY] \end{aligned}$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$.

5.4 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság, ∇ kovariáns derivált M -en, és tekintsük a ∇ által indukált $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ Ichijyō-konnexiót. Ekkor

$$(\overset{\nabla}{D}_{JX} \mathcal{C})(Y, Z) = (\overset{\nabla}{D}_{JY} \mathcal{C})(X, Z),$$

ahol X, Y, Z tetszőleges vektormezők $\overset{\circ}{T}M$ -en.

Az Ichijyō-konnexió parciális görbületei

horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}(X, Y)Z = [J, \Omega_\nabla(X, Y)]h_\nabla Z + \mathcal{C}(F\Omega_\nabla(X, Y), Z)$
vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}(X, Y)Z = (\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} \mathcal{C})(h_\nabla Y, h_\nabla Z)$
vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{Q}}(X, Y)Z = \mathcal{C}(F\mathcal{C}(X, Z), Y) - \mathcal{C}(X, F\mathcal{C}(Y, Z))$

Az Ichijyō-konnexió parciális torziói

h – horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{h\nabla}$
h – vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{B}}(X^{h\nabla}, Y^v) = -F_{\nabla}\mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – horizontális	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}^1(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – vegyes	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}^1 = 0$
v – vertikális	$\overset{\nabla}{\mathbb{S}}^1 = 0$

5.7, 5.8 és 5.9 Következmények.

Egy Ichijyō-konnexió horizontális görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha a ∇ bázikus derivált görbülete, vagy – ami ezzel ekvivalens – a h_{∇} Ehresmann-konnexió görbületi tenzora eltűnik.

Egy Ichijyō-konnexió vegyes görbülete akkor és csak akkor tűnik el, ha az első Cartan tenzor $\overset{\nabla}{D}$ szerinti h -kovariáns deriváltja eltűnik.

Egy Ichijyō-konnexió h -horizontális torziójának eltűnése ekvivalens ∇ torziótenzorának (vagy h_{∇} gyenge torziójának) eltűnésével.

6. ÁLTALÁNOSÍTOTT BERWALD-SOKASÁGOK

Legyen (M, E) Finsler-sokaság és ∇ kovariáns derivált M -en. Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) hármas *általánosított Berwald-sokaság*, ha a h_{∇} Ehresmann-konnexió konzervatív, azaz $d_{h_{\nabla}}E = 0$. Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaságot *Berwald-sokaságnak* nevezünk, ha ∇ szimmetrikus kovariáns derivált. Amennyiben ráadásul, ∇ görbületi tenzora is zérus, úgy *lokálisan Minkowski sokaságról* beszélünk.

Megjegyzés. Egyszerűen belátható, hogy ha (M, E, ∇) Berwald-sokaság, akkor a ∇ -ból származó h_{∇} Ehresmann-konnexió éppen a sokaság Berwald-konnexiója, ennél fogva a ∇ kovariáns derivált egyértelmű. Ekkor ezt a Berwald-sokaság kovariáns deriváltjának nevezzük, és (M, E, ∇) helyett egyszerűen csak (M, E) -t írunk.

6.3 Következmény. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor

$$S_{\nabla} = S_0 + (d_{t_{\nabla}^c} E)^{\#}, \quad h_{\nabla} = h_0 + \frac{1}{2}t_{\nabla}^c + \frac{1}{2} \left[J, (d_{t_{\nabla}^c} E)^{\#} \right].$$

6.4 Tétel. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, E, \bar{\nabla})$ általánosított Berwald-sokaságok. A ∇ és $\bar{\nabla}$ kovariáns deriváltak akkor és csak akkor egyeznek meg, ha a torziójuk egyenlő.

6.5 Állítás. Legyen (M, E) Finsler-sokaság és tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált M -en. A következő állítások ekvivalensek:

- (a) (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság;
- (b) a h_{∇} -hoz tartozó $\mathcal{C}'_{\nabla}$ második Cartan tenzor eltűnik;
- (c) a $(\bar{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexió h_{∇} -metrikus, azaz $\bar{D}_{h_{\nabla}} g = 0$.

6.6 Állítás. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor a $(\bar{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexió vegyes görbületi tenzora eltűnik.

6.9 Tétel. Egy Finsler-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha a klasszikus Hashiguchi-konnexió Ichijyō-konnexió.

6.10 Állítás. Egy (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság akkor és csak akkor Berwald-sokaság, ha $(d_{t_{\nabla}^0} E)^{\#}$ kvadratikus vektormező.

6.12 Állítás. Legyen (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha a ∇ -hoz tartozó S_{∇} spray projektíven ekvivalens az S_0 kanonikus spray-vel, akkor $S_{\nabla} = S_0$, következésképpen (M, E) Berwald-sokaság.

6.13 Tétel. Az (M, E) Finsler-sokaság akkor és csak akkor lokálisan Minkowski-sokaság, ha létezik olyan torziómentes, eltűnő görbületű ∇ kovariáns derivált M -en, hogy a $(\bar{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexió “ h_{∇} -metrikus”.

7. WAGNER-ICHIJYŌ-KONNEXIÓ ÉS WAGNER-SOKASÁGOK

Legyen ∇ kovariáns derivált az M sokaságon. A $(\bar{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ hármast (a ∇ által indukált) *Wagner-Ichijyō-konnexiónak* nevezzük, ha $(\bar{D}, h_{\nabla})$ Ichijyō-konnexió, α sima függvény M -en és a $\bar{D}$ kovariáns deriválás $\bar{\mathbb{A}}$ h -horizontális torziója eleget tesz az

$$\bar{\mathbb{A}} = d\alpha^{\vee} \wedge h_{\nabla} := d\alpha^{\vee} \otimes h_{\nabla} - h_{\nabla} \otimes d\alpha^{\vee}$$

összefüggésnek.

7.2 Állítás. Legyen $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ Wagner-Ichijyō-konnexió az M sokaságon. Ekkor

$$t_{\nabla} = d\alpha^{\vee} \wedge J := d\alpha^{\vee} \otimes J - J \otimes d\alpha^{\vee}, \quad t_{\nabla}^{\circ} = \alpha^c J - d\alpha^{\vee} \otimes C,$$

$$\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X.$$

Az (M, E, ∇, α) négyest *Wagner-sokaságnak* nevezzük, ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, α sima függvény M -en, és teljesül a

$$\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

reláció.

Megjegyzés. Az eddigiek alapján közvetlenül adódik, hogy ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a ∇ által indukált Ichijyō-konnexió Wagner-Ichijyō-konnexió.

7.5 Tétel Legyen (M, E) Finsler-sokaság. Tegyük fel, hogy ∇ kovariáns derivált, α pedig egy sima függvény M -en. A következő állítások ekvivalensek:

- (i) (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság.
- (ii) A ∇ által indukált $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ Wagner-Ichijyō-konnexió h_{∇} -metrikus.
- (iii) A h_{∇} Ehresmann-konnexió a

$$h_{\nabla} = h_0 + \alpha^c J - E[J, \text{grad } \alpha^{\vee}] - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^{\vee}$$

alakban állítható elő.

7.6 Következmény. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor a h_{∇} -hoz csatolt S_{∇} spray és az S_0 kanonikus spray kapcsolatát a következő reláció adja:

$$S_{\nabla} = S_0 + \alpha^c C - 2E \text{ grad } \alpha^{\vee}.$$

8. PÉLDA: 1-FORMA FINSLER SOKASÁGOK

Tegyük fel, hogy M *paralelizálható* sokaság, és legyen $(X_i)_{i=1}^n$ ($X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i \in \{1, \dots, n\}$) *paralelizációja* M -nek. Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizációhoz duális 1-formák $(\lambda^i)_{i=1}^n$ sorozatát. Vezessük be a

$$\tilde{\lambda} := (\tilde{\lambda}^1, \dots, \tilde{\lambda}^n) : TM \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \tilde{\lambda}(v) = (\tilde{\lambda}^1(v), \dots, \tilde{\lambda}^n(v))$$

leképezést, ahol

$$\tilde{\lambda}^i : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \tilde{\lambda}^i(v) := \lambda_{\pi(v)}^i(v) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Finsler-Minkowski norma, és legyen

$$\mathcal{L} := f \circ \tilde{\lambda}, \quad E := \frac{1}{2} \mathcal{L}^2.$$

Ekkor $\mathcal{L}$ Finsler-alapfüggvény, (M, E) pedig Finsler-sokaság. Az így definiált $\mathcal{L}$ alapfüggvényt *1-forma Finsler-függvénynek*, az (M, E) Finsler-sokaságot *1-forma Finsler-sokaságnak* nevezzük.

8.4 Állítás. Legyen (M, E) 1-forma metrikájú paralelizálható Finsler-sokaság. Tekintsük az $(X_i)_{i=1}^n$ paralelizáció által meghatározott ∇ kovariáns deriváltat, legyen továbbá h_∇ a ∇ -ból származó Ehresmann-konnexió. Ekkor (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság. Ha ráadásul ∇ torziótenzora eltűnik, akkor (M, E) lokálisan Minkowski-sokaság.

9. KONFORM EKVIVALENS ICHIJYŌ-STRUKTÚRÁK

Az (M, E) és $(M, \bar{E})$ Finsler sokaságokat *konform ekvivalenseknek* nevezzük, ha létezik olyan $\varphi : TM \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív, sima függvény, hogy az energiafüggvényeikre fennáll az $\bar{E} = \varphi E$ összefüggés. Jól ismert tény, hogy φ vertikális lift, így mindig felírható $\exp \circ \sigma^\vee$, $\sigma \in C^\infty(M)$ alakban.

Az (M, E, ∇) hármast *Ichijyō-struktúrának* hívjuk, ha (M, E) Finsler-sokaság, amely el van látva a (D, h_∇) Ichijyō-konnexióval.

9.4 Azt mondjuk, hogy az (M, E, ∇) és $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ Ichijyō-struktúrák *konform ekvivalensek*, ha teljesülnek a következő feltételek:

(i) (M, E) és $(M, \bar{E})$ konform ekvivalens Finsler-sokaságok, azaz $\bar{E} = (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$,

(ii) $\bar{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2} d\sigma \otimes \text{id}$.

9.5 Állítás. Megtartva **9.4** feltételeit és jelöléseit, érvényesek a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} h_{\bar{\nabla}} &= h_\nabla - \frac{1}{2} d\sigma^\vee \otimes C, & S_{\bar{\nabla}} &= S_\nabla - \frac{1}{2} \sigma^c C; \\ \bar{D}_{JX} JY &= D_{JX} JY, & \bar{D}_{h_{\bar{\nabla}} X} JY &= D_{h_\nabla X} JY - \frac{1}{2} d\sigma^\vee(X)[C, JY]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{\overline{\nabla}} &= \Omega_{\nabla}, & t_{\overline{\nabla}} &= t_{\nabla} + \frac{1}{2}(d\sigma^c \circ J) \wedge J; \\ H_{\overline{\nabla}} &= H_{\nabla} = 0, & \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}} &= \overset{\circ}{t}_{\nabla} + \frac{1}{2}(\sigma^c J - (d\sigma^c \circ J) \otimes C).\end{aligned}$$

9.6 Következmény. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák; legyen $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^v)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (i) σ konstans függvény, és így a konform változtatás hasonlóság.
- (ii) $h_{\nabla} = h_{\overline{\nabla}}$. (iii) $S_{\nabla} = S_{\overline{\nabla}}$. (iv) $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$.

9.7 Tétel. Konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák Ichijyō-konnexióinak partiális görbületei megegyeznek.

Alkalmazások általánosított Berwald-sokaságokra

9.8 Állítás. Tegyük fel, hogy (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák. Ha (M, E, ∇) általánosított Berwald-sokaság, akkor $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ szintén általánosított Berwald-sokaság.

9.9 Következmény. Legyenek (M, E, ∇) és $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ konform ekvivalens Ichijyō-struktúrák, ahol $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^v)E$, $(\sigma \in C^\infty(M))$. Ha (M, E, ∇, α) Wagner-sokaság, akkor $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$, $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma$ szintén Wagner-sokaság.

9.10 Következmény (M. HASHIGUCHI – Y. ICHIJYŌ). Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy egy Finsler-sokaság konform ekvivalens legyen egy Berwald-sokasággal az, hogy a Finsler-sokaság Wagner-sokaság legyen.

SUMMARY

In the following we present a brief survey of chapter contents.

1. NOTATION AND SOME BASIC FACTS

The aim of this introductory chapter is to fix our notation, conventions, and to recall some basic concepts and facts which will be used throughout the Thesis.

2. EHRESMANN CONNECTIONS

Consider the tangent bundle $\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM$, and let VTM be its vertical subbundle. By an *Ehresmann connection* over M we mean a mapping $h: TTM \rightarrow TM$ satisfying the following conditions:

- (i) h is fibre-preserving and fibrewise linear;
- (ii) h is smooth on $T\mathring{M}$;
- (iii) $h^2 = h$, $\text{Ker}(h) = VTM$;
- (iv) $h \circ \sigma_* = \sigma_*$, where $\sigma \in \mathfrak{X}(TM)$ is the zero vector field and $*$ denotes its derivate.

Then h can be freely interpreted as a $C^\infty(\mathring{TM})$ -linear endomorphism of $\mathfrak{X}(\mathring{TM})$, and we use this interpretation without any comment.

The *vertical projection* belonging to h is $v := 1_{TTM} - h$, which can also be regarded as a $C^\infty(\mathring{TM})$ -linear endomorphism of $\mathfrak{X}(\mathring{TM})$.

In the spirit of GRIFONE's theory of connections, we attach to an Ehresmann connection h the following data:

$$\begin{array}{ll}
 H := [h, C] & - \text{ tension of } h; \\
 t := [J, h] & - \text{ weak torsion of } h; \\
 T := i_S t + H & - \text{ strong torsion of } h \text{ (} S \text{ is an arbitrary semispray);} \\
 \Omega := -\frac{1}{2}[h, h] & - \text{ curvature of } h.
 \end{array}$$

(Brackets mean here Frölicher- Nijenhuis brackets.) A horizontal endomorphism is said to be *homogeneous*, if its tension vanishes.

The fundamental relation between Ehresmann connections and semisprays was discovered, independently, by M. CRAMPIN and J. GRIFONE. Their main result can be summarized as follows.

- (i) Let an Ehresmann connection h be given on the manifold M . If $\tilde{S}$ is an arbitrary semispray on M , then $S := h\tilde{S}$ is also a semispray on M which does not depend on the choice of $\tilde{S}$ and satisfies the relation $h[C, S] = S$. We say that S is the *semispray associated to h* .
- (ii) Any semispray $S: TM \rightarrow TTM$ generates in a canonical way an Ehresmann connection which be given by the formula

$$h := \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S]). \quad (1)$$

The weak torsion of h vanishes and the semispray associated to h is $\frac{1}{2}(S + [C, S])$. If, in addition, S is a spray, then h is homogeneous and its associated semispray is just the starting spray S .

- (iii) An Ehresmann connection arises from a semispray in the above manner if and only if its weak torsion vanishes.

Any covariant derivative ∇ on the manifold M determines a homogeneous, everywhere smooth Ehresmann connection h_∇ .

2.9 Lemma Suppose that h is a homogeneous Ehresmann connection on the manifold M , and let S be the semispray associated with h . If $\tilde{h}$ is the Ehresmann connection determined by S according to (1), then h and $\tilde{h}$ are related by

$$\tilde{h} = h - \frac{1}{2}t^\circ,$$

where t is the weak torsion of h , and t° is its potential.

3. FINSLER CONNECTIONS

A pair (D, h) is said to be *Finsler connection* on the manifold M , if D is a covariant derivative on the tangent manifold TM (or on the slit manifold $\dot{TM}$), h is an Ehresmann connection on M , and the following conditions are satisfied:

- (i) $Dh = 0$ (' D is reducible'),
- (ii) $DF = 0$ (' D is almost complex'),

where $F := h[S, h] - J$ (S is the semispray associated to h).

The h -deflection of (D, h) is the mapping.

$$h^*(DC) : X \in \mathfrak{X}(TM) \mapsto DC(hX) = D_{hX}C.$$

Let (D, h) be a Finsler connection on the manifold M , and let us consider the extended operator D_j^i . If

$$\tilde{D} : (X, Y) \in \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \times \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \mapsto \tilde{D}_X Y := D_{hX}Y + D_{vX}^i Y,$$

then $(\tilde{D}, h)$ is also a Finsler connection, called the *associated Finsler connection* to (D, h) . For the mixed curvature $\tilde{\mathbb{P}}$ of $(\tilde{D}, h)$ we have the expression

$$\tilde{\mathbb{P}}(X^c, Y^c)Z^c = -[J, D_{X^h}Z^v]Y^c \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)).$$

A Finsler connection (D, h) is said to be an *h -basic Finsler connection* if there exists a covariant derivative ∇ on the manifold M such that for any vector fields X, Y on M , we have

$$D_{X^h}Y^v = (\nabla_X Y)^v.$$

Then ∇ is called the *base covariant derivative* belonging to (D, h) .

3.9 Lemma. A Finsler connection (D, h) is h -basic if and only if the mixed curvature of the associated Finsler connection $(\tilde{D}, h)$ vanishes.

3.11 Lemma Suppose that (D, h) is an h -basic Finsler connection with the base connection ∇ , and let h_∇ be the Ehresmann connection induced by ∇ . Then

$$D_{X^h}C = X^h - X^{h_\nabla} \quad (X \in \mathfrak{X}(M)),$$

therefore h_∇ coincides with h if and only if the h -deflection of (D, h) vanishes.

3.14 Proposition Let (D, h) be an h -basic Finsler connection and suppose that the Ehresmann connection h is homogeneous. Then the h -deflection of (D, h) vanishes if and only if the v -mixed torsion of D vanishes.

3.15 Proposition Let (D, h) be an h -basic Finsler connection with the base covariant derivative ∇ . Suppose that the Ehresmann connection h is smooth on the whole tangent manifold. Then the h -deflection of (D, h) coincides with the tension of h if and only if the v -mixed torsion of D vanishes.

4. EHRESMANN CONNECTIONS ON FINSLER MANIFOLDS

We start this chapter with the definition of Finsler manifolds and then we introduce the Riemann-Finsler metric and the first and second Cartan tensor.

On any Finsler manifold (M, E) there is a spray $S_0: TM \rightarrow TTM$, uniquely determined on $\mathring{TM}$ by the relation

$$i_{S_0} dd_J E = -dE$$

and prolonged to a C^1 -mapping of TM such that $S_0(0) = 0$. This spray is called the *canonical spray* of the Finsler manifold.

An Ehresmann connection on (M, E) is said to be conservative, if $d_h E = 0$.

4.8 Proposition. Suppose that h is a conservative Ehresmann connection on the Finsler manifold (M, E) with the associated semispray S . Then S can be represented in the form

$$S = S_0 + (d_{t^\circ} E)^\# ,$$

where S_0 is the canonical spray of (M, E) and t° is the potential of the weak torsion of h .

4.9 Theorem. Suppose h and $\tilde{h}$ are conservative Ehresmann connections on the Finsler manifold (M, E) . If h and $\tilde{h}$ have the same strong torsion, then $h = \tilde{h}$.

The Berwald connection. If (M, E) is a Finsler manifold then there exists a unique conservative Ehresmann connection h_0 on M such that the strong torsion of h_0 vanishes. This fundamental result is due to J. GRIFONE. The Ehresmann connection characterized by the above conditions is called the *Berwald connection* of the Finsler manifold. It can be given explicitly by the formula

$$h_0 = \frac{1}{2} (1_{\mathfrak{X}(TM)} + [J, S_0]) ,$$

where S_0 is the canonical spray of (M, E) .

4.11 Proposition. Any homogeneous, conservative Ehresmann connection h on a Finsler manifold (M, E) can be expressed with the help of the Berwald connection h_0 as follows:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} t^\circ + \frac{1}{2} [J, (d_{t^\circ} E)^\#] .$$

5. THE ICHIJYŌ CONNECTION

5.2 Theorem. Suppose that (M, E) is a Finsler manifold and ∇ is a covariant derivative on M . Let h_∇ be the Ehresmann connection induced by ∇ , and consider the prolongation g of the vertical metric along h_∇ . There exists a unique Finsler connection $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ on M such that

- (I1) $\overset{\nabla}{D}$ is v -metrical, i.e., $\overset{\nabla}{D}_v g = 0$;
- (I2) the v -vertical torsion of $\overset{\nabla}{D}$ vanishes;
- (I3) the mixed curvature of the associated Finsler connection vanishes;
- (I4) the h -deflection of $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ vanishes.

The covariant derivatives with respect to $\overset{\nabla}{D}$ can be calculated by the following formulas:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{D}_{JX} JY &= J[JX, Y] + \mathcal{C}(X, Y), & \overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} JY &= v_\nabla[h_\nabla X, JY], \\ \overset{\nabla}{D}_{JX} h_\nabla Y &= h_\nabla[JX, Y] + F_\nabla \mathcal{C}(X, Y), & \overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} h_\nabla Y &= h_\nabla F_\nabla[h_\nabla X, JY] \end{aligned}$$

$(X, Y \in \mathfrak{X}(\overset{\circ}{T}M))$.

5.4 Proposition. Let (M, E) be a Finsler manifold, ∇ a covariant derivative on M , and consider the Ichijyō connection $(\overset{\nabla}{D}, h_\nabla)$ induced by ∇ . Then

$$(\overset{\nabla}{D}_{JX} \mathcal{C})(Y, Z) = (\overset{\nabla}{D}_{JY} \mathcal{C})(X, Z),$$

where X, Y, Z are any vector fields in $\overset{\circ}{T}M$.

The partial curvatures of an Ichijyō connection

horizontal	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}(X, Y)Z = [J, \Omega_\nabla(X, Y)]h_\nabla Z + \mathcal{C}(F\Omega_\nabla(X, Y), Z)$
mixed	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}(X, Y)Z = (\overset{\nabla}{D}_{h_\nabla X} \mathcal{C})(h_\nabla Y, h_\nabla Z)$
vertical	$\overset{\nabla}{\mathbb{Q}}(X, Y)Z = \mathcal{C}(FC(X, Z), Y) - \mathcal{C}(X, FC(Y, Z))$

The partial torsions of an Ichijyō connection

h – horizontal	$\overset{\nabla}{\mathbb{A}}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = (\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y))^{h\nabla}$
h – mixed	$\overset{\nabla}{\mathbb{B}}(X^{h\nabla}, Y^{\nabla}) = -F_{\nabla}\mathcal{C}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – horizontal	$\overset{\nabla}{\mathbb{R}}^1(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla}) = \Omega_{\nabla}(X^{h\nabla}, Y^{h\nabla})$
v – mixed	$\overset{\nabla}{\mathbb{P}}^1 = 0$
v – vertical	$\overset{\nabla}{\mathbb{S}}^1 = 0$

5.7 Corollary. The horizontal curvature of an Ichijyō connection vanishes if and only if the curvature of the base covariant derivative ∇ , or – what is essentially the same – the curvature of h_{∇} – vanishes.

5.8 Corollary. The mixed curvature of an Ichijyō connection vanishes if and only if the h -covariant derivative of the first Cartan tensor with respect to $\overset{\nabla}{D}$ vanishes.

5.9 Corollary. The h -horizontal torsion of an Ichijyō connection $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla})$ and the torsion tensor of ∇ (or the weak torsion of h_{∇}) vanish at the same time.

6. GENERALIZED BERWALD MANIFOLDS

Suppose that (M, E) is a Finsler manifold and let ∇ be a covariant derivative on M . The triplet (M, E, ∇) is said to be a *generalized Berwald manifold* if the Ehresmann connection h_{∇} is conservative, i.e., $d_{h_{\nabla}}E = 0$. A generalized Berwald manifold (M, E, ∇) is called a *Berwald manifold* if ∇ is a torsion-free covariant derivative. If, in addition, ∇ is flat, then we speak of a *locally Minkowski* Finsler manifold.

Remark. It can easily be seen that in the particular case of Berwald manifolds the Ehresmann connection h_{∇} coincides with the Berwald connection, hence the covariant derivative ∇ is unique. Then we speak of *the* covariant derivative of the Berwald manifold and write (M, E) rather than (M, E, ∇) .

6.3 Corollary. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then we have

$$S_{\nabla} = S_0 + (d_{t_{\nabla}^{\circ}}E)^{\#}, \quad h_{\nabla} = h_0 + \frac{1}{2}t_{\nabla}^{\circ} + \frac{1}{2}\left[J, (d_{t_{\nabla}^{\circ}}E)^{\#}\right].$$

6.4 Theorem. Suppose that (M, E, ∇) and $(M, E, \bar{\nabla})$ are generalized Berwald manifolds. The covariant derivatives ∇ and $\bar{\nabla}$ are equal if and only if they have same torsion tensor field.

6.5 Proposition. Let (M, E) be a Finsler manifold and suppose that ∇ is a covariant derivative on M . The following conditions are equivalent:

- (a) (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold;
- (b) the second Cartan tensor $\mathcal{C}'_{\nabla}$ belonging to h_{∇} vanishes;
- (c) the Ichijyō connection is h_{∇} -metrical, i.e., $\bar{\nabla}_{h_{\nabla}} g = 0$.

6.6 Proposition. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then the mixed curvature of the Ichijyō connection $(\bar{\nabla}, h_{\nabla})$ vanishes.

6.9 Theorem A Finsler manifold is a Berwald manifold if and only if its Hashiguchi connection is an Ichijyō connection.

6.10 Proposition. A generalized Berwald manifold (M, E, ∇) reduces to a Berwald manifold (M, E) , if and only, if the vector field $(d_{t^{\circ}} E)^{\#}$ is quadratic.

6.12 Proposition Let (M, E, ∇) be a generalized Berwald manifold. If the spray S_{∇} arising from ∇ is projectively equivalent to the canonical spray S_0 of (M, E) , then $S_{\nabla} = S_0$ and, consequently, (M, E) is a Berwald manifold.

6.13 Theorem. A Finsler manifold (M, E) is a locally Minkowski manifold if and only if there exists a torsion-free, flat covariant derivative ∇ on M such that the Ichijyō connection $(\bar{\nabla}, h_{\nabla})$ is ' h_{∇} -metrical', i.e., $\bar{\nabla}_{h_{\nabla}} g = 0$.

7. WAGNER-ICHIJYŌ CONNECTIONS AND WAGNER MANIFOLDS

Let ∇ be a covariant derivative on the manifold M . A triplet $(\bar{\nabla}, h_{\nabla}, \alpha)$ is said to be a *Wagner-Ichijyō connection* (induced by ∇) if $(\bar{\nabla}, h_{\nabla})$ is an Ichijyō connection, α is a smooth function on M and the h -horizontal torsion $\bar{\mathbb{A}}^{\nabla}$ of $\bar{\nabla}$ has the following form:

$$\bar{\mathbb{A}}^{\nabla} = d\alpha^{\vee} \wedge h_{\nabla} := d\alpha^{\vee} \otimes h_{\nabla} - h_{\nabla} \otimes d\alpha^{\vee}.$$

7.2 Proposition If $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ be a Wagner-Ichijyō connection on the manifold M , then we have the following relations:

$$\begin{aligned} t_{\nabla} &= d\alpha^{\vee} \wedge J := d\alpha^{\vee} \otimes J - J \otimes d\alpha^{\vee}, & t_{\nabla}^{\circ} &= \alpha^c J - d\alpha^{\vee} \otimes C, \\ \mathbb{T}_{\nabla}(X, Y) &= d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X. \end{aligned}$$

A quadruple (M, E, ∇, α) is said to be a *Wagner manifold* if (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, α is a smooth function on M , and the relation

$$\mathbb{T}_{\nabla}(X, Y) = d\alpha(X)Y - d\alpha(Y)X \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

Remark It follows immediately that for a Wagner manifold (M, E, ∇, α) the Ichijyō connection induced by ∇ is just a Wagner-Ichijyō connection.

7.5 Theorem Let (M, E) be a Finsler manifold. Suppose that ∇ is a covariant derivative and α a smooth function on M . Then the following assertions are equivalent:

- (i) (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold.
- (ii) The Wagner-Ichijyō connection $(\overset{\nabla}{D}, h_{\nabla}, \alpha)$ induced by ∇ is h_{∇} -metrical.
- (iii) The Ehresmann connection h_{∇} is of form

$$h_{\nabla} = h_0 + \alpha^c J - E[J, \text{grad } \alpha^{\vee}] - d_J E \otimes \text{grad } \alpha^{\vee}.$$

7.6 Corollary If (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold then the spray S_{∇} generated by h_{∇} and the canonical spray S_0 are related by

$$S_{\nabla} = S_0 + \alpha^c C - 2E \text{grad } \alpha^{\vee}.$$

8. EXAMPLE: FINSLER MANIFOLDS WITH 'ONE-FORM METRIC'

Suppose that M is a *parallelizable* manifold with a *parallelization* $(X_i)_{i=1}^n$; $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \leq i \leq n$. Let $(\lambda^i)_{i=1}^n$ be the coframe dual to $(X_i)_{i=1}^n$. Consider the mapping

$$\widetilde{\lambda} := (\widetilde{\lambda}^1, \dots, \widetilde{\lambda}^n) : TM \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \widetilde{\lambda}(v) = (\widetilde{\lambda}^1(v), \dots, \widetilde{\lambda}^n(v)),$$

where

$$\tilde{\lambda}^i : TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \tilde{\lambda}^i(v) := \lambda_{\pi(v)}^i(v) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Suppose that $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a Finsler-Minkowski functional, and define the functions

$$\mathcal{L} := f \circ \tilde{\lambda}, \quad E := \frac{1}{2} \mathcal{L}^2.$$

Then (M, E) is a Finsler manifold, the Finsler structure constructed in this way is said to be a *one-form Finsler structure*. Following (at least partly) the traditions, in the sequel we shall mention (M, E) as a '*Finsler manifold with one-form metric*'.

8.4 Proposition. Let (M, E) be a parallelizable Finsler manifold of one-form metric. Consider the covariant derivative ∇ determined by the parallelization $(X_i)_{i=1}^n$, and let h_∇ be the Ehresmann connection arising from ∇ . Then (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold. If, in addition, ∇ is torsion-free, then (M, E) is a locally Minkowski manifold.

9. CONFORMAL EQUIVALENCE OF ICHIJYŌ STRUCTURES

Two Finsler manifolds (M, E) and $(M, \bar{E})$ are said to be *conformally equivalent*, if their energy functions are related by $\bar{E} = \varphi E$, where $\varphi \in C^\infty(TM)$ is a positive function. It is well-known that in this case φ is a *vertical lift* (Knebelman's observation), so it can be written in the form $\exp \circ \sigma^\vee$, $\sigma \in C^\infty(M)$.

9.4 Two Ichijyō structures (M, E, ∇) and $(M, \bar{E}, \bar{\nabla})$ are said to be *conformally equivalent* if

(i) (M, E) and $(M, \bar{E})$ are conformally equivalent Finsler manifolds, i. e., $\bar{E} = (\exp \circ \sigma^\vee)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$,

(ii) $\bar{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2} d\sigma \otimes \text{id}$.

9.5 Proposition. With the hypothesis of **9.4** we have the following relations:

$$\begin{aligned} h_{\bar{\nabla}} &= h_\nabla - \frac{1}{2} d\sigma^\vee \otimes C, & S_{\bar{\nabla}} &= S_\nabla - \frac{1}{2} \sigma^c C; \\ \bar{D}_{JX} JY &= D_{JX} JY, & \bar{D}_{h_{\bar{\nabla}} X} JY &= D_{h_\nabla X} JY - \frac{1}{2} d\sigma^\vee(X)[C, JY]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{\overline{\nabla}} &= \Omega_{\nabla}, & t_{\overline{\nabla}} &= t_{\nabla} + \frac{1}{2}(d\sigma^c \circ J) \wedge J; \\
H_{\overline{\nabla}} &= H_{\nabla} = 0, & \overset{\circ}{t}_{\overline{\nabla}} &= \overset{\circ}{t}_{\nabla} + \frac{1}{2}(\sigma^c J - (d\sigma^c \circ J) \otimes C).
\end{aligned}$$

9.6 Corollary. Suppose that (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ are conformally equivalent Ichijyō structures. Let $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^v)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. Then the following assertions are equivalent:

- (i) The function σ is constant, i.e., the conformal change is homothetic.
- (ii) $h_{\nabla} = h_{\overline{\nabla}}$.
- (iii) $S_{\nabla} = S_{\overline{\nabla}}$.
- (iv) $t_{\nabla} = t_{\overline{\nabla}}$.

9.7 Theorem. Conformally equivalent Ichijyō structures have the same partial curvatures.

Applications to generalized Berwald manifolds

9.8 Proposition Suppose that (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ are conformally equivalent Ichijyō structures. If (M, E, ∇) is a generalized Berwald manifold, then $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ is also a generalized Berwald manifold.

9.9 Corollary. Let (M, E, ∇) and $(M, \overline{E}, \overline{\nabla})$ be conformally equivalent Ichijyō structures, where $\overline{E} = (\exp \circ \sigma^v)E$, $\sigma \in C^\infty(M)$. If (M, E, ∇, α) is a Wagner manifold, then $(M, \overline{E}, \overline{\nabla}, \overline{\alpha})$ is also a Wagner manifold with $\overline{\alpha} = \alpha + \frac{1}{2}\sigma$.

9.10 Corollary (Theorem of M. HASHIGUCHI and Y. ICHIJYŌ).

In order to a Finsler manifold is conformally equivalent to a Berwald manifold, it is necessary and sufficient that the Finsler manifold is a Wagner manifold.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] P. L. Antonelli, R. S. Ingarden and M. Matsumoto, *The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1993.
- [2] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold, London, 1970.
- [3] M. Crampin, *On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 178–182.
- [4] M. Crampin, *Generalized Bianchi identities for horizontal distributions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 125–132.
- [5] M. De Leon and P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- [6] A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam A **59** (1956), 338–359.
- [7] J. Grifone, *Structure presque-tangente et connexions, I*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** no. 3 (1972), 287–334.
- [8] J. Grifone, *Structure presque tangente et connexions, II*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** no. 3 (1972), 291–338.
- [9] J. Grifone and Z. Muzsnay, *Variational Principles for Second-order Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [10] M. Hashiguchi, *On conformal transformations of Finsler metrics*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1967) 25–50.
- [11] M. Hashiguchi, *On Wagner's generalized Berwald space*, J. Korean Math. Soc. **12** (1975), 51–61.
- [12] M. Hashiguchi, *Some remarks on linear Finsler connections*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys. & Chem.) **21** (1988), 25–31.
- [13] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *On conformal transformations of Wagner spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys., Chem.) **10** (1977), 19–25.
- [14] M. Hashiguchi and Y. Ichijyō, *On generalized Berwald spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math., Phys., Chem.) **15** (1982), 19–32.
- [15] Y. Ichijyō, *Finsler manifolds modeled on a Minkowski space*, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 639–652.
- [16] Y. Ichijyō, *Finsler manifolds with a Linear Connection*, J. Math. Tokushima Univ. **10** (1976), 1–11.

- [17] Y. Ichijyō, *On the Finsler Connection Associated with a Linear Connection Satisfying $P_{ikj}^h = 0$* , J. Math. Tokushima Univ. **12** (1978), 1–7.
- [18] J. Klein, *Connexions in Lagrangian dynamics*, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Suppl. n. 2 al vol. **126** (1992), 33–91.
- [19] I. Kolář, P. W. Michor and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [20] L. Kozma and L. Tamássy, *Finsler geometry without line elements faced to applications*, Rep. Math. Phys. **51** (2003), 233–250.
- [21] M. Matsumoto, *Projective Theories of Finsler Spaces*, Symp. on Finsler Geom., Asahikawa Aug. 5–8, 1987.
- [22] M. Matsumoto and H. Shimada, *On Finsler spaces with 1-form metric*, Tensor, N. S. **32** (1978), 161–169.
- [23] Z. I. Szabó, *Generalized spaces with many isometries*, Geometria Dedicata **11** (1981), 369–383.
- [24] Sz. Szakál, *On the conformal theory of Ichijyō manifolds*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Serie II, Suppl. **69** (2002), 245–254.
- [25] Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds I*, SUT Journal of Mathematics **37** (2001), No. 1, 19–41.
- [26] Sz. Szakál and J. Szilasi, *A new approach to generalized Berwald manifolds II*, Publ. Math. Debrecen **60** (2002), 429–453.
- [27] J. Szilasi, *Notable Finsler connections on a Finsler manifold*, Lecturas Matemáticas **19** (1998) 7–34.
- [28] J. Szilasi and Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Riemann-Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen **52** (1998), 167–185.
- [29] J. Szilasi and Cs. Vincze, *A new look at Finsler connections and special Finsler manifolds*, Acta Math. Acad. Paed. Nyíregyháziensis **16** (2000), 33–63, www.emis.de/journals.
- [30] J. Szilasi and L. Tamássy, *Affine Deformations of Minkowski Spaces*, Bulletin of the Transilvania University of Brasov **4** (2011), 89–96.
- [31] L. Tamássy, *Area and metrical connections in Finsler spaces*, in Finslerian Geometries (P.L. Antonelli, ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, 263–280.
- [32] L. Tamássy, *Point Finsler spaces with metric linear connections*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 643–655.
- [33] L. Tamássy and M. Matsumoto, *Direct method to characterize conformally Minkowski Finsler spaces*, Tensor, N. S. **33** (1979), 380–384.

-
- [34] Cs. Vincze, *On Wagner connections and Wagner manifolds*, Acta Math. Hungar. **89** (1–2) (2000), 111–133.
 - [35] Cs. Vincze, *An intrinsic version of Hashiguchi-Ichijyō's theorems for Wagner manifolds*, SUT Journal of Mathematics **35** (1999), No. 2, 263–270.
 - [36] V. V. Wagner, *On generalized Berwald spaces*, C. R. (Doklady), Acad. Sci. URSS (N. S.) **39** (1943), 3–5.
 - [37] K. Yano and S. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles* Marcel Dekker Inc., New York, 1973.
 - [38] K. Yano and A. Ledger, *Linear connections on tangent bundles*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 495–500.
 - [39] Nabil L. Youssef, *Semi-projective changes*, Tensor, N. S. **55** (1994), 131–141.