FÜGGVÉNYEGYENLETEK STABILITÁSA ABSZTRAKT STRUKTÚRÁKON

STABILITY OF FUNCTIONAL EQUATIONS IN ABSTRACT STRUCTURES

doktori (PhD) értekezés tézisei

Kaiser Zoltán

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2005

Bevezetés

A függvényegyenletek elméletének egyik leginkább kutatott témaköre a stabilitáselmélet, mely azt a problémát tárgyalja, hogy egy adott egyenletet "kis hibával megoldó" függvény vajon közelíthető-e a függvényegyenlet egy megoldásával. A Cauchy-egyenletre vonatkozóan ezt a kérdést először Pólya György és Szegő Gábor tette fel (és válaszolta meg) 1925-ben (lásd [PSz25]), de nagyobb érdeklődést váltott ki S. M. Ulam 1940-ben megfogalmazott, általánosabb alakú problémája (lásd [Ula60]). A megoldást D. H. Hyers adta meg 1941-ben (lásd [Hye41]). Egy iterációs eljárást alkalmazott, amelyből kialakult egy technika, melyet Hyers-módszernek vagy direkt módszernek nevezünk. A későbbiekben számos módosítása, általánosítása készült ezeknek az eredményeknek a Cauchy-egyenlettel, illetve egyéb függvényegyenletekkel kapcsolatosan, melyekről újabb összefoglaló írások találhatóak többek között a [For95], [Szék00] dolgozatokban. Az értekezés célja hasonló eredmények igazolása eddig nem tárgyalt vagy az eddigieknél általánosabb struktúrákon értelmezett függvények körében.

A disszertáció két fejezetből áll. A dolgozat első fejezetében értékelt testek feletti normált terek között értelmezett függvények esetén vizsgáljuk a Cauchy-egyenlet, a gyűrű homomorfizmusok, a monom egyenlet és a Fréchet-egyenlet stabilitását. Vizsgálatokat végzünk az approximáló függvény regularitási tulajdonságaira vonatkozóan is.

A második fejezetben először egyváltozós függvényegyenletek stabilitásával foglalkozunk olyan függvényeket tekintve, melyek egy nem üres halmazt képeznek metrikus térbe. Vizsgáljuk az eredeti függvényünket közelítő megoldásfüggvény egyértelműségét, továbbá a két függvény pontonkénti távolságát felülről becslő kifejezéseket. Ezen eredmények segítségével igazoljuk grupoidokon értelmezett többváltozós függvényegyenletek (mint például a Cauchy-egyenlet vagy a monom egyenlet) stabilitását. Eredményeink iterációs eljárásokra épülnek, azonban a dolgozat végén példát adunk olyan grupoidokra is, amelyek között értelmezve a Cauchy-egyenletet a stabilitás teljesül, de ez nem látható be a direkt módszerrel. A stabilitás igazolásához egy speciális technikát használunk, amely különbözik a Cauchy-egyenletnél eddig alkalmazott módszerektől, azaz a direkt módszertől, az invariáns közép technikától (lásd [Szék86]) és a szendvics tételekre épülő eljárástól (lásd [Pál98]).

1 Stabilitás értékelt testek feletti normált tereken

1.1 Terminológia

Egy testet *értékelt testnek* nevezünk, ha adott rajta egy *értékelés*, azaz egy valós értékű, pozitív definit, multiplikatív, szubadditív függvény. Egy nulla karakterisztikájú test tartalmazza a racionális számokat, így értékelése indukál $\mathbb{Q}$-n is egy értékelést. A. Ostrowski (lásd [Ost17]) eredményei alapján a racionális számok teste feletti értékeléseket pontosan ismerjük. Amennyiben $|\ |_{\mathbb{Q}}$ egy értékelés $\mathbb{Q}$-n, akkor a következő állítások valamelyike teljesül:

1. Létezik egy $\beta \in (0,1]$ szám, amelyre $|\ |_{\mathbb{Q}} = |\ |^{\beta}$, ahol $|\ |$ a szokásos abszolút érték függvény.

2. $|0|_{\mathbb{Q}} = 0$ és létezik olyan p prímszám és $\varrho \in (0,1]$, melyekre $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ és $x = p^k \frac{n}{m}$ ($p \not| n$, $p \not| m, k \in \mathbb{Z}$) esetén $|x|_{\mathbb{Q}} = \varrho^k$ ($\varrho = 1$: *triviális értékelés*, $\varrho = 1/p$: *p-adikus értékelés*).

Értékelt test feletti vektorterekben, illetve algebrákban értelmezhető a norma fogalma, amely annyiban tér el a klasszikus értelemben vett norma definíciójától, hogy egy adott skalárnak nem az abszolút értékét, hanem az értékelését tudjuk kiemelni a normából. Éppen ezért a szokásos bizonyítási technikák vagy nem működnek, vagy csak valamilyen módosított verziójuk használható.

1.2 Cauchy-egyenlet

Először a függvényegyenletek stabilitáselméletének alapvető problémáját, a Cauchy-egyenlet stabilitását vizsgáljuk. Fő eredményünk a következő:

Tétel. *Legyen $(X, \|\ \|_1)$ egy normált tér az $|\ |_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\ \|_2)$ egy Banach-tér az $|\ |_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Legyen α egy rögzített valós szám és $\mathcal{H} : [0,\infty[\times[0,\infty[\to [0,\infty[$ egy α-rendben homogén függvény. Ha az $f : X \to Y$ függvény teljesíti az*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^{\alpha} \neq |l|_K$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \to Y$ additív függvény, melyre tetszőleges

$x \in X$ esetén

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{\left||l|_K - |l|_F^\alpha\right|} \|x\|_1^\alpha,$$

továbbá

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{r^n} f\left(r^n x\right) \qquad (x \in X),$$

ahol $r \in \left\{l, \frac{1}{l}\right\}$ olyan racionális szám, melyre $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Ha még $K = F$, $|\ |_F$ nem triviális értékelés, melyre nézve $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű F-ben, továbbá minden $x \in X$ esetén az $f_x : t \mapsto f(tx)$ $(t \in F)$ függvény korlátos valamely nem nulla középpontú, pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor g lineáris.

A $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon\left(t_1^\alpha + t_2^\alpha\right)$ esetben javítjuk az eredeti f függvény és az approximáló g függvény távolságbecslését, igazoljuk a tétel bizonyos értelemben vett megfordítását és példákkal is illusztráljuk azt.

Az értékelések típusától függően három különböző esetben nem létezik olyan $l \in \mathbb{N}$, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$, azaz amikor nem teljesül tételünk feltétele:

1. $\alpha = 0$ és $|\ |_K$ a triviális értékelés $\mathbb{Q}$-n.
2. $\alpha \neq 0$, $|\ |_F = |\ |^{\beta_1}$ és $|\ |_K = |\ |^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = \beta_2$.
3. $\alpha \neq 0$ és létezik egy p prímszám úgy, hogy $|\ |_F = |\ |_p^{\beta_1}$ és $|\ |_K = |\ |_p^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = \beta_2$.

A második esetben a stabilitás nem áll fenn, ellenpélda található a [Gaj91] dolgozatban, a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon\left(t_1^\alpha + t_2^\alpha\right)$ függvényre vonatkozóan. A másik két esetben azonban eldöntetlen a kérdés.

1.3 Gyűrű homomorfia

Az előző részben található tétel segítségével belátjuk a gyűrű homomorfizmusok stabilitását.

Tétel. *Legyen $(X, \|\ \|_1)$ normált algebra az $|\ |_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\ \|_2)$ Banach-algebra az $|\ |_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, α és β rögzített valós számok, $\varepsilon \geq 0$ továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\to [0, \infty[$ egy α-homogén függvény. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, melyre $|r|_F^\alpha > |r|_K$, $|r|_F^\beta > |r|_K$ vagy*

$|r|_F^\alpha < |r|_K$, $|r|_F^\beta < |r|_K$. *Ha az* $f : X \to Y$ *függvény tetszőleges* $x, y \in X$ *esetén teljesíti az*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

és

$$\|f(xy) - f(x)f(y)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta$$

egyenlőtlenségeket, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \to Y$ *gyűrű homomorfizmus, melyre tetszőleges* $x, y \in X$ *választásával*

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$$

valamely $\delta \in \mathbb{R}$ *esetén. Továbbá*

$$g(x)\big(f(y) - g(y)\big) = \big(f(x) - g(x)\big)g(y) = 0 \qquad (x, y \in X).$$

Ha létezik olyan $x \in X$, melyre $g(x)$ nem nullosztó Y-ban, akkor $f = g$, azaz f gyűrű homomorfizmus. Speciálisan, ha Y nullosztó-mentes, akkor $g = 0$ vagy $f = g$, azaz

$$\|f(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

vagy f gyűrű homomorfizmus. Ez a gyűrű homomorfia egyenletének egyfajta szuperstabilitását jelenti. További feltételekkel g-ről belátható az is, hogy algebra homomorfizmus.

1.4 Monom egyenlet

A Cauchy-egyenlet és a norma-négyzet egyenlet általánosítása a

$$\Delta_y^n g(x) = n! g(y)$$

n-edfokú monom egyenlet ($n \in \mathbb{N}$). Gilányi Attila egy technikai lemmájának felhasználásával (lásd [Gil97]) igazoljuk a következőt.

Lemma. *Legyen* $(X, \|\ \|_1)$ *egy normált tér az* $|\ |_F$ *értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú* F *test felett,* $(Y, \|\ \|_2)$ *egy normált tér az* $|\ |_K$ *értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú* K *test felett,* $f : X \to Y$, r *egy pozitív egész vagy egy pozitív egész reciproka,* α *egy rögzített valós szám továbbá*

$\mathcal{H} : [0, \infty[\times[0, \infty[\to [0, \infty[$ *egy α-homogén függvény. Ha tetszőleges $x, y \in X$ esetén fennáll a*

$$\|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\|_2 \le \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) \tag{1}$$

egyenlőtlenség, akkor létezik egy (r-től függő) κ valós szám, amelyre

$$\|f(rx) - r^n f(x)\|_2 \le \kappa\|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X).$$

Belátjuk azt is, hogy egy olyan monom függvény (a monom egyenlet egy megoldása), amely majorálható a $\delta\|x\|_1^\alpha$ kifejezéssel valamely $\delta \in \mathbb{R}$ esetén, szükségképpen azonosan nulla. Ezek segítségével igazoljuk ennek a résznek az egyik fő eredményét:

TÉTEL. *Legyen $(X, \|\ \|_1)$ egy normált tér az $|\ |_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\ \|_2)$ egy Banach-tér az $|\ |_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Ha az $f : X \to Y$ függvény teljesíti az (1) egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \to Y$ monom függvény, melyre*

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \le \delta\|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X)$$

valamely (l-től függő) $\delta \in \mathbb{R}$ esetén.

Ahogy a Cauchy-egyenletnél, a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon\,(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ esetben az értékelések típusát figyelembe véve javítjuk az f és g függvény távolságbecslését.

Ezt követően megvizsgáljuk a tételben szereplő g függvény homogenitását, melyhez először igazolunk egy állítást, amely az n-additív függvények regularitási tulajdonságának egyfajta kiterjesztéséről szól, majd belátjuk az alábbi tételt:

TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test valamely nem triviális $|\ |_F$ értékeléssel, melyre vonatkozóan a racionális számok halmaza mindenütt sűrű F-ben és legyen $(Y, \|\ \|)$ egy normált tér F felett. Tegyük fel továbbá, hogy $g : F \to Y$ egy n-edfokú monom függvény. Ha g korlátos valamely pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor $g(t) = t^n g(1)$.*

Most már a monom egyenletre vonatkozó stabilitási tételünket meg tudjuk fogalmazni olyan feltételekkel, amelyekkel biztosíthatjuk az approximáló függvény n-homogenitását.

TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test egy nem triviális $|\ |_F$ értékeléssel, melyben $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű. Legyen $(X, \|\ \|_1)$ normált tér F felett* *és* $(Y, \|\ \|_2)$ *Banach-tér* F *felett. Ha az* $f : X \to Y$ *függvény kielégíti az* (1) *egyenlőtlenséget, minden* $x \in X$ *esetén az* $f_x : t \mapsto f(tx)$ $(t \in F)$ *függvény korlátos egy nem nulla középpontú, pozitív sugarú nyílt gömbön, továbbá létezik egy olyan* l *pozitív egész szám, melyre* $|l|_F^\alpha \neq |l|_F^n$*, akkor egyértelműen létezik egy* $g : X \to Y$ n*-homogén monom függvény, melyre*

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X)$$

valamely (l*-től függő)* $\delta \in \mathbb{R}$ *esetén.*

1.5 Fréchet-egyenlet

A fejezet utolsó részében a

$$\Delta_{y_1, y_2, \ldots, y_n} g(x) = 0$$

Fréchet-egyenlet stabilitását vizsgáljuk ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Egy technikai jellegű eredmény és egy, az n-additív függvények stabilitására vonatkozó állítás igazolása után megfogalmazzuk az alfejezet fő eredményét:

Tétel. *Legyen* $(X, \|\ \|_1)$ *egy normált tér az* $|\ |_F$ *értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú* F *test felett és* $(Y, \|\ \|_2)$ *egy Banach-tér az* $|\ |_K$ *értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú* K *test felett. Tegyük fel, hogy az* $f : X \to Y$ *függvényre teljesül a*

$$\|\Delta_{h_1, \ldots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \ldots \|h_n\|_1^\alpha \qquad (x, h_1, \ldots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenség valamely α *és* β *valós számok esetén. Ekkor, ha létezik egy* l *pozitív egész szám, melyre*

$$|l|_F^\alpha > |l|_K,\ |l|_F^{n\alpha} > |l|_K \qquad \textit{vagy} \qquad |l|_F^\alpha < |l|_K,\ |l|_F^{n\alpha} < |l|_K,$$

akkor léteznek olyan szimmetrikus, k*-additív* $G_k : X^k \to Y$ $(1 \leq k \leq n-1)$ *függvények, melyekre* $\beta \neq 0$ *esetén*

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \qquad (x \in X),$$

ahol $G_k^*(x) = G_k(x, \ldots, x)$ $(x \in X, k = 1, \ldots, n-1)$*, azaz* f *egy legfeljebb* $n-1$*-edfokú általánosított polinom,* $\beta = 0$ *esetén pedig*

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \right\|_2 \leq \varepsilon \delta_n(l, \alpha) \|x\|_1^{n\alpha} \qquad (x \in X),$$

ahol

$$\delta_2(l,\alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^{\alpha}}{\left||l|_F - |l|_F^{2\alpha}\right|}$$

és $n > 2$ esetén

$$\delta_n(l,\alpha) = \delta_2(l,\alpha) \prod_{j=2}^{n-1} \delta_2\left(l, \frac{n}{j}\alpha\right).$$

Ez az eredmény valós normált tereket tekintve is teljesen új, bár ismeretes hiányos (vagy hibásnak tűnő) próbálkozás hasonló állítás igazolására (lásd [BI99]).

A stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő korlátozó függvény alakja nem olyan általános, mint a korábbi eredményekben. A stabilitás tetszőleges α-homogén függvény használatával való igazolása nyílt probléma. Szintén a további kutatások tárgyát képezheti a

$$\Delta_y^n f(x) = 0$$

polinom egyenlet hasonló értelemben vett stabilitásának vizsgálata.

2 Stabilitás grupoidokon

2.1 Terminológia

A disszertáció második fejezetében egyszerű halmazokon, illetve grupoidokon, azaz bináris művelettel ellátott halmazokon értelmezett függvényekkel dolgozunk. Egy adott $(X,\diamond)$ grupoid esetén, ha valamely $l \geq 2$ egész számra bármely $x, y \in X$ választásával teljesül $(x \diamond y)^l = x^l \diamond y^l$, akkor azt mondjuk, hogy $(X,\diamond)$ *l-hatványszimmetrikus*. Az $l = 2$ esetben használjuk a *négyzetszimmetrikus* elnevezést is. Nyilvánvalóan az egyaránt kommutatív és asszociatív operátorok l-hatványszimmetrikusak is, de a hatványszimmetriából nem következik sem a kommutativitás, sem az asszociativitás. X egy tetszőleges x elemének hatványait rekurzívan definiáljuk a következőképpen: legyen $x^1 = x$ továbbá $x^{k+1} = x^k \diamond x$ $(k \in \mathbb{N})$. Az l-edik hatványfüggvényekre a $\varphi_{\diamond,l}$ jelölést használjuk.

Egy tetszőleges H halmaz esetén jelöljük a $\varphi : H \to H$ függvény n-edik iteráltját φ^n-nel, és legyen φ^0 az identikus leképezés. Amennyiben φ invertálható, jelöljük φ^{-1} n-edik iteráltját φ^{-n}-nel.

Amennyiben adott egy (X,d) metrikus tér és egy $\varphi : X \to X$ függvény, akkor a φ függvény *egyenletes folytonossági modulus*a alatt az

$$\omega_\varphi : [0,\infty[\to [0,\infty[, \quad \omega_\varphi(t) := \sup\big\{d\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)|x,y\in X, d(x,y)\le t\big\}$$

függvényt értjük, *Lipschitz-modulusa* alatt pedig a

$$\operatorname{Lip}\varphi := \sup\left\{\frac{d\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)}{\big(d(x,y)\big)}\;\middle|\; x,y\in X, x\neq y\right\}$$

kifejezést.

2.2 Egyváltozós függvényegyenletek

Legyen X nem üres halmaz, (Y,d) metrikus tér és $\gamma : X \to [0,\infty[$ adott függvény. Vizsgáljuk a

$$(2) \qquad g(x) = \psi\circ g\circ\varphi(x) \qquad (x\in X)$$

egyváltozós függvényegyenletet, ahol $\psi : X\to X$ és $\varphi : Y\to Y$ rögzítettek és $g : X\to Y$ az ismeretlen függvény. Egy $f : X\to Y$ függvényt tekintve, amelyre teljesül a

$$(3) \qquad d\big(f(x),\psi\circ f\circ\varphi(x)\big)\le\gamma(x) \qquad (x\in X)$$

stabilitási egyenlőtlenség, a következő kérdésekre keressük a választ:

1. Mikor konvergens a

   $$(4) \qquad g_0 = f,\; g_{n+1} = \psi\circ g_n\circ\varphi \qquad (n\in\mathbb{N})$$

   iteráció?

2. Mely $\delta : X\to[0,\infty[$ függvények esetén teljesül

   $$d\Big(f(x),\lim_{n\to\infty} g_n(x)\Big)\le\delta(x) \qquad (x\in X)?$$

3. Mikor lesz a $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ függvény megoldása (1)-nek?

4. Van-e másik $h : X\to Y$ megoldása (1)-nek, amelyre a $d(f(x),h(x))$ távolság $\delta(x)$-szel felülről becsülhető?

Első fontos eredményünk a következő:

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a ψ függvény folytonos és $f : X \to Y$ egy megoldása* (3)*-nak. Jelöljük ω_ψ-vel a ψ függvény egyenletes folytonossági modulusát. Ha a* (4)*-ben definiált iteráció konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor a $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ függvény megoldása* (2)*-nek és a*

$$\delta(x) \geq \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x) \tag{5}$$

egyenlőtlenség minden δ megoldása esetén

$$d\big(g(x), f(x)\big) \leq \delta(x) \qquad (x \in X).$$

Látható tehát, hogy az (5) függvényegyenlőtlenség minden megoldása felső becslése lesz az eredeti f függvény és az approximáló g függvény távolságának. A következő lemma egy elégséges feltételt ad meg az (5) egyenlőtlenség megoldhatóságára, továbbá megadja egy megoldását is.

LEMMA. *Ha létezik egy σ-szubadditív $\kappa : [0,\infty[\to [0,\infty[$ függvény, melyre $\kappa(t) \geq \omega_\psi(t)$ $(t \geq 0)$ és*

$$\tilde{\delta}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \gamma \circ \varphi^j(x) \tag{6}$$

konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor $\tilde{\delta}(x)$ egy megoldása (5)*-nek.*

Megjegyzendő, hogy ha Y egy normált tér és a d metrika a normából származik, akkor az ω_ψ függvény maga is σ-szubadditív. Ezenfelül, ha Y teljes, akkor a (6) sor konvergenciája a $\kappa = \omega_\psi$ választással garantálja a (4) iteráció konvergenciáját. A következő tétel alapján azt mondhatjuk, hogy gyengébb feltételek is elegendőek, ugyanis (6)-ban az ω_ψ^j függvények helyett használhatjuk a kisebb ω_{ψ^j} függvényeket is. A tételben az f és g függvény távolságára megadunk egy új korlátot is.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy Y egy teljes metrikus tér és ψ folytonos. Ha az $f : X \to Y$ függvény megoldása* (3)*-nak és*

$$\chi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x) < \infty \qquad (x \in X),$$

akkor a (4) *iteráció konvergens, a $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ függvény megoldása* (2)*-nek és*

$$d\left(f(x), g(x)\right) \leq \chi(x) \qquad (x \in X). \tag{7}$$

Ha a tételben feltételezzük egy olyan σ-szubadditív κ függvény létezését, amelyre $\kappa(t) \geq \omega_\psi(t)$ $(t \geq 0)$ és a (6) sor konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor azt kapjuk, hogy g az egyetlen olyan megoldása (2)-nek, melyre (7) teljesül. Az Y tér teljessége és a χ függvény konvergenciája azonban nem szükséges ahhoz, hogy a (4) iteráció konvergens legyen, így a korábbi tételünk feltételei gyengébbek. Továbbá létezhet olyan megoldása (5)-nek, amely kisebb felső korlátja a $d\big(f(x), g(x)\big)$ kifejezésnek, mint $\chi(x)$.

2.3 Cauchy-egyenlet

Az $(X, \diamond)$ és $(Y, *)$ grupoidok között értelmezett Cauchy-egyenlet alakja

$$g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \qquad (x, y \in X). \tag{8}$$

Az egyváltozós függvényegyenletre vonatkozó eredményeink segítségével meg tudunk adni olyan feltételrendszereket, melyekkel teljesül a Cauchy-egyenlet stabilitása. Például, ha a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán konstans függvény áll, a következőt mondhatjuk:

Tétel. *Legyen $(X, \diamond)$ l-lel egyértelműen osztható, l-hatványszimmetrikus grupoid, $(Y, *, d)$ l-hatványszimmetrikus teljes metrikus grupoid és tegyük fel, hogy*

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Lip} \varphi_{*,l}^{j} < \infty.$$

Ha $\varepsilon \geq 0$ és az $f : X \to Y$ függvény kielégíti a

$$d\big(f(x \diamond y), f(x) * f(y)\big) \leq \varepsilon \qquad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenséget, akkor létezik egy $g : X \to Y$ megoldása (8)-nak, melyre

$$d\big(g(x), f(x)\big) \leq L(l-1)\varepsilon \qquad (x \in X)$$

és

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{*,l}^{n} \circ f \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n}(x) \qquad (x \in X).$$

Továbbá g az egyetlen olyan megoldása a Cauchy-egyenletnek, amelyre a $d(f(x), g(x))$ kifejezés korlátos.

Az l-lel való oszthatóságot az X grupoid helyett az Y grupoidra feltételezve is megfogalmazható hasonló állítás.

2.4 További többváltozós függvényegyenletek

Ebben a részben a következő általános stabilitási tételt igazoljuk:

TÉTEL. *Legyen X egy nem üres halmaz a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ bináris operátorokkal, (Y, d) egy teljes metrikus tér és $\varepsilon \geq 0$. Ezenfelül tegyük fel, hogy $\varphi : X \to X$, $\psi : Y \to Y$, $f : X \to Y$ és $F : Y^k \to [0, \infty[$ olyan függvények, hogy φ endomorfizmus a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ operátorokra nézve, F folytonos, továbbá az*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Lip} \psi^n < \infty,$$

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \varepsilon \qquad (x \in X),$$

$$F(\psi^n(y_1), \dots, \psi^n(y_k)) \leq \operatorname{Lip} \psi^n F(y_1, \dots, y_k) \qquad (n \in \mathbb{N},\ y_1, \dots, y_k \in Y)$$

és

$$\sup_{x,y \in X} F(f(x \diamond_1 y), \dots, f(x \diamond_k y)) < \infty$$

feltételek teljesülnek. Ekkor létezik egy $g : X \to Y$ függvény, mely megoldása az

$$F(g(x \diamond_1 y), \dots, g(x \diamond_k y)) = 0 \qquad (x, y \in X) \tag{9}$$

függvényegyenletnek és kielégíti a

$$d(f(x), g(x)) \leq L\varepsilon \qquad (x \in X)$$

egyenlőtlenséget.

A (9) egyenlet számos jól ismert függvényegyenletet magába foglal. Az értekezésben példaként levezetjük az

$$(-1)^m f(x) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x \diamond y^i) = m! f(y) \qquad (x, y \in X)$$

általánosított monom egyenlet egy stabilitási tételét, ahol $(X, \diamond)$ egy grupoid.

2.5 Egy példa, amikor a Hyers-módszer nem működik

Az $(X, \diamond)$ és $(Y, *)$ grupoidok között értelmezett

$$g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \qquad (x, y \in X)$$

Cauchy-egyenletben és a rá vonatkozó

$$d\big(f(x \diamond y), f(x) * f(y)\big) \leq \varepsilon \qquad (x, y \in X)$$

stabilitási egyenlőtlenségben y helyére x-et írva a következő egyváltozós egyenletet és egyenlőtlenséget kapjuk:

$$g \circ \varphi_{2,\diamond}(x) = \varphi_{2,*} \circ g(x) \qquad (x \in X) \tag{10}$$

és

$$d\big(f \circ \varphi_{2,\diamond}(x), \varphi_{2,*} \circ f(x)\big) \leq \varepsilon \qquad (x \in X). \tag{11}$$

A Cauchy-egyenlet azon g megoldásai megkonstruálásához, amelyek a stabilitási egyenlőtlenségnek eleget tevő f függvényeket közelítik, a *Hyers-módszer* a következőképpen hajtható végre: A $\varphi_{2,*}$ és $\varphi_{2,\diamond}$ függvények valamelyikének invertálhatóságát feltételezve, a

$$g_1 := f, \qquad g_{n+1} = \varphi_{2,*}^{-1} \circ g_n \circ \varphi_{2,\diamond} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$g_1 := f, \qquad g_{n+1} = \varphi_{2,*} \circ g_n \circ \varphi_{2,\diamond}^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

iterációk egyikéről megmutatjuk, hogy a (11) egyenlőtlenség összes f megoldása esetén konvergál egy olyan g függvényhez, amely megoldása (10)-nek és a Cauchy-egyenletnek, továbbá $d(f(x), g(x)) \leq c\varepsilon$ valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen H egy középpontosan konvex részhalmaza egy racionális számok feletti X vektortérnek. Ha H $\mathbb{Q}$-*algebrailag nyílt*, azaz minden $p \in H$ pont és minden $v \in X$ vektor esetén létezik egy τ pozitív szám úgy, hogy $p + tv \in H$ minden $t \in [0, \tau] \cap \mathbb{Q}$ esetén, akkor a

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt[4]{g(x)g(y)} \qquad (x, y \in H) \tag{12}$$

függvényegyenlet stabilitása belátható egy speciális, a középpont operátorra vonatkozó ideálokra épülő módszer segítségével. Az

$$x \diamond y := \frac{x+y}{2} \qquad \text{és} \qquad x * y := \sqrt[4]{xy}$$

jelöléseket bevezetve azonnal adódik, hogy $(H, \diamond)$ és $([0, \infty[, *)$ négyzetszimmetrikus grupoidok és a (12) függvényegyenlet éppen a Cauchy-egyenlet ezeken a grupoidokon. Azonban a dolgozatban belátjuk, hogy a stabilitás nem igazolható a korábbi részekben általunk is használt iterációs eljárással, mellyel számos kutató igazolta különböző körülmények között a Cauchy-egyenlet stabilitását. Eredményeink alapján azt mondhatjuk tehát, hogy a direkt módszer a Cauchy-egyenletnél csak általában működik, de nem mindig.

Introduction

The stability theory of functional equations is one of the most intensively investigated subject in the theory of functional equations. The basic question is weather an 'approximate solution' of a functional equation 'can be approximated' by a solution of this equation. Concerning the Cauchy equation, this problem was formulated (and solved) by Gy. Pólya and G. Szegő's book [PSz25] in 1925, but the popular version of this problem was given by S. M. Ulam in 1940 (see [Ula60]) in a more general form. D. H. Hyers answered the problem in 1941, for the real vector space setting (see [Hye41]). He used an iteration process to determine the approximating proper solution of the Cauchy equation. Nowadays, this method is called the Hyers method or the direct method. Stability problems of this type were investigated by several authors during the last decades (recent surveys of these results can be found among others in [For95], [Szék00]). The aim of the dissertation is to verify analogous results in more general structures.

The dissertation consist of two chapters. In the first chapter we deal with the stability of the Cauchy equation, ring homomorphisms, the monomial equation and the Fréchet equation in Banach spaces over fields with arbitrary valuations. We make investigations concerning the regularity properties of the approximating function as well.

In the first part of the second chapter we investigate the stability of functional equations in a single variable for functions defined on a nonempty set and mapping into a metric space. We deal with the uniqueness of the approximating function. We also obtain new and sharper estimates for the pointwise distance of the approximating function and the original function. Using these results, in the second part of this chapter we prove the stability of functional equations in several variables (for instance the Cauchy equation and the monomial equation) on groupoids.

Our results are based on iteration processes. However, at the end of the dissertation we present an example of a stable Cauchy-type functional equation, whose stability cannot be proved via the Hyers method. The three familiar processes to prove the stability of the Cauchy equation are the direct method, the invariant mean technique developed by L. Székelyhidi (see [Szék86]), and the process of Zs. Páles (see [Pál98]), which is based on sandwich theorems. To prove the stability of our example, we use a special method, which is different from any of these techniques.

1 Stability in normed spaces over fields with valuations

1.1 Basic concepts

We say that a field is a *field with a valuation*, if we have a *valuation* on it, which is a positive definite, multiplicative, subadditive function with real values. If we have a valuation on a field of characteristic zero, then it involves a valuation on $\mathbb{Q}$. By a result of A. Ostrowski (see [Ost17]), if $|\ |_{\mathbb{Q}}$ is a valuation on $\mathbb{Q}$, then one of the following two cases holds:

1. There exists a $\beta \in (0,1]$ such that $|\ |_{\mathbb{Q}} = |\ |^{\beta}$, where $|\ |$ is the standard absolute value.

2. $|0|_{\mathbb{Q}} = 0$ and there exists a prime number p and $\varrho \in (0,1]$ such that if $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ and $x = p^k \frac{n}{m}$ ($p \not| n$, $p \not| m, k \in \mathbb{Z}$), then $|x|_{\mathbb{Q}} = \varrho^k$ ($\varrho = 1$: *trivial valuation*, $\varrho = 1/p$: *p-adic valuation*).

We introduce the concept of a norm in a linear space over a field with a valuation. There is an important difference between this norm and the classical notion of the norm. In these settings we can take out the valuation of a scalar from the norm, which does not equal the standard absolute value in general. Therefore the usual arguments don't work, or we have to modify them to work.

1.2 Cauchy equation

Here we investigate the elementary problem of the stability theory, that is the stability of the Cauchy equation. Our main result is the following:

Theorem. *Let $(X, \|\ \|_1)$ be a normed space over a field F of characteristic zero with a valuation $|\ |_F$, $(Y, \|\ \|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $|\ |_K$, α be a real number and $\mathcal{H} : [0,\infty[\times[0,\infty[\to [0,\infty[$ be a function, which is homogeneous of order α. If the function $f : X \to Y$ satisfies the inequality*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1 \|y\|_1)$$

and there exists a positive integer l such that $|l|_F^{\alpha} \neq |l|_K$, then there exists a *unique additive function $g : X \to Y$ for which*

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{\big||l|_K - |l|_F^\alpha\big|} \|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X),$$

and

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n} f\left(r^n x\right) \qquad (x \in X),$$

where $r \in \left\{l, \frac{1}{l}\right\}$ has the property $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Moreover, if $K = F$, the valuation $|\ |_F$ is non trivial, the field of rational numbers is dense in F with respect to this valuation and for every $x \in X$ the mapping $f_x : t \mapsto f(tx)$ $(t \in F)$ is bounded on an open ball of non zero center and positive radius, then g is linear.

In the case $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon\left(t_1^\alpha + t_2^\alpha\right)$ we improve the estimation for the pointwise distance of the original function f and the approximating function g, and we prove the converse of the stability theorem.

1.3 Ring homomorphisms

By using the result from the previous section, we are able to prove the stability of ring homomorphisms.

Theorem. *Let $(X, \|\ \|_1)$ be a normed algebra over a field F of characteristic zero with a valuation $|\ |_F$, $(Y, \|\ \|_2)$ be a Banach algebra over a field K of characteristic zero with a valuation $|\ |_K$, α, β be real numbers, $\varepsilon \ge 0$ and $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\to [0, \infty[$ be a function, which is homogeneous of order α. Let us suppose that there exists an $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ such that $|r|_F^\alpha > |r|_K$, $|r|_F^\beta > |r|_K$ or $|r|_F^\alpha < |r|_K$, $|r|_F^\beta < |r|_K$. If the function $f : X \to Y$ satisfies*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \le \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

and

$$\|f(xy) - f(x)f(y)\|_2 \le \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta$$

for every $x, y \in X$, then there exists a unique ring homomorphism $g : X \to Y$ for which

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \le \delta \|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X)$$

with some $\delta \in \mathbb{R}$. Furthermore, we have

$$g(x)\big(f(y) - g(y)\big) = \big(f(x) - g(x)\big)g(y) = 0 \qquad (x, y \in X).$$

If we have an $x \in X$ for which the element $g(x)$ is not zero divisor in Y, then, from last statement of the theorem we get that f is a ring homomorphism. Supposing some further condition we can prove that the function g is an algebra homomorphism too.

1.4 Monomial equation

In this section we deal with the monomial functional equation

$$\Delta_y^n g(x) = n! g(y)$$

where $n \in \mathbb{N}$. Obviously, this equation involves the Cauchy equation ($n = 1$) and the quadratic equation ($n = 2$) too. After proving two lemmas, which help us to show the existence and the uniqueness of the approximating function, we formulate our stability theorem for the monomial equation.

Theorem. *Let $(X, \| \ \|_1)$ be a normed space overt a field F of characteristic zero with a valuation $| \ |_F$, $(Y, \| \ \|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $| \ |_K$, α be a real number and $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\to [0, \infty[$ be a function, which is homogeneous of order α. If the function $f : X \to Y$ satisfies the inequality*

$$\|\Delta_y^n f(x) - n! f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) \tag{1}$$

and there exists a positive integer l such that $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, then there exists a unique monomial function $g : X \to Y$ for which

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X)$$

for some $\delta \in \mathbb{R}$, which depends on l.

Again, we deal with the case $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon\,(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ in detail.

Next we investigate the homogeneity of the approximating monomial function g. For this purpose we formulate a regularity theorem for n-additive functions. Next we show the following:

Theorem. *Let F be a field of characteristic zero with some non trivial valuation $| \ |_F$ such that $\mathbb{Q}$ is dense in F with respect to this valuation. Let $(Y, \| \ \|)$ be a normed space over F. Moreover assume that $g : F \to Y$ is a monomial function of degree n. If g is bounded on some open ball of positive radius, then g is of the form $g(t) = t^n g(1)$.*

Now we are able to formulate the stability theorem concerning the monomial equation in a new form, where we guarantee the n-homogeneity of the approximating function g.

THEOREM. *Let F be a field of characteristic zero with some non-trivial valuation $|\ |_F$ such that $\mathbb{Q}$ is dense in F with respect to this valuation. Let $(X, \|\ \|_1)$ be a normed space over F and $(Y, \|\ \|_2)$ be a Banach space over F. If the function f satisfies (1), for every $x \in X$ the mapping $f_x : t \to f(tx)$ $(t \in F)$ is bounded on an open ball of non-zero center and positive radius and there exists a positive integer l such that $|l|_F^\alpha \neq |l|_F^n$, then there exists a unique monomial function $g : X \to Y$ which*

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \qquad (x \in X)$$

for some $\delta \in \mathbb{R}$, which depends on l. Moreover the function g is homogeneous of order n.

1.5 FRÉCHET EQUATION

In the last section of the first chapter we investigate the stability of the Fréchet equation

$$\Delta_{y_1, y_2, \ldots, y_n} g(x) = 0$$

where $n \in \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. After establishing some lemmas we are able to formulate the main result:

THEOREM. *Let $(X, \|\ \|_1)$ be a normed space over a field F of characteristic zero with a valuation $|\ |_F$ and $(Y, \|\ \|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $|\ |_K$. Suppose that the function $f : X \to Y$ satisfies the inequality*

$$\|\Delta_{h_1, \ldots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \ldots \|h_n\|_1^\alpha \qquad (x, h_1, \ldots, h_n \in X)$$

for some real numbers α and β. If there exists a positive integer l such that

$$|l|_F^\alpha > |l|_K,\ |l|_F^{n\alpha} > |l|_K \qquad or \qquad |l|_F^\alpha < |l|_K,\ |l|_F^{n\alpha} < |l|_K,$$

then there exist symmetric, k-additive functions $G_k : X^k \to Y$ $(1 \leq k \leq n-1)$, for which the following statements hold:

If $\beta \neq 0$, then

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \qquad (x \in X)$$

where $G_k^*(x) = G_k(x, \dots, x)$*, so* f *is a generalized polynomial of degree* $n-1$.

If $\beta = 0$*, then*

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \right\|_2 \le \varepsilon \delta_n(l, \alpha) \|x\|_1^{n\alpha} \qquad (x \in X),$$

where

$$\delta_2(l, \alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^\alpha}{\left| |l|_F - |l|_F^{2\alpha} \right|}, \qquad \delta_n(l, \alpha) = \delta_2(l, \alpha) \prod_{j=2}^{n-1} \delta_2\left(l, \frac{n}{j}\alpha\right) \qquad (n > 2).$$

This theorem is an absolutely new result even if we consider real normed spaces, although there was an attempt to prove similar results (see [BI99]).

Unfortunately, the right-hand side of the stability inequality is not so general, as in the previous results. It is an open problem to verify the stability of the Fréchet equation when the error is estimated by an arbitrary homogeneous function of order α. The stability of the polynomial functional equation $\Delta_y^n f(x) = 0$ should also be the subject of further investigations.

2 Stability in groupoids

2.1 Basic concepts

In the second chapter we simply work in sets or in groupoids, which are nonempty sets with a binary operation. We say that the groupoid $(X, \diamond)$ is *l-power-symmetric* ($l \ge 2$ is a given integer) if $(x \diamond y)^l = x^l \diamond y^l$ for all $x, y \in X$ (if $l = 2$, we also use the term *square-symmetric*). Obviously, commutativity together with associativity implies l-power symmetry for all integers $l \ge 2$. However, power-symmetry implies neither commutativity nor associativity. The power of an element $x \in X$ is defined by the recursion $x^1 = x$ and $x^{k+1} = x^k \diamond x$ ($k \in \mathbb{N}$). We will use the power function $\varphi_{\diamond,l}(x) := x^l$ ($x \in X$).

Let H be a nonempty set. If we have a function $\varphi : H \to H$, then for a non negative integer n, we denote the n-th iterates of φ by φ^n. If φ is invertible, then we denote the n-th iterate of φ^{-1} by φ^{-n}. By definition, the function φ^0 is the identical function.

If (X, d) is a metric space and $\varphi : X \to X$ is a function, we define the *modulus of uniform continuity* of φ by

$$\omega_\varphi : [0, \infty] \to [0, \infty], \quad \omega_\varphi(t) := \sup \left\{ d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) | x, y \in X, d(x, y) \le t \right\}$$

and the *Lipschitz modulus* of φ by

$$\operatorname{Lip}\varphi = \sup\left\{ \frac{d\big(\varphi(x),\varphi(y)\big)}{d(x,y)} \;\middle|\; x,y \in X, x \neq y \right\}.$$

2.2 Functional equations in a single variable

Let X be a nonempty set, (Y,d) be a metric space, and $\gamma : X \to [0,\infty[$ be a given function. We investigate the single variable functional equation

$$g(x) = \psi \circ g \circ \varphi(x) \qquad (x \in X), \tag{2}$$

where the functions $\psi : X \to X$, $\varphi : Y \to Y$ are fixed and $g : X \to Y$ is unknown.

Let us consider a function $f : X \to Y$, for which the inequality

$$d\big(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)\big) \leq \gamma(x) \qquad (x \in X) \tag{3}$$

is satisfied. We try to find the answers for the following questions:

1. When does the iteration

   $$g_0 = f,\; g_{n+1} = \psi \circ g_n \circ \varphi \;\; (n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

   converge?

2. For which functions $\delta : X \to [0,\infty[$ does the inequality

   $$d\left(f(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x)\right) \leq \delta(x) \qquad (x \in X)$$

   hold?

3. When does the function $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ solve equation (1)?

4. Is there any other solution $h : X \to Y$ of (1), for which $d(f(x), h(x))$ can be majorized by $\delta(x)$?

The first important result concerning this questions is the following:

THEOREM. *Suppose that the function ψ is continuous and $f : X \to Y$ is a solution of the inequality* (2). *Let us denote the modulus of uniform* *continuity of* ψ *by* ω_ψ*. If the iteration defined in* (4) *is convergent for all* $x \in X$*, then the function*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x) \qquad (x \in X)$$

is a solution of (2)*, for which*

$$d\big(g(x), f(x)\big) \le \delta(x) \qquad (x \in X).$$

for all solutions δ *of inequality*

$$\delta(x) \ge \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x). \tag{5}$$

We see, that every solution of inequality (5) is an upper estimate for the pointwise distance of the original function f and the approximating function g. The next theorem gives sufficient conditions for the convergence of iteration (4) and also gives a new upper bound for the distance of f and g.

Theorem. *Suppose that* Y *is a complete metric space and* ψ *is continuous. If the function* $f : X \to Y$ *is a solution of the functional inequality* (3) *and*

$$\chi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x) < \infty \qquad (x \in X),$$

then iteration (4) *is convergent, the function* $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ *is a solution of* (2) *and*

$$d\left(f(x), g(x)\right) \le \chi(x) \qquad (x \in X). \tag{6}$$

The completeness of Y and also the convergence of $\chi(x)$ is not necessary for the convergence of (4), therefore the conditions of the previous Theorem are weaker, than the conditions of this Theorem. Moreover, there could exist solutions of (5) which are better upper bounds than $\chi(x)$ for the distance $d\big(f(x), g(x)\big)$.

In addition, if we suppose the existence of a σ-subadditive function κ, for which $\kappa(t) \ge \omega_\psi(t)$ $(t \ge 0)$ and the series

$$\sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \gamma \circ \varphi^j(x)$$

is convergent for all $x \in X$, then we get, that g is the only solution of (2), for which inequality (6) holds.

2.3 Cauchy equation

Let $(X, \diamond)$ and $(Y, *)$ be groupoids. The Cauchy equation concerning these general structures is the functional equation

$$g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \qquad (x, y \in X). \tag{7}$$

In the rest of this section we look for conditions to give affirmative answer for the stability of the Cauchy equation by using the results from the previous section. For example, if the right-hand side of our stability inequality is constant, then we have the following:

THEOREM. *Let $(X, \diamond)$ be l-power-symmetric groupoid uniquely divisible by l, $(Y, *, d)$ be l-power-symmetric complete metric groupoid and suppose that*

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Lip} \varphi_{*,l}^{j} < \infty.$$

If ε is a non-negative real number and the function $f : X \to Y$ satisfies

$$d\big(f(x \diamond y), f(x) * f(y)\big) \leq \varepsilon \qquad (x, y \in X),$$

then there exists a solution $g : X \to Y$ of (7) for which

$$d\big(g(x), f(x)\big) \leq L(l-1)\varepsilon \qquad (x \in X)$$

and g has the form

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{*,l}^{n} \circ f \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n}(x) \qquad (x \in X).$$

Moreover, g is the only solution of (7) for which $d(f(x), g(x))$ is bounded.

2.4 Other functional equations in several variables

In this section we prove the following general stability theorem:

THEOREM. *Let X be a nonempty set with binary operations $\diamond_1, \ldots, \diamond_k$, (Y, d) be a complete metric space and $\varepsilon \geq 0$. Suppose that $\varphi : X \to X$, $\psi : Y \to Y$, $f : X \to Y$ and $F : Y^k \to [0, \infty[$ are functions such that φ is an endomorphism under $\diamond_1, \ldots, \diamond_k$, F is continuous and the properties*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Lip} \psi^{n} < \infty,$$

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \le \varepsilon \qquad (x \in X),$$

$$F(\psi^n(y_1), \dots, \psi^n(y_k)) \le \operatorname{Lip} \psi^n F(y_1, \dots, y_k) \qquad (n \in \mathbb{N},\ y_1, \dots, y_k \in Y)$$

and

$$\sup_{x,y \in X} F(f(x \diamond_1 y), \dots, f(x \diamond_k y)) < \infty$$

are valid. Then there exists a function $g : X \to Y$ which solves the functional equation

$$F(g(x \diamond_1 y), \dots, g(x \diamond_k y)) = 0 \qquad (x, y \in X) \tag{8}$$

and satisfies the inequality

$$d(f(x), g(x)) \le L\varepsilon \qquad (x \in X).$$

The functional equation (8) involves several well-known functional equations. As an application, in the dissertation we deduce a stability theorem for the generalized monomial functional equation.

2.5 An example, when the Hyers method does not work

We investiate the functional equation

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt[4]{g(x)g(y)} \qquad (x, y \in H), \tag{9}$$

where H is a midpoint-convex set of a linear space over the field of rational numbers. Observe that, with the notations

$$x \diamond y := \frac{x+y}{2} \qquad \text{and} \qquad x * y := \sqrt[4]{xy},$$

the structures $(H, \diamond)$ and $([0, \infty[, *)$ are square-symmetric groupoids and functional equation (9) is just the Cauchy equation on these structures. Supposing a certain openness property of H, we prove the stability of equation (9) with a special technique. We also show, that the stability cannot be proved via the iterative method. Several authors have used this procedure to prove the stability of the Cauchy equation (and also other equations) in different settings. We have used this method in the previous sections as well. Now, in the view of this result we can say that the direct method works for the Cauchy equation in general but does not always work.

Irodalomjegyzék

[BI99] C. Borelli and C. Invernizzi, *Sulla stabilitá dell'equazione funzionale dei polinomi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **57** (1999), no. 3, 197–208. MR 2004b:39027

[For95] G.-L. Forti, *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 143–190. MR 96i:39033

[Gaj91] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. **14** (1991), no. 3, 431–434. MR 92e:39029

[Gil97] A. Gilányi, *A characterization of monomial functions*, Aequationes Math. **54** (1997), no. 3, 289–307. MR 99g:39027

[Hye41] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222–224. MR 2,315a

[Ost17] A. Ostrowski, *Über einige lösungen der funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$.*, Acta Math. **41** (1917), 271–284.

[Pál98] Zs. Páles, *Generalized stability of the Cauchy functional equation*, Aequationes Math. **56** (1998), no. 3, 222–232. MR 99k:39076

[PSz25] Gy. Pólya and G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol. I*, Springer, Berlin, 1925.

[Szék86] L. Székelyhidi, *Note on Hyers's theorem*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **8** (1986), no. 2, 127–129. MR 87g:39019

[Szék00] L. Székelyhidi, *Ulam's problem, Hyers's solution — and to where they led*, Functional Equations and Inequalities (Th. M. Rassias, ed.), Math. Appl., vol. 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 259–285. MR 2003a:39035

[Ula60] S. M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience Publishers, New York-London, 1960. MR 22 #10884

Előadások

[1] *The Stability of the Cauchy equation in p-adic fields*, The 1st Katowice-Debrecen Winter Seminar, Cieszyn (Poland), 2001.

[2] *The asymptotic stability of the Cauchy equation in p-adic fields*, The 2nd Debrecen-Katowice Winter Seminar, Hajdúszoboszló (Hungary), 2002.

[3] *On the stability of the monomial functional equation in normed spaces over fields with valuation*, The 3rd Katowice-Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2003.

[4] *On stability of the Cauchy equation in normed spaces over fields with valuation*, The 41st International Symposium on Functional Equations, Noszvaj (Hungary), 2003.

[5] *Stability of the monomial functional equation in normed spaces over fields with valuation*, The 9th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Złockie (Poland), 2003.

[6] *Estimates to the stability of the Cauchy equation*, The 4th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Mátraháza (Hungary), 2004.

[7] *Estimates to the stability of the Cauchy equation*, The 42nd International Symposium on Functional Equations, Opava (Czech Republic), 2004.

[8] *An example of a stable functional equation when the Hyers method does not work*, The 5th Katowice-Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2005.

[9] *An example of a stable functional equation when the Hyers method does not work*, The 43rd International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer (France), 2005.

Publikációk

[1] Z. Kaiser, *On stability of the Cauchy equation in normed spaces over fields with valuation*, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), no. 1-2, 189–200. MR 2004m:39045

[2] Z. Boros and Z. Kaiser, *Note on approximate ring homomorphisms in algebras over fields with valuations*, Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput., **24** (2004), 119–124.

[3] Z. Kaiser and Zs. Páles, *An example of a stable functional equation when the Hyers method does not work*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **6** (2005), no. 1, Art. 14, 11 pp. (electronic). MR 2122939

[4] Z. Kaiser, *On stability of the monomial functional equation in normed spaces over fields with valuation*, J. Math. Anal. Appl., accepted.

[5] A. Gilányi, Z. Kaiser, and Zs. Páles, *Estimates to the stability of functional equations*, submitted.