

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Gráffejlődési modellek aszimptotikus vizsgálata

Lukácsné Porvázsnyik Bettina Livia

Témavezető: Dr. Fazekas István



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2018.

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Gráffejlődési modellek aszimptotikus vizsgálata

Lukácsné Porvázsnayk Bettina Livia

Témavezető: Dr. Fazekas István



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2018.

Bevezetés

A hálózatelmélet a diszkrét valószínűségelmélet egy aktívan tanulmányozott területe, melynek eredményeit széles körben alkalmazzák. Az elmúlt néhány évtizedben számos véletlen gráf modellt vezettek be a valóságban előforduló hálózatok leírására és modellezésére. A véletlen gráfok elméletének fejlődéséről részletes áttekintést adhat például Bollobás (2001), Newman, Barabási és Watts (2006), Durrett (2007), Newman (2010), Janson, Luczak és Rucinski (2000) és van der Hofstad (2017) könyve.

Előzmények és célkitűzések. Empirikus kutatások igazolták, hogy a valóságban előforduló nagy hálózatok jelentős részének egy közös jellemzője a skálafüggetlenség, lásd például Barabási és Albert (1999), Albert és Barabási (2002), Durrett (2007), van der Hofstad (2017). Ezek alapján skálafüggetlenségen azt értjük, hogy a gráf méretének növekedésével a k fokú csúcsok relatív gyakorisága (1 valószínűséggel) konvergál a q_k foksámeloszláshoz, mely aszimptotikusan hatványrendben cseng le, azaz $q_k \sim Ck^{-\gamma}$ $k \rightarrow \infty$ esetén, ahol C és γ alkalmas konstansok. Az itt szereplő γ hatványkitevőt karakterisztikus kitevőnek nevezik, mely a legtöbb modell esetében 2 és 3 közötti értéket vesz fel. Általában $\gamma \in (2, \infty)$ teljesül.

A skálafüggetlenség jelenségének magyarázataként Barabási és Albert (1999) bevezette a preferential attachment modellt. Ebben a modellben minden $n = 2, 3, \dots$ időpontban egy új csúcs és m új él csatlakozik a gráfhoz, melyek az új csúcsot véletlenszerűen kiválasztott régi csúcsokhoz köti. Egy régi csúcs kiválasztásának valószínűsége arányos annak fokszámával. Ez a preferential attachment szabály, azaz az új csúcsot nagyobb valószínűséggel kötjük össze olyan régi csúccsal, amelyiknek nagyobb a fokszáma. Barabási és Albert cikkében a modell leírása informális. A preferential attachment modell pontos definícióját, valamint a modell skálafüggetlenségének matematikai bizonyítását $d \leq n^{\frac{1}{15}}$ esetén Bollobás, Riordan, Spencer és Tusnády (2001) adta meg (itt d a fokszámot, n a lépések számát jelöli).

A preferential attachment modell hatására az elmúlt két évtizedben számos új véletlen gráf modellt tanulmányoztak. Cooper és Frieze (2003) a webgráfok egy általános modelljét vezette be. Ebben a modellben a régi csúcsok kiválasztása vagy egyenletesen vagy pedig a fokszámukkal arányos valószínűséggel (azaz a preferential attachment szabálynak megfelelően) történhet. Backhausz és Móri (2012, 2014) egy olyan véletlen gráf modellt definiált, melynek fejlődését minden lépésben 3 csúcs kölcsönhatása határozza meg. Backhausz és Móri háromszöges modelljében a csúcsok pozitív súllyal rendelkeznek, mely az evolúciós folyamat során nő. Martingáleméleti módszerek alkalmazásával bizonyították a modell skálafüggetlenségét mind a csúcsok súlyaira, mind pedig a fokszámokra vonatkozóan. Fazekas és Porváznayik (2013, 2016a,b) a háromszöges modell azon általánosítását vizsgálta, melyben a gráf evolúcióját minden lépésben N csúcs interakciója határozza meg, ahol $N \geq 3$ rögzített egész szám. Kiterjesztették Backhausz és Móri bizonyos eredményeit az

N -pontos modellre és igazolták annak skálafüggetlenségét.

A foksámeloszlás mellett a véletlen gráf modellek más tulajdonságait is érdemes vizsgálni. Preferential attachment típusú modellekben egy rögzített csúcs foksámsorozatát, illetve a maximális foksámot tanulmányozta például van der Hofstad (2017), Katona és Móri (2006), Lindholm és Vallier (2011). Egy jól ismert technika a maximális foksám növekedésének vizsgálatára Móri (2002, 2005) martingálos módszere (lásd még Durrett (2007), van der Hofstad (2017)). A háromszöges modellben Backhausz és Móri (2012, 2014) megadta egy rögzített csúcs súlyának és foksámának, valamint a maximális súly és a maximális foksám aszimptotikus viselkedését. Ezen eredményeket Fazekas és Porvázsnik (2016a) terjesztette ki a háromszöges modell általánosítására, az N -pontos modellre. Továbbá meghatározták egy rögzített M -klikk ($1 \leq M \leq N$ rögzített egész szám) súlyának aszimptotikus viselkedését is.

Ebben a disszertációban egy új általános véletlen gráffejlődési mechanizmust definiálunk, valamint az evolúciós folyamat eredményeként létrejövő véletlen gráf modellt tanulmányozzuk. Célunk a modellt jellemző mennyiségek aszimptotikus viselkedésének vizsgálata és meghatározása. Az értekezésben bemutatott eredmények Fazekas Istvánnal közösek. A dolgozat két fő részből áll. Az első részben (1. fejezet) megadjuk a vizsgált modell pontos matematikai definícióját és ismertetjük a modellre vonatkozó fő eredményeinket, több esetben bizonyítjuk annak skálafüggetlenségét. A dolgozat második részében (2. fejezet) a modell egy speciális esetére, az N -pontos modellre vonatkozóan ismertetjük és igazoljuk további új eredményeinket. A bizonyítások során főként martingálelméleti eredményeket alkalmazunk.

1. fejezet

Egy klikkek interakcióján alapuló modell

1.1. A modell definíciója és alapvető tulajdonságai

Legyen $N \geq 3$ rögzített egész szám. Az egyszerűség kedvéért egy N csúcsú teljes gráfot a továbbiakban N -klikknek fogunk nevezni.

A modell. A kezdeti $n = 0$ időpontban egy N csúcsú teljes gráfból indulunk ki. Legyen ezen gráfnak és minden klikkjének (azaz az N csúcsnak, az $\binom{N}{2}$ élnek, $\dots$, az $\binom{N}{M}$ M -klikknek ($M \leq N$)) a kezdeti súlya 1. A gráf fejlődési folyamatát a következő diszkrét idejű modellel adjuk meg. Minden $n = 1, 2, \dots$ időpontban N csúcs kerül kiválasztásra, melyek interakcióba lépve egymással egy N -klikket alkotnak. Ebben a modellben N csúcs *interakciója* alatt azt értjük, hogy az N csúcs között minden (még nem létező) élt behúzzunk és így egy N -klikket kapunk. A gráfmodell evolúciója során az interakcióban részt vevő csúcsok által meghatározott új klikkek kezdeti súlya legyen 1, az interakcióban részt vevő már létező klikkek súlyát pedig

eggyel növeljük. Azaz egy már létező klikk súlya pontosan akkor nő, ha interakcióban vesz részt, és ekkor a súlynövekedés mértéke 1. Továbbá, ha egy evolúciós lépés során egy klikk súlya 1-gyel nő, akkor ezen klikk bármely részklikkjének a súlya is 1-gyel nő ugyanebben a lépésben. Megjegyezzük, hogy ebben a modellben csak azokat a teljes gráfokat tekintjük klikkeknek, amelyek egy a csúcsaik közötti interakció eredményeként jöttek létre.

Az egyes lépésekben az interakcióban részt vevő N csúcs kiválasztása a következő módokon történhet.

Step NEW_k: Minden lépésben p_k valószínűséggel ($1 \leq k \leq N-1$), egy új k -klikk csatlakozik a gráfhoz, amely $N-k$ már létező csúccsal interakcióba lépve egy új N -klikket formál. Ebben az esetben az $N-k$ régi csúcs kiválasztására két lehetőségünk van.

- **Choice PA:** r_k valószínűséggel ($1 \leq k \leq N-1$), egy $(N-k)$ -klikket választunk ki a már létező $(N-k)$ -klikkek közül az $(N-k)$ -klikkek összsúlyának megfelelően. Ez azt jelenti, hogy egy w_t súlyú $(N-k)$ -klikket $w_t / \sum_h w_h$ valószínűséggel választunk, ahol $\sum_h w_h$ az adott lépésben már létező $(N-k)$ -klikkek összsúlya (preferential attachment szabály).
- **Choice UNI:** $1 - r_k$ valószínűséggel egyenletesen választunk $N-k$ régi csúcsot, azaz minden $N-k$ darab csúcsot tartalmazó csúcshalmazt azonos valószínűséggel választunk (egyenletes választás).

Step OLD: Minden lépésben p_0 valószínűséggel nem csatlakozik új csúcs a gráfhoz. Az interakció ekkor N már létező csúcs között jön létre. Az előző esethez hasonlóan két lehetőségünk van a N régi csúcs kiválasztására.

- **Choice PA:** r_0 valószínűséggel egy N -klick kerül kiválasztásra a már létező N -klikkek közül az N -klikkek összsúlyának megfelelően (preferential attachment szabály).
- **Choice UNI:** $1 - r_0$ valószínűséggel egyenletesen történik a választás, azaz minden N csúcsot tartalmazó csúcshalmazt azonos valószínűséggel választunk (egyenletes választás).

A modellben a p_k és r_k , $0 \leq p_k, r_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ valószínűségek rögzített valós számok, $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$.

A fenti jelölések mellett a dolgozatban vizsgált véletlen gráf modellt a továbbiakban $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ módon jelöljük.

1.1. MEGJEGYZÉS. Az evolúciós folyamat definíciója alapján láthatjuk, hogy ebben a modellben egyenletes választás esetén régi csúcsok között is keletkezhetnek új élek.

A továbbiakban két függvény, $f(x)$ és $g(x) \neq 0$ aszimptotikus egyenlősége alatt azt értjük, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1.2. Fő eredmények

Ebben a fejezetben a $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ modellre vonatkozó fő eredményeinket ismertetjük. Látni fogjuk, hogy a vizsgált modellben a súlyeloszlás, illetve bizonyos esetekben a fokszámeloszlás is skálafüggetlen.

Vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{N-k}{N} p_k r_k,$$

$$\beta = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k, \quad \text{ahol} \quad \beta_k = (N-k) p_k (1-r_k) \quad \text{és} \quad A = \sum_{k=0}^{N-1} k p_k, \quad (1.1)$$

$$a_M = \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}, \quad b_M = \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}.$$

Jelölje V_n a csúcsok számát n lépés után, és jelölje $X(n, d, w)$ a d foksámú és w súlyú csúcsok számát n lépés után. Az alábbi tétel egy alapvető fontosságú eredményt ismertet az $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$ hányados, azaz a d fokú és w súlyú csúcsok arányának majdnem biztos konvergenciájáról.

1.2. TÉTEL. Legyen $\alpha \neq \alpha_0$. Minden rögzített w és d esetén, ahol $1 \leq w$ és $N-1 \leq d \leq w(N-1)$,

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (1.2)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az $x_{d,w}$ határértékek rögzített nemnegatív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{ha} \quad d \neq N-1, \quad (1.3)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (w-1) x_{d-k,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1} \right] \quad (1.4)$$

ha $w \geq 2$, $N-1 \leq d \leq w(N-1)$. Minden $N \geq 3$ esetén létezik olyan (d, w) pár, $1 \leq w$, $N-1 \leq d \leq (N-1)w$, melyre $x_{d,w}$ pozitív. Továbbá $x_{d,w} = 0$ esetén $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$, ahol a egy pozitív szám, mely w -től és d -től is függhet. Ha $N-1 \leq d \leq (N-1)w$ nem teljesül, akkor $x_{d,w} = 0$.

Legyen M egy rögzített egész szám, $1 \leq M \leq N$. A következő tételek az M -klikkek súlyainak skálafüggetlenségéről szólnak.

Legyen $M = 1$ és jelölje $X(n, w)$ a w súlyú csúcsok számát n lépés után. Az alábbi tétel a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét mondja ki.

1.3. TÉTEL. Legyen $\alpha \neq \alpha_0$. Minden $w = 1, 2, \dots$ esetén

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w = \sum_d x_{d,w} \quad (1.5)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az x_w , $w = 1, 2, \dots$ határértékek pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1. \quad (1.6)$$

Továbbá

$$x_w \sim C w^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.7)$$

teljesül $w \rightarrow \infty$ esetén, ahol $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$.

Legyen most $2 \leq M \leq N$ rögzített egész szám. Legyen $w \geq 1$ és jelölje $C(n, M, w)$ a w súlyú M -klikkek számát n lépés után, $C_{n,M}$ pedig a pozitív súllyal rendelkező M -klikkek számát n lépés után. Az M -klikkek súlyainak skálafüggetlenségéről szól a következő eredmény.

1.4. TÉTEL. Legyen $\alpha \neq \alpha_0$ és $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$. Ekkor minden rögzített M és w , $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$ esetén

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n,M}} \rightarrow c_{M,w} \quad (1.8)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. A $c_{M,w}$, $w = 1, 2, \dots$ határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$c_{M,1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M,w} = \frac{(w-1)a_M}{wa_M + 1} c_{M,w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.9)$$

ahol az a_M mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk. A $c_{M,1}, c_{M,2}, \dots$ sorozat egy valódi diszkrét valószínűségeloszlás. Továbbá

$$c_{M,w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} \quad (1.10)$$

teljesül $w \rightarrow \infty$ esetén.

Jelölje $U(n, d)$ a d fokú csúcsok számát n lépés után, és jelölje $\gcd\{A\}$ az A halmaz elemeinek legnagyobb közös osztóját. A $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ modell az (1.11) feltétel teljesülése esetén a szokásos értelemben (azaz a foksámokra vonatkozóan) is skálafüggetlen.

1.5. TÉTEL. Legyen $\alpha_0 > 0$, $\alpha \neq \alpha_0$ és tegyük fel, hogy

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1. \quad (1.11)$$

Ekkor minden $d \geq N - 1$ esetén

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w} \quad (1.12)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az u_d , $d = N - 1, N, \dots$ határértékek pozitív számok. Továbbá

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.13)$$

teljesül $d \rightarrow \infty$ esetén.

1.6. MEGJEGYZÉS. A karakterisztikus kitevő értéke a csúcsok súlyai és fokszámai esetén megegyezik.

1.3. Segéderedmények I.

Ebben a fejezetben a $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ modellre vonatkozó azon további eredményeinket ismertetjük, melyeket az 1.2 fejezetben szereplő fő eredmények bizonyításai során alkalmaztunk.

Az alábbi lemmával megadjuk annak a valószínűségét, hogy egy w súlyú rögzített M -klick az n -edik lépésben részt vesz az interakcióban.

1.7. LEMMA. *Annak a valószínűsége, hogy egy w súlyú M -klick, $1 \leq w, 1 \leq M \leq N$, az n -edik ($n \geq w$) lépésben részt vesz az interakcióban*

$$p(n, M, w) = \frac{w}{n} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_{n-1}}{M}} b_M, \quad (1.14)$$

ahol az a_M és b_M mennyiségeket (1.1)-ben definiáltuk.

1.8. MEGJEGYZÉS. Az $M = 1$ esetben az 1.7. Lemma állítása a következő. Annak a valószínűsége, hogy egy w súlyú régi csúcs részt vesz az interakcióban az n -edik lépésben

$$p(n, 1, w) = \frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta. \quad (1.15)$$

Jelölje $\mathcal{F}_n$ az első n lépés által generált σ -algebrát. A következő tételben megadjuk $X(n, d, w)$, azaz a d fokú és w súlyú csúcsok számának feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ -algebrára nézve.

1.9. TÉTEL.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(n, d, w) | \mathcal{F}_{n-1}\} &= X(n-1, d, w) \left[1 - \left(\frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} X(n-1, d-k, w-1) \left[p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Nn} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=0}^k p_m (1 - r_m) \frac{\binom{V_{n-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{n-1}}{N-m}} \Bigg] + A \delta_{d, N-1} \delta_{w,1} \quad (1.16)$$

$w \geq 1$ és $N-1 \leq d \leq (N-1)w$ esetén, ahol $\delta_{k,l}$ a Kronecker-deltát jelöli.

A következő lemmában definiált valószínűségi változók fontos szerepet játszanak a dolgozatban.

1.10. LEMMA. Legyen $p_0 < 1$ és legyen $1 \leq M \leq N$ rögzített egész szám. Legyen

$$c(n, M, w) = \prod_{i=w}^n (1 - p(i, M, w))^{-1}, \quad n \geq w, w \geq 1. \quad (1.17)$$

Ekkor $c(n, M, w)$ egy $\mathcal{F}_{n-1}$ -mérhető valószínűségi változó.

$$c(n, 1, w) \sim a_{1,w} n^{a_1 w + \beta} \quad (1.18)$$

és

$$c(n, M, w) \sim a_{M,w} n^{a_M w}, \quad \text{ha } 2 \leq M \leq N \quad (1.19)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az a_M mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk és $a_{M,w}$ egy pozitív valószínűségi változó.

Az alábbi lemma a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségéről szóló

1.3. Tételben szereplő x_w , $w = 1, 2, \dots$ határértékeket jellemzi.

1.11. LEMMA. Legyen $p_0 < 1$ és legyen

$$x_w = x_{N-1,w} + x_{N,w} + \dots + x_{(N-1)w,w}, \quad w = 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

ahol $x_{d,w}$ az 1.2. Tételben meghatározott határértékeket jelöli. Ekkor az x_w , $w = 1, 2, \dots$ pozitív számok teljesítik az (1.6) rekurziót. Az

x_w , $w = 1, 2, \dots$ sorozat diszkrét valószínűségeloszlás, az $x_{d,w}$, $d = N - 1, N, \dots, (N - 1)w$, $w = 1, 2, \dots$ sorozat pedig kétdimenziós diszkrét valószínűségeloszlás.

Legyen $2 \leq M \leq N$ rögzített egész szám és legyen $w \geq 1$. A következő tételben megadjuk a w súlyú M -klikkek számának, azaz $C(n, M, w)$ -nek a feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ -algebrára nézve.

1.12. TÉTEL. Minden rögzített M , $2 \leq M \leq N$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{C(n, M, w) | \mathcal{F}_{n-1}\} &= (1 - p(n, M, w)) C(n - 1, M, w) + \\ &+ p(n, M, w - 1) C(n - 1, M, w - 1) + \delta_{1,w} R_n, \end{aligned} \quad (1.21)$$

ahol

$$R_n = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} - (1 - r_k) C_{n-1, M} \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}} \right]$$

és $\delta_{1,w}$ a Kronecker-deltát jelöli.

A következő tétel megmutatja, hogy a lépések n számával normalva $C(n, M, w)$ majdnem biztosan konvergens, amint $n \rightarrow \infty$.

1.13. TÉTEL. Legyen $p_0 < 1$ és $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$. Minden rögzített M -re és w -re, $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$ teljesül, hogy

$$\frac{C(n, M, w)}{A_n} \rightarrow x_{M,w}$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az $x_{M,w}$ határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{M,1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]}{A(a_M + 1)} > 0,$$

$$x_{M,w} = \frac{a_M(w-1)}{a_M w + 1} x_{M,w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.22)$$

ahol az a_M mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk.

Tekintsük most a $C_{n,M}$ mennyiséget, azaz a pozitív súllyal rendelkező M -klikkek számát n lépés után. A következő lemmában megadjuk $C_{n,M}$ feltételes várható értékét az $\mathcal{F}_{n-1}$ σ -algebrára nézve.

1.14. LEMMA. *Legyen $2 \leq M \leq N$ rögzített egész szám.*

$$\mathbb{E}\{C_{n,M} | \mathcal{F}_{n-1}\} = \rho_{n-1} C_{n-1,M} + X, \quad (1.23)$$

ahol

$$\begin{aligned} \rho_{n-1} &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k (1 - r_k) \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}}, \\ X &= \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]. \end{aligned} \quad (1.24)$$

A következő tétel a $\frac{C_{n,M}}{n}$ hányados majdnem biztos konvergenciájáról szól, amint $n \rightarrow \infty$.

1.15. TÉTEL. *Legyen $p_0 < 1$. Ekkor minden rögzített M , $2 \leq M \leq N$ esetén*

$$\frac{C_{n,M}}{n} \rightarrow X \quad (1.25)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol X -et az 1.14. Lemmában definiáltuk.

Az 1.2. Tételben meghatároztuk a csúcsok súlyainak és foksámainak együttes eloszlását. Most megadjuk ezen együttes eloszlás egy reprezentációját.

A csúcsok és a foksók együttes eloszlása. Legyen a W valószínűségi változó eloszlása $\mathbb{P}(W = w) = x_w, w = 1, 2, \dots$, ahol az x_w értékeket az 1.11. Lemmában definiáltuk. Legyenek $\xi_1 \equiv N - 1$ és $\xi_2, \xi_3, \dots$ egymástól és W -től is független valószínűségi változók az alábbi eloszlással.

$w \geq 2$ esetén legyen

$$\mathbb{P}(\xi_w = k) = \frac{\alpha_k (w - 1)}{\alpha (w - 1) + \beta}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 2,$$

$$\mathbb{P}(\xi_w = N - 1) = \frac{\alpha_{N-1} (w - 1) + \beta}{\alpha (w - 1) + \beta}.$$

Jelölje S_w a fent megadott ξ_i valószínűségi változókból képzett w tagú összeget, azaz legyen $S_w = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_w$.

1.16. TÉTEL. Minden $w = 1, 2, \dots, d = N - 1, N, \dots, (N - 1)w$ esetén

$$\mathbb{P}(S_w = d, W = w) = x_{d,w}.$$

Az együttes eloszlás aszimptotikus viselkedését jellemzi az alábbi eredmény.

1.17. TÉTEL. Legyen $\alpha_0 > 0, \alpha \neq \alpha_0$ és tegyük fel, hogy teljesül az (1.11) feltétel. Ekkor

$$x_{d,w} = x_w \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi \left(\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right)^2 \right) w}} \times \left[\exp \left(-\frac{(d - \mathbb{E}S_w)^2}{2\mathbb{D}^2 S_w} \right) + O \left(w^{-\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (1.26)$$

amint $w \rightarrow \infty$, ahol a hibateg $O \left(w^{-\frac{1}{2}} \right)$ nem függ d -től.

2. fejezet

Egy speciális eset: az N -pontos modell

Legyen $N \geq 3$ rögzített egész szám, $0 \leq p_i \leq 1$, $0 \leq r_i \leq 1$ ($i = 0, 1$), $p_j = r_j = 0$ ($j = 2, \dots, N-1$). A továbbiakban az 1. fejezetben definiált és tanulmányozott $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ modell egy speciális esetével, a $G(N, p_0, p_1, r_0, r_1)$ (azaz az N -pontos) modellel foglalkozunk részletesebben. Az N -pontos modell fejlődése során az egyes lépésekben vagy egy előre adott p_1 valószínűséggel 1 új csúcs csatlakozik a gráfhoz, mely $N-1$ régi csúccsal lép interakcióba (**Step NEW₁**), vagy pedig p_0 valószínűséggel nem születik új csúcs és N régi csúcs formál N -klikket (**Step OLD**). Mindkét lehetséges lépés esetén r_i valószínűséggel a preferential attachment szabály szerint súlyarányosan választunk egy $(N-i)$ -klikket a már létezőek közül, míg $1-r_i$ valószínűséggel egyenletesen történik az interakcióban résztvevő $N-i$ régi csúcs kiválasztása ($i = 0, 1$). A fejezetben ismertetett eredmények Fazekas és Porvázsnyik (2016a,b) cikkeiben

kerültek közlésre.

2.1. Fő eredmények az N -pontos modellre

Legyen $1 \leq M \leq N$ rögzített egész szám. Ebben a részben ismertetni fogjuk az N -pontos modellre vonatkozó fő eredményeinket. Az itt bemutatott eredmények, a 2.6. Tétel kivételével, Backhausz és Móri (2012, 2014) háromszöges modellre vonatkozó eredményeinek kiterjesztése az N -pontos modellre.

2.1.1. Az N -pontos modell skálafüggetlensége

Az első tétel a d fokú és w súlyú csúcsok arányának 1 valószínűségű konvergenciájáról szól.

2.1. TÉTEL. (*Fazekas és Porvázsnyik, 2016b, Theorem 1.*) Legyen $\alpha_1 > 0$. Minden rögzített w és d esetén, ahol $1 \leq w$ és $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$,

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (2.1)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol az $x_{d,w}$ határértékek rögzített nemnegatív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{ha } d \neq N - 1, \quad (2.2)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_0 (w - 1) x_{d,w-1} + \alpha_1 (w - 1) x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1}] \quad (2.3)$$

ha $w \geq 2$, $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$. Továbbá $x_{d,w} = 0$ esetén $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$, ahol a egy pozitív szám, mely w -től és d -től is függhet. Ha $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$ nem teljesül, akkor $x_{d,w} = 0$.

2.2. MEGJEGYZÉS. Minden $N \geq 3$ esetén létezik olyan (d, w) pár, $1 \leq w$, $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$, melyre $x_{d,w}$ pozitív. Továbbá minden $N \geq 4$ esetén létezik olyan (d, w) pár, $1 \leq w$, $N - 1 \leq d \leq (N - 1)w$, melyre a fenti tételben megadott rekurzió alapján $x_{d,w} = 0$.

A következő tétel a csúcsok súlyainak skálafüggetlenségét mondja ki.

2.3. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016b, Theorem 2.) Legyen $\alpha_1 > 0$. Minden $w = 1, 2, \dots$ esetén

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w \quad (2.4)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. Az x_w , $w = 1, 2, \dots$ határértékek pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w - 1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1. \quad (2.5)$$

Továbbá

$$x_w \sim C w^{-(1 + \frac{1}{\alpha})} \quad (2.6)$$

$w \rightarrow \infty$ esetén, ahol $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$.

Rögzített $2 \leq M \leq N$ esetén az M -klikkek súlyeloszlásának skálafüggetlenségéről szól a következő eredmény.

2.4. TÉTEL. Legyen $\alpha_1 > 0$. Ekkor minden rögzített M és w , $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n, M}} \rightarrow c_{M, w} \quad (2.7)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén. A $c_{M, w}$, $w = 1, 2, \dots$ határértékek rögzített pozitív számok, melyek teljesítik az alábbi rekurziót:

$$c_{M, 1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M, w} = \frac{(w-1)a_M}{wa_M + 1} c_{M, w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (2.8)$$

ahol az a_M mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk. A $c_{M, 1}, c_{M, 2}, \dots$ sorozat egy valódi diszkrét valószínűségeloszlás. Továbbá

$$c_{M, w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} \quad (2.9)$$

$w \rightarrow \infty$ esetén.

A fokszámoszlás skálafüggetlenségét mondja ki a következő tétel.

2.5. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016b, Theorem 3.) Legyen $\alpha_1 > 0$. Ekkor minden $d \geq N - 1$ esetén

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d, w}. \quad (2.10)$$

Továbbá

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha_1 \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} d\right)^{-\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (2.11)$$

$d \rightarrow \infty$ esetén.

2.1.2. A súlyok és foks számok aszimptotikus viselkedése

Ebben a fejezetben ismertetjük a klikkeket jellemző súlyok, valamint a csúcsokat jellemző foks számok aszimptotikus viselkedésére vonatkozó eredményeinket.

Az $n = 0$ lépésben a kiinduló N csúcs teljes gráf $\binom{N}{M}$ M -klikket tartalmaz. Legyen ezen M -klikkek címkéje $0, -1, \dots, -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$. Ezt követően az új M -klikkek címkéje legyen $1, 2, \dots$ a születési sorrendjüknek megfelelően. Legyen $j \geq -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$ rögzített egész szám. Jelölje $W[n, M, j]$ a j -edik M -klikk súlyát az n -edik lépés után. Jelölje továbbá $D[n, j]$ a j -edik csúcs foks számát az n -edik lépés után. (Ha $n < j$, akkor $W[n, 1, j] = D[n, j] = 0$.)

Az $n = 0$ kezdeti időpontban adott N csúcsú teljes gráf szimmetrikus. Ezért és a gráf evolúciós mechanizmusa miatt elegendő, ha a $W[n, M, j]$ és $D[n, j]$ mennyiségeket csak $j = 0, 1, 2, \dots$ esetén vizsgáljuk.

Az alábbi tétel egy rögzített M -klikk súlyának aszimptotikus viselkedését írja le.

2.6. TÉTEL. *(Fazekas és Porvázsnayik, 2016a, Theorem 2.3.) Legyen $j \geq 0$ és $1 \leq M \leq N$ rögzített egész szám. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. Ekkor*

$$W[n, M, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + a_M)} \gamma_{M,j} n^{a_M} \quad (2.12)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $\gamma_{M,j}$ egy pozitív valószínűségi változó és az a_M mennyiséget (1.1)-ben definiáltuk.

$M = 1$ esetén a 2.6. Tétel egy rögzített csúcs súlyának aszimptotikus viselkedését adja meg.

2.7. KÖVETKEZMÉNY. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Corollary 2.4.) Legyen $j \geq 0$ rögzített egész szám és legyen $\alpha > 0$. Ekkor

$$W[n, 1, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.13)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol $\gamma_{1,j}$ egy pozitív valószínűségi változó.

Tekintsük most egy rögzített csúcs fokszámsorozatát. Az alábbi tétel ennek a sorozatnak az aszimptotikus viselkedését írja le.

2.8. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.5.) Legyen $j \geq 0$ rögzített egész szám és legyen $\alpha > 0$. Ekkor

$$D[n, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.14)$$

majdnem biztosan $n \rightarrow \infty$ esetén, ahol a $\gamma_{1,j}$ pozitív valószínűségi változót (2.13)-ben definiáltuk.

A következő két tétellel a maximális súly és a maximális foksám aszimptotikus viselkedését jellemezzük.

Jelölje $\mathcal{W}_n$ a maximális súlyú csúcs súlyát n lépés után, azaz legyen

$$\mathcal{W}_n = \max\{W[n, 1, j] : -(N - 1) \leq j \leq n\}. \quad (2.15)$$

2.9. TÉTEL. (Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.6.) Legyen $\alpha > 0$. Ekkor

$$\mathcal{W}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \mu n^\alpha \quad \text{majdnem biztosan } n \rightarrow \infty \quad (2.16)$$

esetén, ahol $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N - 1)\}$ egy véges pozitív valószínűségi változó és $\gamma_{1,j}$ -t (2.13)-ben definiáltuk.

Jelölje $\mathcal{D}_n$ a maximális fokszámot n lépés után, azaz legyen

$$\mathcal{D}_n = \max\{D[n, j] : -(N-1) \leq j \leq n\}. \quad (2.17)$$

2.10. TÉTEL. (*Fazekas és Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.7.*) Legyen $\alpha > 0$. Ekkor

$$\mathcal{D}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \mu n^\alpha \quad \text{majdnem biztosan } n \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

esetén, ahol $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N-1)\}$ a 2.9. Tételben megadott pozitív valószínűségi változó.

2.11. MEGJEGYZÉS. Azt vehetjük észre, hogy a fenti eredményekben csak az α_0 és az α_1 együttthatók tűnnek fel. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy az aszimptotikus viselkedésre nincsenek hatással az egyenletes választáshoz kapcsolódó β_0 és β_1 paraméterek.

2.12. MEGJEGYZÉS. A 2.7. Következmenyt és a 2.8. Tételt összevetve azt láthatjuk, hogy a j -edik csúcs súlyának és fokszámanak aszimptotikus aránya nem más, mint a régi csúcsok várható súlynövekedésének és várható fokszámnövekedésének aránya egy lépés során abban az esetben, ha a preferential attachment szabály szerint történik a választás. Hasonló állítás igaz a maximális súly és a maximális fokszaam aszimptotikus arányára is.

2.13. MEGJEGYZÉS. Jelölje τ_n azon csúcsok címkéinek maximumát, amelyek a maximális súlyt elérik, azaz legyen

$$\tau_n = \max\{j : W[n, 1, j] = \mathcal{W}_n\}.$$

Ekkor a $\tau_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ sorozat korlátos majdnem minden rögzített ω elemi eseményre. Hasonló állítás mondható ki a fokszaamokra is.

2.2. Segéderedmények II.

Ebben a fejezetben az N -pontos modellre vonatkozó azon további eredményeinket ismertetjük, melyeket az 2.1.2 fejezetben szereplő fő eredmények bizonyításai során alkalmaztunk. A bizonyítások során több esetben alkalmazzuk Backhausz and Móri (2012, 2014) módszerét. Megjegyezzük azonban, hogy a kombinatorikai problémák az általános N -pontos modellre jóval nehezebbek, mint azok az $N = 3$ esetben.

Vezessük be az alábbi jelöléseket. Legyen $j \geq 0$ és $1 \leq M \leq N$ rögzített egész szám. Legyen $I[n, M, j]$ annak az eseménynek az indikátora, hogy a j -edik M -klick létezik n lépés után, azaz legyen

$$I[n, M, j] = \begin{cases} 1, & \text{ha } W[n, M, j] > 0, \\ 0, & \text{ha } W[n, M, j] = 0. \end{cases}$$

Minden rögzített pozitív j, k, l, M , $0 \leq j \leq l$, $1 \leq k$, $1 \leq M \leq N$ egész szám esetén tekintsük a következő sorozatokat:

$$b[n, M, k] = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_M k}{i} \right)^{-1}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} d[n, M, k, j] &= \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, M, k] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_i}{M}} b_M \left(\begin{matrix} W[i, M, j] + k - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$e_{n,M} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_M}{i} \right)^{-1}. \quad (2.21)$$

A következő lemmákban definiált folyamatok fontos szerepet játszanak a 2.6. Tétel bizonyításában.

2.14. LEMMA. *Legyenek j, k, l, M , $0 \leq j \leq l$, $1 \leq M \leq N$ rögzített nemnegatív egész számok és legyen*

$$Z[n, M, k, j, l] = \left(b[n, M, k] \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} + d[n, M, k, j] \right) I[l, M, j]. \quad (2.22)$$

Ekkor $(Z[n, M, k, j, l], \mathcal{F}_n)$ martingál $n \geq l$ esetén.

2.15. LEMMA. *Legyenek j, k, M , $0 \leq j \leq k$, $1 \leq M \leq N$ rögzített nemnegatív egész számok. A következő sorozat nemnegatív szupermartingál.*

$$\left(\frac{e_{n,M} I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1}, \mathcal{F}_n \right), \quad n = j, j+1, \dots \quad (2.23)$$

Jelölje $D[n, j]$ a j -edik csúcs foksámát n lépés után.

2.16. LEMMA. *Legyen $j \geq 0$ rögzített egész szám. Ekkor $n \geq k$ esetén*

$$\begin{aligned} I[k, 1, j] \left(D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} \right) &\leq \mathbb{E}\{I[k, 1, j] D[n+1, j] | \mathcal{F}_n\} = \\ &= I[k, 1, j] \left(D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} + T_n \right), \end{aligned}$$

ahol $0 \leq T_n \leq (N-1) \frac{p_1 \beta}{V_n}$.

Az alábbi lemma fontos szerepet játszik a maximális súly aszimptotikus viselkedésének meghatározásában.

2.17. LEMMA. Minden rögzített nemnegatív egész $k \geq 0$, $1 \leq m \leq n$ esetén legyen

$$S[m, n, k] = \sum_{j=m}^n \mathbb{E} \left(b[n, 1, k] \binom{W[n, 1, j] + k - 1}{k} I[n, 1, j] \right). \quad (2.24)$$

Ekkor létezik olyan C_k pozitív konstans, hogy

$$S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.25)$$

PhD Thesis

Asymptotic analysis of graph evolution models

Bettina Lívía Lukácsné Porvázsnyik

Supervisor: Dr. István Fazekas



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2018.

Introduction

Network theory is an actively studied and widely applied area of discrete probability theory. In the last few decades, several random graph models have been introduced to describe real-world networks. For a detailed overview of the theory of random graphs see Bollobás (2001), Newman, Barabási and Watts (2006), Durrett (2007), Newman (2010), Janson, Luczak and Rucinski (2000) and van der Hofstad (2017).

History and aims. Empirical results show that a main common characteristic of real-world networks is their scale-free nature, in other words the power law degree distribution, see e.g. Barabási and Albert (1999), Albert and Barabási (2002), Durrett (2007), van der Hofstad (2017). Scale-free property means that the asymptotic degree distribution has a power law tail, that is the relative frequency of vertices of degree k converges (almost surely) to q_k , where $q_k \sim Ck^{-\gamma}$ as $k \rightarrow \infty$, C and γ are appropriate constants. Here the degree exponent gamma is called the characteristic exponent. In most cases $\gamma \in (2, 3)$, usually $\gamma \in (2, \infty)$.

To describe this phenomenon, Barabási and Albert (1999) suggested the preferential attachment model. In this model at each time step $n = 2, 3, \dots$ a new vertex with m new edges is added to the

graph so that the edges link the new vertex to m existing vertices randomly. The probability that an existing vertex is chosen is proportional the connectivity of that vertex. It is called the preferential attachment rule. Barabási and Albert (1999) gave an informal description of the evolution of the graph. A rigorous definition of the preferential attachment model and a mathematical proof of its scale-free property was presented for $d \leq n^{\frac{1}{15}}$ (d is the degree, n is the number of steps) by Bollobás, Riordan, Spencer and Tusnády (2001).

In the last two decades, various modifications of the preferential attachment model were investigated. Cooper and Frieze (2003) introduced a very general model of web graphs. In this model existing vertices can be chosen according to the preferential attachment rule or uniformly as well. Backhausz and Móri (2012, 2014) defined a random graph evolution mechanism based on the interaction of 3 vertices. In this model vertices have positive weights which increase during the evolution procedure. Using martingale methods Backhausz and Móri proved power law degree and weight distributions of vertices in the three-interactions model. Instead of the three-interactions model, Fazekas and Porvázsnyik (2013, 2016a,b) studied an evolution rule based on the interaction of N vertices ($N \geq 3$ fixed integer). They extended certain results of Backhausz and Móri and proved scale-free properties both for the degrees and the weights of vertices in the N -interactions model.

Besides the degree distribution, other characteristics are also worth studying. The degree of a fixed vertex and the maximal degree in some preferential attachment models were investigated by van der Hofstad (2017), Katona and Móri (2006) and Lindholm and Vallier (2011). A well-known technique to investigate the growth of the

maximal degree is Móri's martingale method, see Móri (2002, 2005), Durrett (2007) and van der Hofstad (2017). Backhausz and Móri (2012, 2014) described the asymptotic behaviour of the weight and the degree of a fixed vertex, the limits of the maximal weight and the maximal degree in the three-interactions model. Fazekas and Porvásznyik (2016a) extended the above results to the N -interactions model. Moreover, they also studied the asymptotic behaviour of the weight of a fixed M -clique, where $1 \leq M \leq N$ is a fixed integer.

In this Ph. D thesis we define and examine a new evolving random graph model. Our aim is to study the asymptotic behaviour of the graph. The results presented in this dissertation are joint work with István Fazekas. The dissertation consists of two parts. In the first part (Chapter 1) we give the mathematical definition of a new random graph evolution mechanism which yields a general random graph model. We present our main results and prove scale-free property for our model. In the second part of the dissertation (Chapter 2) we examine the N -interactions model which is a particular case of the random graph model introduced in Chapter 1. The proofs presented in this dissertation are based on discrete time martingale theory.

Chapter 1

A model based on the interaction of cliques

1.1 The definition and the basic properties of the model

Let $N \geq 3$ be a fixed integer. For the sake of simplicity, a complete graph with N vertices is called an N -clique.

The model. Initially, at time $n = 0$, we start with N vertices which form an N -clique. Let the initial weight of this graph and the initial weights of its sub-cliques ($\binom{N}{2}$ edges, $\dots$, $\binom{N}{M}$ M -cliques ($M \leq N$)) be equal to one. The evolution mechanism of the graph is defined as follows. The graph is growing in discrete time steps. At each time step $n = 1, 2, \dots$ we consider N vertices which will interact. The *interaction* of N vertices means that we draw all (non-existing) edges between those vertices and we obtain an N -clique. During the evolution procedure, at each step the initial weights of

the new cliques determined by the interacting vertices be equal to 1, and the weights of the existing cliques which take part in the interaction are increased by 1. At each step, the weight of an M -clique ($1 \leq M \leq N$) is increased by 1 if and only if it takes part in an interaction. Moreover, when the weight of a clique C_M is increased by 1 then the weights of all sub-cliques in C_M are increased by 1. We emphasize that in this model we consider only that complete graph to be a clique, which is constructed by interactions of its vertices.

At each time step, we select N vertices to interact. At every step, there are several possibilities for the selection.

Step NEW $_k$: with probability p_k ($1 \leq k \leq N - 1$), a new k -clique is added to the graph that interact with $N - k$ old vertices and they together form an N -clique. To choose the $N - k$ old vertices we have two possibilities.

- **Choice PA:** With probability r_k , ($1 \leq k \leq N - 1$), we choose out an $(N - k)$ -clique from the existing $(N - k)$ -cliques according to the weights of the $(N - k)$ -cliques. It means that an $(N - k)$ -clique of weight w_t is chosen with probability $w_t / \sum_h w_h$.
- **Choice UNI:** With probability $1 - r_k$, we choose $N - k$ out of the existing vertices uniformly, that is, all groups of $N - k$ vertices have the same chance to be chosen (uniform choice).

Step OLD: with probability p_0 , we do not add any new vertex but N old vertices will be selected and they will interact. As in the previous case, we have two options to choose the N old vertices.

- **Choice PA:** With probability r_0 , we choose one N -clique out of the existing N -cliques according to their weights (preferential attachment rule).

- **Choice UNI:** With probability $1 - r_0$, we choose from the existing vertices uniformly, that is all subsets consisting of N vertices have the same chance (uniform choice).

Here the probabilities p_k and r_k , $0 \leq p_k, r_k \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ are fixed with $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$. Using the above notation, we will denote our model by $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$.

REMARK 1.1. By the evolution mechanism it is easy to see that in this model when the choice is **UNI** new edges can be created between old vertices.

The asymptotic equality of two functions $f(x)$ and $g(x)$, $g(x) \neq 0$ means that $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1.2 Main results

In this section we present our main results for the random graph model $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$. We will see that in this model the weight distributions and under some reasonable condition the degree distribution are also scale-free.

Introduce the following notation.

$$\alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k, \quad \text{where} \quad \alpha_k = \frac{N-k}{N} p_k r_k,$$

$$\beta = \frac{1}{A} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k, \quad \text{where} \quad \beta_k = (N-k) p_k (1-r_k) \quad \text{and} \quad A = \sum_{k=0}^{N-1} k p_k,$$

$$a_M = \sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}, \quad b_M = \sum_{k=0}^{N-M} \beta_k \frac{\binom{N-M}{k}}{\binom{N-1}{k}}. \quad (1.1)$$

Let us denote by V_n the number of vertices after the n th step. Let us denote by $X(n, d, w)$ the number of vertices of weight w and degree d after the n th step. The following theorem is a basic result on the almost sure convergence of the ratio $\frac{X(n, d, w)}{V_n}$.

THEOREM 1.2. *Let $\alpha \neq \alpha_0$. For any fixed w and d with $1 \leq w$ and $N-1 \leq d \leq w(N-1)$, we have*

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (1.2)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $x_{d,w}$ are fixed non-negative numbers. Moreover, the limits $x_{d,w}$ satisfy the following recurrence:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{for } d \neq N-1, \quad (1.3)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k (w-1) x_{d-k,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1} \right] \quad (1.4)$$

for $w \geq 2$, $N-1 \leq d \leq w(N-1)$. If $N \geq 3$ and $w > 1$ are fixed, then there exists d with $N-1 \leq d \leq w(N-1)$ such that $x_{d,w}$ is positive. In the cases when $x_{d,w} = 0$, we have $\frac{X(n,d,w)}{V_n} = o(n^{-a})$, where a is a positive number which may depend on w and d . If $N-1 \leq d \leq w(N-1)$ is not satisfied, then $x_{d,w} = 0$.

Let M be a fixed integer, $1 \leq M \leq N$. The following two theorems are about the scale-free property of the weights.

Let $M = 1$ and let $X(n, w)$ denote the number of vertices of weight w after n steps. Next theorem is about the scale-free property for the weights of vertices.

THEOREM 1.3. *Let $\alpha \neq \alpha_0$. Then for all $w = 1, 2, \dots$ we have*

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w \quad (1.5)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where x_w , $w = 1, 2, \dots$ are positive numbers satisfying the recurrence relation

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w-1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{for } w > 1. \quad (1.6)$$

Moreover,

$$x_w \sim C w^{-(1+\frac{1}{\alpha})} \quad (1.7)$$

as $w \rightarrow \infty$, with $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$.

Now, consider the cases when $2 \leq M \leq N$ is a fixed integer. Let $w \geq 1$ and let $C(n, M, w)$ denote the number of M -cliques with weight w after n steps. Let $C_{n,M}$ denote the number of already existing M -cliques after n steps. The following theorem is about the scale-free property of the weights of the M -cliques.

THEOREM 1.4. *Let $\alpha \neq \alpha_0$ and $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$. Then for any fixed M and w , $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$, we have*

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n,M}} \rightarrow c_{M,w} \quad (1.8)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $c_{M,w}$, $w = 1, 2, \dots$ are fixed positive numbers satisfy the following recurrence:

$$c_{M,1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M,w} = \frac{(w-1)a_M}{wa_M + 1} c_{M,w-1}, \quad \text{for } w > 1, \quad (1.9)$$

where a_M was defined in (1.1). The sequence $c_{M,1}, c_{M,2}, \dots$ is a proper discrete probability distribution. Furthermore,

$$c_{M,w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} \quad (1.10)$$

as $w \rightarrow \infty$.

Let us denote by $U(n, d)$ the number of vertices of degree d after n steps. Let us denote by $\gcd\{A\}$ the greatest common divisor of the elements of the set A . We show that under some reasonable conditions our model is scale-free in the usual sense.

THEOREM 1.5. *Let $\alpha_0 > 0$, $\alpha \neq \alpha_0$ and assume that*

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N-1\} = 1. \quad (1.11)$$

Then, for any $d \geq N - 1$ we have

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w} \quad (1.12)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where u_d , $d = N - 1, N, \dots$ are positive numbers. Furthermore,

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\sum_{k=1}^{N-1} k\alpha_k} d\right)^{-(1+\frac{1}{\alpha})}, \quad (1.13)$$

as $d \rightarrow \infty$.

REMARK 1.6. It is easy to see that the characteristic exponents for the weights and the degrees of vertices are the same.

1.3 Auxiliary results I.

Here we list our further results which are used in the proofs of the main results presented in Section 1.2.

Next lemma gives the probability that an old M -clique with weight w takes part in the interaction at step n .

LEMMA 1.7. *The probability that a fixed M -clique, $1 \leq w, 1 \leq M \leq N$, with weight w takes part in the interaction at the n th ($n \geq w$) step is*

$$p(n, M, w) = \frac{w}{n} a_M + \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_{n-1}}{M}} b_M, \quad (1.14)$$

where a_M and b_M were defined in (1.1).

REMARK 1.8. For $M = 1$, Lemma 1.7. states the following. The probability that an old vertex of weight w takes part in the interaction at the n th step is

$$p(n, 1, w) = \frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta. \quad (1.15)$$

Let $\mathcal{F}_n$ denote the sigma-algebra of observable events after the n th step. We compute the conditional expected value of $X(n, d, w)$ with respect to $\mathcal{F}_{n-1}$, where $X(n, d, w)$ denotes the number of vertices of weight w and degree d after n steps.

THEOREM 1.9.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X(n, d, w) | \mathcal{F}_{n-1}\} &= X(n-1, d, w) \left[1 - \left(\frac{w}{n} \alpha + \frac{A}{V_{n-1}} \beta \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} X(n-1, d-k, w-1) \left[p_k r_k \frac{(N-k)(w-1)}{Nn} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=0}^k p_m (1 - r_m) \frac{\binom{V_{n-1}-d+k-1}{k-m} \binom{d-k}{N-k-1}}{\binom{V_{n-1}}{N-m}} \Big] + A \delta_{d, N-1} \delta_{w,1} \quad (1.16)$$

for $w \geq 1$ and $N-1 \leq d \leq (N-1)w$, where $\delta_{k,l}$ denotes the Kronecker-delta.

The random variables defined in the following lemma play important role in the dissertation.

LEMMA 1.10. *Let $p_0 < 1$ and let $1 \leq M \leq N$ be a fixed integer. Let*

$$c(n, M, w) = \prod_{i=w}^n (1 - p(i, M, w))^{-1}, \quad n \geq w, w \geq 1. \quad (1.17)$$

Then $c(n, M, w)$ is an $\mathcal{F}_{n-1}$ -measurable random variable,

$$c(n, 1, w) \sim a_{1,w} n^{a_1 w + \beta} \quad (1.18)$$

and

$$c(n, M, w) \sim a_{M,w} n^{a_M w}, \quad \text{for } 2 \leq M \leq N \quad (1.19)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where a_M was defined in (1.1) and $a_{M,w}$ is a positive random variable.

Our next result characterize the limits x_w , $w = 1, 2, \dots$ defined in Theorem 1.3.

LEMMA 1.11. *Let $p_0 < 1$ and let*

$$x_w = x_{N-1,w} + x_{N,w} + \dots + x_{(N-1)w,w}, \quad w = 1, 2, \dots, \quad (1.20)$$

where $x_{d,w}$ was defined in Theorem 1.2. Then x_w , $w = 1, 2, \dots$ are positive numbers satisfying the recurrence relation (1.6). x_w , $w = 1, 2, \dots$ is a discrete probability distribution. Moreover, $x_{d,w}$, $d =$

$N - 1, N, \dots, (N - 1)w$, $w = 1, 2, \dots$ is a two-dimensional discrete probability distribution.

Let $2 \leq M \leq N$ be a fixed integer. Let $w \geq 1$. The following theorem gives the conditional expectation of $C(n, M, w)$ with respect to $\mathcal{F}_{n-1}$, where $C(n, M, w)$ is the number of M -cliques with weight w after n steps.

THEOREM 1.12. *For any fixed M , $2 \leq M \leq N$, we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{C(n, M, w) | \mathbb{F}_{n-1}\} &= (1 - p(n, M, w)) C(n - 1, M, w) + \\ &+ p(n, M, w - 1) C(n - 1, M, w - 1) + \delta_{1,w} R_n, \end{aligned} \quad (1.21)$$

where

$$\begin{aligned} R_n = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} - \right. \\ \left. - (1 - r_k) C_{n-1, M} \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}} \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

and $\delta_{1,w}$ denotes the Kronecker-delta.

The following theorem shows that $C(n, M, w)$ normalized by n (the number of steps) converges almost surely as $n \rightarrow \infty$.

THEOREM 1.13. *Let $p_0 < 1$ and $\sum_{k=0}^{N-M} \alpha_k > 0$. For any fixed M and w with $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$, we have*

$$\frac{C(n, M, w)}{An} \rightarrow x_{M,w}$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $x_{M,w}$ are fixed positive numbers, satisfy the following recurrence:

$$x_{M,1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]}{A(a_M + 1)} > 0,$$

$$x_{M,w} = \frac{a_M(w-1)}{a_M w + 1} x_{M,w-1}, \quad \text{for } w > 1, \quad (1.23)$$

where a_M was defined in (1.1).

Consider $C_{n,M}$ that is the number of already existing M -cliques after n steps. Lemma 1.14. gives the conditional expected value of $C_{n,M}$ with respect to $\mathcal{F}_{n-1}$.

LEMMA 1.14. *Let $2 \leq M \leq N$ be a fixed integer. Then*

$$\mathbb{E}\{C_{n,M} | \mathbb{F}_{n-1}\} = \rho_{n-1} C_{n-1,M} + X, \quad (1.24)$$

where

$$\begin{aligned} \rho_{n-1} &= 1 - \sum_{k=0}^{N-1} p_k (1 - r_k) \frac{\binom{V_{n-1}-M}{N-k-M}}{\binom{V_{n-1}}{N-k}}, \\ X &= \sum_{k=0}^{N-1} p_k \left[\binom{N}{M} - r_k \binom{N-k}{M} \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

The following theorem is about the almost sure convergence of the ratio $\frac{C_{n,M}}{n}$ as the number of steps n tends to ∞ .

THEOREM 1.15. *Let $p_0 < 1$. Then for any fixed M with $2 \leq M \leq N$, we have*

$$\frac{C_{n,M}}{n} \rightarrow X \quad (1.26)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where X was defined in Lemma 1.14.

Now we construct the following representation of the joint distribution of degrees and weights of vertices.

The joint distribution of degrees and weights of vertices. Let W be a random variable with distribution $\mathbb{P}(W = w) = x_w$, $w = 1, 2, \dots$,

where x_w was defined in Lemma 1.11. Let $\xi_1 \equiv N - 1$ and $\xi_2, \xi_3, \dots$ be independent random variables being independent of W , too. For $w \geq 2$ let ξ_w have the following distribution:

$$\mathbb{P}(\xi_w = k) = \frac{\alpha_k (w - 1)}{\alpha (w - 1) + \beta}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 2,$$

$$\mathbb{P}(\xi_w = N - 1) = \frac{\alpha_{N-1} (w - 1) + \beta}{\alpha (w - 1) + \beta}.$$

Introduce notation $S_w = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_w$.

THEOREM 1.16. *We have $\mathbb{P}(S_W = d, W = w) = x_{d,w}$ for all $w = 1, 2, \dots$, $d = N - 1, N, \dots, (N - 1)w$.*

The following theorem describes the asymptotic behaviour of the joint distribution of the degrees and the weights of vertices.

THEOREM 1.17. *Let $\alpha_0 > 0$, $\alpha \neq \alpha_0$. Assume that condition (1.11) is satisfied. Then*

$$\begin{aligned} x_{d,w} = x_w & \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi \left(\alpha \sum_{k=1}^{N-1} k^2 \alpha_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} k \alpha_k \right)^2 \right) w}} \times \\ & \times \left[\exp \left(-\frac{(d - \mathbb{E} S_w)^2}{2 \mathbb{D}^2 S_w} \right) + O \left(w^{-\frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

as $w \rightarrow \infty$, where the error term $O \left(w^{-\frac{1}{2}} \right)$ does not depend on d .

Chapter 2

The N -interactions model

Let $N \geq 3$ be a fixed integer, $0 \leq p_i \leq 1$, $0 \leq r_i \leq 1$ ($i = 0, 1$), $p_j = r_j = 0$ ($j = 2, \dots, N-1$). Here we examine the N -interactions model which is a particular case of the random graph model $G(N, p_0, \dots, p_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1})$ introduced in Chapter 1. In the N -interactions model at each step either with a given probability p_1 a new vertex is added to the graph which interacts with $N-1$ already existing vertices (**Step NEW₁**) or with probability p_0 the size of the graph does not change and N of the old vertices will interact (**Step OLD**). In both cases with probability r_i the interacting $(N-i)$ -clique is chosen from the existing $(N-i)$ -cliques according to the preferential attachment rule, whilst with probability $1-r_i$ the interacting old vertices are chosen uniformly ($i = 0, 1$). The theorems presented in this chapter are published in Fazekas and Porvázsnik (2016a,b).

2.1 Main results for the N -interactions model

Let $1 \leq M \leq N$ be a fixed integer. In this section we present our main results for the N -interactions model. The following theorems, except Theorem 2.5., are generalizations of certain results of Backhausz and Móri (2012, 2014).

2.1.1 Scale-free property for the N -interactions model

The following theorem is about the almost sure convergence of the ratio of vertices with fixed degree d and fixed weight w .

THEOREM 2.1. *(Fazekas and Porvácsnyik, 2016b, Theorem 1.) Let $\alpha_1 > 0$. For any fixed w and d , with $1 \leq w$ and $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ we have*

$$\frac{X(n, d, w)}{V_n} \rightarrow x_{d,w} \quad (2.1)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $x_{d,w}$ are fixed non-negative numbers. Furthermore, the numbers $x_{d,w}$ satisfy the following recurrence relation:

$$x_{N-1,1} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} > 0, \quad x_{d,1} = 0, \quad \text{for } d \neq N - 1, \quad (2.2)$$

$$x_{d,w} = \frac{1}{\alpha w + \beta + 1} [\alpha_0 (w - 1) x_{d,w-1} + \alpha_1 (w - 1) x_{d-1,w-1} + \beta x_{d-(N-1),w-1}] \quad (2.3)$$

for $w \geq 2$, $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$. Moreover, in the cases when $x_{d,w} = 0$ we have $\frac{X(n, d, w)}{V_n} = o(n^{-a})$, where a is a positive num-

ber that may depend on w and d . If $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ is not satisfied, then $x_{d,w} = 0$.

REMARK 2.2. If $N \geq 3$ and $w \geq 1$ are fixed, then there exists d with $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ such that $x_{d,w}$ is positive, and if $N \geq 4$ and $w \geq 1$, then there exists d with $N - 1 \leq d \leq w(N - 1)$ such that $x_{d,w}$ is equal to zero.

The following theorem is the scale-free property for the weights.

THEOREM 2.3. (Fazekas and Porvásznyik, 2016b, Theorem 2.) Let $\alpha_1 > 0$. Then for all $w = 1, 2, \dots$ we have

$$\frac{X(n, w)}{V_n} \rightarrow x_w \quad (2.4)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where x_w , $w = 1, 2, \dots$ are positive numbers satisfying the recurrence relation

$$x_1 = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}, \quad x_w = \frac{\alpha(w - 1) + \beta}{\alpha w + \beta + 1} x_{w-1}, \quad \text{for } w > 1. \quad (2.5)$$

Moreover,

$$x_w \sim C w^{-(1 + \frac{1}{\alpha})} \quad (2.6)$$

as $w \rightarrow \infty$, with $C = \Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right) / \left(\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$.

Let $2 \leq M \leq N$ be a fixed integer. The following theorem is about the scale-free weight distributions of M -cliques.

THEOREM 2.4. Let $\alpha_1 > 0$. Then for all M and w , $2 \leq M \leq N$, $w \geq 1$ we have

$$\frac{C(n, M, w)}{C_{n,M}} \rightarrow c_{M,w} \quad (2.7)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$. The limits $c_{M,w}$, $w = 1, 2, \dots$ are fixed positive numbers satisfying the recurrence relation

$$c_{M,1} = \frac{1}{a_M + 1}, \quad c_{M,w} = \frac{(w-1)a_M}{wa_M + 1} c_{M,w-1}, \quad \text{for } w > 1, \quad (2.8)$$

where a_M was defined in (1.1). $c_{M,1}, c_{M,2}, \dots$ is a discrete probability distribution. Moreover,

$$c_{M,w} \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)}{a_M} w^{-\left(1 + \frac{1}{a_M}\right)} \quad (2.9)$$

as $w \rightarrow \infty$.

In the N -interactions model the degree distribution is also scale-free.

THEOREM 2.5. (*Fazekas and Porvázsnyik, 2016b, Theorem 3.*) Let $\alpha_1 > 0$. Then for any $d \geq N - 1$ we have

$$\frac{U(n, d)}{V_n} \rightarrow u_d = \sum_w x_{d,w}. \quad (2.10)$$

Moreover,

$$u_d \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha_1 \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} d\right)^{-\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (2.11)$$

as $d \rightarrow \infty$.

2.1.2 The asymptotic behaviour of the weights and the degrees

Here we present our main results about the limiting behaviour of the weights and degrees in the N -interactions model.

At time $n = 0$, the initial complete graph on N vertices contains $\binom{N}{M}$ M -cliques. Let these M -cliques be labelled by $0, -1, \dots, -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$. When new M -cliques are born, they are labelled by $1, 2, \dots$. Let $j \geq -\left(\binom{N}{M} - 1\right)$ be a fixed integer. Let us denote by $W[n, M, j]$ the weight of the j th M -clique after the n th step. Let us denote by $D[n, j]$ the degree of the j th vertex after the n th step. (If $n < j$, then $W[n, 1, j] = D[n, j] = 0$.)

At time $n = 0$, the initial complete graph on N vertices is symmetric. Therefore and by the evolution mechanism of the graph, it is enough to examine $W[n, M, j]$ and $D[n, j]$ for $j = 0, 1, 2, \dots$.

The following theorem describes the asymptotic behaviour of the weight of a fixed M -clique.

THEOREM 2.6. (*Fazekas and Porvázsnyik, 2016a, Theorem 2.3.*) Let $j \geq 0$ and $1 \leq M \leq N$ be fixed. Assume that $\alpha > 0$. Then

$$W[n, M, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + a_M)} \gamma_{M,j} n^{a_M} \quad (2.12)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $\gamma_{M,j}$ is a positive random variable and a_M was defined in (1.1).

As a particular case with $M = 1$, the asymptotic behaviour of the weight of a fixed vertex is the following.

COROLLARY 2.7. (*Fazekas and Porvázsnnyik, 2016a, Corollary 2.4.*)

Let $j \geq 0$ be fixed and let $\alpha > 0$. Then

$$W[n, 1, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.13)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where $\gamma_{1,j}$ is a positive random variable.

Now we consider the limit of the degree sequence of a fixed vertex.

THEOREM 2.8. (*Fazekas and Porvázsnnyik, 2016a, Theorem 2.5.*) Let $j \geq 0$ be fixed and let $\alpha > 0$. Then

$$D[n, j] \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \gamma_{1,j} n^\alpha \quad (2.14)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where the positive random variable $\gamma_{1,j}$ is given in (2.13).

The following two theorems describe the asymptotic behaviour of the maximal weight and the maximal degree of vertices.

Let us denote by $\mathcal{W}_n$ the maximum of the weights of the vertices after n steps, that is

$$\mathcal{W}_n = \max\{W[n, 1, j] : -(N - 1) \leq j \leq n\}. \quad (2.15)$$

THEOREM 2.9. (*Fazekas and Porvázsnnyik, 2016a, Theorem 2.6.*) Let $\alpha > 0$. Then

$$\mathcal{W}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \mu n^\alpha \quad \text{almost surely as } n \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

where $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N - 1)\}$ is a finite positive random variable with $\gamma_{1,j}$ defined in (2.13).

Let us denote by $\mathcal{D}_n$ the maximal degree after n steps, that is

$$\mathcal{D}_n = \max\{D[n, j] : -(N - 1) \leq j \leq n\}. \quad (2.17)$$

THEOREM 2.10. (*Fazekas and Porvázsnayik, 2016a, Theorem 2.7.*)
 Let $\alpha > 0$. Then

$$\mathcal{D}_n \sim \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\alpha_1}{\alpha} \mu n^\alpha \quad \text{almost surely as } n \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

where $\mu = \sup\{\gamma_{1,j} : j \geq -(N-1)\}$ is the positive random variable defined in Theorem 2.8.

REMARK 2.11. We see that the asymptotic behaviour in the above theorems is not influenced by the uniform choice parameters β_0 and β_1 .

REMARK 2.12. If we compare Corollary 2.7. and Theorem 2.8., we see that the asymptotic ratio of the weight and the degree of vertex j is the ratio of the expected growth of the weights of the old vertices to the expected growth of the degrees of the old vertices during one step when the choice is PA. Similar observation is true for the asymptotic ratio of the maximal weight to the maximal degree.

REMARK 2.13. Let τ_n denote the maximum of the labels of those vertices where the maximal weight is attained, that is let

$$\tau_n = \max\{j : W[n, 1, j] = \mathcal{W}_n\}.$$

Then the sequence $\tau_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ is bounded for almost all fixed elementary events ω . A similar statement is valid for the degrees.

2.2 Auxiliary results II.

In this section we list some auxiliary results that we need to prove the main results presented in Section 2.1.2. In our proofs we follow some ideas of Backhausz and Móri (2012, 2014). However, the combinatorial problems for general N are much more difficult than for $N = 3$.

Introduce the following notation. Let $j \geq 0$ and $1 \leq M \leq N$ be fixed integers. Let $I[n, M, j]$ be the indicator of the event that the j th M -clique exists after n steps, that is

$$I[n, M, j] = \begin{cases} 1, & \text{if } W[n, M, j] > 0, \\ 0, & \text{if } W[n, M, j] = 0. \end{cases}$$

For all fixed positive integers $j, k, l, M, 0 \leq j \leq l, 1 \leq k, 1 \leq M \leq N$, we consider the following sequences:

$$b[n, M, k] = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_M k}{i} \right)^{-1}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} d[n, M, k, j] &= \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} b[i+1, M, k] \frac{\binom{N}{M}}{N \binom{V_i}{M}} b_M \left(\begin{matrix} W[i, M, j] + k - 1 \\ k - 1 \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$e_{n,M} = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_M}{i} \right)^{-1}. \quad (2.21)$$

The processes introduced in the following two lemmas play important role in the proof of Theorem 2.6.

LEMMA 2.14. *Let j, k, l, M , $0 \leq j \leq l$, $1 \leq M \leq N$ be fixed nonnegative integers and let*

$$Z[n, M, k, j, l] = \left(b[n, M, k] \binom{W[n, M, j] + k - 1}{k} + d[n, M, k, j] \right) I[l, M, j]. \quad (2.22)$$

Then $(Z[n, M, k, j, l], \mathbb{F}_n)$ is a martingale for $n \geq l$.

LEMMA 2.15. *Let j, k, M , $0 \leq j \leq k$, $1 \leq M \leq N$ be fixed nonnegative integers. The following sequence is a nonnegative supermartingale.*

$$\left(\frac{e_{n,M} I[k, M, j]}{W[n, M, j] - 1}, \mathbb{F}_n \right), \quad n = j, j+1, \dots \quad (2.23)$$

Let us recall that $D[n, j]$ denotes the degree of the j th vertex after n steps.

LEMMA 2.16. *Let $j \geq 0$ be fixed. For $n \geq k$, we have*

$$\begin{aligned} I[k, 1, j] \left(D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} \right) &\leq \\ &\leq \mathbb{E}\{I[k, 1, j] D[n+1, j] | \mathbb{F}_n\} = \\ &= I[k, 1, j] \left(D[n, j] + \alpha_1 \frac{W[n, 1, j]}{n+1} + T_n \right), \end{aligned}$$

where $0 \leq T_n \leq (N-1) \frac{p_1 \beta}{V_n}$.

The following lemma is used to study the maximal weight.

LEMMA 2.17. *For all fixed nonnegative integers $k \geq 0$, $1 \leq m \leq n$, let*

$$S[m, n, k] = \sum_{j=m}^n \mathbb{E} \left(b[n, 1, k] \binom{W[n, 1, j] + k - 1}{k} I[n, 1, j] \right). \quad (2.24)$$

Then there exists a positive constant C_k such that

$$S[m, n, k] \leq C_k \sum_{j=m}^n j^{-\alpha k}. \quad (2.25)$$

Bibliography

- R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1):47–97, 2002.
- Á. Backhausz and T. F. Móri. A random graph model based on 3-interactions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 36:41–52, 2012.
- Á. Backhausz and T. F. Móri. Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions. *Acta Math. Hungar.*, 143: 23–43, 2014.
- A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- B. Bollobás. *Random graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2001.
- B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer and G. Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- C. Cooper and A. Frieze. A general model of web graphs. *Random Structures Algorithms*, 22:311–335, 2003.

- R. Durrett. *Random graph dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model. *J. Probab. Stat.*, 2013. doi: 10.1155/2013/707960. Article ID 707960.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Limit theorems for the weights and the degrees in an N-interactions random graph model. *Open Mathematics*, 14(1):414–424, 2016a.
- I. Fazekas and B. Porvázsnyik. Scale-free property for degrees and weights in an N-interactions random graph model. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 214(1):69–82, 2016b.
- S. Janson, T. Luczak and A. Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- Zs. Katona and T. F. Móri. A new class of scale free random graphs. *Statist. Probab. Lett.*, 76(15):1587–1593, 2006.
- M. Lindholm and T. Vallier. On the degree evolution of a fixed vertex in some growing networks. *Statist. Probab. Lett.*, 81(6): 673–677, 2011.
- T. F. Móri. On random trees. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 39(1-2): 143–155, 2002.
- T. F. Móri. The maximum degree of the Barabási–Albert random tree. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3):339–348, 2005.

- M. Newman, A.-L. Barabási and D. J. Watts. *The structure and dynamics of networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2006.
- M. E. J. Newman. *Networks: an introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2010.
- R. van der Hofstad. *Random graphs and complex networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

A szerző publikációi / Publications of the author

A disszertáció alapjául szolgáló publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, Limit theorems for the weights and the degrees in an N -interactions random graph model. *Open Mathematics*, **14**(1), 414-424, 2016.
DOI: 10.1515/math-2016-0039
(IF: 0.682; Math.Rev.: MR3514903; Zbl 1346.05269; Scopus)
2. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, Scale-free property for degrees and weights in an N -interactions random graph model. *Journal of Mathematical Sciences*, NY, **214**(1), 69–82, 2016.
DOI: 10.1007/s10958-016-2758-5
(Math.Rev.: MR3476251; Zbl 1360.05153; Scopus)
3. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model. *Journal of Probability and Statistics*, Article ID 707960, 12 p. 2013.
DOI:10.1155/2013/707960
(Zbl 1307.05202; Scopus)

Közlésre benyújtott cikkek:

1. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, The asymptotic behaviour of an N -interactions random graph model. 2018.

Egyéb publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas, S. Pecsora and B. Porvázsnyik, General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence. *Journal of Mathematical Inequalities*, **12**(2), 433-446, 2018.
(IF: 0.777; Scopus)

-
2. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, A generalized allocation scheme. *Annales Mathematicae et Informaticae*, **39**, 57–70, 2012.
(Math.Rev.: MR2959881; Zbl 1265.60009; Scopus)
 3. I. Fazekas and B. Porvázsnyik, Some limit theorems for generalized allocation schemes. *Miskolc Mathematical Notes*, **16**(2), 817–832, 2015.
DOI: 10.18514/MMN.2015.1461
(IF: 0.388; Math.Rev.: MR3454145; Zbl 1349.60008; Scopus)
 4. J. Ferenczik, Á. Pintér and B. Porvázsnyik, On equal values of Stirling numbers of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, **218**:(3) pp. 980–984, 2011.
(IF: 1.317; Zbl 1237.05015; Scopus)

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. Fazekas, A. Perecsényi and B. Porvázsnyik, Numerical analysis of a network evolution model. In *2017 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom)*, pp. 171–174, 2017.
(Scopus)

A szerző konferencia előadásai / Talks held by the author

1. *The asymptotic behaviour of an N -interactions random graph model*, International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Debrecen, 2017. augusztus 25–29. (poszter)
2. *General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence*, International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Debrecen, 2017. augusztus 25–29. (poszter)
3. *The asymptotic behavior of a random graph model based on N -interactions*, 10th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2017. január 30–február 01.
4. *A random graph evolution procedure and asymptotic results*, 19th European Young Statisticians Meeting, Prága, Csehország, 2015. augusztus 31–szeptember 04.
5. *A new version of the generalized allocation scheme*, 11th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, Litvánia, 2014. június 30–július 04.
6. *The asymptotic behaviour of the weights and the degrees in an N -interactions random graph model*, 28th microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, Miskolc, 2014. április. 10–11.
7. *Scale-free property for the weights and the degrees in a preferential attachment random graph model*, Stochastic Activity Month 2014, Eurandom, Probability and Graphs, Eindhoven, Hollandia, 2014. január 05–11. (poszter)
8. *Scale-free property for degrees and weights in an N -interactions random graph model*, Statistics & Econometrics of Networks, Párizs, Franciaország, 2013. november 18–22. (poszter)

9. *A random graph model*, 18th Austrian, Croatian, Italian, Slovenian and Hungarian Meeting of Young Statisticians, Balatonfüred, 2013. október 11–13.
10. *Scale-free property in a random graph model based on N -interactions*, 29th European Meeting of Statisticians, Budapest, 2013. július 20–25.
11. *Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model*, XXVII. microCAD International Scientific Conference, Budapest, Miskolc, 2013. március 21–22.
12. *A generalized allocation scheme*, XXVI. microCAD International Scientific Conference, Budapest, Miskolc, 2012. március 29–30.
13. *A generalized allocation scheme*, Conference on Stochastic Models and their Applications, Debrecen, 2011. augusztus 22–24. (poszter)



Nyilvántartási szám: DEENK/276/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Lukácsné Porvázsnyik Bettina Livia

Neptun kód: WCDWB6

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10037388

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegén nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Limit theorems for the weights and the degrees in an N-interactions random graph model.
Open Math. 14 (1), 414-424, 2016. ISSN: 2391-5455.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1515/math-2016-0039>
IF: 0.682
2. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Scale-free property for degrees and weights in an N-interactions random graph model.
J. Math. Sci. NY. 214 (1), 69-82, 2016. ISSN: 1072-3374.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-016-2758-5>
3. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model.
J. Probab. Statist. 2013, 707960-[12], 2013. ISSN: 1687-952X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/707960>





További közlemények

Idegen nyelvű, külföldi könyvrészletek (1)

4. Fazekas, I., Perecsényi, A., **Porvázsnyik, B.**: Numerical analysis of a network evolution model.
In: 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications: CogInfoCom 2017 :
Proceedings : September 11-14, 2017 Debrecen, Hungary, IEEE Computer Society,
Piscataway, 171-174, 2017. ISBN: 9781538612644

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

5. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Some limit theorems for generalized allocation schemes.
Miskolc Math. Notes. 16 (2), 817-832, 2015. ISSN: 1787-2405.
DOI: <http://dx.doi.org/10.18514/MMN.2015.1461>
IF: 0.335
6. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: A generalized allocation scheme.
Ann. Math. Inf. 39, 57-70, 2012. ISSN: 1787-5021.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

7. Fazekas, I., Pecsora, S., **Porvázsnyik, B.**: General theorems on exponential and Rosenthal's
inequalities and on complete convergence.
J. Math. Inequal. 12 (2), 433-446, 2018. ISSN: 1846-579X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2018-12-32>
IF: 0.849 (2017)
8. Ferenczik, J., Pintér, Á., **Porvázsnyik, B.**: On equal values of Stirling numbers of the second kind.
Appl. Math. Comput. 218 (3), 980-984, 2011. ISSN: 0096-3003.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.088>
IF: 1.317

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 3,183

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
0,682**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.07.30.





Registry number:
Subject:

DEENK/276/2018.PL
PhD Publikációs Lista

Candidate: Livia Bettina Porvázsnyik Lukácsné

Neptun ID: WCDWB6

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10037388

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Limit theorems for the weights and the degrees in an N-interactions random graph model.
Open Math. 14 (1), 414-424, 2016. ISSN: 2391-5455.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1515/math-2016-0039>
IF: 0.682
2. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Scale-free property for degrees and weights in an N-interactions random graph model.
J. Math. Sci. NY. 214 (1), 69-82, 2016. ISSN: 1072-3374.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10958-016-2758-5>
3. Fazekas, I., **Porvázsnyik, B.**: Scale-free property for degrees and weights in a preferential attachment random graph model.
J. Probab. Statist. 2013, 707960-[12], 2013. ISSN: 1687-952X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/707960>





List of other publications

Foreign language international book chapters (1)

4. Fazekas, I., Perecsényi, A., **Porvázsnnyik, B.**: Numerical analysis of a network evolution model.
In: 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications: CogInfoCom 2017 :
Proceedings : September 11-14, 2017 Debrecen, Hungary, IEEE Computer Society,
Piscataway, 171-174, 2017. ISBN: 9781538612644

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

5. Fazekas, I., **Porvázsnnyik, B.**: Some limit theorems for generalized allocation schemes.
Miskolc Math. Notes. 16 (2), 817-832, 2015. ISSN: 1787-2405.
DOI: <http://dx.doi.org/10.18514/MMN.2015.1461>
IF: 0.335
6. Fazekas, I., **Porvázsnnyik, B.**: A generalized allocation scheme.
Ann. Math. Inf. 39, 57-70, 2012. ISSN: 1787-5021.

Foreign language scientific articles in international journals (2)

7. Fazekas, I., Pecsora, S., **Porvázsnnyik, B.**: General theorems on exponential and Rosenthal's
inequalities and on complete convergence.
J. Math. Inequal. 12 (2), 433-446, 2018. ISSN: 1846-579X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2018-12-32>
IF: 0.849 (2017)
8. Ferenczik, J., Pintér, Á., **Porvázsnnyik, B.**: On equal values of Stirling numbers of the second kind.
Appl. Math. Comput. 218 (3), 980-984, 2011. ISSN: 0096-3003.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.01.088>
IF: 1.317

Total IF of journals (all publications): 3,183

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0,682

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on
the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

30 July, 2018

