

**A HELYI ÉRTÉKES SZÁMRENDSZEREK OKTATÁSÁNAK
MÓDSZERTANI KÉRDÉSEI**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Sitkuné Görömbei Cecília
Témavezető: dr. Várterész Magda

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2013

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2013.

.....
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Sitkuné Görömbei Cecília* doktorjelölt 2002-2013 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2013.

.....
a témavezető aláírása

A HELYI ÉRTÉKES SZÁMRENDSZEREK OKTATÁSÁNAK MÓDSZERTANI KÉRDÉSEI

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika és számítástudományok tudományágban

Írta: Sitkuné Görömbei Cecília
okleveles matematika – pedagógia – számítástechnika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Várterész Magda

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Végh János
tagok:	Dr. Ambrus András
	Dr. Fazekas Gábor

A doktori szigorlat időpontja: 2009. december 7.

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.
tagok:	Dr.
	Dr.
	Dr.
	Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS.....	1
2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS	5
2.1. NEMZETKÖZI VIZSGÁLATOK	5
2.2. HAZAI VIZSGÁLATOK.....	6
2.3. SAJÁT KUTATÁSI EREDMÉNYEK	8
3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS	23
3.1. SZÁMFOGALOM.....	23
3.2. SZÁMRENDSZEREK.....	24
3.3. SZÁMÍRÁSOK	25
4. MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI HÁTTÉR.....	33
4.1. HELYI ÉRTÉKES SZÁMRENDSZEREK	33
4.2. ÁTTÉRÉS EGYIK SZÁMRENDSZERBŐL A MÁSIKBA	35
4.3. SZÁMÁBRÁZOLÁS SZÁMÍTÓGÉPEN.....	38
5. TANTERVI ELŐÍRÁSOK	43
5.1. A TARTALMI SZABÁLYOZÁS SZINTJEI	43
5.2. A SZÁMRENDSZEREK TÉMAKÖR A NAT-BAN.....	43
5.3. A SZÁMRENDSZEREK TÉMAKÖR A KERETTANTERVEKBEN	47
5.4. ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK.....	51
6. PEDAGÓGIAI, PSZICHOLÓGIAI VONATKOZÁSOK	53
6.1. PIAGET – AZ ÉRTELMI FEJLŐDÉS JELLEMZŐI.....	53
6.2. SKEMP – SZKÉMAELMÉLET.....	54
6.3. BRUNER – REPRESENTÁCIÓS ELMÉLET	55
6.4. DEHAENE – HÁRMAS KÓD MODELL	57
6.5. DIENES, VARGA – A MATEMATIKA TANULÁSÁNAK ELMÉLETE	57
7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK.....	59
7.1. AZ ALAPFOGALMAK KIALAKÍTÁSA	60
7.2. AZ ÁTVÁLTÁSOK ALGORITMUSAI	85
7.3. KAPCSOLAT KÜLÖNBÖZŐ ALAPSZÁMÚ SZÁMRENDSZEREK KÖZÖTT	95
7.4. A KETTES SZÁMRENDSZER SPECIÁLIS KONKRETIZÁCIÓI	97
7.5. A GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS ALAPFOGALMAINAK TANÍTÁSA	102
8. ÖSSZEGZÉS	113
9. SUMMARY	117
IRODALOMJEGYZÉK.....	121
PUBLIKÁCIÓS LISTA	131

1. BEVEZETÉS

Több mint húsz általános- és középiskolai matematika- és informatikaoktatásban eltöltött év után 2002-ben nyílt lehetőségem arra, hogy tapasztalataimat a főiskolai szintű matematika- és informatikatanár, továbbá a programozó matematikus képzésben a szakmódszertan és néhány bevezető informatikai tantárgy oktatása során kamatoztathassam. Munkám során azt tapasztaltam, hogy a hallgatók számára ezen kurzusok tudásanyagának elsajátítása során sokszor olyan alapvetőnek és eleminek vélt ismeretek hiánya okozza a legnagyobb gondot (Sitkuné - Falucskai, 2005), melyeket már az általános- és középiskolában meg kellett volna tanulni.

Például a Nyíregyházi Főiskolán a *Bevezetés az informatikába* tantárgy keretein belül a tananyag egy fontos része a számítógépes számábrázolás témakörhöz kapcsolódik. Az itt elsajátítandó fogalmak és algoritmusok megértése, helyes és pontos alkalmazásuk a helyi értékes számrendszerekkel kapcsolatos ismeretek, algoritmusok készségszintű alkalmazása nélkül nem kivitelezhető (Sitkuné, 2005a, 2005b, 2008a, 2008b, 2009a).

A kurzust lezáró sikertelen vizsgák jelentős aránya vizsgálódásra készítetett ezen a területen.

Az értekezés célja egyrészt bemutatni a *Bevezetés az informatikába* tantárgy oktatása során tapasztalt gyenge eredmények okait feltáró kutatást, másrészt ezzel összefüggésben összegyűjteni, rendszerezni, aktualizálni és új módszerekkel kiegészíteni a helyi értékes számrendszerek és a számítógépes számábrázolás témakörök különböző szintű oktatásával kapcsolatban fellelhető szakmódszertani megoldásokat. Mindeközben törekedtem a matematika és az informatika szakmódszertani vonatkozások szintetizálására, valamint az eredményesség mérhető javulását elősegítő módszertani javaslatok kidolgozására.

Az értekezés felépítése a következő: a második fejezetben a matematika és az informatika tantárgy oktatásának jelenlegi helyzetét bemutató elemzéssel együtt a hallgatókra vonatkozó saját vizsgálataimat mutatom be. A kutatás első évében a hallgatók tantárgyi eredményeit érettségi osztályzataikkal összefüggésben vizsgáltam. A kutatás második évében a hallgatók tudásának, gondolkodásának speciális területeit és tanulási attitűdjét tanulmányoztam (Sitkuné, 2009b, 2009c).

A mérések egy részét (elemi számolási készség vizsgálata, alapfeladatok megoldása) általános iskolai tanulók, és tanító szakos hallgatók körében is elvégeztem (Sitkuné et al, 2011).

A szakmódszertani eredmények elméleti megalapozását, előkészítését szolgálja a következő négy fejezet.

A történeti áttekintésben a helyi értékes számrendszerek kialakulásának matematika és informatika szakmódszertani szempontból releváns állomásait emelem ki (3. fejezet).

A matematikai és informatikai háttér bemutatásával a témakör elemi fogalmainak, algoritmusainak általános, egységes, formális tárgyalását adom (4. fejezet).

A tantervi előírások elemzése során az oktatás tartalmi szabályozásának jellemzőit és a témakörrel kapcsolatos előírásokat tekintem át (5. fejezet).

A pedagógiai, pszichológiai vonatkozások tárgyalásával a szakmódszertani javaslatok rendszerének kialakításában leginkább ható elméletek legfontosabb jellemzőit mutatom be (6. fejezet).

A módszertani eredmények kidolgozása során (7. fejezet) a legfontosabb célom az volt, hogy a rendelkezésre álló irodalmi források és a saját tapasztalatok, kipróbált ötletek, valamint a modern oktatási eszközök (számítógép, interaktív tábla) lehetőségeinek felhasználásával egy komplex módszertani struktúrát alakítsak ki. Ez a struktúra a fogalomkialakítás első lépéseitől kezdve az informatikai alkalmazásokban történő felhasználás szintjét is magában foglaló, a matematika- és informatikaoktatásban az oktatás különböző szintjein is alkalmazható, elméletileg megalapozott, tapasztalataink szerint a gyakorlatban jól használható rendszert képvisel.

A szakirodalmi alapot a tanári, tanítói kézikönyvek, továbbképzési segédanyagok, a főiskolai tanító- és tanárképzésben használt

1. BEVEZETÉS

matematika, informatika és szakmódszertani jegyzetek, a közoktatás különböző szintjein használt, különböző kerettantervekhez készült tankönyvek, munkafüzetek, oktatási segédanyagok szolgáltatják, amelyeket a komplex matematikatanítási kísérlet kezdetétől napjainkig tekintettem át.

A saját tapasztalatokat az általános- és középiskolai matematika- és informatikaoktatásban töltött húsz év (Sitkuné-Tóthné, 1997, 2000, 2001a,b; Sitkuné, 1993, 1994, 2000, 2002, 2004, 2006, 2007), valamint a főiskolai képzés során a programtervező informatikus, számítástechnika-tanár, és a tanító szakos hallgatóképzésben oktatott kurzusok impressziói alapozzák meg (Sitkuné, 2005a,b, 2008a, 2008b, 2009a,b,c).

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

Ebben a fejezetben először a nemzetközi matematikai teljesítménymérések és a matematikaoktatás helyzetére vonatkozó hazai vizsgálatok eredményeit, majd a főiskolai hallgatók és az általános iskolai tanulók körében végzett saját vizsgálataimat mutatom be.

2.1. NEMZETKÖZI VIZSGÁLATOK

A magyar matematikatanítás 1960-as évek elején indult reformjának eredményei világviszonylatban elismertek. A nyolcadik évfolyamos tanulók körében a tanulói teljesítmények vizsgálatának nemzetközi szervezete, az IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) által lebonyolított nemzetközi felméréseken 1970 és 2001 között a magyar diákok valamennyi felmérésben kitűnően szerepeltek, 1995 kivételével a legjobbak között. 1983-ban – a távolkeleti országokat is túlszárnyalva – a legjobb eredményt értük el. A matematika és természettudomány nemzetközi összehasonlító teljesítménymérése, a TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2001-ben nyilvánosságra hozott eredményei is kiválóak, mindössze a tajvani és a szingapúri diákok végeztek előttünk (Vári et al. 2002).

A teljesítmények romlását jelezték viszont a PISA (Programme for International Student Assessment – A nemzetközi tanulói teljesítménymérés programja) vizsgálatai, amelyek nem a tantervi követelményeknek való megfelelés, hanem a tudás és képességek mindennapi életben való alkalmazhatósága szempontjából mérték a tanulók teljesítményét. A 15 éves korosztály körében lebonyolított PISA 2000-vizsgálat matematika részesztjében az OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet) országok átlaga alatt teljesítettek a magyar diákok, és a nemzetek rangsorában több olyan ország is megelőzte hazánkat, amelyek a TIMSS felmérésben még szignifikánsan gyengébbnek mutatkoztak.

A legutóbbi PISA-felmérések eredménye összeecseng az előző mérések eredményeivel. Magyarország egyike annak a 22 országnak, ahol a diákok tudásában nem következett be statisztikailag értékelhető változás 2000 óta, a 2003-as, 2006-os és 2009-es mérésben gyakorlatilag azonos eredményt értek el (Balázs et al. 2010).

A TIMSS felmérések adataiból pedig az látszik, hogy matematikából a 4. és a 8. évfolyamos magyar tanulók teljesítménye mind a 2003-as, mind az 1995-ös eredményekhez hasonlítva szignifikánsan csökkent 2007-re (Balázsi et al. 2008). A 4. évfolyamos tanulók 2011-es adatait vizsgálva azt láthatjuk, hogy a 2007-es eredményekhez képest nem volt statisztikailag kimutatható változás az eredményükben, a 8. évfolyamos tanulók eredményei viszont szignifikánsan alacsonyabbak az előző mérések eredményeinél (Balázsi et al. 2011).

Fontos megjegyezni, hogy a PISA 2003 vizsgálat problémamegoldó gondolkodás altesztjén elért eredmények viszont majdhogynem pontosan illeszkednek az OECD országokra jellemző átlagértékre. A magyar diákok átlagosan legalább 10 ponttal jobban teljesítettek a problémamegoldó alteszten, mint a matematikateszten. Ez arra utal, hogy a diákok birtokában vannak olyan általános képességeknek, melyeket a matematikatanítás jobban is kihasználhatna (Vári et al. 2005).

2.2. HAZAI VIZSGÁLATOK

Az egyik legátfogóbb hazai kutatás 2001 tavaszától indult az Országos Köznevelési Intézet Program- és Tantervfejlesztési Központjában¹.

A vizsgálat (tantárgyi obszerváció) tizenhat tantárgyi területet tekintett át egységes szempontrendszer alapján, amely többek között kitért a tantárgyak helyzetére a modernizációs folyamatban, a tankönyvek, taneszközök, a tantárgyak közötti összehangoltság kérdéskörére, a tantárgyak oktatásának módszertani vonatkozásaira. Az eredményekről egyrészt a közös, minden egyes területen megjelenő problémákat összegző tanulmány, és a tantárgyakra külön-külön vonatkozó tanulmányok jelentek meg (Kerber, 2002).

A közös problémák között a következő fő tematikus csomópontokat emelték ki, amelyek az értekezés témájának szempontjából is relevánsak: a tantervi szabályozások ellentmondásai; a szemléletváltás követelménye a tantárgyak tanításában; a módszertani kultúra fejlesztése; a tanárok helyzete; az iskolák és az eszközigényes tárgyak helyzete.

¹ Jelenleg Oktatókutatási és Fejlesztési Intézet, Kutatási, Elemzési és Értékelési Központ (2013)

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

A kutatás bebizonyította, hogy a rengeteg modernizációs törekvés ellenére az iskolák napi tanítási gyakorlata terén még mindig kevés változás történt a tantárgyak tanításában. A nemzetközi tendenciák figyelembevétele, adaptálása, az alkalmazható tudás közvetítési stratégiáinak megvalósítása, a tantárgyközi kapcsolatok erősítése még rengeteg feladatot ad a tantárgyi és a közoktatási szakemberek, fejlesztők számára.

A matematikaoktatás helyzete

A hazai matematikatanítás jelenlegi tartalma, módszertani kultúrája az 1960-as évek elején elindult újjáépítési törekvések hatására alakult ki. A Varga Tamás nevével fémjelzett komplex matematikatanítási kísérlet eredményeként létrejött 1978-as, majd a bevezetés tapasztalatai alapján korrigált 1986-os tanterv képezi az 1995-ben elfogadott Nemzeti Alaptanterv (a továbbiakban NAT) előzményeit. A NAT-ban megfelelő arányt képviselnek a matematikai nevelés jó hazai hagyományai (problémaközpontúság, konkrét tapasztalatokkal megalapozott fogalmak kiépítése, spirális építkezés) és az új tartalmi, szemléleti elemek (gondolkodási módszerek megjelenítése, a nyelv logikai elemeinek használata, a valószínűségszámítás elemei).

Elméletben (helyi tantervek, szakmai beszélgetések) a tanítók és a matematikatanárok is általában ezt a szemléletet képviselik. A gyakorlatban azonban több helyen tanítanak ismét szinte kizárólag számtant és elemi mértant. Sok iskolában újra elfogadottá vált a pusztán közlésre, begyakorlásra, számonkérésre építő tanítás, amely ellentmond az agy- és tanuláskutatás bizonyított eredményeinek. Ezt a tendenciát erősíti némely újonnan megjelent tankönyvcsalád. A gyakorlatban gyakran háttérbe szorul a személyes tapasztalatszerzésből induló ismeretszerzés elve is. Ma ismét sok helyen a tábla-kréta, füzet-ceruza és a tanítói közlés (magyarázat) a tanítás – tanulás fő eszköze.

Szükség lenne arra, hogy a tanítóknak valóban meggyőződésükké váljon a tanítás módszereinek adott korosztály szükségleteihez és képességeihez igazítása. Hatékonyabbá kellene tenni a képzésben és továbbképzésekben a fejlődéslélektani és tanuláselméleti kutatások eredményeinek megismertetését és gyakorlati munkában való alkalmazását (C. Neményi, 2002).

Az informatikaoktatás helyzete

Az informatika alapvető követelményei tantervi szinten először az 1988-as korrigált tantervben jelentek meg a technika tantárgy keretein belül, az általános iskolák 4. és 8., valamint a gimnáziumok 1. és 2. évfolyamain. Önálló tantárgyként (műveltségterületként) a NAT bevezetése óta létezik.

A tantervi követelmények ugyan meghatározták a tantárgy tartalmát, de kezdetben a tanárok eredeti végzettségétől, felkészültségétől, valamint az oktatásban használt számítógépek mennyiségétől, minőségétől is nagymértékben függött az, hogy mit és hogyan tanítottak az informatikaórán. Sokáig a tanár maga döntötte el, hogy az oktatás során az alkalmazói, vagy a számítástudományi ismeretekre helyezi-e a hangsúlyt. A helyzet sokat változott, napjainkra a felhasználói ismeretek kerültek túlsúlyba.

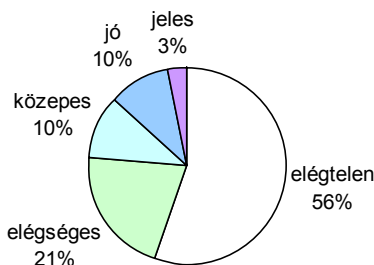
A tankönyvpiacon megjelenő verseny az informatika tankönyvekkel kapcsolatban hatványozottan jelentkezett. Sorra jelentek meg tankönyvnek kikiáltott könyvek, amelyek inkább szakkönyvek voltak; sem tartalmi, sem módszertani szempontból nem feleltek meg a tankönyvekkel szemben támasztható elvárásoknak (Kőrösné, 2002). A 2004-ben megjelent, tankönyvvé nyilvánítást szabályozó rendelet eredményeként javult a minőség. A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban fontos szerepe van a képzett tankönyvbírálok által készített értékeléseknek, amelyek egységes szempontrendszer alapján formai, tartalmi és módszertani szempontból is minősítik a könyveket. Csak a bírálók által elfogadott könyvek szerepelhetnek az országos tankönyvjegyzékben, a közoktatásban pedig csak ezek használhatók. Elgondolkodtató azonban, mennyire könnyíti meg a kollegák dolgát a tankönyvválasztás során az a tény, hogy pl. a 2010/11-es közoktatási tankönyvjegyzékben 6 kiadó 63 db nyomdaterméke (tankönyv, munkatankönyv, munkafüzet) szerepel a választható kiadványok listáján.

2.3. SAJÁT KUTATÁSI EREDMÉNYEK

A magyar közoktatás hatékonyságának nemzetközi és hazai felmérésekben feltárt hiányosságai a felsőoktatásban is megmutatkoznak. A Nyíregyházi Főiskola hallgatóinak vizsgaeredményei mind a számítástechnika-tanár szakon (a továbbiakban: ST), mind a programozó matematikus (a 2006/2007-es tanévtől programtervező informatikus; a továbbiakban: PM/PTI) szakon alátámasztják ezt. Gyakran tapasztalhatjuk, hogy néhány tantárgy vizsgaeredményei jóval elmaradnak a várttól, sőt kimondottan gyengének mondhatók. Az említett szakokon az egyik leggyengébb vizsgaeredményekkel záruló informatikai alapozó tárgy a Bevezetés az informatikába (a 2006/2007-es tanévtől: Informatika és elektronika). A fejezet további részében ennek a tantárgynak az oktatásával kapcsolatos tapasztalatokat, illetve a gyenge vizsgaeredmények okait feltárni kívánó vizsgálat eredményeit mutatom be.

2.3.1. Előzmények

A 2004/2005-ös tanévben a tantárgy vizsgaeredményeinek átlaga 1,85 volt (Sitkuné - Falucskai, 2005). A eredmények százalékos arányai a következők:



1. ábra: Vizsgaeredmények (komplex feladatsor)
(Bevezetés az informatikába I. PM, I. ST 2004/2005)

A *Bevezetés az informatikába* tantárgy célja, hogy a hallgatók szerezzenek átfogó ismereteket a számítástechnika elméleti alapjaiból, ismerjék meg a szakmai kifejezéseket, alapfogalmakat. A tantárgy tartalma: a számítógép felépítése, működése, algoritmusok, információ és megjelenési formái, adatok, adatszerkezetek ábrázolásai és műveletei. Az első félév kötelező tantárgya mind az ST szakon (heti 1 óra előadás), mind a PM/PTI szakokon (heti 2 óra előadás és 2 óra gyakorlat).

időterheléssel). Az előadások és gyakorlatok tematikája különböző. A tantárgyi tartalom egy részét az előadásokon, másik részét a gyakorlatokon dolgoztuk fel. Az előadásokon nagy hangsúlyt fektettünk a vizsgafeladatsor feladattípusaihoz kapcsolódó ismeretek és algoritmusok pontos megadására, értelmezésére, alapos elemzésére, a feladatok különböző módszerekkel való megoldásának bemutatására. A kurzuson folyó munka során középiskolai matematikai ismereteket feltételeztünk, ezekre építettünk.

Párhuzamosan futó alapozó tárgyak: *Számítógépparchitektúrák, Programozási nyelvek I.*; a PM/PTI szakos hallgatóknak ezeken kívül *Diszkrét matematika, Matematikai logika*.

A számonkérés írásbeli formában zajlott. A hallgatóknak tíz feladatból álló komplex feladatsort kellett megoldaniuk 30 perc alatt, számológép használata nélkül. A feladatok megoldásához a matematikai alpműveletek magabiztos elvégzésének képessége, és a kurzuson megismert algoritmusok pontos ismerete, illetve alkalmazása szükséges. A feladatok tartalmi összetevői: tízes számrendszerben megadott valós szám átírása más természetes alapú számrendszerbe; nem tízes számrendszerben megadott valós szám tízes számrendszerbeli alakjának felírása; nem tízes számrendszerben megadott valós szám átírása nem tízes számrendszerbe; tízes számrendszerben megadott egész szám konvertálása kettes komplementbe és kettes komplementben megadott egész szám visszaírása; valós szám konvertálása lebegőpontos alakba és a szám meghatározása lebegőpontos alakjából; logikai műveletek, infix kifejezés átalakítása postfix alakra. A feladatok megoldásának helyességét értékeltem 0, 0,5 vagy 1 ponttal. Az elégséges alsó határa a 65 %-os teljesítmény volt. Összességében megállapítható, hogy az eredmények mind a pontszámokat, mind az érdemjegyeket tekintve nagyon gyengék, kudarccélményt jelentenek oktatónak, hallgatónak egyaránt.

2.3.2. A vizsgálat célja

A következő tanévekben azokra a kérdésekre kerestem a választ, hogy mi okozhatja a kirívóan alacsony eredményeket, és hogy milyen változtatások eredményezhetik az eredmények javulását.

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

2.3.3. A vizsgálat módszerei és menete

A 2005/2006-os és a 2006/2007-es tanévben az előző évben használt feladatsort alkalmazva újból elvégeztem a mérést az épp elsőéves ST és a PM/PTI szakos hallgatók körében. A PTI szakos hallgatók a kurzus kezdetén alapszintű feladatokból álló feladatsort is megoldottak a témakörhöz szükséges előzetes ismeretek szintjének felmérésére. A 2007/2008-as és a 2008/2009-es tanévben az ST szakos hallgatók körében kiegészítő méréseket végeztem (induktív gondolkodás teszt, elemi számolási készség teszt, motivációs és attribúciós kérdőív). A 2009/2010-es tanévben az elemi számolási készség tesztet és az alapszintű feladatokat általános iskolai 3. és 5. osztályos tanulókkal is megoldattam.

A vizsgált minta jellemzőit, és a mérőeszközöket foglalja össze a következő áttekintő táblázat.

1. táblázat A vizsgált minta és a mérőeszközök

Tanév	Létszám (fő)		Mérőeszköz
	PM/PTI	ST	
2005/2006.	54	248	komplex feladatsor
2006/2007.	66	0	alapfeladatok, komplex feladatsor
2007/2008.	0	87	induktív gondolkodás teszt, elemi számolási készség teszt
2008/2009.	0	44	motivációs és attribúciós kérdőív
2009/2010.	3. osztály	5. osztály	alapfeladatok, elemi számolási készség teszt
	313	240	

A 2005/2006-os tanév adatai:

A tantárgy: *Bevezetés az informatikába*

A vizsgált csoportok: számítástechnika-tanár szakos hallgató (ST): 248 fő, közülük évismétlő 102 fő; programozó matematikus (PM): 54 fő, közülük évismétlő 16 fő; összesen: 302 fő, közülük évismétlő 118 fő; vizsgák száma: 481.

A mérést a vizsgaidőszakban végeztem, az előző évi komplex feladatsor segítségével. A feladatsort kérdőívvel egészítettem ki, amelyben a következő adatokat kértem: matematika és informatika érettségi jegyek, érettségi időpontja, típusa, a szak kezdő éve.

A 2006/2007-es tanév adatai:

A tantárgy: *Informatika és elektronika* (a *Bevezetés az informatikába* tantárgy tematikájával).

A vizsgált csoport: programtervező informatikus – PTI 66 fő (tanár szak nem indult, a programozó matematikus szakot felváltotta a programtervező informatikus szak).

Előzetes ismeretekre vonatkozó mérés: a főiskolai hallgatók a témakör tárgyalása előtt oldottak meg a témakörhöz kapcsolódó két-két feladatot: átváltás 10-es alapú számrendszerből nem tízes alapú számrendszerbe, átváltás nem tízes alapú számrendszerből tízes alapú számrendszerbe.

A komplex feladatokra vonatkozó mérés módja a következőképpen változott: a hallgatók két félévközi zárthelyi dolgozatot írtak, amelyekben 8-8 feladat szerepelt. A feladatok az előző év feladatsorának feladatai voltak. Az első zárthelyi dolgozat a számrendszerek témakör feladatait tartalmazta, kiegészítve alapszintű, úgynevezett rávezető, előkészítő feladatokkal. A második dolgozat tartalmazta a többi feladattípust: logikai műveletek, számábrázolás, információtartalom kiszámítása, infix-postfix forma. A feldolgozás során pontosan azokat a feladatokat vettem figyelembe, amelyek az előző évi feladatsorban szerepeltek.

A 2007/2008-as tanév adatai:

Kiegészítő mérések és utótesztek lebonyolítása.

A vizsgált csoport: Számítástechnika-tanár szakos hallgatók (III. ST), összesen 87 fő. A 2005/2006-os tanévben vizsgált hallgatók közül azok a hallgatók vettek részt a mérésben, akik Számítástechnika szakmódszertan tárgyat a 2007/2008-as tanévben felvették.

A kiegészítő mérések a következők voltak:

2007/2008 első félévben az induktív gondolkodás fejlettségét mértem a József Attila Tudományegyetem (ma Szegedi Tudományegyetem) Pedagógiai Tanszékének mérőlapja segítségével. Az induktív gondolkodás tesztet a „számanalógia”, „szóanalógia” és a „számsor” feladatcsoportok alkotják (Csapó, 1998).

A második félévben a hallgatók elemi számolási készségének fejlettségét vizsgáltam. A méréshez a Nagy József és munkatársai által készített

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

teszt négy alpműveletre vonatkozó részét használtam. Az elemi számolási készség teszt a négy alpművelet és a pótlás műveletének fejlettségi szintjét méri (Nagy, 1971).

A 2008/2009-es tanév adatai:

A vizsgált csoport: Számítástechnika-tanár szakos hallgatók (IV. ST), összesen 44 fő. A 2005/2006-os tanévben vizsgált hallgatók közül azok a hallgatók vettek részt a mérésben, akik a Komplex tantárgy-pedagógia tárgyat a 2008/2009-es tanévben felvették.

A kiegészítő mérés a Réthy Endréné és munkatársai által használt attribúciós kérdőív alkalmazásával történt (Réthy, 2003). Ez a kérdőív 14, a vizsgaeredményeket feltehetőleg befolyásoló okot sorol fel. A hallgatóknak egy 9 fokú skálán kell értékelniük az egyes okokat, ahol 9-es jelöli a „nagyon erős”, 5-ös a „közböcs”, az 1-es pedig a „legkevésbé befolyásoló” okot. A többi szám az ezek közötti átmenetet képviseli.

A 2009/2010-es tanév adatai:

A vizsgált csoportok: 3. és az 5. osztályos általános iskolai tanulók (313, ill. 240 fő), a Nyíregyházi Főiskola Tanítóképző Intézetének kutatócsoportja által szervezett diagnosztikus mérés résztvevői. Az elemi számolási készség teszt az előzőekben használttal megegyező volt. A diagnosztikus mérés matematika tantárgyra vonatkozó feladatsorát én állítottam össze. A feladatsor tartalmaz 2-2 számrendszerekre vonatkozó feladatot is (átváltás tízes alapú számrendszerből kettes alapú számrendszerbe, átváltás kettes alapú számrendszerből tízes alapú számrendszerbe), az adott korosztály gondolkodási szintjének megfelelő reprezentációs szinten (Sitkuné et al. 2011).

2.3.4. A vizsgálat eredményei

Az adatok feldolgozását két nagy problémakört kialakítva végeztem. Az első témakörben a programtervező informatikus hallgatók eredményeinek elemzése szerepel, a másodikban a számítástechnika-tanár szakos hallgatók közül azoknak a hallgatóknak az eredményei, akik a kiegészítő vizsgálatokban is részt vettek. Az általános iskolai

tanulók körében végzett vizsgálatok eredményeit a hallgatói teljesítményekkel összehasonlítva (mindkét problémakörhöz kapcsolódva) külön blokkban mutatom be.

A programtervező informatikus hallgatók eredményei

– Alapfeladatok

– átváltás tízes számrendszerből 12-es (13-as) számrendszerbe: az eredetileg kitűzött feladat megoldásával a hallgatók 11%-a próbálkozott, a módosított feladat megoldását (átváltás 2-es számrendszerbe) a hallgatók 33%-a kísérelte meg. Az eredeti feladatot hibátlanul nem tudta megoldani egy hallgató sem, jó részmegoldásokat adott 1,5%. A megoldás során legtöbben (a megoldók 70%-a) az alapszámmal való sorozatos osztás módszerét választották, sokan viszont csak a speciális lejegyzési módot (függőleges vonal az átváltandó szám mellett) tudták felidézni, az algoritmust nem.

– átváltás 8-as (9-es) számrendszerből 10-es számrendszerbe: A hallgatók 84%-a nem foglalkozott ezzel a feladattal. Hibátlan megoldást adott 2 fő (3%). A hallgatók 56%-a nem kezdett hozzá egyik feladat megoldásához sem.

– Komplex feladatsor

A komplex feladatsor eredményeinek (vizsgajegy) és az érettségi érdemjegyek vizsgálata során programtervező informatikus hallgatók eredményeit a programozó matematikus hallgatók eredményeivel hasonlítottam össze.

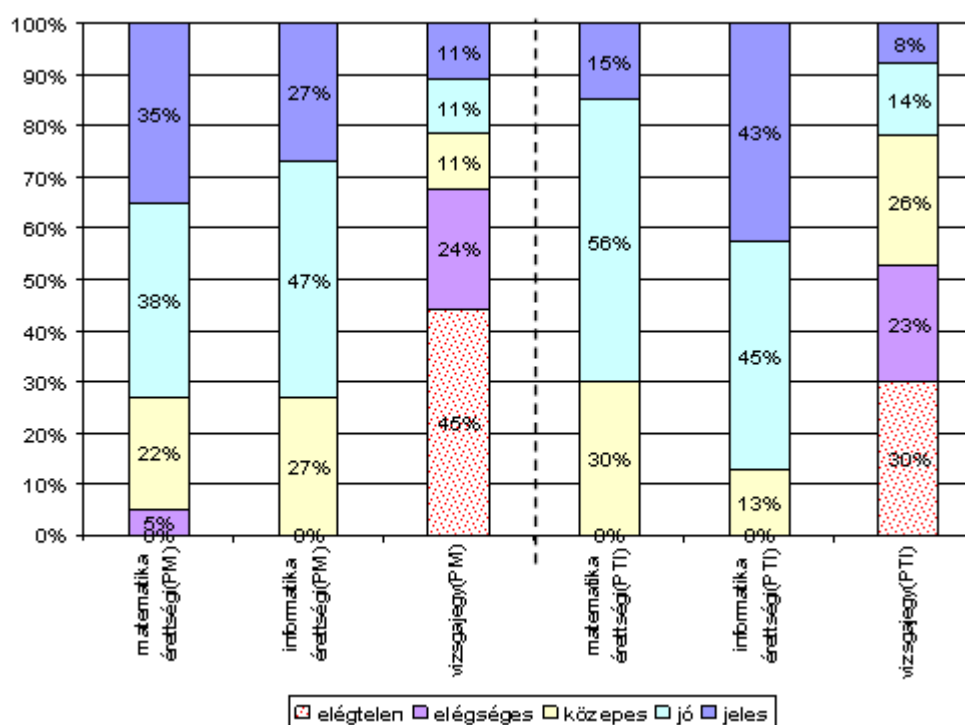
Az érettségi jegyek átlagát tekintve megállapítható, hogy az átlag jó, a PTI-s hallgatók matematikából 18 századdal gyengébb, informatikából viszont 3 tizeddel jobb eredménnyel érkeztek, mint a PM-es hallgatók. A komplex feladatsor eredményeinek (vizsgaeredmények) átlaga azonban mindkét csoportban lényegesen gyengébb az érettségi jegyek átlagánál. A PTI-s hallgatók vizsgaeredménye 27 századdal jobb a PM-es hallgatók eredményénél.

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

2. táblázat Érettségi- és vizsgaátlagok

	<i>matematika érettségi</i>	<i>informatika érettségi</i>	<i>vizsgajegy</i>
<i>I. PM 2005/2006.</i>	4,03	4,00	2,18
<i>I. PTI 2006/2007.</i>	3,85	4,30	2,45

Az egyes területeken elért eredmények összehasonlítását teszi lehetővé a következő diagram:



2. ábra: Érettségi- és vizsgaeredmények
(I. PM 2005/2006.; I. PTI 2006/2007.)

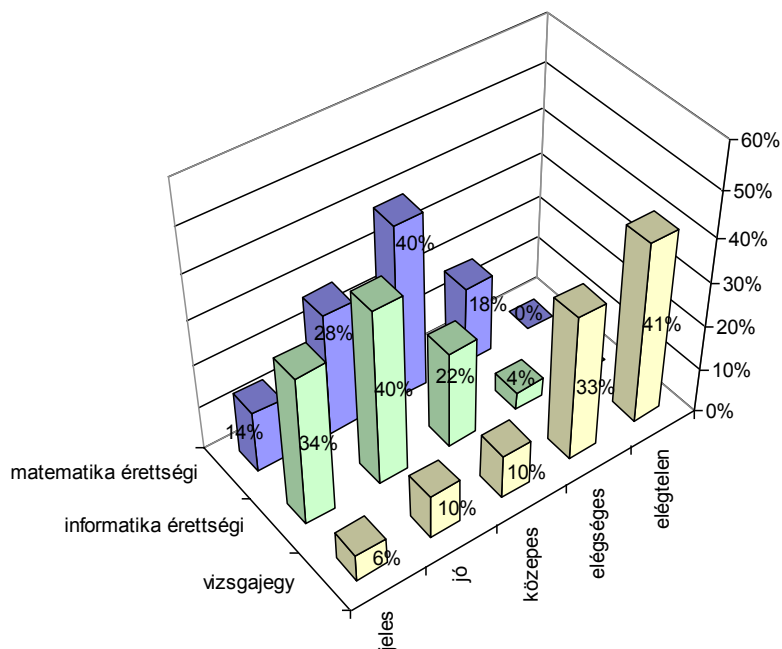
A PTI-s hallgatók gyengébb matematika, de erősebb informatika érettségi átlaggal érkeztek, mint a PM-es hallgatók. Vizsgajegyeik eloszlása egyenletesebb, átlaguk viszont nem sokkal jobb. Ha a módszertani változtatások eredményeztek is némi javulást, az eredmények nem adnak okot az elégedettségre.

A korrelációs számítás eredményei alapján megállapítható, hogy a PM csoportban a jobb matematika érettségi jegyekkel érkező hallgatók a

komplex feladatsor megoldása során is jobb eredményeket értek el (PM: $r_{k,m}=0,283$, $p=0,04$; k: komplex feladatsor eredménye, m: matematika érettségi eredménye). A PTI csoportban nem mutatható ki összefüggés a két változó között. Az informatika érettségi eredmények szintén a PM csoportban mutatnak pozitív kapcsolatot a komplex feladatsor eredményeivel ($r_{k,i}=0,367$, $p=0,016$; k: komplex feladatsor eredménye, i: informatika érettségi eredménye), a másik csoportban nem mutatható ki összefüggés a két változó között (Sitkuné, 2005a,b, Sitkuné, 2008a,b).

A számítástechnika-tanár szakos hallgatók eredményei

– *Komplex feladatsor*



**3. ábra: Érettségi- és vizsgaeredmények
(I. ST 2005/2006)**

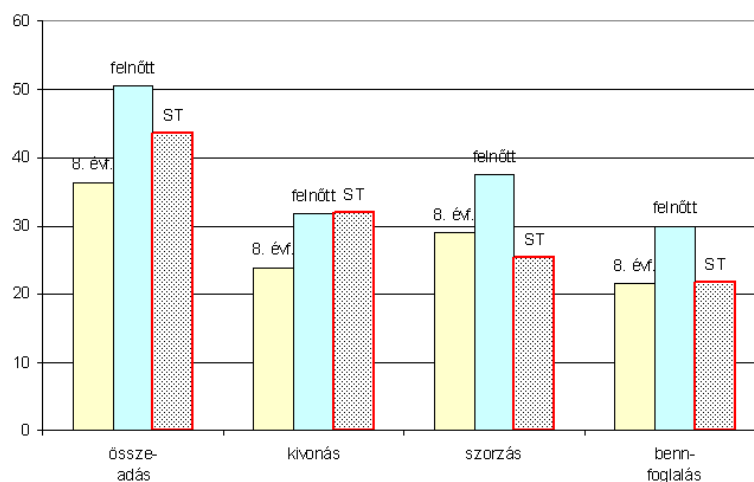
Elgondolkodtató, hogy számítástechnika-tanári szakra elégséges matematika, sőt elégséges informatika érettségi jeggyel is be lehetett jutni. A vizsgaeredményeket tekintve a 2004/2005-ös tanévhez képest az átlag 18 századdal jobb (2,07), de még mindig nagyon gyenge, és a sikertelen vizsgák arány is túl magas.

A korrelációs számítás eredményei alapján megállapítható, hogy az ST csoportban a jobb matematika érettségi jegyekkel érkező hallgatók a komplex feladatsor megoldása során is jobb eredményeket értek el (ST:

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

$r_{k,m}=0,255$, $p=0,018$; k: komplex feladatsor eredménye, m: matematika érettségi eredménye). Az informatika érettségi eredmények nagy valószínűséggel nem befolyásolták a komplex feladatsor eredményét. (Sitkuné, 2005a,b, Sitkuné, 2008a,b). A feladatmegoldások elemzése arra utal, hogy a hallgatók a fogalom alkotó alkalmazása helyett mechanikusan használnak bemagolt, betanult definíciókat, algoritmusokat, nagyon sokszor nem a megfelelő kontextusban és nem a megfelelő formában.

– *Elemi számolási készség teszt*



5. ábra: Az elemi számolási készség teszt eredménye (ST. 2007/2008)

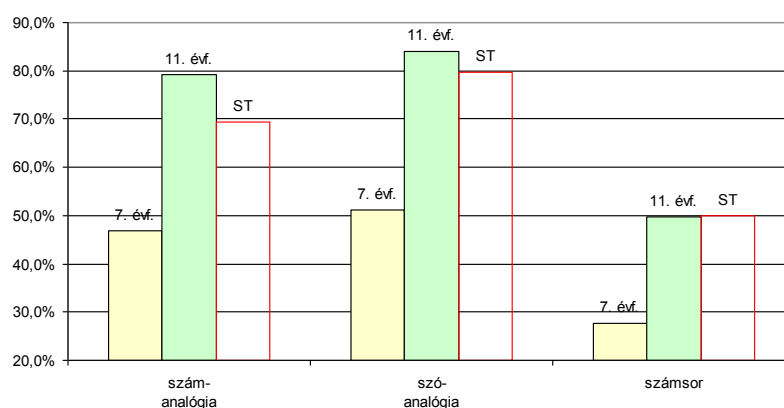
Az elemi számolási készség teszt eredményeit a Nagy József által publikált országos mérések eredményeivel hasonlítottam össze (Nagy, 1971). A hallgatók csak a kivonás részteszten érték el a felnőtt csoport által teljesített szintet, a szorzás részteszten pedig a 8. évfolyamos tanulóknál is gyengébb teljesítményt nyújtottak.

A számítástechnika-tanár szakos hallgatókra vonatkozóan megállapítható, hogy a jobb matematika érettségi eredményekkel érkező hallgatók az elemi számolási készség teszten is jobb eredményt értek el, viszont sem az elemi számolási készség, sem az induktív gondolkodás fejlettségének szintje nem mutat összefüggést a komplex feladatsor eredményeivel.

Ezekből a tényekből arra következtethetünk, hogy a számítástechnika-tanár szakos csoport esetében a komplex feladatsor megoldásának

eredményét nem az induktív gondolkodás fejlettsége, nem is az elemi számolási készség szintje, hanem valószínűleg a matematikai tudás egyéb összetevői határozzák meg (Sitkuné, 2009a,b).

– *Induktív gondolkodás teszt*



4. ábra: Az induktív gondolkodás teszt eredménye (ST. 2007/2008)

Az induktív gondolkodás teszt eredményét a Csapó Benő és munkatársai által végzett mérések eredményeivel vettem össze. (Csapó, 1998. 264.o.) A hallgatók mind a szám-, mind a szóanalógia részteszten a 11. évfolyamos tanulóknál gyengébb teljesítményt nyújtottak (számanalógia: 69,4/79,3; szóanalógia: 79,7/83,9), a számsor részteszten némileg jobb eredményt értek el (49,9/49,7). Összességében a 11. évfolyamos tanulók fejlettségi szintjével közel megegyező szinten teljesítettek.

– *Attribúciós kérdőív*

Általános emberi tulajdonság, hogy mások és önmagunk tevékenységének eredményeit bizonyos okoknak tulajdonítjuk, bizonyos okokra vezetjük vissza, és ezen feltételezett okok alapján viszonyulunk hozzájuk. Az attribúciós kérdőívvel azt szerettem volna feltárni, hogy a hallgatók saját vizsgaeredményeiket külső vagy belső okoknak tulajdonítják-e.

A vizsgákon elért eredmények oki háttérének összesített rangsorát a 3. táblázat mutatja be.

2. HELYZETELEMZÉS, PROBLÉMAFELVETÉS

3. táblázat: Az attribúciók összesített rangsora a vizsgált mintán

Attribúció	belső külső	ST. 2008/2009.	
		rang- sor	érték
A vizsgatárgy iránti érdeklődés	b	1.	7,41
Intelligencia	b	2.	7,34
Az oktató előadási stílusa	k	3.	7,25
Kreativitás	b	4.	7,18
Szakmai rátermettség	b	5.	7,07
Szorgalom	b	6.	6,93
A tananyag nehézségi foka	k	7.	6,91
A jó teljesítmény utáni vágy	b	7.	6,91
A vizsgák nehézsége	k	9.	6,64
Egyes képességek	b	10.	6,48
A tanulási módszer	b	11.	6,30
Szerencse/Pech	k	12.	6,02
A vizsgáztatóval szembeni attitűd	b	13.	5,84
Mások segítsége a felkészülésben	k	14.	5,66
átlag			6,71

Az egyes okokra adott értékek átlaga minden esetben 5,00 feletti érték, ez azt mutatja, hogy a hallgatók szerint mindegyik felsorolt oknak szerepe van az eredmények kialakulásában. Az első két helyen – vizsgatárgy iránti érdeklődés 7,41; intelligencia 7,34 – a személyiségen belüli, belső attribúciókkal magyarázzák a hallgatók eredményeiket. A harmadik helyen viszont az előzőekhez hasonló erősséggel személyiségen kívüli, általuk kontrollálhatatlan tényezőt említene: az oktató előadói stílusát (7,24). Ez arra utal, hogy bár elismerik saját maguktól függő okok elsődlegességét, rajtuk kívülálló okot is említene, viszonylag nagy hangsúllyal. Ha külön-külön vizsgáljuk a belső és a külső okokat, megállapíthatjuk, hogy a belső okok 6,83-os átlaggal erősebb oksági tényezőt jelentenek a külső okok 6,72-os átlagával szemben (Sitkuné, 2009a).

Az eredményeket a Réthy Endréne által publikált eredményekkel is összehasonlítottuk. Megállapíthatjuk, hogy az attribúciók nagyobbik része magasabb értékkel szerepel a számítástechnika-tanár szakos hallgatók körében. Elgondolkodtató azonban, hogy mely attribúciók erősödtek – pl. intelligencia, kreativitás, oktató stílusa –, és melyek

bírnak kisebb jelentőséggel – szorgalom, tanulási módszer, a jó teljesítmény utáni vágy –. Ezek az értékek valószínűleg a társadalomban napjainkban lezajló értékrendváltozást tükrözik.

A vizsgált mintákban az első, és az utolsó helyen is ugyanazok az attribúciók szerepelnek: vizsgatárgy iránti érdeklődés, illetve mások segítsége a felkészülésben. Jelentős eltérés azonban, hogy míg a mások segítségére vonatkozó attribúció az 1990/92-es és az 1998/99-es vizsgálatokban is negatív előjellel, inkább hátráltató tényezőként szerepel, az általunk vizsgált mintában már pozitív tényezőként jelenik meg. Ennek oka valószínűleg az, hogy az oktatás módszertani szemléletváltásának eredményeképpen az együttműködést preferáló (kooperatív) szemlélet egyre inkább előtérbe kerül a hagyományos, versenyeztető (kompetitív) szemlélettel szemben.

Az általános iskolai tanulók eredményei

Az elemi számolási készség teszt eredményei nem mutatnak jelentős eltérést az országos mérés eredményeihez viszonyítva (Sitkuné et. al, 2011), ezért azokat itt nem elemezzük. A számrendszerekkel kapcsolatos alapfeladatok megoldásait elemezve viszont olyan következtetéseket vonhatunk le, amelyek részben magyarázhatják a hallgatók körében végzett hasonló vizsgálatok eredményeit.

4. táblázat Az alapfeladatok megoldásának eredményessége

	ált. isk. 3. évf. (n=313)		ált. isk. 5. évf. (n=240)		főisk. 1. évf. (n=66)	
	tízesből	tízesbe	tízesből	tízesbe	tízesből	tízesbe
hibátlan megoldás (%)	0,3	26	7,1	15,4	0	1,5
nem foglalkozott a feladattal (%)	18	21	80	70	56	84

A vizsgálatban résztvevő tanulók jelentős része hozzá sem kezdett a feladatok megoldásához, hibátlan megoldást pedig csak nagyon kevesen tudtak prezentálni.

Megállapítható, hogy az általános iskolában a matematikaórákon sok esetben csak a tízes számrendszer fogalmaival foglalkoznak a kollégák, más alapszámú számrendszerekkel, a témakör fogalmainak általános megközelítésével nem találkoznak a tanulók. Elmarad a fogalom korai

alapozása, a kialakulását elősegítő cselekvő tapasztalatszerzés mozzanata. Ez az eredmény összecseng a tantárgyak helyzetét feltáró hazai kutatások megállapításaival (C. Neményi, 2002).

2.3.5. Összegzés

A saját vizsgálatok eredményei azt mutatják, hogy a felmérésben résztvevő hallgatók jelentős része gyenge alapokkal érkezik a felsőoktatásba. A vizsgált témakör oktatásának eredményességét negatív irányban befolyásolja az a tény, hogy nem rendelkeznek a helyi értékes számrendszerek általános, alkalmazóképes fogalmával. A vizsgált általános iskolai tanulók nincsenek birtokában a fogalom általánosításához szükséges alapismereteknek (Sitkuné, 2005, Sitkuné et al, 2011).

A feladatmegoldások elemzése arra utal, hogy a hallgatók a fogalom alkotó alkalmazása helyett mechanikusan használnak bemagolt, betanult definíciókat, algoritmusokat, nagyon sokszor nem a megfelelő kontextusban és nem a megfelelő formában. Az általános iskolai tanulók esetében pedig vannak olyan csoportok 3. és 5. évfolyamon is, akik nem foglalkoztak nem tízes alapszámú számrendszerekkel a matematikaórákon.

A számítástechnika-tanár szakos hallgatókra vonatkozóan megállapítható, hogy a komplex feladatsor megoldásának eredményességét nem az induktív gondolkodás fejlettsége, nem is az elemi számolási készség szintje, hanem valószínűleg a matematikai tudás egyéb összetevői határozzák meg (Sitkuné, 2009a,b).

Az attribúciós kérdőív eredményei azt jelzik, hogy a hallgatók vizsgaeredményeik alakulásában elismerik saját felelősségüket, értékrendjüket viszont nagyban befolyásolja a napjainkban tapasztalható értékrendváltás.

A vizsgaeredmények javítása érdekében mindenképpen szükség van módszertani változtatásokra, de szükséges lenne az adott területeken gyenge teljesítményt nyújtó hallgatók egyéni fejlesztésének megszervezése is. A fejlesztés megvalósításának eszköze lehet felzárkóztató kurzusok szervezése, illetve a hátránnyal induló hallgatókkal személyes kapcsolat kialakítását lehetővé tevő mentorrendszer kialakítása (Sitkuné, 2009a,b).

3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

A hétköznapi életben a számok, mennyiségek lejegyzésére, a matematikai műveletek elvégzésére olyan természetes módon használjuk a tízes számrendszert, hogy közben eszünkbe sem jut: a számjelek alakja, a lejegyzés mikéntje mind-mind egyfajta megállapodás eredménye, amely nem magától értetődő, hanem évezredek során lezajlott, bonyolult fejlődés eredménye.

Hogyan alakult ki a szám fogalma, hogyan jöttek létre a manapság használatos számjelek? Hogyan változott a számok lejegyzésének rendszere, melyek azok a megoldások, amelyek a ma általánosan használt tízes alapú helyi értékes rendszer létrejöttét eredményezték? A felsorolt kérdésekre adható válaszok áttekintése szakmódszertani szempontból is hasznos: a fejlődés zsákutcai, a felvetődő problémák megoldását eredményező kreatív ötletek a számrendszeres gondolkodás kialakításának módszertani lehetőségeit, illetve kritikus pontjait képviselhetik.

Ebben a fejezetben a számfogalom és a számírás fejlődésének azon csomópontjait emelem ki, amelyek véleményem szerint a témakör oktatása során alkalmazható módszertani megoldások szempontjából relevánsak.

3.1. SZÁMFOGALOM

A számfogalom kialakulásával kapcsolatban a legújabb idegtudományi kísérletek is alátámasztják azt a feltevést, amely szerint a mennyiségek hozzávetőleges megkülönböztetésének képessége az idegrendszer veleszületett tulajdonsága (Klix, 1985, Csépe, 2009). A számfogalom azonban több mennyiségi észlelésnél, kialakulása hosszú absztrakciós folyamat eredménye.

A kutatók egyetértenek abban, hogy a számfogalom két, kognitív szempontból egyenrangú tevékenységből származik: a diszkrét mennyiség megszámlálásából és a folytonos mennyiség méréséből. Kezdetben a szám nem mint absztrakt fogalom jelent meg, hanem mint az adott mennyiség jelzője (pl.: két kutya, hasonlóan a szép kutya jelzős szerkezetéhez). A mai magyar nyelvben is fennmaradtak a számnév melléknévként való használatának nyomai. Hogy kettő van valamiből, azt több szóval is ki tudjuk fejezni, és ezek a szavak csak bizonyos dolgokhoz illenek: pár cipő, dupla kávé, iker gyerek, énekes duett.

Hasonló jelenséget találhatunk más nyelvekben is (Filep-Bereznai, 1999).

Hosszú folyamat volt, míg a számot elvonatkoztatták a konkrét dologtól, amire vonatkozott. Ennek a folyamatnak a leírását, matematika módszertani szempontú tárgyalását megtaláljuk Skemp: A matematikatanulás pszichológiája című művében (Skemp, 1975).

3.2. SZÁMRENDSZEREK

Tekintsük át, hogy a számfogalom fejlődése során mely számrendszerek játszottak jelentősebb szerepet.

Kezdetben csak az „egy”, „kettő” és a „sok” között tudtak különbséget tenni, ezért a kettő, majd a három fogalmára épültek ki kezdetleges számrendszerek. A nagyobb számokat ezekből képezték összeadással.

Kettes számrendszer épült ki 4-ig például a Murray folyó menti ausztrál törzsnél. Külön szavuk volt az 1-re és a 2-re: az *enea* és a *petcheval*. A hármat ezekkel úgy fejezték ki, hogy: *petcheval-enea*, a négynek pedig *petcheval-petcheval* volt a neve.

Hármas számrendszert épített ki 6-ig egy másik ausztrál törzs, a kamilaroi: az 1 neve *mal*, a 2-é *bulan*, *guliba*-nak nevezték a hármat, s a további számokat ezekből képezték. A 4: *bulan-bulan* 5: *bulan-guliba* 6: *guliba-guliba* (Sain, 1986).

A későbbiekben, a termelés növekedésével és az árucseré kialakulásával, egyre nagyobb számosságú halmazok elemeinek megszámlálása vált szükségessé. Nagyobb számú tárgy megszámlálása már csak többszörös csoportosítás segítségével történhetett. Így alakultak ki a számrendszerek; a legtöbb népnél a tízes számrendszer, amely megfelel a természetes számolóeszközülnél használt kéz ujjai számának. Voltak azonban népek, amelyek az ötös, hatos, hetes, tizenkettes, húszas vagy hatvanas számrendszert használták, s ezeknek a számrendszereknek a nyomai ma is megtalálhatók. Sőt sokszor egy-egy nép történelme során többféle számrendszert is használt.

Az ötös számrendszer ma tisztán csak a dél-amerikai arauak indián törzsnél fordul elő, valószínűleg az egy kéz ujjainak számát alapul véve. Így számolnak: egy, kettő, három, négy, kéz, kéz és egy, kéz és kettő, stb. Más népeknél csak a tízes vagy a húszas számrendszerrel keveredve fordul elő az ötös rendszer. A rómaiak is – mint a jól ismert római

3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

számírásból kiderül – a tízes és az ötös számrendszer keverékét használták.

A hatos számrendszer egyes észak-afrikai törzseknél használatos, és még néhány helyen, keverve a tizenkettes számrendszerrel. A nyelvtudomány tanúsága szerint a finnugor népek is a hatos számrendszert használták valamikor.

Az ugoroknál a hetes számrendszer is fellelhető. Ezt a számrendszert valószínűleg más népek – pl. a héberek, egyiptomiak, indek – is használták. Erre utal, hogy a hetes szám kitüntetett szerepet játszott náluk. A hébereknél a 7 a teljességet jelképezte: 7 lélek = minden lélek. Különösen a Bibliában, a Jelenések könyvében fordul elő sokszor a hetes szám: 7 pecsét, 7 trombita, 7 mennydörgés, 7 haragpohár, 7 gyülekezet, a Báránynak 7 sarva és feje, Istennek 7 szeme.

A tizenkettes számrendszer emlékei élnek a „tucat” és a „nagy tucat” szavakban, az év 12 hónapra tagolásában és a nappal meg az éjszaka 12 órára való osztásában, valamint az angolszász mértékegységekben. A tizenkettes számrendszer használatára utal néhány nyelvben, hogy az első 12 számnak önálló neve van. A németben pl. 11 – *elf*, 12 – *zwölf*, és csak 13-tól kezdve kapcsolódik a számnévképzés a számrendszer alapszámához: 13 – *dreizehn*, 14 – *vierzehn*. Hasonló jelenség figyelhető meg az angolban is.

A húszas számrendszer a majáknál és a keltáknál alakult ki legjellegzetesebb formájában. Mexikóban és Közép-Amerikában még ma is használják a csillagászatban. Nyelvi emlékei élnek a francia, a dán, az angol, a gael és a walesi nyelvben. A francia pl. a nyolcvanatot ma is négy-húsz alakban fejezi ki: *quatre-vingts*.

A hatvanas számrendszer, ahonnan az óra 60 percre, és a perc 60 másodpercre való osztása, valamint szögmérésünk rendszere is ered, a babilóniaiaktól származik (Filep-Bereznai, 1999).

3.3. SZÁMÍRÁSOK

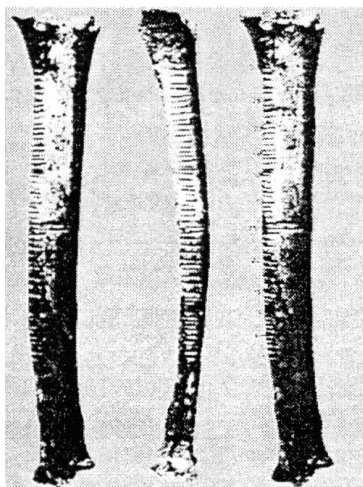
A számfogalom kialakulását követően a társadalom fejlődésének egy bizonyos fokán már nem volt elég, hogy az ember a különböző halmazok elemeit meg tudta számolni. Szükségessé vált, hogy a számadatokat feljegyezzék, megőrizték. Rögzítésükre különböző módok jöttek létre.

– Rovás, csomózás

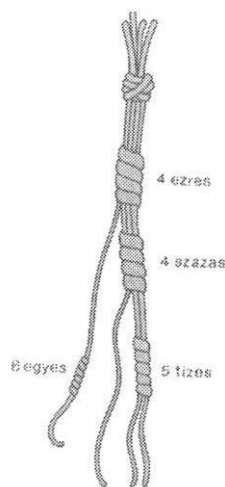
A számok rögzítésének legismertebb kezdetleges eljárásai a rovasok vésése csontra, botra, csomókötözés zsinorra, kavicsok ötös, tízes csoportokba rendezése (Filep-Bereznai, 1999).

A csomózás módszere a kínaiaknál az emlékeztetés legrégebbi formája volt. Nádból vagy kákából készített zsinogra kákából vagy gabonaszalmából csomókat kötöttek, és ezt a csomózott zsinórt a számadatok rögzítésére használták.

A csomózás az inkáknál igen magas fokot ért el, és nagy jelentőségre tett szert. Ez volt az egyetlen írásféleségük és számrögzítési módjuk is. A quipu egy alapszinórból és különböző színű rákötözött fonalakból állt. A színnek, a hosszúságnak, a csomók számának és egymástól való távolságának mind különös jelentősége volt. A csomók egyeseket, tízeseket, százakat jelölhettek, így tehát a tízes számrendszer használatáról tanúskodnak.



Rovasok 5-ös csoportokban
(Klix, 1985)



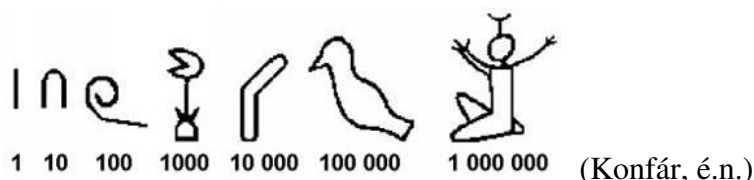
A 4456 szám ábrázolása a quipun
(Filep-Bereznai, 1999)

– Hieroglif számírások

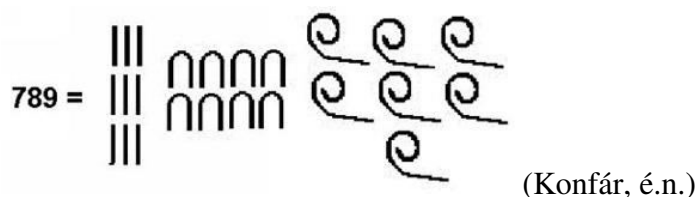
Az ókori Egyiptomban kb. i.e. 3000 évvel kezdett kialakulni a hieroglif írás (képírás, piktografikus írás), ez jellemezte a számírást is. Az egyiptomi számírás a tízes számrendszeren alapul, de még nem jelenik

3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

meg a helyi értékes írásmód, az 1, 10, ... , 1 000 000 számok jelölésére rendre a pálca; cipó (halom); kígyó (zsinór); lótuszvirág; nádkéve (ujj); ebihal (béka v. madár); térdeplő istennő (a korlátlan tér istene) stilizált rajzait használták:



Az írás iránya idővel változott, a Rhind-papiruszon már vízszintesen jobbról balra az összeadási elvnek megfelelően kell olvasni (additív rendszer), amelyet az alábbi példával mutatunk be:



A római számírás elve is hieroglifikus. A számjegyek eredetét nem ismerjük pontosan. Kialakulásukat többféleképpen magyarázzák, egyesek etruszk eredetűnek tartják, mások kézjelekre vezetik vissza (Filep-Bereznai, 1999). A jegyek az ötös és a tízes számrendszer keveredését mutatják.

A mindennapi élet néhány területén napjainkban is használatos számjelkészlet a következő:

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Az egyiptomi és római számábrázolásokat összehasonlítva megállapítható, hogy a sorba rendezés és csoportosítás nagy hasonlóságokat mutat (Klix, 1985):

3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

A tisztázás eredményét leolvasták és kiírták számjegyekkel.

A számolótáblához hasonló eszköz (helyiérték-táblázat), és a fent leírt módszer jól használható a számrendszeres gondolkodás kialakítására (lásd később); alkalmas az alsó tagozatos matematikaoktatásban a gondolkodás cselekvéssel való reprezentációjának megvalósítására.

– Alfabetikus számírások

A helyi érték nélküli számírások másik nagy csoportját az alfabetikus számírások jelentik. Az i.e. 1800-1500 körül a föníciaiak által kialakított betűírás rendszere gyorsan elterjedt először a szomszédos népek körében, majd szélesebb körben is. A számok betűkkel való lejegyzésének ötlete valószínűleg a héberektől ered. Ezt a számírásmódot használták az ókori görögök is. Sok más nép is kialakította a saját alfabetikus számírását, így például a szlávok, a koptok, az arabok, az örmények és a grúzok.

I.e. 500 után a görögök általában betűszámjegyeket használtak. Az első kilenc betű az egyeseket, a második kilenc a tízeseket jelölte, ezután jöttek a százaskok. Vesszővel ellátott betűk voltak az ezresek.

α ,	β ,	γ ,	δ ,	ϵ ,	ς ,	ζ ,	η ,	θ ,
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι ,	κ ,	λ ,	μ ,	ν ,	ξ ,	$\omicron$,	π ,	ς ,
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ ,	σ ,	τ ,	υ ,	ϕ ,	χ ,	ψ ,	ω ,	λ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Ógörög számírás az ión írás kisbetűinek alkalmazásával (Sain, 1986)

A pozíciós írásmód hiánya egy további kognitív bonyodalmat is okozott. Olyan feladat, mint a 4×10 különbözik a 4×100 összeszorzásának feladatától.

– Helyi értékes számírások

A helyi értékes számírást először a babilóniaiak használták. Erről ékírásos agyagtáblák tanúskodnak, amelyek közül elsőként két i.e. 2300-1600 körül készült matematikai táblán fedezték fel a hatvanas helyi értékes jelölést.

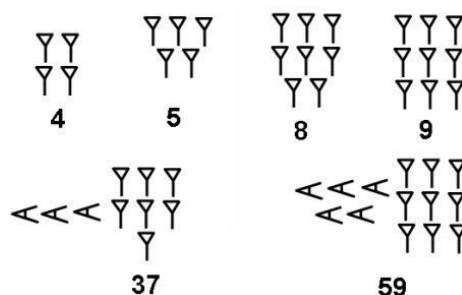
Az agyagtáblákon írónád segítségével hozták létre az ék alakú jeleket.

	1	10	60	600	3600
Régebbi sumér kor					
Új jelek					
Újabb sumér kor					

Számjelek hatvanas rendszerben (Konfár, é.n.)

Az újabb jelölésben már az 1-nek és a 60-nak ugyanaz volt a jele - a 60-at egy nagy egységnek tekintették. Ez a helyi értékes írásmódhoz az első, s talán a legfontosabb lépés.

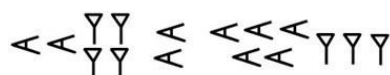
Egytől tízig az egyiptomi számíráshoz hasonlóan rendezték el az egységet: legfeljebb három egységet rajzoltak egymás mellé, maximum három sorba, és ugyanígy jártak el a tízesekkel is - 59-ig. A 60-at és a 60-nál nagyobb számokat a helyi érték elvének megfelelően jelölték, de a helypótló nulla alkalmazása nélkül.



Sumér számírás (Konfár, é.n.)

A sumér számírásban tehát 59-ig még a nem helyi értékes 10-es számrendszerrel, nagyobb számok esetén pedig már a helyi értékes 60-as számrendszerrel írták a számokat.

A számok nagyságrendjét a szövegből kellett kikövetkeztetni. Így elkerülhetetlenné vált a 0 jelének a bevezetése, ezt két egymás alá helyezett 10-essel jelölték:



$$24 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 53 \cdot 1 = 86400 + 53$$

A 0 jelölése (Konfár, é.n.)

A lejegyzés azonban mégsem volt egyértelmű, mert a szám végi nulla helyett nem alkalmazták ezt a jelet. (A szá mábrázoláson ezt az utolsó

3. TÖRTÉNETI ÁTTEKINTÉS

simítást az indiaiak végezték el, és majd csak az arabok hozták el Dél-Európába a középkor folyamán.)

A következő jelek: ∇ ζ ∇ j (1,0,4) például egyaránt jelenthették a 3604-et és a $60^{1/15}$ -öt is. $(104_{60} = 1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60^1 + 4 \cdot 60^0 = 3064$
 $10,4_{60} = 1 \cdot 60^1 + 0 \cdot 60^0 + 4 \cdot 60^{-1} = 60^{4/60} = 60^{1/15})$

Ezt a jelölésmódot a lebegőpontos számábrázolás ősi formájának tekinthetjük.

Húszas alapszámú helyi értékes számrendszert használtak a maják. A számokat háromféle jellel ábrázolták: a nullát egy kagyló jele, az egyes számot egy pont, az ötös számot egy vízszintes vonás jelezte.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••

Maja számjelek (Sain, 1996 alapján)

A többi számot ezek kombinációjával, helyi értékük figyelembevételével fejezték ki. A helyi értékek függőlegesen, alulról felfelé épültek fel. A 19 feletti számokat 20 hatványai alapján fejezték ki egymás fölé írva. Például a 33-as számot úgy írták le, hogy felül egy pont jelképezte a mi tízes számrendszerünk szerinti 20-at, az alatta lévő (képzelt) mezőben pedig a két vonás kétszer ötöt, felette a három ponttal összesen 13-at. 20^2 , azaz 400 felett új sort nyitottak felül, amelyben egy pont már 400-at jelképezett.

400-asok		•	
20-asok	•	•	
1-esek			
	33	429	5125

Maja számírás

A tízes számrendszer és a helyi érték együttes használata és ennek során a nullának mint számjegynek a bevezetése a hindu matematika érdeme (i.sz. 500 körül). Mai számírási módszerünk egyértelműen innen származik, csak a számjegyek formája változott az idők során:

—	=	≡	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘	𑀙
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

brahmi

𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘	𑀙	𑀚	𑀛	𑀜
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

hindu

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

arab

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

európai (15.sz.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Dürer

A hindu számjegyek alakjának változása (Markó, 1996)

A hindu matematika eredményei arab közvetítéssel kerültek Európába. A hindu számírásról így ír Laplace, a nagy francia tudós:

„A hinduktól jutott el hozzánk az a csodálatos számírási rendszer, amelyben minden szám felírható tíz jellel azáltal, hogy minden jelnek alaki és helyi értéket tulajdonít. Ez a nagy jelentőségű és zseniális módszer olyan egyszerűnek tűnik, hogy emiatt fel sem tudjuk fogni igazán a nagyszerűségét. De éppen egyszerűsége és a műveletek nagyon könnyű elvégezhetősége helyezi ezt az aritmetikai rendszert a leghasznosabb felfedezések sorába” (idézi: Filep-Bereznai, 1999).

E rövid történeti áttekintésben kiemeltem a helyi értékes számrendszerek fogalmának kialakulásához vezető legfontosabb problémaköröket, amelyek véleményem szerint az oktatás során is jelentős szerephez kell, hogy jussanak: a csoportosítás ötlete, a többféle alapszám szerinti csoportosítás jelentősége, a csoportosítások lejegyzésének különböző lehetőségei, különös tekintettel a pozíciós írásmód szabályaira, a nulla jelölésének szerepére.

4. MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI HÁTTÉR

Minden tantárgy oktatásának eredményességét nagymértékben befolyásolja a szaktanár szaktárgyi felkészültsége. Pontosan tisztában kell lennie az adott témakörhöz tartozó alapfogalmakkal, összefüggésekkel, és azzal is, hogy a tárgyalt összefüggések, képletek milyen fogalmakból kiindulva, milyen logikai lépésekkel, hogyan építhetők fel. Ebben a fejezetben arra vállalkozom, hogy a szakmódszertani vonatkozások tárgyalása előtt a helyi értékes számrendszerekre és a számítógépes számábrázolásra vonatkozó alapfogalmakat, alapösszefüggéseket összegyűjtssem.

4.1. HELYI ÉRTÉKES SZÁMRENDSZEREK

A számrendszer elnevezés a számok megnevezésének és lejegyzésének módját jelenti. A hétköznapi szóhasználatban legtöbb esetben a helyi értékes számábrázolást értjük a számrendszer kifejezés alatt. Például:

„A természetes számoknak olyan rendszere, amelyben a számsor az alapszámok (pl. 1-10) sorával meghatározott egységekre tagolódik; ezek az egységek tovább számolva ismét nagyobb egységet alkotnak, s így az egységek összegével a számsor bármely tagja meghatározható” (A magyar nyelv értelmező szótára, 1966, p.74).

„A számoknak valamely természetes szám hatványaiból felépített rendszere” (Juhász et al. 2003, p.1222).

Definíció

Az r alapú helyi értékes számábrázolást (vagy r alapú számrendszert) a következő szabály definiálja:

$$(\dots \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 \bar{a}_{-1} \bar{a}_{-2} \dots)_r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i r^i = \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots$$

– Az r szám a számrendszer *alapszáma*². A legegyszerűbb számrendszerek esetén a számrendszer alapszáma 1-nél nagyobb r természetes szám.

– Az a_i természetes számokat a $0 \leq a_i < r$ tartományból választjuk. Az $\bar{a}_i$ jelek a szám *számjegyei*, vagy *számjelei*.

² radix = gyökér, tő

- Az $\bar{a}_i$ által jelölt a_i szám a számjegy (számjel) *alaki értéke*.
- Az r^i hatvány a számjegy (számjel) *helyi értéke* ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).
- az $a_i r^i$ szorzat a számjegy (számjel) *valódi (tényleges) értéke*.
- $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i r^i = \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots$ összeg a szám valódi (tényleges) értéke.
- Az a_0 és a_{-1} között levő pont (.) a számrendszer *alappontja*.

Megjegyzések

Ha az alapszám 10-nél nagyobb (de nem nagyobb, mint 36), akkor a 9-nél nagyobb számjegyeket gyakran az angol abc nyomtatott nagybetűivel jelöljük (A, B, C, D, ...).

Azt szoktuk mondani, hogy egy nagyobb i értékhez tartozó a_i számjegy magasabb helyi értékű, mint egy kisebb indexhez tartozó. Az alapponttól balra (jobbra) eső legnagyobb (legkisebb) helyi értékű $\bar{0}$ -tól különböző számjegy elől (mögül) – ha egyáltalán ilyen van – elhagyjuk a $\bar{0}$ számjegyek írását, ha pedig csupa $\bar{0}$ számjegy található az alapponttól balra (jobbra), csak egyet írunk le belőle.

Ha $r=10$, akkor tizedespontról, az $r=2$ esetben pedig időnként kettedespontról beszélünk. A legtöbb európai országban ma még tizedes vesszőt (,) írnak a tizedes pont helyett, mégis a számítógépes gyakorlatban a pont használata az egyeduralkodó (Knuth, 1994).

A hétköznapi életben általában a tízes, az informatikában gyakran a kettes, sokszor a nyolcas és tizenhatos számrendszereket használjuk.

Az általunk jól megszokott tízes számrendszer az az eset, amikor r értéke 10, és az $\bar{a}_i$ -ket a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 decimális számjegyek közül választjuk; ebben az esetben az (1) formula r indexét elhagyhatjuk.

A kettes számrendszer alapszáma 2, számjegyei a 0 és az 1, rendre 0 és 1 alaki értékkel.

A nyolcas számrendszer alapszáma 8, számjegyei 0, 1, ..., 8 rendre 0, 1, ..., 8 alaki értékkel.

A tizenhatos számrendszer alapszáma 16, számjegyei 0, 1, ..., 9, A, B, ..., F rendre 0, 1, ..., 9, 10, 11, ..., 15 alaki értékkel.

– Egészrész, törtrész értelmezése

Legyen $r \geq 2$ természetes szám. Ekkor tetszőleges $v \geq 0$ valós szám felírható az r alapú helyi értékes számrendszerben $v = (\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \dots \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 \cdot \bar{a}_{-1} \bar{a}_{-2} \dots)_r$ alakban, ahol $0 \leq a_i \leq r-1$ természetes számok minden $i = n, n-1, \dots$ esetén, és $a_n \neq 0$, ha $n \geq 1$.

A v valós szám egészrésze: $[v] = (\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \dots \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0 \cdot \bar{0})_r$, törtrésze: $\{v\} = \bar{0} \cdot \bar{a}_{-1} \bar{a}_{-2} \bar{a}_{-3} \dots)_r$.

Egyéb számrendszerek

Az előzőekben tárgyalt r alapú számrendszeren kívül még számos speciális változat lehetséges.

– Negatív alapú, ahol az alapszám negatív egész; pl. „negadecimális” (-10) alapú számrendszer. Ebben a számrendszerben minden szám felírható előjel nélkül, függetlenül attól, hogy pozitív vagy negatív.

– Komplex alap szerinti számrendszerek, pl. $2i$ alapú „quarter-imagináris” számrendszer, amelyekben minden komplex szám kifejezhető a 0, 1, 2, 3 számjegyek segítségével, előjel nélkül.

– „Kiegyensúlyozott ternáris” számrendszer, ahol az alapszám 3, és a -1 , 0, és $+1$ ún. „trit”-eket (ternáris számjegyeket) használjuk a 0, 1, és 2 helyett.

– Vegyes alapú számrendszerek, pl. a hétköznapi életben használt hét, nap, óra, perc, másodperc időmennyiségek jelölésére használt rendszer.

A felsoroltakon kívül számos más számábrázolási rendszer lehetséges, pl.: binomiális számrendszer, Fibonacci számrendszer, irracionális alapszámú számrendszer, φ számrendszer, moduláris számábrázolás (Knuth, 1994), melyek bemutatása túlmutat ennek a dolgozatnak a keretein.

4.2. ÁTTÉRÉS EGYIK SZÁMRENDSZERBŐL A MÁSIKBA

A különböző alapszámú helyi értékes számrendszerek közötti átváltás (konverzió) algoritmusai közül a legtöbb szakirodalom azt az esetet tárgyalja, amikor az átváltandó szám új számrendszerbeli számjegyeit az alapszámmal való euklideszi osztások sorozatával, a helyi értékek növekvő sorrendjében állítjuk elő (pl.: Szendrei, 1986). A továbbiakban ennek az algoritmusnak a tárgyalásával együtt bemutatjuk azt az

algoritmust is, amelyben az euklideszi osztást nem az alapszámmal, hanem annak jól meghatározott hatványaival (a megfelelő helyi értékekkel) osztjuk. Kitérünk arra a speciális esetre is, amikor az egyik számrendszer alapszáma a másik számrendszer alapszámának pozitív egész kitevőjű hatványa.

– Az átváltás algoritmusai

Legyen $v \geq 0$ az R alapú számrendszerben adott szám. Határozzuk meg v számjegyeit az r alapú számrendszerben, R alapú aritmetika alkalmazásával.

1. módszer

1.1. Először v egészrészének határozzuk meg a számjegyeit: $[v]$ felírható

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

alakban, ami átalakítva

$$(\dots((a_n r + a_{n-1})r + a_{n-2})r + \dots + a_1)r + a_0.$$

Végezzünk tehát r -rel ismételt maradékos osztást; a maradékok rendre – növekvő helyi érték szerint – adják az r alapú számrendszerbeli számjegyek alaki értékeit:

$$[v] = v_1 r + a_0$$

$$v_1 = v_2 r + a_1$$

$$v_2 = v_3 r + a_2$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} = v_n r + a_{n-1}$$

$$v_n = 0r + a_n$$

1.2. Most határozzuk meg v törtrészének számjegyeit:

$\{v\}$ felírható $a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots$ alakban.

Ekkor tehát $\{v\}r = a_{-1} + a_{-2} r^{-1} + \dots$, ahol $\{v\}r$ egészrésze a_{-1} , törtrésze pedig $a_{-2} r^{-1} + \dots$.

4. MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI HÁTTÉR

Szorozzuk tehát r -rel mindig az előző lépésben nyert szorzat tört részét; a szorzatok egészrészei szolgáltatják rendre – csökkenő helyi érték szerint – $\{v\}$ r alapú számrendszerbeli számjegyeinek alaki értékeit.

Mivel a műveleteket az eredeti (R alapú) számrendszerben végeztük el, az eljárás eredményeként kapott számjegyek alaki értékeit is ebben a számrendszerben nyertük. Ezután a számjegyek alaki értékeit jelölő r alapú számrendszerbeli számjegyeket beírjuk az alaki értékek helyére, megkapva v r alapú számrendszerbeli alakját.

2. módszer

Keressük meg azt az r^m értéket, amelyre igaz, hogy $r^m \leq v < r^{m+1}$.

Végezzük maradékos osztások sorozatát a következők szerint:

$$\begin{aligned}v &= v_m r^m + q_0 \\q_0 &= v_{m-1} r^{m-1} + q_1 \\q_1 &= v_{m-2} r^{m-2} + q_2 \\&\vdots\end{aligned}$$

Az ismételt maradékos osztások sorozatában r hatványainak együtthatói rendre – csökkenő helyi érték szerint – adják az r alapú számrendszerbeli számjegyek alaki értékeit.

Speciális esetek

Tegyük fel, hogy r alapú számrendszerből kell $R=r^k$ ($k>1$) alapú számrendszerbe átváltanunk.

Ekkor

$$\begin{aligned}v &= a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots = \\&= b_m R^m + b_{m-1} R^{m-1} + \dots + b_1 R + b_0 + b_{-1} R^{-1} + b_{-2} R^{-2} + \dots,\end{aligned}$$

ahol $b_i = a_{ik+k-1} r^{k-1} + a_{ik+k-2} r^{k-2} + \dots + a_{ik+1} r + a_{ik}$, azaz az R alapú számrendszer mindegyik számjegye az r alapú számrendszer számjegyeinek k tagú csoportjára konvertálható és viszont.

4.3. SZÁMÁBRÁZOLÁS SZÁMÍTÓGÉPEN

A fejezetben a számok számítógépes ábrázolásának azon módjaival foglalkozunk, ahol a szám kettes számrendszerbeli alakjából indulunk ki. Különböző számítógép-architektúrák támogatják továbbá a tízes vagy tizenhatos számrendszerekben történő számábrázolást is, amely hasonló módon történik.

Lényeges szempont, hogy a fizikailag véges számú pozíción ábrázolható számok intervalluma vagy pontossága minél nagyobb, kódolt alakjuk pedig aritmetikai műveletek végzésére alkalmas legyen.

A racionális számok számítógépen való ábrázolásának alapvetően kétféle technikája van:

- fixpontos: a számábrázolás során a számítógép az alappont helyét nem tárolja, a programozó feladata, hogy ezt számon tartsa, és a műveletek végzése során nyomon kövesse;
- lebegőpontos: a számábrázolás során tároljuk az alappont helyét, és az dinamikusan változik („lebeg”) a programozás során.

A dolgozatban részletesebben a fixpontos ábrázolás két legelterjedtebb formáját, a kettes komplement, illetve a többlétes kódolás elvét tárgyaljuk.

FIXPONTOS GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS

A fixpontos számábrázolás tárgyalása során – mivel az alappont helyét majd a programozó követi – az ábrázolandó számokat az egyszerűség kedvéért egészeknek tekinthetjük.

n biten két jellel 2^n különböző jelsorozat adható meg. Ezekkel a jelsorozatokkal ábrázolhatjuk a különböző egészeket.

– Ábrázolás előjellel és abszolút értékkel

1 biten a szám előjelét adjuk meg kódolva, $n - 1$ biten a szám abszolút értékét ábrázoljuk *előjel és kódolás nélkül*. Az ábrázolási tartomány: $-(2^{n-1} - 1) \leq v \leq 2^{n-1} - 1$. A módszer előnye, hogy a hétköznapi gyakorlatnak megfelelő, az ábrázolási tartomány szimmetrikus a 0 körül, hátránya, hogy a 0-nak két különböző kódja van (± 0).

4. MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI HÁTTÉR

– Ábrázolás kettes komplement kódolással

A v szám kettes komplement kódja n biten a következő:

$$\hat{v} = \begin{cases} v & \text{ha } 0 \leq v \leq 2^{n-1} - 1, \\ 2^n + v & \text{ha } -2^{n-1} \leq v < 0, \end{cases} \quad (1)$$

és ha a $\hat{v}$ szám kettes számrendszerbeli alakja kevesebb, mint n számjegyet tartalmaz, balról kiegészítjük 0-akkal. Az ábrázolási tartomány: $-2^{n-1} \leq v \leq 2^{n-1} - 1$. Az ábrázolás előnye, hogy a bal szélső bitből (bár ez nem előjel) leolvasható az előjel, a kódolás/dekódolás pedig egyszerűen megvalósítható. Hátránya, hogy nem szimmetrikus.

– A kettes komplement összeadás

A kettes komplement kódok $0 \leq x, y \leq 2^n - 1$ egész számok. Az ábrázolt számok összegének kiszámításához ezekkel a kódokkal kell műveletet végeznünk; olyan műveletet, amelynek eredményeként épp az ábrázolt számok összegének kettes komplement kódját kapjuk.

Definíció

Legyenek $0 \leq x, y \leq 2^n - 1$ egész számok. Defináljuk közöttük a következő műveletet:

$$x \oplus y \rightleftharpoons (x + y) \bmod 2^n \quad (2)$$

A $\oplus$ művelet neve: kettes komplement összeadás.

Tétel

Legyenek $-2^{n-1} \leq u, v \leq 2^{n-1} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ekkor} \quad & \text{ha} \quad -2^{n-1} \leq u + v \leq 2^{n-1} - 1, \\ & \text{akkor} \quad \hat{u} \oplus \hat{v} = \widehat{u + v}, \end{aligned} \quad (3)$$

azaz két kettes komplement kódban ábrázolt szám kettes komplement összege megegyezik a két szám összegének kettes komplement kódjával, ha a két szám összege az ábrázolási tartományba esik.

Bizonyítás

A) Ha $0 \leq u, v \leq 2^{n-1} - 1$ és $u + v \leq 2^{n-1} - 1$,

akkor (1) szerint: $\hat{u} = u, \hat{v} = v$ és $\widehat{u + v} = u + v$,

továbbá (2) szerint: $\hat{u} \oplus \hat{v} = (\hat{u} + \hat{v}) \bmod 2^n$

De $\hat{u} = u, \hat{v} = v$, ezért $\hat{u} \oplus \hat{v} = (\hat{u} + \hat{v}) \bmod 2^n = (u + v) \bmod 2^n$

Mivel $u + v < 2^n$, ezért $(u + v) \bmod 2^n = u + v$, azaz $\hat{u} \oplus \hat{v} = u + v$.

B) Ha $0 \leq u \leq 2^{n-1} - 1$ és $-2^{n-1} \leq v < 0$, akkor (1) szerint:

$$\hat{u} = u, \hat{v} = v + 2^n$$

$$\text{és } \widehat{u + v} = \begin{cases} u + v & \text{ha } 0 \leq u + v, \\ u + v + 2^n & \text{ha } u + v < 0. \end{cases}$$

(B.a) Legyen $0 \leq u + v$, ekkor $\widehat{u + v} = u + v$.

Továbbá (2) szerint: $\hat{u} \oplus \hat{v} = (\hat{u} + \hat{v}) \bmod 2^n = (u + v + 2^n) \bmod 2^n$.

Mivel $0 \leq u + v$ ezért $2^n \leq u + v + 2^n$, tehát

$$\hat{u} \oplus \hat{v} = (u + v + 2^n) \bmod 2^n = (u + v) \bmod 2^n = u + v.$$

(B.b) Legyen $u + v < 0$, ekkor $\widehat{u + v} = u + v + 2^n$.

Továbbá (2) szerint: $\hat{u} \oplus \hat{v} = (\hat{u} + \hat{v}) \bmod 2^n = (u + v + 2^n) \bmod 2^n$.

Mivel $u + v < 0$ ezért $u + v + 2^n < 2^n$, tehát

$$\hat{u} \oplus \hat{v} = (u + v + 2^n) \bmod 2^n = u + v + 2^n.$$

C) Ha $-2^{n-1} \leq u, v < 0$ és $-2^{n-1} \leq u + v$, akkor (1) szerint:

$$\hat{u} = u + 2^n, \hat{v} = v + 2^n \text{ és } \widehat{u + v} = u + v + 2^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Továbbá } \hat{u} \oplus \hat{v} &= (\hat{u} + \hat{v}) \bmod 2^n = (u + 2^n + v + 2^n) \bmod 2^n = \\ &= (u + v + 2 \cdot 2^n) \bmod 2^n = (u + v + 2^n) \bmod 2^n. \end{aligned}$$

Mivel $u + v < 0$ ezért $u + v + 2^n < 2^n$, tehát

$$\hat{u} \oplus \hat{v} = (u + v + 2^n) \bmod 2^n = u + v + 2^n.$$

– Ábrázolás többletes kódolással

A v szám többletes kódja n biten a következő:

$$\tilde{v} = v + 2^{n-1}, \quad (4)$$

és ha a $\tilde{v}$ szám kettes számrendszerbeli alakja kevesebb, mint n számjegyet tartalmaz, balról kiegészítjük 0-akkal. Az ábrázolási tartomány: $-2^{n-1} \leq v \leq 2^{n-1} - 1$. Az ábrázolási mód előnye, hogy a bal szélső bitről leolvasható az előjel. Hátránya, hogy nem szimmetrikus.

– A többletes összeadás

A többletes kódok is $0 \leq x, y \leq 2^n - 1$ egész számok. A többletes kódban ábrázolt számok összeadásának elvégzéséhez szintén szükség van egy olyan, kódokkal végzendő műveletre, amelynek eredménye az ábrázolt számok összegének többletes kódja.

Definíció

Legyenek $0 \leq x, y \leq 2^n - 1$ egész számok. Definiáljuk közöttük a következő műveletet:

$$x \oplus y \Leftrightarrow (x + y + 2^{n-1}) \bmod 2^n \quad (5)$$

A $\oplus$ művelet neve: többletes összeadás.

Tétel

Legyenek $-2^{n-1} \leq u, v \leq 2^{n-1} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ekkor} \quad & \text{ha} \quad -2^{n-1} \leq u + v \leq 2^{n-1} - 1, \\ & \text{akkor} \quad \tilde{u} \oplus \tilde{v} = \widetilde{u + v} \end{aligned} \quad (6)$$

azaz két többletes kódban ábrázolt szám többletes összege megegyezik a két szám összegének többletes kódjával, ha a két szám összege az ábrázolási tartományba esik.

Bizonyítás

Ha $-2^{n-1} \leq u, v \leq 2^{n-1} - 1$ és $-2^{n-1} \leq u + v \leq 2^{n-1} - 1$

akkor (4) szerint: $\tilde{u} = u + 2^{n-1}$, $\tilde{v} = v + 2^{n-1}$ és $\widetilde{u + v} = u + v + 2^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{továbbá (5) szerint: } \tilde{u} \oplus \tilde{v} &= (\tilde{u} + \tilde{v} + 2^{n-1}) \bmod 2^n = \\ &= (u + 2^{n-1} + v + 2^{n-1} + 2^{n-1}) \bmod 2^n = \\ &= (u + v + 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1}) \bmod 2^n = \\ &= (u + v + 2^{n-1}) \bmod 2^n \end{aligned}$$

A) Legyen $0 \leq u + v \leq 2^{n-1} - 1$,

akkor $(u + v + 2^{n-1}) \bmod 2^n = u + v + 2^{n-1}$, mert $0 < u + v + 2^{n-1} < 2^n$

B) Legyen $-2^{n-1} \leq u + v < 0$,

akkor $(u + v + 2^{n-1}) \bmod 2^n = u + v + 2^{n-1}$, mert $0 \leq u + v + 2^{n-1} < 2^{n-1}$

Tehát $\tilde{u} \oplus \tilde{v} = u + v + 2^{n-1} = \widetilde{u + v}$.

A kettes komplement és a többletes kódolással kapcsolatos további megfontolásokat most nem teszünk.

LEBEGŐPONTOS GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS

A lebegőpontos számábrázolás lehetővé teszi a valós számok kezelését véges tárhely esetében. Számos számábrázolási rendszer létezik a lebegőpontos számok kezelésére, de a legelterjedtebb az IEEE 754 szabvány. Lebegőpontos számábrázolás esetén a

$$v = \pm 0.m \cdot 2^k$$

alakban felírt valós szám előjelét ($\pm$), törtrészét (m : mantissza), és a kitevőjét (k : karakterisztika) tartjuk nyilván.

Normalizáltnak nevezünk egy számot, ha m első számjegye 0-tól különbözik. A törtrészt nem kódoljuk, a kitevőt rendszerint többletes kódban tartjuk nyilván.

Tegyük fel, hogy n bit áll rendelkezésünkre a törtrész és l bit a kitevő ábrázolására. Ekkor az ábrázolási tartomány:

$$(0.1)_2 \cdot 2^{-2^{l-1}} \leq |v| \leq (0.1\dots 1)_2 \cdot 2^{2^{l-1}-1}.$$

Ebben a fejezetben azokat az alapvető fogalmakat és összefüggéseket tekintettem át, amelyekre a szakmódszertani vonatkozások kifejtése során építeni fogok.

5. TANTERVI ELŐÍRÁSOK

A közoktatás tartalmát szabályozó dokumentumok (alaptantervek, kerettantervek) áttekintése, tartalmi elemzése során arra a kérdésre kerestem a választ, hogy a helyi értékes számrendszerek témakör hogyan, milyen hangsúllyal szerepel ezekben a dokumentumokban; elvárható-e a hallgatóktól a számrendszer-fogalom alkalmazóképes tudása.

5.1. A TARTALMI SZABÁLYOZÁS SZINTJEI: NEMZETI ALAPTANTERV – KERETTANTERV – HELYI TANTERV

A magyar oktatásügyben a tartalmi-tantervi szabályozás háromszintű. A legmagasabb szintű dokumentum a Nemzeti Alaptanterv. A második szintet a kerettantervek, a harmadikat pedig az iskolák helyi tantervei képviselik. A továbbiakban először a NAT, majd három, a dolgozat megírásának időpontjában érvényben levő kerettanterv előírásait tekintem át a számrendszerek témakörre vonatkozóan. A helyi tantervek minimális mértékben különböznek a kerettantervektől, ezért azokat nem vizsgálom.

5.2. A SZÁMRENDSZEREK TÉMAKÖR A NAT-BAN

A NAT a kimenet felől szabályozza az iskolai munkát: nem körvonalazza pontosan, évekre lebontva a tananyag egészét. A dolgozat megírásának időpontjában érvényes változat a NAT 2007, amelyben tartalmi vonatkozások tekintetében az előző változatokhoz képest további hangsúlyt kaptak az általános és kiemelt fejlesztési feladatok, a keresztntantervek. A dokumentum minden műveltségterületre vonatkozó elvekként tartalmazza a kulcskompetenciákra vonatkozó tartalmakat. A következőkben a NAT 2007 helyi értékes számrendszerekhez kapcsolódó elemeit tanulmányozom a matematika és az informatika műveltségterületeken. Mivel a dokumentum nem írja elő a konkrét tanítandó ismeretanyagot, a témakörre vonatkozó előírásokat a *kulcskompetenciák* tekintetében, és mindkét műveltségterület *célrendszerében* illetve *fejlesztési feladatainak* rendszerében vizsgálom.

NAT – kulcskompetenciák

A NAT-ban megjelenő kulcskompetenciák alapját a *Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on Key Competences for Lifelong Learning (2006/962/EC)* című dokumentum képezi. A kilenc kulcskompetencia-terület között mind a matematikai, mind a digitális kompetencia szerepel. Tekintsük át, hogy konkrétan mely területeken kapcsolódhat a helyi értékes számrendszerek témakör ezekhez a kulcskompetenciákhoz:

A matematikai kompetencia fogalmának meghatározásában a dokumentum kiemeli a *matematikai gondolkodás* fejlesztésének és alkalmazásának képességét, valamint azt, hogy a matematikai kompetencia kialakulásában a *folyamatok és a tevékenységek* ugyanolyan fontosak, mint az ismeretek. A kompetencia lényeges eleme a *matematikai modellek, struktúrák* alkalmazásának képessége is.

A számrendszerek témakör oktatásának kiemelt szerepe lehet a *matematikai gondolkodás* fejlesztésében többek között a következő területeken: rendszerszemlélet kialakítása; analógiás gondolkodás fejlesztése; algoritmikus gondolkodás fejlesztése.

A *matematikai modellek, struktúrák* alkalmazásának képessége fejlődik azzal, hogy a témakör oktatása során fejlődő/kialakuló számrendszeres gondolkodás a mindennapi életben használt tízes számrendszerben való magabiztosabb eligazodást, alkalmazni tudást biztosít.

A témakör oktatásának a komplex matematikatanítási kísérlet során kidolgozott, majd az évek során továbbfejlesztett módszertani hagyományai – a témakör fogalmainak, műveleteinek kialakítása során alkalmazott eszközök, a nagyrészt tanulói tevékenységekre épülő módszerek – jól képviselik azt az elvet, amely szerint a matematikatanítás nem kizárólag az ismertek átadását jelenti, hanem a gondolkodás fejlesztésének eszköze is.

A digitális kompetencia meghatározásának a témakör szempontjából egyik legfontosabb eleme az, amely az információs és kommunikációs technológia kritikus használatára vonatkozik. A számítógépes számbábrázolás egyik kulcsfontosságú kérdésköre ugyanis a számbábrázolás pontossága. Az ábrázolási mód jelentősen befolyásolja azt, hogy a számítások során kapott értékek mennyire pontosak, ezáltal az adott programalkalmazás eredményei mennyire megbízhatók.

5. TANTERVI ELŐÍRÁSOK

NAT – alapelvek, célok

A NAT *matematika* műveltségterületre vonatkozó alapelvei, céljai közül a helyi értékes számrendszerek témakör oktatása során a következők kerülhetnek előtérbe:

- A matematika kész tudásrendszer, és sajátos emberi megismerési tevékenység is egyben.
- A matematikai gondolkodás fejlesztése a matematika különböző témaköreinek szerves összeépülésével valósítható meg.
- A fogalmak, összefüggések érlelése, a matematikai gondolkodásmód kialakítása érdekében a tananyag felépítése spirális szerkezetű.
- A műveltségi terület fejlesztésének kiemelt területe a biztos számolási tudás kialakítása.
- A matematikai fejlődés és a tanulási folyamat során alapvető jelentőségű a jelenségekhez illeszkedő modellek, gondolkodásmódok (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszerek (aritmetikai, algebrai, geometriai, koordináta geometriai, statisztikai stb.) és leírások kiválasztásának és alkalmazásának tudása.
- Fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő képességek fejlesztése.
- A reprodukív és a problémamegoldó, alkotó gondolkodásmód fejlesztése egyaránt lényeges.
- Az alapvető tevékenységek (pl. mérés, alapszerkesztések), műveletek (pl. aritmetikai, algebrai műveletek, transzformációk) automatizált végzése, a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazása egyaránt fontos.

Az *informatika* műveltségterület alapelvei, céljai közül implicit módon kapcsolódik a témakörhöz a megfelelő információszerzési, -feldolgozási, adattárolási, -szervezési és -átadási technikák elsajátítására vonatkozó cél. Bár a tanulók többsége felhasználói szinten kerül majd kapcsolatba az információkezelési technikákkal, fontos, hogy tapasztalatokat szerezzenek a pontossággal, megbízhatósággal kapcsolatos vonatkozásokról, amelyek egy jelentős része a számítógépes számábrázolás témakörével kapcsolatos.

NAT – fejlesztési feladatok

A NAT a *matematika műveltségterületre* vonatkozóan hét fő témakörben határozza meg a fejlesztési feladatokat:

1. Tájékozódás (térben; időben; a világ mennyiségi viszonyaiban)
2. Megismerés (tapasztalatszerzés; képzelet; emlékezés; gondolkodás; ismeretek rendszerezése; ismerethordozók használata)
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és -megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek (kommunikáció; együttműködés; motiváltság; önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás)
7. A matematika épülésének elvei

A témakörök közül kettőben (2. és 5.) szerepelnek a számrendszerekkel kapcsolatos előírások. A *Megismerés/Gondolkodás* témakörben implicit módon jelennek meg az elvárások:

Absztrahálás, konkretizálás (fogalmak megalkotása, besorolás adott fogalom alá). Egyedi tapasztalatok, modellek; általános tapasztalatok, *univerzális modellek értelmezése* (pl. ujjszámolás; *számrendszerek*, különféle számalakok, különféle alakú, de azonos értelmű kifejezések, állítások; műveleti tulajdonságok; számolás műveleti tulajdonságok és kapcsolatok alapján, analógiák segítségével).

Az *Alkotás és kreativitás* témakör explicit módon tartalmazza az elvárásokat:

1-12. évfolyam: *Számrendszerek* alkotása, számrendszeres gondolkodás a számfogalom épülésében.

5-12. évfolyam: A *számrendszeres gondolkodás* tudatosítása az írásbeli műveletek, számrendszerfüggő számtulajdonságok megértéséhez.

Az *informatika műveltségterületen* a fejlesztési feladatok szerkezete a következő:

1. Az informatikai eszközök használata
2. Informatika-alkalmazói ismeretek
3. Infotechnológia (problémamegoldás informatikai eszközökkel és módszerekkel)
4. Infokommunikáció
5. Médiainformatika
6. Az információs társadalom
7. Könyvtári informatika
8. Az elektronikus vásárlás szerepe a XXI. században

Ezen fejlesztési feladatok részletes leírása között nem szerepel konkrétan a számrendszerekre vonatkozó feladat. Indirekt módon többhöz is kapcsolható, pl. az 1. és a 3. témakörökhöz. Az *Informatikai eszközök használata* témakörben az 5-8. évfolyamon a leggyakrabban használt

eszközök működési elveinek bemutatása és használata, a 9-12. évfolyamon az informatikai eszközök működése fizikai alapjainak megismerése során kerülhet sor a kettes számrendszer alkalmazására.

Az adott probléma megoldásához szükséges módszerek és eszközök kiválasztása témakörben a számrendszerekkel kapcsolatos tudnivalók a jelek, jelrendszerek téma ismeretanyagához kapcsolódhatnak, az *Algoritmizálás, adatmodellezés* témában pedig az számrendszerek közötti átváltások algoritmusai mint konkrét, számítástechnikában is alapvető algoritmusok jelenhetnek meg.

A tartalmi elemzés alapján megállapítható, hogy ahhoz képest, hogy a helyi értékes számrendszerek témakör ismeretanyagának, tevékenységeinek jelentős szerepe van a számfogalom és a magabiztos számolási tudás képességének kialakításában, a matematikai gondolkodás fejlesztésében, valamint az informatikai alapismeretek tekintetében, a NAT 2007 nem hangsúlyozza megfelelően a témakört. Az előírások túlságosan tág keretet adnak a kerettantervekben megfogalmazandó konkrét ismeretanyag és tevékenységrendszer meghatározásához.

5.3. A SZÁMRENDSZEREK TÉMAKÖR A KERETTANTERVEKBEN

A tartalmi-tantervi szabályozás második szintjén a NAT szellemiségét kifejező, de annál részletesebb útmutatást nyújtó kerettantervek találhatók, amelyek meghatározzák a tantárgyak rendszerét, az egyes tantárgyak időkeretét (óraszámát), a tananyag felépítését és felosztását az egyes évfolyamok között, továbbá az adott szakasz befejező évfolyamának kimeneti követelményeit.

A továbbiakban három kerettantern számrendszerek témaköréhez kapcsolódó anyagát tekintem át. Az első vizsgált kerettantern az Oktatási és Kulturális Minisztérium³ (továbbiakban: OKM) Kerettanterve (Kerettantern 2008a). Ez a tantern kiindulópont a további kerettantervek elkészítéséhez. A másodikként az ún. Hajdu-tanternvet elemzem (Czeglédy et al. é.n.) Ez az egyik legelterjedtebb matematika tankönyv-családhoz (Hajdu-matematika) készült mintatantern. A harmadik tantern, amit áttekintek, a NAT 2007 kompetencia alapú szemléletét leginkább

³ Jelenleg Emberi Erőforrások Minisztériuma (2013)

tükröző kerettanterv, az Educatio Kht. kompetencia-fejlesztő oktatási program (C. Neményi et al. 2008) kerettanterve lesz.

OKM Kerettanterv – Matematika

Az OKM kerettanterve az alsó tagozatban a matematika műveltségterület ismereteit, fejlesztési feladatait a következő témakörök szerinti bontásban tárgyalja: Számтан, algebra; Állítások, szövegek, szöveges feladatok értelmezése; Sorozatok, relációk, függvények; Geometria, mérés; Statisztika, valószínűség, kombinatorika. Az első évfolyamon a számfogalom fejlesztése a húszas, a második évfolyamon a százas, a harmadik évfolyamon az ezres, a negyedik évfolyamon a tízezres számkörben valósul meg. Az alábbiakban összefoglalom, milyen konkrétumok találhatók az OKM kerettantervben a helyi értékes számrendszerekre vonatkozóan.

Az 1-4. évfolyam tantervében a *Számtan, algebra* témakörön belül külön részterületként szerepel *A számok írása, olvasása; számrendszer, helyiérték-rendszer* téma. A fejlesztési feladatok között a számrendszeres gondolkodás kialakítása, mint konkrét feladat mind a négy alsós évfolyamon megtalálható. Szorosan kapcsolódik ehhez a rendszerlátás, rendszerképzés, a rendszerben való analógiák esztétikumának felfedeztetése. A fejlesztési feladathoz kapcsolódó tananyag, illetve tanulói tevékenységek között pedig a második évfolyamtól kezdődően jelennek meg a helyi értékes számrendszerekre vonatkozó kifejezések: számok bontása tízesek és egyesek összegére, átváltások, beváltások valahányasával, tízesével. Az *átváltások, beváltások valahányasával* kifejezés kifejezetten a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatos tevékenységekre utal. Harmadik évfolyamon a tananyagban egyértelműen szerepelnek a következő ismeretek, tevékenységek: számrendszer és helyiérték-rendszer értelmezése, használata; át- és beváltások, számok írása, olvasása, képzése, számjegyek helyi, alaki és valódi értéke.

A nem tízes alapú számrendszerekre vonatkozó ismeretek nem feltételei a következő évi fejlesztésnek, a továbbhaladáshoz a negyedik évfolyam végén a következőkre van szükség: a tízes számrendszerben való tájékozottság, a számok helyi érték szerinti írása, olvasása, számok képzése, bontása. A tanulói tevékenység értékelésének szempontjai között is szerepel a *Számrendszeres gondolkodás: átváltások, beváltások végzése*.

5. TANTERVI ELŐÍRÁSOK

Az 5-8. évfolyam kerettantervében az 1-4. évfolyamhoz hasonlóan, (minimális különbséggel) öt témakör szerepel: Gondolkodási módszerek; Számtan, algebra; Összefüggések, függvények, sorozatok; Geometria, mérés; Valószínűség, statisztika. Az *Állítások, szövegek, szöveges feladatok* témakört felváltja a *Gondolkodási módszerek* témakör, a további témakörök elnevezése részben módosul, a hangsúlyváltozásnak megfelelően.

Az 5. évfolyam tananyagában konkrétan szerepel a kettes számrendszer ismerete, a továbblépéshez itt is elegendő a tízes számrendszer biztos használata.

6-7-8. évfolyam kerettantervében sem a *Fejlesztési feladatok, tevékenységek*, sem a *Tartalom*, sem a *A továbbhaladás feltételei* között nem található konkrétum és utalás sem a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatos ismeretekre, tevékenységekre.

A 9. évfolyam kerettantervében a következő konkrétum szerepel a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatban: Példa számrendszerekre. 2-es alapú számrendszer kapcsolata a 10-es alapú számrendszerrel.

10-12. évfolyam kerettantervében sem a *Fejlesztési feladatok, tevékenységek*, sem a *Tartalom*, sem a *A továbbhaladás feltételei* között nem található konkrétum és utalás sem a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatos ismeretekre, tevékenységekre.

OKM kerettanterv – Informatika

Az OKM informatika kerettanterve legkorábban a 9. évfolyamon, az *Infokommunikáció* témakörben tartalmaz explicit előírásokat a nem tízes alapú számrendszerekre vonatkozóan (Kettes számrendszer, Számok átváltása a kettes, tízes és tizenhatos számrendszerek között). Implicit módon azonban az alsóbb évfolyamokon is megjelenik, több témakörhöz is kapcsolható. Megjelenhet például alsó tagozatban *Az informatikai eszközök használata* témakörben *A jelek és a számítógép kapcsolata* téma, vagy az *Infotechnológia* témakörben *Az információ különféle megjelenési formái* téma feldolgozása közben, felső tagozatban pedig *Az informatikai eszközök használata* témakörben az *Egyes informatikai eszközök működési elveinek bemutatása* téma oktatása során, évfolyamonként bővülő ismeretanyaggal (OKM kerettanterv, 2008a).

Hajdu-tanterv – Matematika

Az ún. Hajdu-tanterv első változatai az 1980-as évek közepén a felső tagozat matematikaoktatásához készültek. A NAT-hoz készült kerettantervi változat 1-8., majd 9-12. évfolyamra vonatkozóan fogalmazza meg a tananyagot, a tananyaghoz kapcsolható tevékenységeket, a gondolkodási módszerek alapozásának lehetőségeit évfolyamonként és témakörönként, valamint meghatározza a minimum-, illetve a minimumszintet meghaladó követelményeket (Czegléd et.al., é.n.). A tantervhez jól felépített taneszköz-rendszer készült: tankönyvek alap- és emelt szintű változatai, feladat-gyűjtemények, témazáró feladatsorok, tanulói eszközök. Megjelentek a tanárok munkáját nagymértékben megkönnyítő segédletek: tantárgyi programok, tankönyvek feladatainak megoldásai, a tankönyvek digitális változatai. Magyarországon az iskolák (leginkább az általános iskolák) jelentős részében használják a helyi tantervek készítéséhez alapul ezt a tantervet.

A tantervben a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatos tananyag az 5., a 9. és a 12. évfolyamra korlátozódik. Alsó tagozatban a számrendszeres gondolkodás kialakításának folyamata kizárólag a tízes számrendszerrel kapcsolatos ismeretekre építve történik. Ennek a szemléletnek nagy szerepe lehet abban, hogy sok matematikát oktató tanár nem tulajdonít túl nagy jelentőséget a nem tízes alapú számrendszerekkel kapcsolatos ismeretek oktatásának; nem használják ki a témakör oktatása során adódó módszertani lehetőségeket.

Az Educatio Kht. kompetencia alapú kerettanterve – Matematika

A kerettanterv az 1-12. évfolyamokon folyó kompetencia alapú matematikai nevelés fejlesztési feladatait konkretizálja a következő területek megjelenítésével: tartalmak (témakörök), ismeretrendszer; a követelmények teljesítéséhez javasolt időkeret; fejlesztendő képességek, kompetenciák; javasolt tevékenységek átfogó rendszere; évfolyamonkénti követelmények; értékelési eljárások, módszerek (C.Neményi et.al, 2008).

A kerettantervhez elkészült programcsomag részei a tanulói munkafüzetek (eszközmellékletekkel), órákra lebontott tanári útmutatók (módszertani, értékelési javaslatokkal, ajánlásokkal, alternatív eljárások bemutatásával, a szükséges eszközökkel), ezek az anyagok az Interneten megtalálhatók. A programcsomag moduljai (A típus: tanórai fejlesztések,

B típus: más műveltségterületek által támogatott matematikai kompetenciafejlesztés, C típus: tanórán kívüli foglalkozásra tervezett fejlesztés) komplex rendszert alkotnak.

A *Számтан algebra* témakörön belül már az általános iskola első évfolyamán konkrétan megjelennek a számrendszerekkel kapcsolatos fogalmakat előkészítő tevékenységek (pl.: *Csoportosítás kettesével, hármasával, négyesével*), és a tanulói tevékenységekre vonatkozó javaslatok a további alsós évfolyamokon is megtalálhatók. A számrendszeres gondolkodás kialakításának folyamata nem kizárólag a tízes számrendszer ismereteire épít, ezáltal a fogalom magasabb szintű absztrakcióját, és általánosabb felhasználhatóságát teszi lehetővé. A második évfolyamtól kezdve például a *képességfejlesztési fókuszok* között is található konkrét javaslat a számrendszerekkel kapcsolatban (A *számrendszerek modelljeinek megértése, konkrét számok megjelenítése különböző modellekben*). Az *ajánlott tevékenységek* rendszeréhez szorosan kapcsolódó *módszertani eszköztár* tartalma is alátámasztja a témakör, és a fogalmak alapozásának fontosságát hangsúlyozó szemléletet. A helyiérték-rendszer fogalmait, a tízes számrendszerben végzendő alpműveletek algoritmusait a nem tízes alapú számrendszerekhez kapcsolódó tárgyi tevékenységek alapozzák meg.

A számrendszerek témakör a továbbiakban az 5., 7. és 9. évfolyamokon is megjelenik a tanórai fejlesztésekre vonatkozó modulokban, az alsó tagozatban megkezdett rendszer szerves folytatásaként. A tanórán kívüli tevékenységekre vonatkozó modulok között pedig 7., 8. és 10. évfolyamon található a témakör informatikai alkalmazását (pl. kódolás, dekódolás) igénylő tananyagok.

5.4. ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Az érettségi vizsga részletes követelményeiről szóló 40/2002. (V. 24.) OM rendelet a következőket tartalmazza a számrendszerekkel kapcsolatban:

Tudjon más számrendszerek létezéséről. Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből 2 alapú számrendszerbe és viszont (középszint).

Tudja a számokat átírni 10-es alapú számrendszerből n alapú számrendszerbe és viszont. Helyi értékes írásmód (emelt szint).

Az oktatás tartalmát szabályozó dokumentumok áttekintése, elemzése során arra a megállapításra jutottam, hogy az alaptantervek előírásai szerint a felsőoktatásba kerülő hallgatóknak rendelkezniük kellene a helyi értékes számrendszerek általános fogalmával.

A NAT a matematika műveltségterületre vonatkozó részeiben – minimális mértékben ugyan, de – tartalmaz konkrét előírásokat a helyi értékes számrendszerekre vonatkozóan, a kerettantervekben nagyon eltérő hangsúllyal szerepel ez a témakör.

Az informatika tantervek a fogalom kialakítását nem tartalmazzák fejlesztési feladatként, ugyanakkor a fogalom alkalmazását már feltételezik a rá épülő informatikai fogalmak kialakításához.

A legújabb tantervek (NAT 2012 és kerettantervei) az előzőektől eltérően részletesebben tartalmazzák ugyan a tanítandó tananyagot, ám az előző tanterveknél is kevésbé hangsúlyozzák ezt a témakört.

Az elemzés eredményeképpen megállapítható, hogy a tartalmi szabályozás – jelenlegi formájában – lehetséges oka annak, hogy a főiskolai oktatásban résztvevő hallgatók egy része nem rendelkezik a helyi értékes számrendszerek általános fogalmával. Van olyan kerettanterv, amelynek alkalmazása révén előfordulhat, hogy az alaptantervben előírt számrendszeres gondolkodás fejlesztését kizárólag a tízes számrendszert használva kísérlik megvalósítani a szaktanárok (erre utalnak az általános iskolai 3. és 5. évfolyamos tanulók által megoldott, számrendszerekre vonatkozó feladatok eredményességi mutatói is). Ez a gyakorlat viszont ellentétes a korszerű pedagógiai-pszichológiai elméletekkel, melyek szerint egy fogalom általánosítása csak többféle kontextusban használva, többféle konkretizáció megismerése során mehet végbe.

6. PEDAGÓGIAI, PSZICHOLÓGIAI VONATKOZÁSOK

„Ha hallom, elfelejtem. Ha látom, emlékszem rá. Ha csinálom, megértem.”

Konfuciusz, a kínai filozófus évezredekkel ezelőtt fogalmazta meg fent idézett gondolatait. A napjainkban legelterjedtebb tanulással kapcsolatos pedagógiai, pszichológiai elméletek sora kapcsolható valamilyen módon ehhez a megállapításhoz. Piaget ismeret-, Skemp szkéma-, Bruner reprezentációs elmélete, Dehaene hármas kód modellje, Dienes Zoltán matematikai tanuláskonceptiója mind-mind hasonló megközelítései az ismeretszerzésre vonatkozó pedagógiai, pszichológiai elképzeléseknek.

A helyi értékes számrendszerek témakörére vonatkozó módszertani javaslatok kidolgozása során a felsorolt elméletek játszottak leghangsúlyosabb szerepet, ezért röviden ismertetem a lényegüket.

6.1. PIAGET – AZ ÉRTELMI FEJLŐDÉS JELLEMZŐI

Piaget elmélete az értelmi fejlődés sokféle vonatkozását egységes fogalmi keretbe foglaló rendszer (Piaget, 1984). Az értelmi fejlődést a környezethez való adaptációnak tekinti, melynek két fő oldala az asszimiláció (az új tapasztalatok elhelyezése a meglevő sémákban) és az akkomodáció (a sémák átrendezése, hozzáalakítása a meglevő sémákba nem illeszthető tapasztalatokhoz).

Elméletének három alapvető összetevője vált szélesebb körben ismertté: a tudás keletkezésére, az értelmi fejlődés stádiumaira, és a gondolkodás műveleti struktúráira vonatkozó elgondolások.

Piaget a gondolkodás lényegét az értelmi műveletek kialakulásában látja, amelyek a külvilág belső leképezései. A cselekvések szerkezete, a tárgyakkal végzett műveletek belsővé válnak, a fejlődés révén a gyermek a műveleteket már nemcsak konkrét tárgyakkal, hanem gondolatban azok szimbólumaival is képes elvégezni (interiorizáció). A gondolkodás ebben az értelemben belsővé vált cselekvés, a tudás pedig lényegében az elsajátított cselekvések (értelmi műveletek, műveleti struktúrák) összessége.

A fejlődési szakaszok elmélete szerint a gyermek gondolkodásának fejlődése nagyjából meghatározott életkorokhoz köthető, minőségileg különböző fázisokon (az érzékszervi-mozgásos – szenzomotoros: 0-2 év,

műveletek előtti: 2-7 év, konkrét műveletek: 7-11 év és a formális műveletek: 11-14 év) halad végig. Az új szakaszba való átmenet a már rendelkezésre álló sémák átszervezését jelenti.

Piaget kognitív fejlődéstudományának elmélete nem csupán a fejlődéstudománytan alakulására gyakorolt meghatározó hatást, hanem az oktatás elmélete és gyakorlata számára is új perspektívákat nyitott. A legújabb kutatások szerint a fejlődés szakaszai nem köthetők szigorúan a Piaget által megadott intervallumokhoz.

Az a szemlélet, mely szerint a gyermek nem a készen kapott tudás passzív befogadója, hanem saját tudását az aktív cselekvés révén létrehozza, a tanulói tevékenységek szerepének újraértelmezéséhez, mindenekelőtt a természettudományos nevelés új irányzatainak megjelenéséhez vezetett (Csapó, 2003).

Az oktatás szempontjából lényeges szakaszok jellemzői:

Konkrét műveletek szakasza: az indukció (gyakorlati tapasztalatokból általános következtetések levonása) alkalmazásával jellemezhető.

Formális műveletek szakasza: ahol a gondolkodás hipotetikus-deduktív. Itt a feltételekből logikai úton jutunk el a következményekhez.

Piaget fejlődéstudományának elmélete a kritikák ellenére a XX. sz. minden bizonnyal legnagyobb hatású fejlődéstudománytan elmélete.

6.2. SKEMP – SZKÉMAELMÉLET

Skemp szerint „A matematikatanulás problémái a legtöbb esetben pszichológiai problémák”. Egyik legismertebb művében (A matematikatanulás pszichológiája Skemp, 1975) a matematikai fogalomalkotás folyamatának összefüggéseit foglalja össze.

Az értekezés szempontjából legfontosabb megállapításai a következők: Az elsődleges fogalmak kivételével minden fogalom más fogalmakból származik, és hozzájárul megint csak más fogalmak képzéséhez. Különbséget kell tenni a fogalomalkotás során az absztrakció mint folyamat (absztrahálás), és absztrakció mint a folyamat végeredménye között (fogalom). Ahhoz, hogy egy fogalmat megalkossunk, szükségünk van számos olyan tapasztalatra, amelyekben valami közös van. A fogalomalkotás első lépése a közös tulajdonságok alapján történő osztályba sorolás. Az osztályba sorolás eredményeképpen jön létre a fogalom. A fogalom meghatározásában fontos szerepük van az ellenpéldáknak is. Különbséget kell tennünk a fogalom, és a fogalom

jelölésére használt név között. Ha a tanuló ismeri a fogalom elnevezését, még nem biztos, hogy a fogalmat is érti, és használni tudja. Különösen gyakran összekeverik a számokat (amelyek matematikai fogalmak) a számjegyekkel (amelyek tulajdonképpen a számok nevei). Annak a kritériuma, hogy egy fogalommal rendelkezünk-e vagy sem, nem az, hogy képesek vagyunk-e megnevezni, hanem az, hogy képesek vagyunk-e oly módon viselkedni, amiből kiderül, hogy az új adatokat a kérdéses fogalom megalkotásához szükséges hasonlóságoknak megfelelően osztályozzuk.

A nyelvet felhasználhatjuk a fogalomalkotás meggyorsítására (pl. definiálhatunk egy fogalmat). Magasabb rendű fogalmak azonban, mint amivel a befogadó rendelkezik, nem közvetíthetők számára definíció segítségével, csupán megfelelő példák összegyűjtésével. „Csak elmondásból, szavakból a fogalmat nem, csak a szavakat, mondatokat lehet megtanulni” (C. Neményi et al. 1988).

A fogalmak fogalmi struktúrákká, ún. szkémákká állnak össze, amelyeknek két fő funkciója van: egyrészt integrálják a meglévő tudást, másrészt eszközként szolgálnak az új tudás elsajátításához. Minél több szkémával rendelkezünk, annál nagyobb az esély arra, hogy meg tudunk oldani egy új problémát. Valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába. Ha a tanítandó fogalmak túlságosan távol vannak a tanuló meglévő szkémáitól, akkor a diák képtelen lesz ezeket asszimilálni. Ez alapján a matematikatanárnak hármas feladata van: a matematika tananyagot hozzá kell igazítani a tanulók matematikai szkémáinak fejlettségi állapotához; a tananyag bemutatásának a módját hozzá kell igazítani ahhoz, hogy tanulói milyen gondolkodási módokra képesek; fokozatosan növelni kell a tanulók analitikus képességét addig, hogy képesek legyenek az önálló tanulásra (Skemp, 1975).

6.3. BRUNER – REPRESENTÁCIÓS ELMÉLET

Az amerikai pszichológus és pedagógus, Jerome Bruner életművében megkülönböztetett szerepet játszanak pszichológiai kutatásainak pedagógiai konzekvenciái. Mindaz, amit az észlelésről, a tanulásról, a gyermekkori megismerés folyamatáról írt, erőteljesen befolyásolta az oktatásról vallott felfogás átalakulását, s az oktatás folyamatáról írt könyve erőteljes hatást gyakorolt a pedagógiai reformfolyamatokra, megújította a tantervkészítés elméletét és gyakorlatát.

Bruner többek között azt vizsgálta, hogy az ember hogyan reprezentálja, milyen kódok segítségével tárolja a külvilágból érkező információkat. Elmélete szerint a matematikai fogalmak, elvek, ötletek kommunikálásához azok külső reprezentációjára, a velük való gondolkodási műveletek végzéséhez azok belső reprezentációjára van szükség. A külső reprezentációval ellentétben a belső reprezentáció nem hozzáférhető, közvetlenül nem kutatható. Feltételezhetjük azonban, hogy a külső és a belső reprezentációk között kapcsolat van, így a belső reprezentációkra, azok minőségére a külső reprezentációkkal végzett manipulációkból következtethetünk.

A belső reprezentációk kapcsolatban állnak, hálózatot alkotnak. Amikor a külső reprezentációkról beszélünk, akkor lényegében a megfelelő belső reprezentációt adjuk meg (Ambrus, 2002).

A külső reprezentációk háromféle módon jelenhetnek meg:

1. enaktív (materiális, szenzomotoros) sík: az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekedetek, manipulációk révén megy végbe;
2. ikonikus (képi) sík: az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik;
3. szimbolikus sík: az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével valósul meg.

A három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. A legtöbb tanulói aktivitásnál a reprezentációs síkok egymásba mennek át. Hatékonyabbá tehető a tanulási folyamat, ha tudatosan változtatjuk a reprezentációs módokat, és így a reprezentációs módok izomorfiaja is világossá válik.

Bruner szerint a matematika alapvető elvei minden gyerek számára a meglévő gondolkodási eszköztára alapján és a számára érthető reprezentációs mód segítségével egyszerű, megfelelő formában megtaníthatók. Ahhoz, hogy egy tanuló egy anyagot megértsen szükséges, hogy egy korai fázisban intuitív formában feldolgozza, és később, az életkori fejlettségének megfelelően újra tárgyalásra kerüljön az adott anyag (Bruner, 1974).

6.4. DEHAENE – HÁRMAS KÓD MODELL

A legújabb matematikatanulással kapcsolatos kognitív neurológiai kutatások azt mutatják, hogy az agy különböző területeket mozgósít a különböző feladatok elvégzéséhez. Az 1992-ben Stanislas Dehaene által bevezetett „Triple Code Model” szerint a három számmal kapcsolatos alaptevékenység – *látás, hallás, megértés* – esetén három különböző agyterület lép működésbe. A számjegynek mint vizuális jelnek az észlelésekor a *fusiformis gyrus*, amikor halljuk, vagy olvassuk a számot mint szót, akkor a *Sylvius-árok körüli terület*, és amikor a számot megértjük mint mennyiséget, akkor a parietális lebeny aktivizálódik. Ez a kutatás rávilágított arra, hogy a két félteke sokkal inkább együtt dolgozik, és nem elkülönülten.

A kutatók azt állítják, hogy legalább két oka lehet a matematikatanulási nehézségeknek. Az egyik lehetséges ok abban a neuronhálózatban keresendő, amelyik a mennyiségfogalommal áll kapcsolatban, és ha károsodik, megnehezíti a hozzáférést azokhoz az információkhoz, amelyek a számfogalom kialakításához szükségesek. A másik ok, ami valószínűleg sokkal közismertebb, hogy sok gyerek még nem tanulta meg a mennyiséget összekapcsolni a verbális és vizuális szimbólumokkal. Ez nehezíti számukra a műveletvégzést, legyen az a szimbolikus gondolkodás vagy a tapasztalatok feldolgozása. (Az agy működése, é.n.)

6.5. DIENES ZOLTÁN, VARGA TAMÁS – A MATEMATIKA TANULÁSÁNAK – TANÍTÁSÁNAK ELMÉLETE

„... a gyerekek többsége sohasem jut el odáig, hogy megértse, mit is jelentenek azok a matematikai fogalmak, amelyekről tanul. A legjobb esetben annyit érnek el, hogy ügyesen tudnak bánni bonyolult szimbólumrendszerekkel.” (Dienes, 1973)

Dienes Zoltán matematikadidaktikus a tanulási folyamatot a maga komplex voltában próbálta megérteni. Elmélete megalkotásában jelentősen támaszkodott Piaget és Bruner eredményeire, jól ismerte Skemp munkásságát

Egyik legfontosabb elve a többszörös konkretizálás elve: célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés szempontjából különböző formában bemutatni a gyerekeknek. Egy fogalom kialakításának szakaszai a Dienes szerint a következők:

- Szabad játszás: ekkor találkozik a gyerek először azoknak az alkotóelemeknek több konkrét összetevőjével, amelyekből később a fogalmat felépíti.
- Szabály által irányított játék: a gyerek felfedezi, hogy környezetében érvényesülnek bizonyos szabályosságok.
- Törvényszerűségek keresése: az adott fogalom többféle konkretizációjában megkeresi a közös vonásokat; a struktúra egyik konkretizálását „lefordíthatjuk” (szótár-módszer) a másikba, a folyamat során a struktúra absztrakt tulajdonságai változatlanok maradnak.
- Ábrázolás (reprezentáció, modellalkotás): olyan ábrázolásra van szükség, amelynek segítségével látható, hogy mi a közös az összes vizsgált konkretizálásban.
- Szimbolizálás: leírást adunk az ábrázolásról egy alkalmas szimbólumrendszer használatával. Ez a matematikai jelölések bevezetési szakasza.
- Formalizálás: az előző szakasz leírásait rendszerezzük; alapvető tulajdonságokat választunk ki, szabályokat állapítunk meg (Dienes, 1973).

Varga Tamás a Magyarországon 1968-ban kezdődő, a matematikatanítás megújítását célzó komplex matematikatanítási kísérlet egyik vezetője, és a Dienes által képviselt matematikai tanuláselmélet legnagyobb hatású hazai képviselője volt. Didaktikai szemléletének - a tiszteletére Varga Tamás módszernek nevezett matematikai nevelési koncepciónak - lényege a következő: a csak eszközjellegű ismeretek mechanikus, gondolkodás nélküli sulykolása helyett a korszerű matematikatanítás-tanulás a tanuló aktív részvételével végbemenő, egész gondolkodását formáló folyamat. Az ismeretek a tanulók életkori sajátosságainak messzemenő figyelembe vételével biztosított tapasztalatszerzés során bővülnek. A megfelelően irányított tanulói felfedezés folyamata biztosítja a tévedés szabadságát, teret ad és fejleszti a kreativitást, a problémamegoldó gondolkodást.

Ebben a fejezetben azokat a pedagógiai, pszichológiai elméleteket, kutatási eredményeket mutattam be, amelyek a vizsgált témakör oktatásának módszertani vonatkozásai szempontjából alapvetőek. A következő fejezetben tárgyalt módszertani megoldások egyik rendező elve a Bruner-féle reprezentációs szinteknek megfelelő csoportosítás.

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

A helyi értékes számrendszerek témaköre a matematikatanítás korszerűsítése során került az általános iskolai tantervekbe. Az 1960-as évek elején indult komplex matematikatanítási kísérlet eredményeként jött létre az a pedagógiai-pszichológiai és matematikai szempontból is jól felépített módszertani rendszer, amely többek között a témakör fogalmainak, műveleteinek oktatására vonatkozó elképzeléseket is magában foglalja. A javaslatok leírását, a módszerek, eszközök ismertetését a kísérlet, majd a bevezetés során létrehozott kézikönyvek, továbbképzési segédanyagok tartalmazzák. Ezek a dokumentumok azonban tapasztalataink szerint napjainkban már nehezen hozzáférhetőek, és a számrendszerek témakört nem különálló egységként, hanem gyakran a többi témakörrel együtt, a tantervi javaslatok sorrendjében, a spirális felépítés elvét követve tárgyalják (Cervenákné et al. 1979, 1988).

E fejezet egyik célja, hogy a rendelkezésre álló szakirodalom feldolgozásával a témakörre vonatkozó módszertani javaslatokról egy áttekintést, rendszerezést adjon. A rendszerezés fő szempontjait ezen értekezés Pedagógiai, pszichológiai vonatkozások c. fejezetében bemutatott elméletek adják. További célom, hogy a témakör speciális, informatika szakmódszertani vonatkozásait is áttekintsem, majd az előzőekben megfogalmazott két cél integrálásaként olyan módszertani megoldásokat hozzak létre, amelyek a korszerű oktatási eszközök (számítógép, interaktív tábla) és a két tantárgy egymással való külső tantárgyi koncentrációja szempontjából is újszerűek.

A továbbiakban először a helyi értékes számrendszerekhez kapcsolódó alapfogalmak kialakításának módszertani kérdéseit vizsgálom, majd a számrendszerek közötti konverzió algoritmusait, végül pedig az informatika szempontjából legfontosabb számrendszer, a kettes számrendszer speciális vonatkozásait és a gépi számábrázolásra vonatkozó módszertani megoldásokat tekintem át.

7.1. AZ ALAPFOGALMAK KIALAKÍTÁSA

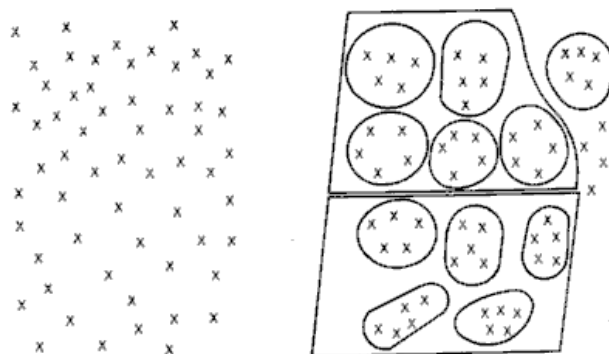
A helyi értékes számrendszerek alapfogalmi kialakításának tárgyalása során a Történeti áttekintés c. fejezetben is kiemelt két legfontosabb alapötlet (csoportosítás valahányasával, pozíciós lejegyzési mód) módszertani kérdéseivel foglalkozom. A konkrét módszertani megoldásokat, javaslatokat a Bruner-féle reprezentációs szintek alapján rendszerezem.

Csoportosítás – elvek

– Miért van szükség csoportosításra?

Természetes szám végtelen sok van, mindegyiknek nem adhatunk teljesen függetlenül egymástól más-más nevet és jelet. Olyan rendszert kell alkalmaznunk, amelyben meghatározott véges számú számnévvvel és számjellel (számjeggyel) bármely számot meg tudunk nevezni, és le tudunk jegyezni. Ennek a rendszernek az egyik alapgondolata a valahányasával való csoportosítás. Összekapcsolunk valahány elemet egy csoportba, ugyanannyi csoportot újra egy csoportba, és így tovább. Az elemek számát úgy fejezzük ki, hogy a lezárt csoportok és a kimaradt elemek számát mondjuk meg, és azt, hogy hányasával készítettük a csoportosítást. Így annyi számnévre illetve számjelre van szükség, ahányasával végeztük a csoportosítást.

A csoportosítás gondolata akkor válik természetessé, amikor már olyan sok tárgyról van szó, amit szemmel nem lehet átfogni. Nézzük meg a következő halmazt csoportosítás nélkül és csoportosítva!



Az első halmaz számosságát megállapítani csak úgy tudjuk, ha végig sorra vesszünk, megszámlálunk minden elemet. A másik esetben

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

elegendő megállapítanunk, hogy egy-egy kis csoportban most öt tárgy van, öt ilyen kis csoportot fogtunk össze egy nagyobb csoporttá, és ránézéssel is megállapíthatjuk, hogy 59 tárgy van a halmazban (Cervenakné et al. 1988).

– Hányasával csoportosítsunk?

Az, hogy hányasával csoportosítunk, megállapodás kérdése. A hétköznapi életben a tízes számrendszert használjuk, ez is tulajdonképpen egy „nemzetközi” megállapodás eredménye. A következő ábra szemlélteti a csoportosítást („parcellázást”) a 2-es, 3-as, 4-es és 5-ös számrendszer szerint:

	2	3	4	5
	≠			
	≠	≠≠		
	≠≠	≠≠	≠≠	
	≠≠	≠≠	≠≠	≠≠≠
	≠≠≠	≠≠≠	≠≠	≠≠≠
	≠≠≠	≠≠≠	≠≠	≠≠≠
	≠≠≠≠	≠≠≠	≠≠≠	≠≠≠
	≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠	≠≠≠
	≠≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠	≠≠≠≠
	≠≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠	≠≠≠≠
	≠≠≠≠≠≠	≠≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠≠
	≠≠≠≠≠≠	≠≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠≠≠
	≠≠≠≠≠≠≠	≠≠≠≠≠	≠≠≠≠	≠≠≠≠≠

Az első oszlopban folyamatosan húzogattuk a vonalakat, ránézve nem lehet megmondani, hány vonal van az utolsó sorban. Egyenként kell megszámolnunk. Ebben a sorban, az utolsó helyen két ötös csoport látható és még egy vonal: egy pillantással eldönthető, hogy ez 11. A 4-es oszlopban két négyes csoporton kívül még 3 vonal van; a 3-as oszlopban egy 3-szor 3-as csoport és még 2 vonal. A 2-es oszlop ismét kicsit nehézkesen látható át, mert itt meg már a csoportokból van sokféle: egy 2x2x2-es, egy 2-es csoport és még 1 vonal (Ill et al. 1982).

Megjegyezzük, hogy a számrendszerekhez nem tartozik szorosan az a gondolat, hogy minden váltásnál ugyanannyi kisebb csoport alkosson egy nagyobb csoportot. Pl. az idő mérésénél ún. vegyes számrendszert

használunk: 1 hét = 7 nap; 1 nap = 24 óra; 1 óra = 60 perc, ebben az esetben nem minden csoport között ugyanaz a váltószám.

– A csoportosítás absztrakciós szintjei

~ Tetszőleges számú tárgyat csoportosítunk például hármasával. Megállapodunk abban, hogy mindaddig végezzük a csoportosítást, ameddig a tárgyakkól még 3-as csoport készíthető. A csoportok csoportját még nem képezzük. A csoportosítás végeztével „leltárt” készítünk: megállapítjuk, hogy hány csoport készült, hány darab tárgy maradt ki a csoportosításból, valamint azt, hogy hány tárgyat csoportosítottunk összesen. Például hármasával csoportosítva 5 db hármas csoportot készítettünk, és kimarad a csoportosításból 2 db elem; 17 elemet csoportosítottunk összesen. A tevékenységsor fő célja a csoportosítás technikájának elsajátítása, a leltárkészítés technikájának előkészítése.

~ Megadott számú tárgyat csoportosítunk az előző módszerrel. Megállapítjuk a csoportok, és a kimaradó elemek számát.

~ Csoportok csoportját is képezzük az előzőekben alkalmazott szabály általánosításával. Hármas rendszerben („Hármasországban”) például 3 elem kerül egy csoportba, ezután az így létrehozott csoportokat csoportosítjuk hármasával tovább, aztán a csoportosított csoportokat hármasával egy újabb, nagyobb csoportba foglaljuk, ameddig lehet.

A tevékenységsor segít a számfogalom mélyítésében, egyúttal előkészíti a maradékos bennfoglaló osztás műveletét is. Amellett, hogy a számrendszerek egyik alapgondolatát szemlélteti, a tízes számrendszerből nem tízes alapú számrendszerek közötti átváltás algoritmusainak megértéséhez is nyújt tapasztalati alapokat.

~ A leltározás eredményét adjuk meg, ez alapján állapítjuk meg, hogy hány tárgyat csoportosítottunk.

– Felváltás, beváltás fogalma

A csoportosítás kifejezés mellett használjuk az átváltás kifejezést is. Speciálisan: ha több kisebb egységet nagyobbakra váltunk át (csoportosítunk), akkor beváltásról, ha pedig nagyobb egységeket kisebb egységekre váltunk át (a csoportokat elemeire bontjuk), akkor felváltásról beszélünk; ugyanúgy, ahogyan a pénzünket szoktuk be-, illetve felváltani.

Csoportosítás – enaktív reprezentációk

A fogalmak kialakításának folyamatát – a fogalmak kialakulásához szükséges tapasztalatok gyűjtését – már az általános iskola első osztályában el lehet kezdeni. A korosztály életkori sajátosságainak megfelelően játékos, tárgyakkal való manipulációt igénylő feladatokkal alapozhatjuk meg a legfontosabb fogalmakat.

Kezdetben a csoportosításon van a hangsúly, a csoportosítás eredményét saját szavaikkal fogalmazhatják meg a gyerekek; a lejegyzéssel még nem foglalkozunk. Az, hogy hány elem alkot egy csoportot (mi lesz a rendszer alapszáma), megállapodás kérdése.

Legegyszerűbb a hármas és a négyes rendszer átlátása, ezért a fogalomalkotás kezdetén ezekkel célszerű foglalkozni.

– Tárgyak csoportosítása – csomagolás

A csomagolás az egyik legszemléletesebb előkészítője a számrendszereknek. A csoportosítás gondolatát először valóságos tevékenységgel valósítjuk meg. Csomagoljanak a gyerekek hármasával babszemeket, gemkapcsokat, gyufaszálakat, korongokat, gyöngyöket. A csomagoláshoz használhatunk színes papírokat.

A hármas csoportokat csomagoljuk pl. zöld, a 3x3-as csoportokat piros, a 3x3x3-as csoportokat kék színű papírba. Kezdetben a színek segítenek abban is, hogy meg tudjuk nevezni az egyes csoportokat: 17 gyöngyöt csomagoltunk, 1 zöld, 2 kék csomagot készíthettünk, kimaradt a csomagolásból 2 gyöngy.

A csomagolás „modernebb” változata lehet, ha az apró tárgyakat pl. kindertojás-dobozba teszik a gyerekek, ezeket aztán zacskókba, majd nagyobb dobozokba. A leltár készítése során itt is jól használható a csoportok megnevezésére a csomagoláshoz felhasznált eszközök elnevezése.

A csoportok kialakítására alkalmasak a színes gumigyűrűk is, amikor például pálcikákat csoportosítunk (a pálcikák jelképezhetnek valós tárgyakat – szőlőoltvány, sárgarépa – is).

A fogalom jobb megértését, elmélyítését segíthetik elő a fordított feladatok: „Négyesével csomagoltam. 1 piros csomagom lett, zöld nem maradt a piroson kívül, és van még 3 gyöngyöm. Hány gyöngyöt csomagolhattam?”

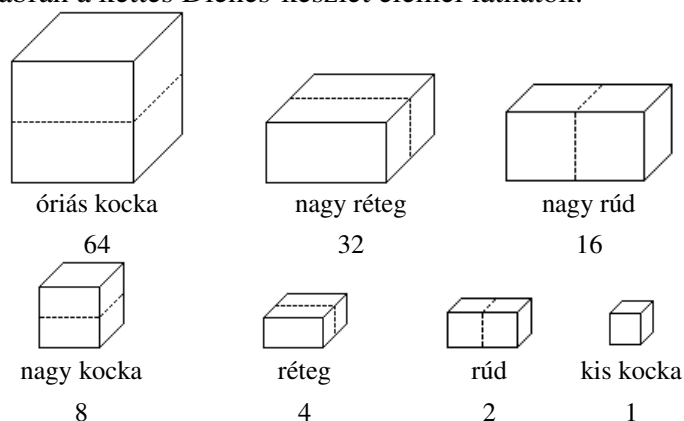
– Csoportosítás – taneszközök használata

A csomagolás mellett szükséges másféle tapasztalati alapot is biztosítani a fogalomalkotáshoz (többszörös konkretizáció elve). Olyan eszközökről van szó, amelyek biztosítják a cselekvő tapasztalatszerzés lehetőségét, de absztrakció szempontjából már új szintet képviselnek a csomagoláshoz képest. Míg a csomagolás során a tanulónak kellett elkészíteni az egyes helyi értékeket képviselő csoportokat, itt azok már rendelkezésre állnak.

~ *Dienes-készlet*

A számrendszerekkel összefüggő ismeretek önálló megszerzésének egyik legfontosabb segédeszköze a Dienes-készlet. A gyerekek kettes, hármas és négyes készlettel dolgoznak. Minden készletben az elemeket növekvő sorrendben így nevezhetjük: kocka, rúd, réteg, nagykocka, nagyrúd, nagyréteg, óriáskocka stb. Az egyes készletek elemeit a kisebbekből kirakva a gyerekek maguk is rájönnek, hogy egy készletben bármely szomszédos elem közül a nagyobb a kisebbnek pl. a rózsaszínűeknél kétszerese, a kék készletben háromszorosa, a piros elemeket tartalmazó készletben a négyszerese. Ennek megfelelően kettes, hármas, négyes készletről beszélünk.

Az alábbi ábrán a kettes Dienes-készlet elemei láthatók:



A Dienes-készlet használatának nagy előnye az átalakításoknál mutatkozik meg. Készen vannak a kívánt egységek, nem kell előbb összekötni, kibontani, zárt vonallal bekeríteni. Az átalakítások két fő módját (felváltások és beváltások) a készletek elemeinek segítségével végezhetjük el. A nehézségi fokozatok a következők:

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

– Beváltás (kisebb egységekkel adott mennyiség kifejezése nagyobb egységekkel):

egynevű → egynevű: 18 kocka = 2 réteg
 egynevű → többnevű: 23 kocka = 2 réteg 1 rúd 2 kocka
 többnevű → többnevű: 5 rúd 2 kocka = 1 réteg 2 rúd 2 kocka

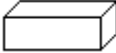
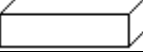
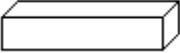
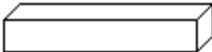
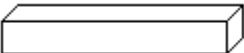
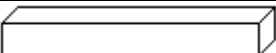
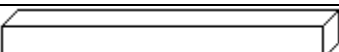
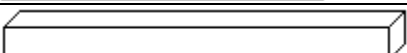
– Felváltás (nagyobb egységgel adott mennyiség kifejezése kisebb egységekkel):

egynevű → egynevű: 1 réteg = 9 kocka
 többnevű → egynevű: 1 nagykocka 2 réteg = 5 réteg
 többnevű → többnevű: 1 nagykocka 2 rúd = 3 réteg 2 rúd

A fenti átalakítások a hármas készlet elemeire vonatkoznak.

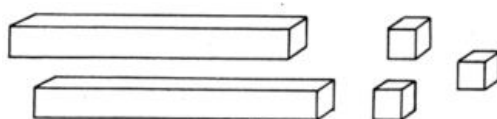
~ Színesrúd-készlet

A színesrúd-készlettel való tevékenység során a számrendszerek alapfogalmainak egy másik konkretizációját használhatják a tanulók a fogalmak konstrukciójához. Az alábbi ábra a színesrúd-készlet elemeit szemlélteti:

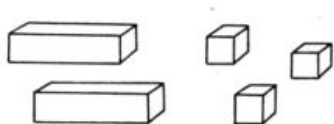
egység	szín	rajz
1	fehér	
2	rózsaszín	
3	világoskék	
4	piros	
5	sárga	
6	lila	
7	fekete	
8	bordó	
9	kék	
10	narancs	
12	zöld	
16	barna	

A színesrúd-készlet elemei

A készlet 12-féle hosszúságú és színű rudat tartalmaz, mindegyikből többet. 2-t és hatványait a piros szín és árnyalatai, 3-at és hatványait a kék szín árnyalatai képviselik. A legkisebb a fehér színű „rúd”, speciálisan ugyanolyan „kiskocka”, amely a Dienes-készletben is megtalálható. Ebben a készletben (ha a fehér rudat tekintjük egységnek) a rudak hosszának megfelelő alapszámú számrendszerekben (2-es, 3-as, ... 16-os) rakhatunk ki kétjegyű számokat, a 3-as és 4-es számrendszerben három-, a 2-esben ötjegyűeket is. Például tízes számrendszerben a narancssárga rudak a tízesek, a fehérek az egyesek, és így a 23-at így lehet kirakni:



A 2 narancssárga rudat összesen 20 kis kockával lehetne kirakni, a 2 narancssárgát és a 3 fehérét 23-mal. Ha a narancssárgák helyébe pirosakat teszünk, akkor azt a számot raktuk ki, amelyet a négyes számrendszerben írunk 23-nak (olvasd: kettő-három). A tízes számrendszerben ez 11. Ennyi kiskockányi mennyiség két piros és három fehér.



(Cervenakné et al. 1979)

Bár ez az eszköz kitűnően alkalmas a 12-es és a 16-os számrendszerbeli kétjegyű számok szemléltetésére, a tanulmányozott irodalmakban nem található utalás arra, hogy a tanulók tevékenykedhetnének 10-nél nagyobb alapszámú rendszerekkel is. A 16-os számrendszernek pedig kiemelt szerepe van a számítástechnikában. A korai szakaszban ezzel kapcsolatban szerzett tapasztalatok – pl. hogy a lejegyzésre nem elegendő a tízes számrendszerben használt 10 számjegy, újabb számjegyre (számjelre) van szükség – megkönnyítenék a 10-nél nagyobb alapszámú rendszerekre vonatkozó speciális ismeretek elsajátítását.

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

~ Játékpénz-készlet

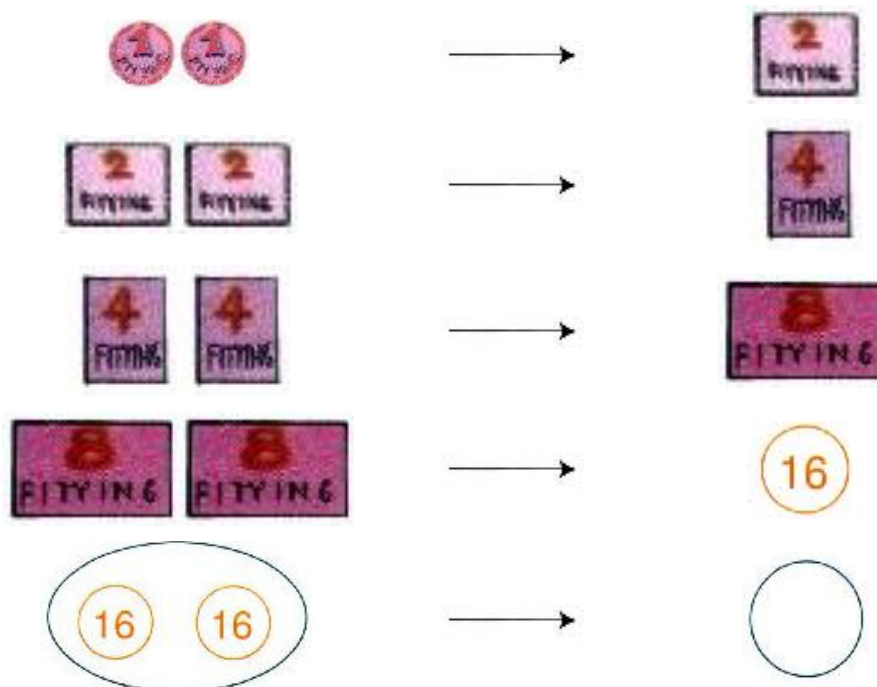
A játékpénz-készlettel való tevékenykedtetés nemcsak az előzőektől különböző konkretizációja a számrendszereknek, hanem a játékosság, és a hétköznapi élettel való kapcsolat elvét is megvalósítja.

Az alábbi leírás a Nemzeti Tankönyvkiadó 2. osztályosoknak szóló matematika tankönyvében található (C. Neményi, Sz. Oravecz, 1994).

1. Mintafeladat

Játékpénz-készlet használata a kettes számrendszer szemléltetésére:

KETTESORSZÁGBAN két pénzdarabot váltanak be egy nagyobbra:



a) Mondd el, hogyan folytatnád! Milyen érméket kell még készíteni?

b) Váltss be 9, 10, 11, 12, 18, 19, 20, 21, 22, 29, 30, 31 fityinget! (Addig váltss, amíg van valamiből kettő!)

(C. Neményi, Sz. Oravecz, 1994).

A feladat másképpen is megfogalmazható: fizess ki 31 fityinget úgy, hogy a lehető legkevesebb pénzérmét (címletet) használd!

A játékpénz-készlet az egyik legszemléletesebb, mindennapi élethez kapcsolódó modellje a felváltás műveletének is.

Hasonlóan képzelhető el a négyes, ötös, stb. számrendszer pénzkészlete. A fent említett tankönyv melléklete például tartalmaz kettes és hármas számrendszerhez tartozó, kartonpapírból kivágható játékpénzeket. Az elnevezések is lehetnek változatosak. A tanulók olvasmányaiból ismert nevek pl: peták, fabatka, krajcár, vagy a számítógépes játékokban alkalmazott virtuális fizetőeszközök neve, pl. LOL, MondoZ, (MondoZoo) Csengőpengő (Farmerama), stb. mind-mind egy-egy nagyszerű módja a motivációnak.

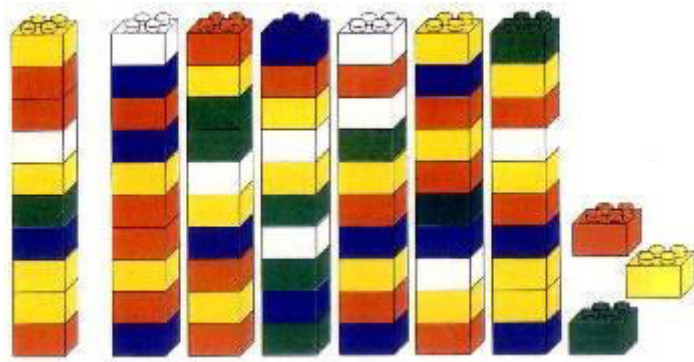
~ LEGO-elemek

A tanulókhöz közel álló, motiváló, és nagyon szemléletes eszköz lehet a LEGO építőjáték, amelynek elemei könnyen összekapcsolhatók. Példa az előző tankönyvből, a tízes számrendszerben felírt kétjegyű számok szemléltetésére:

2. Mintafeladat

LEGO építőelemek használata a tízes számrendszer szemléltetésére:

Laci így számolja meg a LEGO-it: tízből épít egy tornyot, aztán már nem is számolja, csak ugyanakkora tornyokat készít. Olvasd le, hány elemből áll a készlete!



A tízes tornyok szimbólummá válnak: képviselik a bennük foglalt 10 egységet. A kétjegyű számok bontása így válik látható, megfogható valósággá: az első számjegy a tornyok számát, a második a kimaradó elemeket írja le (C. Neményi - Sz. Oravecz, 1994).

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

~ Színes korongok

Vegyünk bizonyos számú színes korongot, négy vagy öt színben, és állapodjunk meg abban, hogy például 5 sárga egy zöldet ér, 5 zöld egy pirosat, 5 piros egy kéket. A fel- és beváltásokat a megállapodás alapján, a színkódok szerint végezzük. Itt a reprezentáció még tárgyi-cselekvéses, de magasabb absztrakciós szintet jelent, hogy az egyes helyi értékeket ugyanolyan méretű, bár más-más színű elemek képviselik (Dienes, 1973).

~ Egyforma tárgyak csoportjai

Egyforma tárgyakat, például fém alátétkarikákat használunk egy-egy mennyiség reprezentálására úgy, hogy itt már nincs sem méret-, sem színbeli megkülönböztetés, csak a karikák helyzete határozza meg az értéküket. Például $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet = 2312_4$ (ha 4-es rendszerben dolgozunk) (Dienes, 1973).

~ Csoportosítás az interaktív tábla használatával

A következő feladattípus az enaktív és az ikonikus reprezentációk közé is sorolható. A cselekvést nem konkrét tárgyakkal, hanem az interaktív táblán megjelenő képekkel hajtjuk végre. Az interaktív tábla, mint eszköz, motiváló hatású.

3. Mintafeladat

Csoportosítás jelképes csomagolással, leltárkészítés:



1. Tegyd a tányérról az asztalra 17 szem babot!
2. Csomagold hármassával!
3. Készíts leltárt!

●	●	●

Megoldás:



(Sitkuné, 2012)

Csoportosítás – ikonikus reprezentációk

– Képek, rajzok a csoportosításban

A konkrét csomagolások után a tárgyak helyett azok képét csoportosítjuk zárt vonalakkal jelezve az egy csoportba tartozókat. A tárgyak képét később egyszerű jelek (körök, pontok, csillagok, stb.) váltják fel.

Kezdetben itt is a csoportosítás a lényeg, fokozatosan vezetjük be a leltár eredményének legcélszerűbb (pozíciós) lejegyzési módját (lásd a szimbolikus reprezentációkat tárgyaló rész).

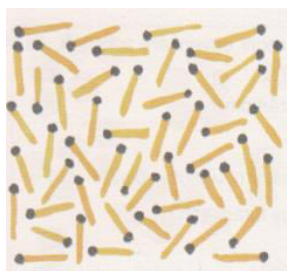
A csoportokat megkülönböztethetjük színekkel, vonalstílussal vagy a keret alakjával is.

Rajzos csoportosítás:

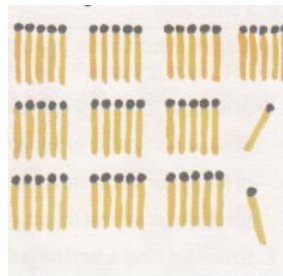
4. Mintafeladat

Hány gyufaszál van a rajzokon? Számláld meg!

a)



b)

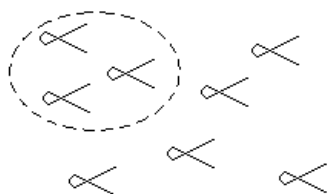


Melyiket volt egyszerűbb megszámolni?

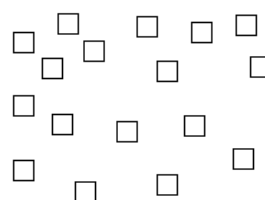
Feladatok csoportosítás elkészítésére:

5. Mintafeladat

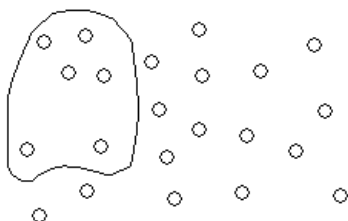
a) Csoportosíts hármassával!



b) Csoportosíts négyesével!



c) Folytasd a csoportosítást!



d) Folytasd!



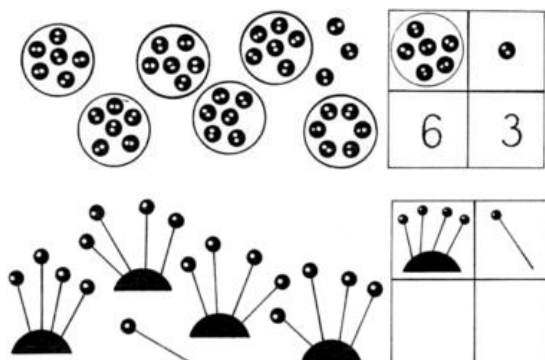
(C. Neményi et al. 1988)

6. Mintafeladat

Leltár készítése kész csoportosítás alapján (csoportok csoportjait még nem képezzük):

Miből hány van?

Írd a táblázatba!

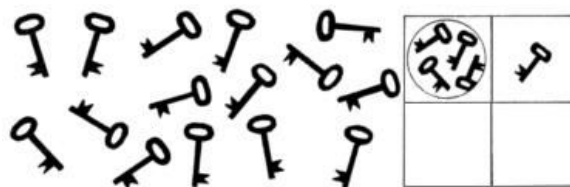


7. Mintafeladat

Csoportosítás és leltár készítése (csoportok csoportjait még nem képezzük):

Csoportosíts!

Miből hány van?



(Cervenakné - Varga, 1982)

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

8. Mintafeladat

Problémafelvetés, csoportosítás, leltárkészítés ugyanabban a feladatban (csoportok csoportjait is képezzük):

Hány labda ez?



Ha valamiből nagyon sok van, azt úgy lehet könnyen megszámolni, ha egyforma csomagokat készítünk belőle.

Például 3 labdát egy hálóból teszünk:



Ha még a kis csomagokból is sok van, akkor ezekből is egyforma nagyobb csomagokat készítünk.

Például 3 hálót egy dobozba teszünk:



Végül csak annyit kell feljegyezni, hogy milyen csomagból mennyi van, és hány darab nem került csomagba.

Például, hogy hány labda nem került hálóból,
 hány háló maradt ki a dobozból,
 és hány doboz készült.

Leltár:



(C. Neményi - Sz. Oravecz, 1994)

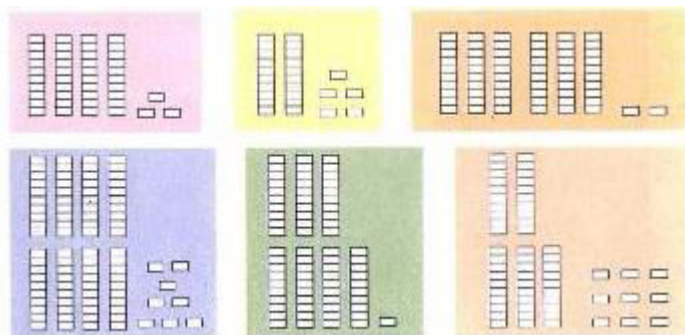
A leltár készítése ezekben a feladatokban már a szimbolikus reprezentációs szintet készíti elő.

9. Mintafeladat

Csoportosítás, leltárkészítés a tízes számrendszerben:

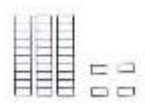
Számolj ügyesen!

a) Mondd ki gyorsan a LEGO-k számát!



b) Írd le a kimondott számokat! Írd le, hogy hány tízes torony, hány egyes elem!

Például:


$$34 = 3t + 4e$$

Ez a mintafeladat a LEGO-tornyok rajzos reprezentációja: itt már nem kell megszámolni a toronyban található elemeket, jelképpé válik a torony, de a hossza még kifejezi, hogy 10 egységet ér. Később még ez is egyszerűsödik: „t” fejezi ki a tornyot, a 110 elemet, „e” az egy elemet (C. Neményi - Sz. Oravecz, 1994).

A csoportosítás eredményének lejegyzése – szimbolikus reprezentációk

A csoportosítás ötlete mellett a helyi értékes lejegyzési mód a számrendszerek másik lényeges alapgondolata, amely a számok írásbeli, szimbólumokkal történő megjelenítésének speciális megvalósítása.

A számrendszerekkel kapcsolatos tapasztalatszerzés kezdetén, a csoportosítások eredményeként szóban megállapítjuk, hogy milyen csoportok keletkeztek, és azt, hogy melyikből hány darab. Lényeges információ az is, hogy hányasával csoportosítottunk. Ezen eredmények lejegyzésére többféle megoldást választhatunk.

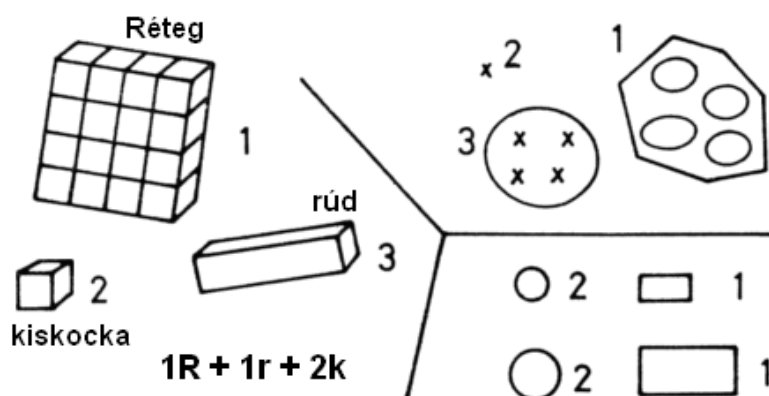
„Jó, ha a gyerekek eleinte olyan lejegyzési módot ismernek meg, amelyben nincsenek eleve megadott megállapodások. Azt, hogy érdemes valamiféle megállapodást tenni, maguk is kitalálják hosszabb-rövidebb idő után. És ha majd ők fogják kívánni a megállapodások kialakítását, természetes lesz, és könnyebben megjegyezhető” (Cervenakné et al. 1988).

A pozíciós lejegyzési mód alkalmazása csak fokozatos absztrakció eredménye lehet. Lényegesnek tartjuk, hogy a lejegyzési mód kapcsolódjon ahhoz az absztrakciós, illetve reprezentációs szinthez, amellyel a tanuló éppen dolgozik.

– Lejegyzés tetszőleges elrendezéssel

A rajzos csoportosítás során használt jelölési (pl. a vonal stílusa, a színe, a bekeretezés módja), illetve elnevezési (kis- közepes- nagycsoport, v. nagykocka, réteg, rúd, kiskocka) módok akkor is megkülönböztetnék a helyi értékeket, ha más sorrendben, akár összevissza írnánk le, melyikből mennyi van.

Kezdetben ilyenféle lejegyzéseket használhatunk:



Leltár lejegyzése tetszőleges elrendezésben (Cervenakné et al. 1979)

1 ○ 0 ● 2 ●

●	2
3	0
3 3 3	1

vagy színessel írják a számokat:

2 0 1

fehér (fekete) zöld piros

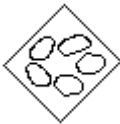
1	3	9
2	0	1

vagy:

9	3	1
1	0	2

A 11 hármas csoportosításának lejegyzési lehetőségei
(Cervenakné et al. 1988)

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

$4 + 1K + 2N$			2 (5 · 5-ös csoport) 1 (5-ös csoport) 4 (darab)		
(kis csoport: 5 – jele: K, nagy csoport: 5 · 5 – jele: N)					
darab			Ó	N	K
			0	2	1
4	1	2	d	4	
			Ó = óriás csoport $[(5 \cdot 5) \cdot 5]$		

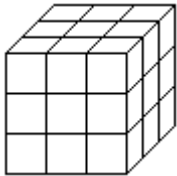
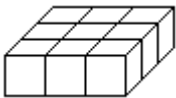
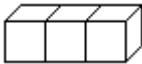
Az 59 ötös csoportosításának lejegyzési lehetőségei
(Cervenakné et al. 1988)

– Lejegyzés táblázatos elrendezésben; a pozíciós írásmód bevezetése

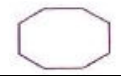
A leltárkészítéskor már előre szoktuk vetíteni a helyi értékes írásmódot annyiban, hogy a legnagyobb csoportok számát írjuk baloldalt, utána a következő, kisebb csoportok számát és így tovább, a csoportosításból kimaradt tárgyakig vagy jelekig. Később a helyiérték-táblázat alkalmazásával, fokozatos absztrakció eredményeképpen vezetjük be a pozíciós írásmódot.

A helyiérték-táblázat első sora – attól függően, hogy milyen absztrakciós szinten dolgozunk éppen – sokféle formát ölthet. Az alábbiakban a $37 = 1201_3$ példán keresztül mutatjuk be a lehetséges fokozatokat:

a) A táblázatban a konkrét eszköz, majd annak képe/rajza jelöli a helyi értékeket:

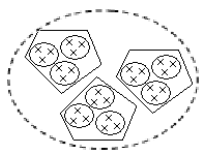
			
nagykocka	réteg	rúd	kiskocka
1	2	0	1

$$37 \text{ kiskocka} = 1 \text{ nagykocka} + 2 \text{ réteg} + 0 \text{ rúd} + 1 \text{ kiskocka} = 1201_3$$

			
			
huszonhét-petákosok	kilenc-petákosok	három-petákosok	egy-petákosok
1	2	0	1

$$37 \text{ peták} = 1 \text{ huszonhétpetákos} + 2 \text{ kilencpetákos} + 0 \text{ hárompetákos} + 1 \text{ egypetákos} = 1201_3$$

b) A rajzos csoportosítás során kialakított ábrák, majd azok képi szimbólumai jelölik a helyi értékeket:

			
1	2	0	1

Csoportosítások rajza

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

			
1	2	0	1

Csoportosítások képi szimbóluma

c) A csoportok eszközhöz, illetve rajzhoz kapcsolódó elnevezései, majd az elnevezések kezdőbetűi jelölik a helyi értékeket:

óriás csoport	nagy csoport	kis csoport	kimaradt elemek
1	2	0	1

Csoportok elnevezése

Ó	N	K	E
1	2	0	1

Csoportok elnevezésének kezdőbetűje

d) A helyi érték által képviselt mennyiséghez kapcsolódó elnevezések, majd azok kezdőbetűi jelölik a helyi értékeket:

Huszonhetesek	kilencesekek	hármások	egyesekek
1	2	0	1

$$37 = 1 \text{ Huszonhetes} + 2 \text{ kilences} + 0 \text{ hármas} + 1 \text{ egyes} = 1201_3$$

H	k	h	e
1	2	0	1

$$37 = 1 \text{ H} + 2 \text{ k} + 0 \text{ h} + 1 \text{ e} = 1201_3$$

e) A megfelelő értékeket konkrét számok jelölik, a felírás módja a szorzat- majd hatványalak bevezetése után képlet formájában is megjelenhet:

	27	9	3	1
	1	2	0	1

$$37 = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1201_3$$

	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	3	1
	1	2	0	1

$$37 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 1201_3$$

	3^3	3^2	3^1	3^0
	1	2	0	1

$$37 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 1201_3$$

r=3	r^3	r^2	r^1	r^0
	1	2	0	1

$$37 = 1 \cdot r^3 + 2 \cdot r^2 + 0 \cdot r^1 + 1 \cdot r^0 = 1201_3$$

Ha valahogyan jelöljük, hogy hányasával végeztük a csoportosítást, a táblázat első sorát el is hagyhatjuk, így is egyértelmű, melyik számot jelöli a számsorozat:

$$37 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \textcircled{3}$$

A táblázat szegélyeit (magát a táblázatot) elhagyva pedig eljutottunk a hétköznapi életben is használt pozíciós írásmódhoz. A számjegyek valódi értékét az alaki értékük és a helyi értékük szorzata adja. Az alapszámot – kivéve a tízes számrendszerét – jelölnünk kell. A jelölési módok a következők lehetnek:

$$\overset{3}{1201}, 1201\textcircled{3}, 1201\textcircled{\textcircled{3}}, 1201_3.$$

A napjainkban használt szakkönyvek nagyrészt a negyedik jelölésmódot alkalmazzák.

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

A helyiérték-táblázatot kiterjeszthetjük a törtrészek oszlopaival is. A vesszős törtek fogalmának, és a negatív kitevőjű hatvány fogalmának bevezetése is történhet a táblázat segítségével.

8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$2 \cdot 2 \cdot 2$	$2 \cdot 2$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2 \cdot 2}$	$\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$
2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$
2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}

Helyiérték-táblázatként a tanulók előre elkészített „leltársablonokat” is használhatnak. A sor elején mindig jelzik, hogy hányasával csoportosítottak, a sor végén pedig beírják, hogy hányat csoportosítottak. A táblázat első sora az adott absztrakciós szintnek megfelelően változhat:

	(kék) ↓	(piros) ↓	(zöld) ↓	X	Mennyit csoportosítottak?
Hányasával csoportosítottak?					
4	-	1	2	1	25
3		2	0	0	18

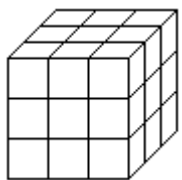
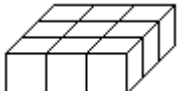
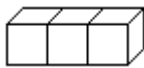
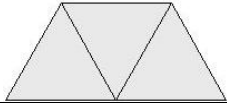
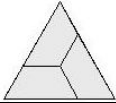
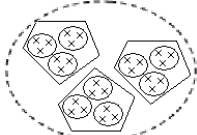
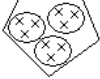
(Cervenakné et al. 1988)

A táblázatsablon megtalálható egyes tankönyvek mellékleteként is (C. Neményi et al. 1994).

Az interaktív táblán is használhatunk az adott reprezentációs szintnek megfelelően előre elkészített táblázatsablonokat.

Összefoglaló táblázat

A helyiérték-táblázat fejlődének absztrakciós szintjei

a1				
a2				
b1				
b2				
c1	óriás csoport	nagy csoport	kis csoport	kimaradt elemek
c2	Ó	N	K	E
d1	Huszonhetesek	kilencesek	hármások	egyesek
d2	H	k	h	e
e1	27	9	3	1
e2	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$3 \cdot 3$	3	1
e3	3^3	3^2	3^1	3^0
e4	r^3	r^2	r^1	r^0
	1	2	0	1

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

A táblázat fejlécének absztrakciós szintjeihez kapcsolódó néhány lejegyzési mód:

37 kiskocka = 1 nagykocka + 2 réteg + 0 rúd + 1 kiskocka

37 peták = 1 huszonhétpetákos + 2 kilencpetákos + 0 hárompetákos + 1 egypetákos

37 = 1 Huszonhetes + 2 kilences + 0 hármas + 1 egyes

37 = 1 H + 2 k + 0 h + 1 e

37 = 1 · 27 + 2 · 9 + 0 · 3 + 1 · 1

37 = 1 · 3 · 3 · 3 + 2 · 3 · 3 + 0 · 3 + 1 · 1

37 = 1 · 3³ + 2 · 3² + 0 · 3¹ + 1 · 3⁰

Az alsó tagozat matematika tantervében szereplő egyik legfontosabb követelmény az, hogy a tízes számrendszerben felírt számokat a tanuló értelmezni tudja az adott évfolyamon használt számkörben. Ennek érdekében lényeges, hogy a matematikai tartalom többféle konkretizációjával, többféle reprezentációs szinten találkozzanak a tanulók, többféle alapszámmal is végezzenek csoportosításokat, lejegyzéseket, elősegítve ezzel a számfogalom elmélyítését, és a – szintén a tantervi követelményekben megfogalmazott – számrendszeres gondolkodás fejlesztését is.

7.2. AZ ÁTVÁLTÁSOK ALGORITMUSAI

A helyi értékes számrendszerek fogalmainak kialakítása során az alsó tagozatban tulajdonképpen a különböző alapú számrendszerek közötti átváltások sokaságát végezzük, a tanulók életkori sajátosságainak, és az adott fogalmak fejlettségi szintjének megfelelő reprezentációs, illetve absztrakciós szinteken. A felsőbb évfolyamokon az ezen tapasztalatok alapján kialakított skémára alapozva a megszerzett ismereteket bővítjük, új szituációkban alkalmazzuk. A reprezentációk közül előtérbe kerülnek a szimbolikus reprezentációk. A továbbiakban példákat mutatok be az átváltások algoritmusainak alkalmazására. A matematika- és informatika tankönyvek tárgyalásmódját követve foglalkozom a következőkkel: átváltás tízes alapú számrendszerből nem tízes alapú számrendszerbe, átváltás nem tízes alapú számrendszerből tízes alapú számrendszerbe, kapcsolat a különböző alapszámú számrendszerek között. A tárgyalás során kiemelem a különböző reprezentációs szintek közötti kapcsolatok megteremtésének lehetőségét.

Tízes számrendszerben megadott szám átírása más alapú számrendszerbe (Mintafeladatok)

Az ilyen típusú feladatok megoldása során maradékos (euklideszi) osztások sorozatával juthatunk a keresett számjegyekhez. Alapvetően kétféle módszer szerint számolhatunk. Az egyik módszerrel először a legkisebb helyi értékű jegyet állítjuk elő, majd rendre a többi a 4. fejezetben tárgyalt (3) összefüggés alkalmazásával. A másik módszerrel először a legmagasabb helyi értékű jegyet kapjuk meg, majd rendre a többi a 4. fejezetben tárgyalt (4) összefüggés alapján.

1. módszer

10. Mintafeladat

A megoldás az algoritmus leírására szorítkozik, nincs utalás a fogalom kialakítása során használt reprezentációkra.

Váltsuk át a 234-et 5-ös számrendszerbe!

Osszuk el a megadott számot, a 234-et az új rendszer alapszámával, vagyis 5-tel.

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

Az így kapott maradék adja az új szám legalacsonyabb helyi értékű jegyét. A hányadost osszuk tovább az alapszámmal. Ezt az eljárást folytatjuk addig, amíg 0 hányadost nem kapunk.

$$\begin{aligned} 234 &= 5 \cdot 46 + 4, \\ 46 &= 5 \cdot 9 + 1, \\ 9 &= 5 \cdot 1 + 4, \\ 1 &= 5 \cdot 0 + 1. \end{aligned}$$

Ezért $234 = 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 1414_5$ (Szendrei, é.n.).

11. Mintafeladat

A megoldás során jól követhető az elvégzendő osztások sorozata. A vizsgált tankönyvben a 2. módszer (lásd később) bemutatása után következik, amelyhez kapcsolva ezt a leírást, még egyértelműbb az utalás a fogalom kialakítása során használt reprezentációkra.

Írjuk fel a tízes számrendszerben felírt 47-et hármasszámrendszerben!

$47 : 3 = 15$ ennyi hármassunk lett, ezeket nagyobbakra váltjuk be;

17

2

ennyi egyesünk lesz;

$15 : 3 = 5$ ennyi kilencesünk lett, ezeket nagyobbakra váltjuk be;

0

ennyi hármassunk lesz;

$5 : 3 = 1$ ennyi huszonhetesünk lesz, már nem tudjuk nagyobbra váltani;

2

ennyi kilencesünk lesz;

$1 : 3 = 0$ ennyi nyolcvanegyesünk lesz;

1

ennyi huszonhetesünk lesz.

huszonhetes	kilences	hármass	egyes
1	2	0	2

$$47 = 1202_3$$

(Englesz et al. 1978)

12. Mintafeladat

Az algoritmus alkalmazása közben találunk utalást a csoportosítás elvének alkalmazására vonatkozóan.

Írd át 12-es számrendszerbe: $t = 3489$.

A t átírásánál idézzük fel a „leltározást”.

3849-et 12-es csoportokra osztjuk.	$3489 : 12 = 290$
9 marad ki a 12-es csoportokból.	108
Az utolsó számjegy a 9.	09

A 12-es csoportokat újra 12-esével csoportosítjuk. A 12-es csoportokból 2	$290 : 12 = 24$
marad ki. Az utolsó előtti számjegy 2.	50
	2

Tovább csoportosítunk 12-esével.	$24 : 12 = 2$
A következő számjegy 0.	0

Az első számjegy 2.	$2 : 12 = 0$
	2

$t = 2029_{12}$ (Hajdu, 1990)

2. módszer

13. Mintafeladat

A megoldás bemutatása közben nem, de végül, mintegy összegzésként található utalás a tárgyi reprezentációra.

Váltsuk át a 234-et 5-ös számrendszerbe!

Írjuk fel először az új rendszer alapszámának hatványait!

$$5^0 = 1 \quad 5^1 = 5 \quad 5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625$$

Látjuk, hogy

$$(5^3 =) 125 < 234 < 625 (= 5^4)$$

234-et elosztva $(5^3 =) 125$ -tel, a hányados megadja az új szám legmagasabb helyi értékű jegyét, és a maradék 109:

$$234 = 1 \cdot 125 + 109.$$

A következő helyen álló jegyet úgy kapjuk meg, hogy a maradékot osztjuk a következő helyi értékkel, $(5^2 =) 25$ -tel:

$$109 = 4 \cdot 25 + 9.$$

Az eljárást folytatva kapjuk

$$9 = 1 \cdot 5 + 4,$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Tehát: } 234 &= 1 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = \\ &= 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 1414_5 \end{aligned}$$

Az itt ismertetett eljárás szemléltethető a Dienes-féle kockákkal is. Arról van szó, hogy melyik a legnagyobb értékű idom, amelyik megvan az adott számban és hányszor van meg, majd ezt ismétljük a maradékra, stb. (Szendrei, é.n.)

14. Mintafeladat

A megoldás során összekapcsolódik a tárgyi, a képi és a szimbolikus reprezentáció is.

Figyeld meg, hogyan írjuk föl a 375-öt hatos számrendszerben!

A hatos számrendszer helyi értékei:

6^4	6^3	6^2	6^1	1
1296	216	36	6	1

216-nál nagyobb helyi értékre nem lesz szükségünk.

$375 : 216 = 1$, vagyis 216-osból 1 lesz, marad 159.

159 Ebből 36-os csoportokat készítünk.

$159 : 36 = 4$. 4 ilyen csoportunk lesz, marad 15.

15 Ebből 6-os csoportokat készítünk.

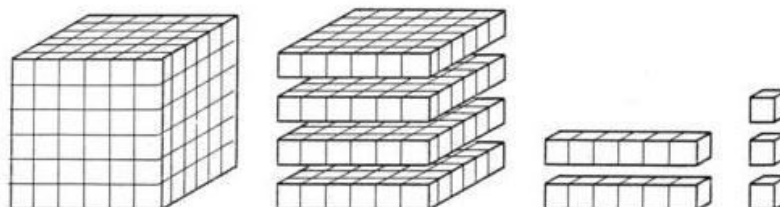
$15 : 6 = 2$. 2 ilyen csoport telik ki, marad 3 darab egyes.

3

Röviden:

$$375 = 1 \cdot 216 + 159 = 1 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 15 = 1 \cdot 216 + 4 \cdot 36 + 2 \cdot 6 + 3.$$

Rajzban:



Foglaljuk táblázatba!

216	36	6	1
1	4	2	3

Eredményünk tehát: $375 = 1423_6$. (Englesz et al. 1978).

15. Mintafeladat

A vizsgált tankönyv három kidolgozott feladata ugyanakkor az algoritmusnak különböző lejegyzési módjait szemlélteti, 10-nél nagyobb alapszámú számrendszerre is kitér. Utal a tárgyi reprezentációra, alkalmazza a képi reprezentációt.

a) Írjuk fel a 47-nek a kettes számrendszerbeli alakját!

Kiszámítjuk a kettes számrendszer szükséges helyi értékeit:

1; **2**; $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$; $2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{8}$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16}$; $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{32}$;

(A következő helyi érték: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{64}$, erre már nincs szükségünk.)

$$\begin{array}{ccccc} 47 : 32 = \mathbf{1} & 15 : 16 = \mathbf{0} & 15 : 8 = \mathbf{1} & 7 : 4 = \mathbf{1} & 3 : 2 = \mathbf{1} \\ 15 & 15 & 7 & 3 & 1 \end{array}$$

$$47 = \mathbf{1} \cdot 32 + \mathbf{0} \cdot 16 + \mathbf{1} \cdot 8 + \mathbf{1} \cdot 4 + \mathbf{1} \cdot 2 + \mathbf{1} \cdot 1.$$

$$47 = 101111_2.$$

b) Írjuk fel 47-nek a hármas számrendszerbeli alakját!

Kiszámítjuk a hármas számrendszer szükséges helyi értékeit:

1; **3**; $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$; $3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$;

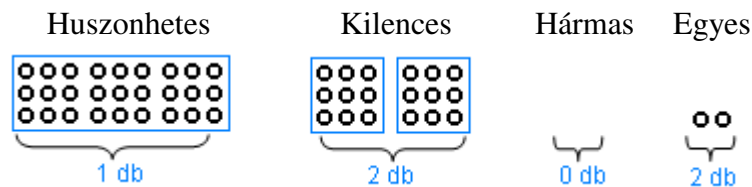
(A következő helyi érték: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{81}$, erre már nincs szükségünk.)

$$\begin{array}{ll} 47 : 27 = 1 & 1 \text{ db } 27\text{-es csoportot kapunk.} \\ 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 20 : 9 = 2 & \text{A maradék } 20 \text{ egyesből } 2 \text{ db } 9\text{-es csoport készíthető.} \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2 : 3 = 0 & \text{A maradék } 2 \text{ egyesből } 0 \text{ db hármas csoport lesz.} \\ 2 & \text{Végül marad még } 2 \text{ egyes.} \end{array}$$

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK



$$47 = 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1.$$

$$47 = 1202_3.$$

c) Írjuk fel 2001-nek tizenhatos számrendszerbeli alakját!

A 16-os számrendszerben 16 **alaki értékre** van szükség.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15.

A 16-os számrendszer szükséges **helyi értékei**: **1, 16**, $16 \cdot 16 = \mathbf{256}$.

(A következő helyi érték: $16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096$.)

$$\begin{array}{l} 2001 : 256 = \mathbf{7}; \\ 209 \end{array} \quad \begin{array}{l} 209 : 16 = \mathbf{13} \\ \mathbf{1} \end{array}$$

$$2001 = \mathbf{7} \cdot 256 + \mathbf{13} \cdot 16 + \mathbf{1} \cdot 1$$

A 13-nak megfelelő alaki érték: D.

$$2001 = 7D1_{16}.$$

(Hajdu, 2001)

16. Mintafeladat

Az informatikaórákon használt tankönyv az algoritmus formális bemutatására szorítkozik. Nem utal a számrendszerek fogalmának lényeges jellemzőire. A bemutatás és az alkalmazás is kizárólag a szimbolikus reprezentációra épít.

Egy tízes számrendszerbeli egész szám kettes számrendszerbe való átváltása az alábbi algoritmus szerint történik:

Az átváltandó decimális egész számot osztjuk kettővel, míg nulla nem lesz a hányados, a keletkező maradékokat fordított sorrendben leírva kapjuk a bináris számokat.

Példa:

$$\begin{array}{rcl} 116 : 2 = 58 & \rightarrow & 0 \\ 58 : 2 = 29 & \rightarrow & 0 \\ 29 : 2 = 14 & \rightarrow & 1 \\ 14 : 2 = 7 & \rightarrow & 0 \\ 7 : 2 = 3 & \rightarrow & 1 \\ 3 : 2 = 1 & \rightarrow & 1 \\ 1 : 2 = 0 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

azaz $116 = 1110100_{\textcircled{2}}$

A törtszámok binárisra alakítása némileg eltérő. Külön kell választani az egészrészt és a törtrészt. Az egészrészrel ugyanúgy járunk el, mint az előbb, a törtrészrel a következő módon. A törtet szorozzuk kettővel. Ha több lesz az eredmény egynél vagy egyenlő vele, akkor leírjuk az egyet, majd egyet kivonunk a kapott számból. Ha a szorzat kisebb lesz egynél, akkor nullát írunk le. Ezután újabb kettővel való szorzás következik. Mindezt addig folytatjuk, míg nullát nem kapunk, vagy el nem érjük a kívánt pontosságot.

Példa:

$$\begin{array}{rcl} 25.35 & & 25 = 11001_{\textcircled{2}} \\ 0.35 \cdot 2 = 0.7 & \rightarrow & 0 \\ 0.7 \cdot 2 = 1.4 & \rightarrow & 1 \\ 0.4 \cdot 2 = 0.8 & \rightarrow & 0 \\ 0.8 \cdot 2 = 1.6 & \rightarrow & 1 \\ 0.6 \cdot 2 = 1.2 & \rightarrow & 1 \\ 0.2 \cdot 2 = 0.4 & \rightarrow & 0 \\ 0.4 \cdot 2 = 0.8 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Vegyük észre, hogy a jegyek már ismétlődnek, a szám tehát:

1 1001, 0101 1001 1001 1001 1001 ...

(Rozgonyi-Borus, 2006)

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

17. Mintafeladat

Az informatika tankönyvekben gyakran használt lejegyzési mód.

113	2		0	.45	2
56	1	↑	0	.90	
28	0		1	.8	
14	0		1	.6	
7	0		1	.2	
3	0		0	.4	
1	1		0	.8	
0	1		1	.6	
			1	.2	
			0	.4	
			0	.8	

$$113.45_{(10)} = 1100001.0111001100_{(2)}$$

(Csernoch, 2012)

Más számrendszerben megadott szám átírása tízes alapú számrendszerbe (Mintafeladatok)

18. Mintafeladat

Írjuk át $231\,564_8$ -at tízes alapú számrendszerbe!

$$\begin{aligned} 231\,564_8 &= 2 \cdot 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = \\ &= 2 \cdot 32768 + 3 \cdot 4096 + 1 \cdot 512 + 5 \cdot 64 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = \\ &= 65\,536 + 12\,288 + 512 + 320 + 48 + 4 = 78\,708. \end{aligned}$$

Amint látjuk, az átszámítás többjegyű számok esetén a hatványozások, szorzások és összeadás miatt eléggé időigényes.

Ugyanez a számolás a *Horner-féle elrendezés* néven ismert eljárással lényegesen rövidebb.

Ez az eljárás a következő algebrai átalakításon nyugszik:

$$\begin{aligned} a &= a_n g^n + a_{n-1} g^{n-1} + \dots + a_2 g^2 + a_1 g + a_0 = \\ &= ((\dots (a_n g + a_{n-1})g + \dots + a_2)g + a_1)g + a_0 \end{aligned}$$

Az előbbi példát ennek segítségével így írhatjuk:

$$\begin{aligned} 231\,564_8 &= 2 \cdot 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 = \\ &= (((((2 \cdot 8 + 3) \cdot 8 + 1) \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6) \cdot 8 + 4). \end{aligned}$$

A számolás áttekinthetősége és meggyorsítása érdekében a következő táblázatot is használhatjuk. Írjuk a táblázat első sorába a megadott szám számjegyeit. A másik sor első oszlopába kerül az alapszám, a második oszlopba pedig a megadott szám első jegye.

	2	3	1	5	6	4
8	2					

Szorozzuk össze a második sor első két számát és adjuk hozzá az első sor második számjegyét. Vagyis

$$8 \cdot 2 + 3 = 16 + 3 = 19.$$

A kapott összeget írjuk a második számjegy, a 3 alá. Folytatva az eljárást, kapjuk:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 19 + 1 &= 152 + 1 = 153, \\ 8 \cdot 153 + 5 &= 1224 + 5 = 1\,229, \\ 8 \cdot 1229 + 6 &= 9832 + 6 = 9\,838, \\ 8 \cdot 9838 + 4 &= 78704 + 4 = 78\,708. \end{aligned}$$

Az utolsó oszlopban megkapjuk a keresett számot.

	2	3	1	5	6	4
8	2	19	153	1229	9838	78708

(Szendrei, é.n.)

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

19. Mintafeladat

Elsősorban kisebb számok esetén alkalmazott módszer: az átírandó számjegyeket szorozzuk a megfelelő helyi értékek tízes számrendszerbeli alakjával, majd a tagokat összeadjuk.

Példa:

$$\begin{aligned} 0101\ 1101 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 = \\ &= 64 + 16 + 8 + 4 + 1 = 93 \end{aligned}$$

A bináris vagy hexadecimális szám visszaírása tízes számrendszerbe is gyakori feladat. Ez a Horner-elrendezés segítségével is történhet.

A szám első számjegyét megszorozzuk a számrendszer alappal, a következő jegyet hozzáadjuk, majd újra az alapszámmal szorozzuk az eredményt. Ezt folytatjuk, míg a számjegyek el nem fogynak. Az utolsó jegy hozzáadása után már nem kell szoroznunk.

Példa: az átváltandó szám legyen: 0110 1101:

	0	1	1	0	1	1	0	1	az eredeti szám jegyei
+		1	3	6	13	27	54	109	plusz a következő jegy
·2	0	2	6	12	26	54	108		szorzás az alappal

(Rozgonyi-Borus, 2006)

20. Mintafeladat

Az $(a_3a_2a_1a_0)_p$ egész szám $((a_3p + a_2)p + a_1)p + a_0$ alakban is felírható, amely segítségével zsebszámológép alkalmazásával az átalakítás szorzási és összeadási feladatok ismételt alkalmazásával gyorsan megoldható részeredmények tárolása nélkül.

Például: $(132)_4 = (1 \cdot 4 + 3) \cdot 4 + 2 = 30$

A törtrészre vonatkozóan:

$$(a_{-1}a_{-2}a_{-3})_p = ((a_{-3} : p + a_{-2}) : p + a_{-1}) : p,$$

tehát például

$$(0.12)_4 = (2 : 4 + 1) : 4 = 1.5 : 4 = 0.375.$$

(Perge, 1993)

7.3. KAPCSOLAT KÜLÖNBÖZŐ ALAPSZÁMÚ SZÁMRENDSZEREK KÖZÖTT

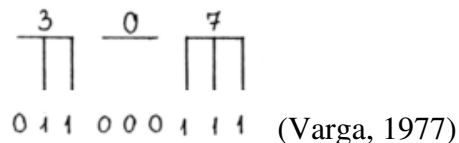
A különböző alapszámú számrendszerek közötti átváltások speciális, az informatikában gyakran előforduló esete az, amikor az egyik számrendszer alapszáma a másik számrendszer alapszámának pozitív egész kitevős hatványa.

21. Mintafeladat

A *nyolcas számrendszer semmi egyéb, mint a kettes*, ha annak három-három jelét egy jelnek tekintjük. Egy ilyenféle kód alapján:



nyolcas és ugyanakkor kettes számrendszerben írhatjuk le a számokat és még attól a terjengősségtől is megszabadulunk, ami a kettes számrendszer írásmódját jellemzi.



22. Mintafeladat

Minden hexadecimális számjegy négy bittel leírható, és fordítva. A négyes csoportok mindegyikét megfeleltetve egy hexadecimális számnak, megkapjuk az átkonvertált számot.

Példa:

11110	1000	1001	1011
E	8	9	B

azaz 1110 1000 1001 1011 = \$E8 9B

És a visszaírás is hasonló:

0	6	D	1
000	0110	1101	0001

azaz \$06 D1 = 000 0110 1101 0001 (Rozgonyi-Borus, 2006)

23. Mintafeladat

Mivel a számok felírása kettes számrendszerben viszonylag sok pozíción valósul meg, ezért a számítási folyamatoknál alkalmazást nyer a kevesebb pozíción történő 8-as és 16-os számrendszerbeli írásmód is (oktális és hexadecimális számok).

Mivel a $2^3 = 8$, vagyis a törtponttól jobbra és balra minden triáda (3 helyi érték) a 2-es számrendszerben megfelel egy 8-as számrendszerbeli számjegynek, és fordítva minden 8-as számrendszerbeli számjegy megfelel a 2-es számrendszerben 3 helyi értéknek. Ezért a 2-es és 8-as számrendszerbeli számok közötti átváltás (konvertálás) könnyen elvégezhető. Hasonlóan $2^4 = 16$ miatt minden 2-es számrendszerbeli tetrád (4 helyi érték) a törtponttól jobbra is, balra is megfelel egy tizenhatos számrendszerbeli számjegynek és fordítva.

KONVERZIÓ OKTÁLISRÓL BINÁRISRA, HEXADECIMÁLISRÓL BINÁRISRA ÉS FORDÍTVA

Oktális számjegy	Bináris triáda
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Hexadec. számjegy	Bináris tetrád
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

Hexadec. számjegy	Bináris tetrád
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Például

$$(123.54)_8 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 001 & 010 & 011 \\ \hline \end{array} . \begin{array}{|c|c|} \hline 101 & 100 \\ \hline \end{array} \\ \quad \quad \quad (1 \quad \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad . \quad \quad 5 \quad \quad 4)_2$$

(Perge, 1993)

Tapasztalat, hogy a különböző alapú számrendszerek közötti átváltások algoritmusainak tanulása során a tanulók/hallgatók jelentős része csupán a szimbólumokkal való műveletek memorizálását végzi (Sitkuné, 2008, 2009).

7.4. A KETTES SZÁMRENDSZER SPECIÁLIS KONKRETIZÁCIÓI

Kézjelek

Meddig lehet egy kézen elszámolni?

Első osztályban nagy érdeklődéssel ismerkednek a gyerekek a kettes számrendszer ujjakkal való megjelenítésével.

Mutassuk fel a hüvelykujjunkt, és kérdezzük meg, mennyit mutatunk! (A gyerekek ugyanezt a maguk felé fordított jobb kezükön mutassák!)



– Ez 1 – állapítják majd meg a gyerekek.

– Jó, ha ez 1, akkor ezt az ujjamat 2-nek fogom nevezni (mutassuk fel a mutatóujjunkt!).



A kinyitott ujjak értéke összeadódik

– Hogyan mutathatok akkor 3-at? – kérdezzük meg a gyerekeket. Sokan fogják felmutatni a középső ujjukat. De lesz, aki kitalálja, hogy ha a hüvelykujjunk 1-et, a mutatóujjunk 2-t ér, akkor a kettő együtt éppen 3-at fog jelenteni:



Ez 3

– És a 4-et hogyan mutathatom? – kérdezzük meg ismét a gyerekeket. Próbálkozások után rájönnek, hogy az első két ujjukból már sehogy sem tudnak kihozni 4-et, tehát a harmadik ujjunkat: a középsőt egyedül nevezzük el 4-nek.

Így mutatunk 4-et:



A többi hasonlóan ki fogják találni:

$(4 + 1)$ 5



$(4 + 2)$ 6



$(4 + 2 + 1)$ 7



Ez az ujj egyedül lesz a 8:

Ezzel együtt már igen sokáig el tudják mutogatni a számokat a gyerekek:

$(8 + 1)$ 9



$(8 + 2)$ 10



$(8 + 2 + 1)$ 11



$(8 + 4)$ 12



$(8 + 4 + 1)$ 13



$(8 + 4 + 2)$ 14



$(8 + 4 + 2 + 1)$ 15

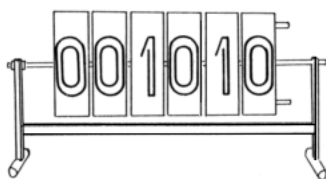


A 16-hoz elő kell vennünk a kisujjunkt – egyedül. Minthogy 1-től 15-ig minden számot tudunk mutatni a többi négy ujjunkkal, ezeket a figurákat kapcsolva a 16-hoz (a kisujjunkhoz), egészen 31-ig minden számot megjeleníthetünk az öt ujjunk segítségével. (Majd második osztályban folytathatjuk a másik kezünk ujjával. A tíz ujjunk együtt 1023-at fog érni, és ezzel a módszerrel 1-től 1023-ig minden számot előállíthatunk, ha a képzést ugyanígy folytatjuk. Egészen addig nem vesszük elő a következő ujjunkat, ameddig az előzőekkel mutatni tudjuk a számokat) (Cervenakné et al. 1988:205).

Hasonló leírás található még: Varga, 1977., Varga, 1972.

Kettes számláló (kettes számológép)

A lapok két oldalán a 0 és az 1 számjegy áll. Ha 0-ról egyre váltunk át, nem történik a szomszéd lappal semmi, de ha 1-ről 0-ra fordítunk, a szomszédos nagyobb helyi érték lapja automatikusan vele fordul. Így pl. ha 5 lapunk van, az utolsó lap forgatásával a többi lap mozgása miatt sorra megkapjuk 1-től 31-ig a természetes számokat kettes számrendszerben felírva: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001,



Pénzérmék

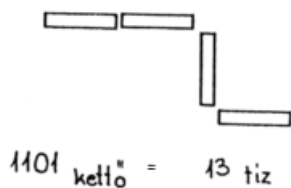
Egymás mellé tett *pénzdarabokkal* is kirakhatnak a gyerekek a kettes számrendszerben különféle számokat olyan módon, hogy némelyiknek a fej oldala van fölül, némelyiknek az írás oldala. A fej lehet 0, az írás az 1. Egyeurós érmeiken ugyanis ez van az írás oldalon. A pénzdarabokat színes korongokkal pótolhatjuk.



$$1101_2 = 13$$

Pálcikák

Vízszintes és függőlegesen elhelyezett pálcikákkal is megadhatjuk ezt az információt:

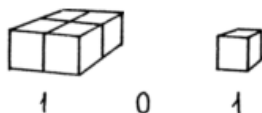


Dienes-készlet

A kéz ujjai, a felemelt kezek, a kettes számláló számjegyei más-más szimbólumokkal fejezik ki egy-egy halmaz elemeit. Ha a Dienes-készlettel dolgoznak a gyerekek, akkor a halmaz elemei állandóan ott

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

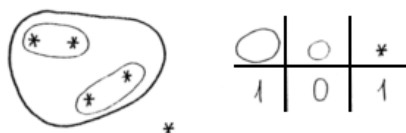
vannak előttük: azok az egységek ezek, amelyekből az éppen kirakott sor felépül:



A rajzon látható sor például öt egységkockából áll. De az is látható, hogy 1 rétegből 0 rúdból és 1 kis kockából áll.

Csoportosítás rajzban

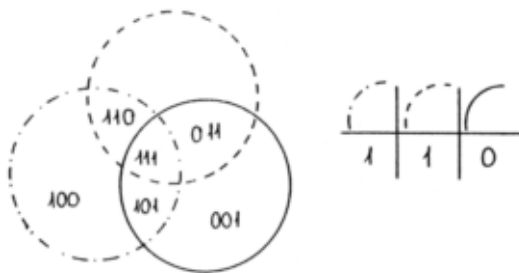
Szükség esetén valamennyire pótolja, de inkább kiegészítheti a Dienes-készlettel szerzett tapasztalatokat olyan *rajzok* készítése, ahol például egy csomó csillagot kettesével bekarikáznak a gyerekek, a karikákat megint bekarikázzák kettesével, de más színnel, és így tovább.



Rajzunkon 1 vastag karika van, ezen kívül nincs vékony (ami belül van, azt már számítottuk), de van még egy csillag.

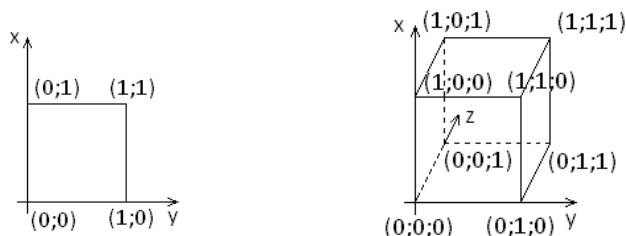
Halmazrészek

Kettes számrendszerbeli számokkal jellemezhetjük azokat a részeket, amelyekre két vagy több *halmaz* egy alaphalmazra feloszt:



Az 110 jelzésű halmazrész benne van a $\overset{\cdot}{1}$ és a $\overset{\cdot}{1}$ halmazban, de nincs benne a $\overset{\cdot}{1}$ -ban (Varga, 1977).

Négyzet, kocka koordinátái



Igaz-hamis állítások:

Az igaz állításoknak az 1, a hamis állításoknak a 0 értéket feleltetjük meg. igaz $\rightarrow$ 1; hamis $\rightarrow$ 0.

Szótagjáték

A szótagok lehetnek rövidek vagy hosszúak. A hosszú szótag jele: —, a rövid: ∪. Megállapodunk abban, hogy minden hosszú szótag 1-et, minden rövid szótag 0-t jelent. Ezek egymásutánja 2-es csoportosítással felírt számot jelenthet. Példák az első néhány számra:

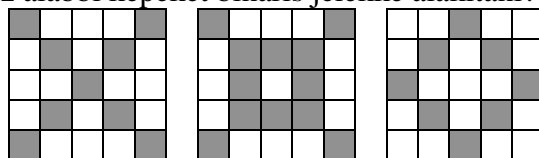
0 =	0 ₂	∪	eb
1 =	1 ₂	—	lány
2 =	10 ₂	— ∪	béka
3 =	11 ₂	— —	lépcső

Morse-abc

A rövid és a hosszú jelek váltakozás a kettes számrendszer egyféle reprezentációja.

Képpontok színezése két színnel

Hogyan lehet az alábbi képeket bináris jelekké alakítani?



Az ábra fekete pontjait jelöljük 1-gyel, a fehéreket pedig 0-val. Soronként balról jobbra haladva az első ábra a következőképpen alakítható át: 10001 01010 00100 01010 10001. Alakítsd át hasonló jelsorozattá a másik két ábrát! (Fenyő, 2004)

7.5. A GÉPI SZÁMÁBRÁZOLÁS ALAPFOGALMAINAK TANÍTÁSA

A számítógép a kivonást, a szorzást és az osztást is összeadásokkal végzi. Hogy ez hogyan történik, a legegyszerűbb a kivonás esetében megmutatni. Ez egyúttal a komplement fogalmához is elvezet minket.

A komplement fogalmának kialakítása

- A komplement szó jelentése: (egymást) kiegészítő.
- Tíz-es számrendszerben: tízes komplement, kilences komplement

A fogalmak bevezetése mintafeladatok segítségével:

24. Mintafeladat

Vonjunk ki nyolcból kettőt! A kivonás szokásos módszerével az eredmény:

Hogyan tudunk a kivonás helyett összeadást végezve ugyanerre az eredményre jutni?

Tíz-es számrendszerben számolunk. Bármilyen számhoz tudok találni egy másikat, amely 10 valamilyen hatványára (tehát 10-re, $10 \cdot 10$ -re, $10 \cdot 10 \cdot 10$ -re stb.) egészíti ki. Az ilyen kiegészítő számot tízes komplementnek hívjuk.

Például 2 komplementesei a 8, 98, 998 számok, attól függően, hogy 10 melyik hatványára akarjuk a kettest kiegészíteni:

10 hatványai	Komplementek	Így egészíti ki:
10	8	$2 + 8 = 10$
100	98	$2 + 98 = 100$
1000	998	$2 + 998 = 1000$
... stb.	... stb.	... stb.

Válasszunk ki 10 hatványai közül egyet, legyen ez például 100.

Képezem a kivonandó tízes komplementjét: ez 98, mert $2 + 98 = 100$.

Hozzáadom a kisebbítendőhöz: $8 + 98 = 106$.

Az összeg (a 106) annyi számjegyből áll, mint a választott hatványunk – a 100 – ezért az első számjegyet elhagyom: 106 marad a 06, vagyis az eredmény 6.

25. Mintafeladat

Vonjunk ki 16-ot 8-ból!

Válasszunk ki 10 hatványai közül egyet, legyen ez az előző példához hasonlóan például 100.

Képezzük a kivonandó tízes komplementjét: ez 84, mert $16 + 84 = 100$.

Hozzáadjuk a kisebbítendőhöz: $8 + 84 = 92$.

Az most összeg kevesebb számjegyből áll, mint a hatványunk, a 100-as.

Ez azt jelenti, hogy az eredmény negatív lesz.

Hogyan kapjuk meg ilyenkor az eredményt? – Képeznünk kell az összeg tízes komplementjét: az összeg 92, tízes komplemente pedig 8.

Az eredmény tehát -8 (Szikszai, 1985).

A kettes komplement fogalom bevezetésére módszertani szempontból jól felépített példát találunk néhány egyetemi-főiskolai jegyzetben. Problémafelvetésből kiindulva, az előzetes ismeretek rendszerébe építve, konkrét példákon bemutatva valósul meg a fogalom kialakítása:

A negatív számokat olyan formában célszerű tárolni, hogy a gépi kivonás művelete összeadással legyen helyettesíthető. Minthogy a szorzás összeadások sorozatára, az osztás kivonások sorozatára vezethető vissza; ha sikerül a kivonást összeadásra visszavezetni, akkor a számítógépnek csak egyetlen aritmetikai műveletet, az összeadást kell tudnia elvégezni. Az alábbiakban azt mutatjuk meg, hogy a negatív számok speciális ábrázolásával hogyan vezethető vissza a kivonás összeadásra. Az egyszerűség kedvéért térjünk át a tízes számrendszerbe. Tegyük fel, hogy a számok ábrázolására három pozíció áll rendelkezésünkre (a legnagyobb ábrázolható szám $10^3 - 1 = 999$).

26. Mintafeladat

Vegyünk egy tetszőleges háromjegyű számot, pl. a 234-et. Vonjuk ki 999-ből, az eredmény 765.

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 765 \\ \hline 999 \end{array}$$

A 765 az a szám, amely a 234-et csupa kilencesekből álló számra egészíti ki három pozíción. Ezt a számot a 234 kilences komplementjének (kiegészítőjének) nevezzük. Általában beszélhetünk a p alapú számrendszerben egy szám $p - 1$ -es komplementéről, amely a

7. SZAKMÓDSZERTANI EREDMÉNYEK

számot olyan n pozíciójú számmá egészíti ki, amelynek minden jegye $p - 1$.

Adjunk hozzá 765-höz 1-et, az eredmény 766.

$$\begin{array}{r} 234 \\ + 766 \\ \hline 1000 \end{array}$$

A 766-ot a 234 tízes komplementének nevezzük. Általában, azt a számot, amely a p alapú számrendszerben egy n pozíción felírható számot p^n -re egészít ki, a szám p -s komplementének nevezzük. Láttuk, hogy a $p - 1$ -es komplementből a p -s komplement 1 hozzáadásával kapjuk.

27. Mintafeladat

Végezzük el az alábbi kivonást a hárompozíciós decimális számok körében:

$$\begin{array}{r} 723 \\ - 132 \\ \hline 591 \end{array}$$

Ezt a kivonást az alábbi egyenlőség felhasználásával másképp is elvégezhetjük:

$$723 - 132 = 723 + (1000 - 132) - 1000.$$

Lépésenként végrehajtva, először képezzük a 132 tízes komplementét három pozíción, ez 868. Ezt hozzáadjuk a 723-hoz, az eredmény:

$$\begin{array}{r} 723 \\ + 868 \\ \hline 1591 \end{array}$$

A kapott számból kivonunk ezret, azaz elhagyjuk az első számjegyet – amit a számítógép automatikusan le is vágna, hiszen a szám ábrázolására csak három pozíció áll rendelkezésre.

Így a kivonást két műveletre, egy p -s komplementképzésre és egy összeadásra vezettük vissza. Egyelőre úgy tűnik, csaltunk, hiszen a komplementképzés nem más, mint kivonás. Ez valójában így is van,

kivéve a kettes számrendszert, ahol ez a művelet egy „trükkal” másképp is elvégezhető:

A kettes számrendszerben a $p - 1$ -es komplement nem más, mint az 1-es komplement ($2 - 1 = 1$), így a komplementképzéskor a nullákhoz egyet, az egyesekhez nullákat kell adnunk, hogy minden pozíción 1-et kapjunk.

11001110 – nyolcpozíciós bináris szám;

00110001 – a szám egyes komplemente;

11111111 – a kettő összege.

A bináris számok körében tehát egy szám egyes komplementét úgy kapjuk meg, hogy a szám minden egyesének helyére nullát, minden nullája helyére egyet írunk.

28. Mintafeladat

A kettes komplement képzése meghatározás szerint egy egyes hozzáadásával valósul meg:

$$\begin{array}{rcl}
 & 00110001 & \text{– egyes komplement} \\
 + & 00000001 & \\
 \hline
 & 00110010 & \text{– kettes komplement} \\
 11001110 & & \text{– az eredeti szám} \\
 + 00110010 & & \text{– ketteskomplement} \\
 \hline
 100000000 & & \text{– a kettő összege}
 \end{array}$$

A fentiekben leírt eljárással a kettes számrendszerben a kivonást akkor is el tudjuk végezni, ha a gép csak az összeadást „ismeri”. A számítógépek többnyire a kettes komplement képzésén alapuló eljárást használják kivonásra, bár egyes géptípusok az egyes komplementképzésből indulnak ki.

A kettes komplement képzését egy lépésben úgy is megoldhatjuk, hogy a bitsorozatban a legkisebb helyi értéktől kiindulva az első 1-essel bezárólag változatlanul leírjuk a számjegyeket, majd innentől kezdve a 0-k helyett 1-eseket, az 1-esek helyett 0-kat írunk (Perge, 1993).

Példa:

11001110	az eredeti szám
00110010	kettes komplement

29. Mintafeladat

Ábrázoljuk 16 biten a -111_2 számot kettes komplement formában:

0000000000000111 az eredeti szám

111111111111000 egyes komplement

111111111111001 kettes komplement

Ha ezt a kettes komplement hozzáadjuk egy tetszőleges 16 bites számhoz, az eredmény ugyanaz, mintha 111-et kivontunk volna belőle, ugyanis a legmagasabb helyi értékű bit egyszerűen elvész. E tulajdonságok miatt a negatív számok helyett azok kettes komplementjét tároljuk.

A továbbiakban még egy megkötést kell tennünk. Hogyan tudjuk ugyanis eldönteni például azt, hogy az 10101010101010 szám pozitív-e, vagy egy másik pozitív szám kettes komplemente? A felírás alapján sehogyan. Ezért megegyezünk abban, hogy a legnagyobb ábrázolható pozitív szám $2^{15} - 1$ legyen, vagyis a nemnegatív számok csak a 15 alsó helyi érték bitet foglalják el, a negatív számoknak megfelelő kettes komplementek első, legmagasabb helyi értékű bitje pedig 1 legyen.

A pozitív számok így 0000000000000000 és 1111111111111111 között, míg a negatív számok komplementei 1000000000000000 és 1111111111111111 között helyezkednek el.

Átszámolva decimális számokká, a kétbájtos egész értéke $-32768 \leq I \leq 32767$ lehet.

Ebben a számtartományban a pozitív számok legmagasabb helyi értékű bitje mindig 0, a negatívoké 1. Így ezt a bitet előjelbitnek nevezhetjük.

Összefoglalva, a fixpontos számábrázolásnál 16 biten a -32768 és a +32767 közötti számokat ábrázoljuk, a nemnegatív számokat bináris alakban, a negatív számokat pedig bináris alakjuk kettes komplementével (Racskó, 1989).

A többletes kód fogalmának kialakítása

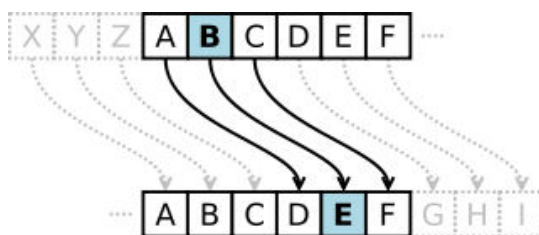
A többletes kód fogalmát már akár az alsó tagozatos korosztályban kezdhethetjük előkészíteni az ún. Caesar- kód vagy Caesar rejtjel bemutatásával. A Caesar-kód vagy Caesar-rejtjel az egyik legegyszerűbb és legelterjedtebb titkosírási módszer. Úgynevezett helyettesítő rejtjel, ami azt jelenti, hogy minden egyes betűt az ábécében egy tőle meghatározott távolságra lévő betűvel kell helyettesíteni. Így például, ha az eltolódás 3, az angol ábécében az A-t a D-vel, a B-t a E-vel stb. kell helyettesíteni. A magyar ábécére vonatkoztatva ez az A betű helyett C-t, az Á betű helyett CS-t jelent. Az elnevezését Julius Caesarról kapta, aki ennek a titkosítási (kódolási) módszernek a segítségével kommunikált tábornokaival.

A fogalom előkészítését enaktív, és ikonikus reprezentációk is segíthetik. A tárgyi cselekvéses szinten a gyerekek maguk készíthetnek pl. a mellékelt képen láthatóhoz hasonló kódtárcsát, amellyel nemcsak a Caesar-rejtjel szerinti kódolt alak és megfejtése, hanem az eltolás elvét általánosan alkalmazó kódrendszer is előállítható. A tárcsalapok a koncentrikus körök középpontja körül tetszőleges egységgel, tetszőleges irányba elforgathatók.



Kódtárcsa az angol abc betűivel

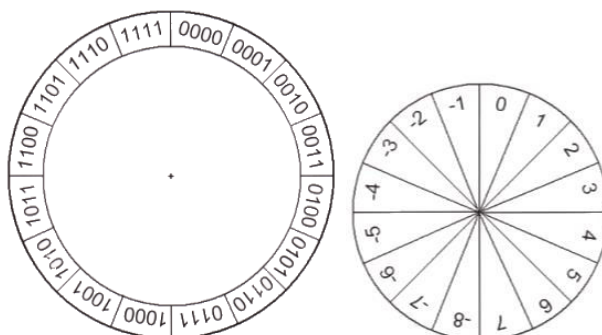
Az ikonikus szintet képviselheti, de tárgyi tevékenységre alkalmas formában is elkészíthető az abc-t sávokban tartalmazó változat, amellyel szintén az elv általánosítása is illusztrálható, vagy konkrét tevékenység során megvalósítható.



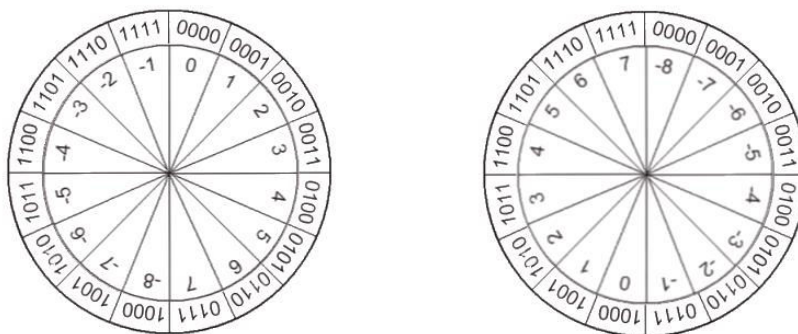
Sávok (szalagok) az angol abc betűivel

A Caesar-kód alapelveéhez hasonló a többletes (eltolt) kódolás elve. Itt a számokat egy másik, a számegyenesen megadott egységgel eltolt szám kettes számrendszerbeli alakjával helyettesítjük.

Ha a kódolás során a pozíciók számát nem választjuk túl nagyra (pl. a pozíciók száma 4), a gyerekek maguk is elkészíthetik a két körlepből álló tárcsát.



A számtárcsák összeállítás előtt (Sitkuné)



A két, középpontjánál rögzített körleap

A középső lapot 8 egységgel elforgattuk

(Sitkuné,2012)

A számtárcsa készülhet kartonból, a képi reprezentáció pedig valamelyik rajzolóprogram használatával is kialakítható. A tárcsa működését bemutató interaktív ábra az interaktív táblák beépített lehetőségeinek felhasználásával megvalósítható. A tárcsa működését szimuláló program elkészítése pedig a középiskolai, vagy a felsőoktatásban tanuló hallgatók feladata lehet.

A számok tárcsára írása során kitérhetünk a speciális problémákra is. A problémák felvetése, és a megoldások keresése az adott korosztály tudásszintjének, életkori sajátosságainak megfelelően történhet.

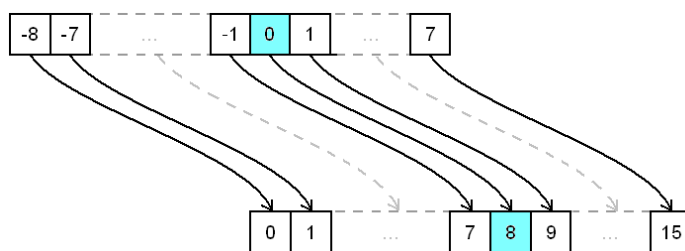
Néhány problémakör, amellyel foglalkozhatunk:

- A rendelkezésünkre álló pozíciókon hányféle kódot tudunk előállítani 0-ák és 1-esek felhasználásával? (4 pozíción 16-félét – a legkisebb a 0000, a legnagyobb az 1111; ezek a kettes számrendszerbeli számok lesznek a „rejtjelek”, a kódok.)

- Mely tízes számrendszerbeli számokat jelentsék ezek a kódok? Milyen szempontokat célszerű figyelembe venni az ábrázolandó számok kiválasztása során? (Legyen a kódolás kölcsönösen egyértelmű. Legyenek az ábrázolandó számok között negatívak és pozitívak is, lehetőleg szimmetrikus elhelyezkedésben.)

- Milyen aritmetikai műveletek értelmezhetők a megalkotott kódrendszerrel? Hogyan értelmezzük ezeket a műveleteket úgy, hogy az eddig megismert szabályok a kódokkal végzett műveletek során is érvényesek maradjanak?

A Caesar-kód alapelveinek szemléltetését a szalagok (sávok) eltolásával megvalósító ábra némi módosítással a többletes kódok bemutatására is alkalmas lehet:



A többletes kódok szemléltetése a számokat tartalmazó sávok (szalagok) eltolásával (Sitkuné, 2012)

A 7. fejezetben bemutattam a helyi értékes számrendszerek alapfogalmainak, elemi algoritmusainak oktatására vonatkozó módszertani megoldások komplex rendszerét. A struktúra kialakításának kiindulópontként a Varga Tamás vezette matematikatanítási kísérlet tapasztalataira épülő, 1978-ban bevezetett általános iskolai új matematika tantervhez, valamint a tanterv 1987-es korrekciójához készült segédanyagokat használtam. Ez az irodalom, sajnos, napjainkban kereskedelmi forgalomban nem, könyvtárakban pedig alig érhető el. A feldolgozás során egyik célom az volt, hogy az említett segédletekben a témakörhöz kapcsolódó, elszórtan megtalálható anyagot összegyűjtsem, és a pedagógiai, pszichológiai kutatások eredményeit figyelembe véve rendszerezsem, másik célom pedig az, hogy a rendszerezett anyagot az informatikai ismeretekre vonatkozó részletekkel, a korszerű információtechnológiai eszközök nyújtotta lehetőségek, és újszerű módszertani javaslatok bemutatásával kiegészítsem.

Ennek érdekében:

- Áttekintettem a témakör oktatásával kapcsolatos matematika és informatika szakmódszertani irodalmat az 1978-as matematika tanterv bevezetésének időpontjától napjainkig. A következő forrásokat használtam: tantervek, tantervi útmutatók, tanári, tanítói kézikönyvek, továbbképzési anyagok, általános- és középiskolai tankönyvek, munkafüzetek, a tanár- és a tanítóképzésben használt szakmódszertani jegyzetek, elektronikusan elérhető szakmódszertani anyagok.
- A szakmódszertani forrásokból kiindulva, a kiemelt pedagógiai, pszichológiai elvek alapján elvégeztem több száz, helyi értékes számrendszerekkel kapcsolatos feladat pedagógiai, pszichológiai és szakmódszertani szempontú elemzését, a fogalomkialakítás fokozatai és a Bruner-féle reprezentációs szintek szerinti rendszerezését.
- Az előző pontban kialakított rendszerbe illesztve olyan saját készítésű feladatokat mutattam be, amelyek a cselekvő ismeretszerzés módszerét a korszerű információtechnológiai eszközök (számítógép, interaktív tábla) alkalmazásával biztosítják.
- Összegyűjtöttem a számábrázolás témakör alapját képező kettes számrendszer különféle konkretizációit.
- A kialakított rendszerbe illeszkedő, a számábrázolás témakörhöz kapcsolódó feladatokat készítettem.

- Összegyűjtöttem, és a b). pontban kidolgozott rendszerbe illesztve bemutattam a témakör oktatása folyamatában használható oktatási segédeszközöket.
- A számábrázolás témakör oktatása során alkalmazható oktatási segédeszközt készítettem.

A létrehozott struktúra a fogalomkialakítás első lépéseitől kezdve az informatikai alkalmazásokban történő felhasználás szintjét is magában foglaló, a matematika- és informatikaoktatásban az oktatás különböző szintjein is alkalmazható, elméletileg megalapozott, tapasztalataink szerint a gyakorlatban jól használható rendszert képvisel.

8. ÖSSZEGZÉS

Jelen értekezésben olyan témát dolgoztam fel, amely mind a matematika, mind az informatika tudománya, illetve oktatásának módszertana szempontjából alapvető. A helyi értékes számrendszerek fogalma a matematikában a számfogalom, az informatikában a számábrázolás témakörének elemi fogalma.

A témakörrel kapcsolatos kutatásokat az a tény inspirálta, hogy – főiskolai oktatásban szerzett tapasztalataim szerint – a hallgatók nem képesek az említett fogalomra épülő tudásanyag elfogadható szintű elsajátítására, feladatokban való magabiztos alkalmazására.

A dolgozat első részében bemutatam a helyi értékes számrendszerek fogalmára épülő informatikai ismeretek alkalmazása során tapasztalt gyenge hallgatói teljesítmények okait feltáró kutatás eredményeit. Arra a következtetésre jutottam, hogy bár a vizsgált területeken (elemi számolási készség, induktív gondolkodás) hallgatóink eredményei minimális mértékben gyengébbek az országos mérések mutatóinál, az okok nem kizárólagosan ezeken a területeken keresendők.

A hallgatók feladatmegoldásainak elemzése során megállapítottam, hogy a gyenge eredmények a matematikai ismeretek hiányosságaira vezethetők vissza, konkrétan arra, hogy hallgatóink nem rendelkeznek a helyi értékes számrendszerek általános fogalmával. A fogalom alkotó alkalmazása helyett mechanikusan használnak bemagolt, betanult definíciókat, algoritmusokat, nagyon sokszor nem a megfelelő kontextusban és nem a megfelelő formában (2. fejezet). A továbbiakban arra kerestem a választ, hogy ez a tény milyen okokra vezethető vissza.

A helyi értékes számrendszerek fogalmához kapcsolódóan először röviden áttekintettem a fogalom történeti fejlődésének matematika és informatika szakmódszertani szempontból releváns állomásait, majd a matematikai és informatikai háttér bemutatásával a témakör elemi fogalmainak, alapvető algoritmusainak általános, egységes, formális tárgyalását adtam (3-4. fejezet).

Az 5. fejezetben a közoktatás tartalmát szabályozó dokumentumok (alaptantervek, kerettantervek) elemzése során arra a kérdésre kerestem a választ, hogy jogosan várható-e el a hallgatóktól a számrendszer-fogalom alkalmazóképes tudása, vagy a fogalom kialakítása is a felsőoktatás feladata kellene, hogy legyen. Arra a megállapításra

jutottam, hogy az alaptantervek előírásai szerint a felsőoktatásba kerülő hallgatóknak rendelkezniük kellene a helyi értékes számrendszerek általános fogalmával.

Megállapítható viszont, hogy bár a matematika alaptantervek – minimális mértékben ugyan, de – tartalmazznak konkrét előírásokat a helyi értékes számrendszerekre vonatkozóan, a kerettantervekben nagyon eltérő hangsúllyal szerepel ez a témakör. Az informatika tantervek pedig a fogalom kialakítását nem tartalmazzák fejlesztési feladatként, ugyanakkor a fogalom alkalmazását már feltételezik a rá épülő informatikai fogalmak kialakításához. A legújabb tantervek (NAT 2012 és kerettantervei) az előzőektől eltérően részletesebben tartalmazzák ugyan a tanítandó tananyagot, ám az előző tanterveknél is kevésbé hangsúlyozzák ezt a témakört. Az elemzés eredményeképpen megállapítottam, hogy a tartalmi szabályozás – jelenlegi formájában – lehetséges oka annak, hogy a főiskolai oktatásban résztvevő hallgatók jelentős része nem rendelkezik a helyi értékes számrendszerek általános fogalmával. Van olyan kerettanterv, amelynek alkalmazása révén előfordulhat, hogy az alaptantervben előírt számrendszeres gondolkodás fejlesztését kizárólag a tízes számrendszert használva kísérlik megvalósítani a szaktanárok (erre utalnak az általános iskolai 3. és 5. évfolyamos tanulók által megoldott, számrendszerekre vonatkozó feladatok eredményességi mutatói is). Ez a gyakorlat viszont ellentétes a korszerű pedagógiai-pszichológiai elméletekkel, melyek szerint egy fogalom általánosítása csak többféle kontextusban használva, többféle konkretizáció megismerése során mehet végbe.

A 6. fejezetben a pedagógiai, pszichológiai vonatkozások tárgyalásával a szakmódszertani javaslatok rendszerének kialakításában leginkább ható elméletek legfontosabb jellemzőit mutattam be. A matematika és informatikaoktatás napi gyakorlatának helyzetét bemutató kutatások eredményei, és a gyakorló pedagógusok beszámolóí alapján is megállapítható, hogy az ún. módszertani szabadság elve sok esetben a hagyományos, ismeretközlő módszerhez való visszatérést eredményezi. Ez ellentétes a korszerű pedagógiai-pszichológiai eredményekkel, amelyek a fogalomkialakítás folyamatában hangsúlyozzák a cselekvés, a többféle érzékszerv bevonásának jelentőségét, a fogalom fejlődése, pontosítása során pedig a különféle reprezentációk szerepét.

A 7. fejezetben a helyi értékes számrendszerek alapfogalmainak, elemi algoritmusainak oktatására vonatkozó módszertani megoldások komplex rendszerét mutattam be. A struktúra kialakításának kiindulópontként a

8. ÖSSZEGZÉS

Varga Tamás vezette matematikatanítási kísérlet tapasztalataira épülő, 1978-ban bevezetett általános iskolai új matematika tantervhez, valamint a tanterv 1987-es korrekciójához készült segédanyagokat (tantervek, tantervi útmutatók, tanári kézikönyvek, tankönyvek, munkafüzetek, továbbképzési anyagok) használtam. Ez az irodalom, sajnos, napjainkban kereskedelmi forgalomban nem, könyvtárakban pedig alig érhető el. A feldolgozás során egyik célom az volt, hogy az említett segédletekben a témakörhöz kapcsolódó, elszórtan megtalálható anyagot összegyűjtsem, és a Bruner-féle reprezentációs szinteknek megfelelően rendszerezem, másik célom pedig az, hogy a rendszerezett anyagot az informatikai ismeretekre vonatkozó részletekkel, a korszerű információtechnológiai eszközök nyújtotta lehetőségek, és újszerű módszertani javaslatok bemutatásával kiegészítsem. A létrehozott struktúra a fogalomkialakítás első lépéseitől kezdve az informatikai alkalmazásokban történő felhasználás szintjét is magában foglaló, a matematika- és informatikaoktatásban az oktatás különböző szintjein is alkalmazható, elméletileg megalapozott, tapasztalataink szerint a gyakorlatban jól használható rendszert képvisel.

9. SUMMARY

This thesis focuses on a topic that is fundamental in the fields of mathematics, information science and the methodology of their teaching alike. In mathematics, the concept of positional number systems is an elementary term of numeral notion, similarly to the topic of number representation in information science.

The researches in this field of studies have been inspired by the fact that – in the light of my experience earned in college education – a considerable proportion of students are not able to attain the knowledge based on the above-mentioned notion on an acceptable level and use this knowledge in exercises with confidence.

In the first part of my thesis I presented the research results revealing the causes of the students' poor performance that have been witnessed in the course of the application of the information science knowledge based on the concept of positional number systems. I have concluded that although the results of our students in the studied areas (elementary computational skills, inductive thinking) were just minimally poorer than the indicators of nation-wide assessments, the underlying reasons should not be found solely in the given fields.

During the analysis of the problem solutions performed by students, it could be ascertained that the poor results could be attributed to the inadequacies of mathematical knowledge, i.e. the fact that our students lacked the general notion of positional number systems. Instead of the creative application of the notion the students rather mechanically used memorized definitions, algorithms, very frequently in inappropriate context and form (Chapter 2). Thereafter, I was trying to find out the underlying reasons of this phenomenon.

In association with the concept of positional number systems, first I had a brief overview on the distinct stages of the historic development of the concept as relevant to the specialized methodology of mathematics and information science. Then I gave a standardized, formal discussion of the elementary concepts and fundamental algorithms of the topic (Chapter 3–4). by presenting the mathematical and information science background.

When analyzing the documents regulating the contents and substances of public education (core curricula, framework curricula) in Chapter 5, I wanted to find the answer to the question whether it was justified to

expect students to have usable knowledge of the concept of number systems, or the conveyance of this notion should be the responsibility of higher education. I have come to the conclusion that according to the requirements of the core curricula students admitted to higher education have to have a general notion of positional number systems.

It can be determined that while the core curricula on mathematics – though to a minimum extent – do have concrete requirements in relation to positional number systems, the same topic has a very different emphasis in the framework curricula. On the other hand, the curricula on information science do not set the establishment of the notion as a development task, but the application of the concept is taken as a condition of shaping the further, associated concepts of information science. The most recent curricula (National Core Curriculum 2012 and its framework curricula) are different from their predecessors in specifying the knowledge to be taught in more details, yet the topic itself has become even less emphasized than in the earlier curricula.

As a result of the analysis, it can be ascertained that the substantial regulations – in its current form – is a possible reason for a considerable proportion of the students of college education not being in possession of the general notion of positional number systems. For instance, there are framework curricula whose application suggests that in their efforts to implement the development of the number system thinking prescribed in the core curriculum the teachers of the subject should solely rely on the decimal number system (this is indicated by the efficiency indicators of the problems solved by the 3rd and 5th year pupils of the primary school in connection with number systems). Nevertheless, this practice is in conflict with the modern theories of pedagogy and psychology according to which any concept can be generalized only in multiple contexts, after offering varied ways of concretization.

In Chapter 6, by discussing the pedagogical, psychological implications, we presented the key properties of the theories that deeply influenced the set of specialized methodological proposals. The results of the researches describing the situation of the everyday practices of mathematics and information science education, as well as the reports of practicing teachers suggest that in many cases the principle of the so-called methodological freedom results in the re-occurrence of conventional, instructive method. It is in contradiction with the modern results of pedagogy and psychology where the significance of activeness and the involvement of various sensory organs are emphasized in the

9. SUMMARY

view of the process of the development of notions, similarly to the role of diverse representations during the further development and refinement of the concept.

Chapter 7 presented a complex system of methodological solutions relating to teaching the basic concepts and elementary algorithms of positional number systems. I originated the establishment of this structure from the educational aids (curricula, curricular guidelines, handbooks for teachers, schoolbooks, exercise books, further training materials) that were created for the new mathematical curriculum of primary school introduced in 1978 on the basis of the experience that were derived from the experiment on mathematics education led by Tamás Varga, as well as the educational aids made for the purpose of the 1987 correction of the curriculum.

Unfortunately nowadays this literature is commercially not available at all, and it can hardly be found in libraries. One of my goals with the processing of these materials was to collect the documents that sporadically available in the above-mentioned aids in relation to the given topic, and systemize them according to Bruner's stages of representation. My other objective was to complete the systemized materials together with the details associated with information science knowledge, with reliance on the modern means of information technology, by offering novel methodological proposals. The established structure represents a theoretically well-grounded, practically applicable system that covers the levels of the usage in the information science applications from the first steps of the development of the notion, and is conducive to teaching mathematics and information science on various levels of education.

IRODALOMJEGYZÉK

A magyar nyelv értelmező szótára (1966): Akadémiai Kiadó, Budapest

Ambrus András (1995): Bevezetés a matematika didaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest

Ambrus András (2002): Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásban. <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambrus/tendenc.pdf>

Az agy működése (szerző és évszám nélkül) in: OECD tanulmányok magyarul. Oktatókutató és Fejlesztő Intézet <http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=oecd-Schuttler-Agy> (2009. 11.26)

Balázsi Ildikó – Ostorics László – Szalay Balázs – Szepesi Ildikó (2010): PISA2009 Összefoglaló jelentés Oktatási Hivatal, Budapest

Balázsi Ildikó – Ostorics László – Szalay Balázs (2007): PISA 2006 Összefoglaló jelentés – A ma oktatása és a jövő társadalma Oktatási Hivatal, Budapest

Balázsi Ildikó – Schumann Róbert – Szalay Balázs – Szepesi Ildikó (2008): TIMSS 2007 Összefoglaló jelentés a 4. és 8. évfolyamos tanulók képességeiről matematikából és természettudományból Oktatási Hivatal, Budapest

Balogh Viktória – Czeglédi István – dr. Vörös György (1987): A matematika tanítása III. (Tanárképző főiskolai jegyzet) Tankönyvkiadó, Budapest

Bonifert Domokos – Kovácsné Győri Ida (1987): Matematika a tanítók intenzív továbbképzéséhez (segédanyag) Budapest

Bruner, Jerome S. (1974): Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat Könyvkiadó, Budapest

C. Neményi Eszter – Radnainé Szendrei Julianna (1977, szerk.): Továbbképzési anyag matematika II. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest

C. Neményi Eszter – Somfai Zsuzsa (2002): A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. Új Pedagógiai Szemle, 2002. december 89-115. o. [http://www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/ matematika-tantargy](http://www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/matematika-tantargy) (2010.11.08.)

- C. Neményi Eszter – Sz. Oravecz Márta (1994): Útjelző a 2. osztályos matematika tanításához. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
<http://www.tofk.elte.hu/matek/utjelzo2/album/utjelzo2.html>
- C. Neményi Eszter (2002): Az alsó tagozatos matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai. Új Pedagógiai Szemle, 2002. 12. sz. 89–98.
<http://www.ofi.hu/tudastar/also-tagozatos> (2011.05.25.)
- C. Neményi Eszter: A természetes szám fogalmának alakítása. Tantárgy-pedagógiai füzetek; ELTE TÓFK kiadványa (Budapest, 2006)
- C. Neményi Eszter–Csahóczi Erzsébet–Csatár Katalin–Kovács Károlyné–Köves Gabriella–Lajos Józsefné–Oláh Vera–Olasz Tamásné–Pálfalvi Józsefné–Somfai Zsuzsa–Szabóné Sztányi Judit–Széplaki Györgyné–Szeredi Éva–Zsinkó Erzsébet (2008): Az Educatio Kht. kompetencia-fejlesztő oktatási program kerettanterve. Educatio Társadalmi Szolgáltató Közhasznú Társaság, Budapest
- C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna (2003): A számolás tanítása. Szöveges feladatok; Tantárgy-pedagógiai füzetek; ELTE TÓFK kiadványa, Budapest
- Cervenakné Neményi Eszter – Dr. Göndöcs László – Merő László – Merő Lászlóné – Varga Tamás (1988): Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához. Ötödik, átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest
- Cervenakné Neményi Eszter – dr. Göndöcs László – Merő László – Merő Lászlóné – Varga Tamás (1988): Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához. Ötödik, átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest 191-207. oldal
- Cervenakné Neményi Eszter – Halmos Istvánné – Radnai Gyuláné Szendrei Julianna – Varga Tamás (1982): Matematika munkalapok. Általános iskola 4. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest
- Cervenakné Neményi Eszter – Herczeg Jánosné – Merő László – Varga Tamás (1979): Kézikönyv a matematika 2. osztályos anyagának tanításához. Tankönyvkiadó, Budapest

- Cervenakné Neményi Eszter – Varga Tamás (1982): Matematika munkalapok Általános iskola 1. osztály 6. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest (Engedélyezve az 1978/79-es tanévtől)
- Cervenakné Neményi Eszter – Varga Tamás (1989): Matematika munkalapok Általános iskola 2. osztály 12. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest (Engedélyezve az 1979/80-as tanévtől)
- Czeplédy István–Hajdu Sándor–Novák Lászlóné–Scherlein Márta (évszám nélkül): Matematika mintatanterv 1-8. Műszaki Könyvkiadó, Budapest,
<http://webaruhaz.muszakikiado.hu/kepek/Letoltesek/hajdutanterv.doc> (2010.12.28.)
<http://www.muszakikiado.hu/matematika#atdolgozott> (2011.06.18.)
- Csapó Benő (1998): Az iskolai tudás. Osiris Kiadó, Budapest
- Csapó Benő (2003): A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Csepcsányi Éva - Csordás Mihály - Koleszár Edit - Nagy Tibor (1994, szerk.): Matematikai versenyzetek. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny feladatai és megoldásai '91-93, MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged
- Csépe Valéria (2009): A számoló agy. Mindennapi Pszichológia, 2009.4. szám, 30-33. o.
- Csernoch Mária (2012): Bevezetés az informatikába (prezentációk) <http://www.inf.unideb.hu/~csernochmaria> (2013.08.08.)
- Dehaene, S. (2003): A számérzék: miként alkotja meg az elme a matematikát? Osiris Kiadó, Budapest
- Dienes Zoltán (1973): Építsük fel a matematikát! Gondolat Kiadó, Budapest
- Englesz Istvánné – Kovács Csongorné – Sztrókayné Földvári Vera (1978): Matematika általános iskola 5. osztály Tankönyvkiadó, Budapest
- Falucskai János (2002): Bevezetés az informatikába. <http://zeus.nyf.hu/~falu/bevinfo/jegyzet.doc> (2008. 06. 30.)

- Falus Iván – Ollé János (2008): Az empirikus kutatások gyakorlata – Adatfeldolgozás és statisztikai elemzés Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Falus Iván (2000): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Műszaki könyvkiadó, Budapest
- Filep László – Bereznai Gyula (1999): A számírás története. Filum Könyvkiadó, Budapest
- Gáspár Mihály (2011): Az értelmi fejlődés szakaszai Piaget elmélete alapján <http://mindentudas.hu/eloadasok/partnerek/item/3032-az-%C3%A9rtelmi-fejl%C5%91d%C3%A9s-szakaszai-piaget-elm%C3%A9lete-alapj%C3%A1n.html> (2011.03.31.)
- Gazsó István – Mosonyi Kálmán – Vörös György (1974): A matematika tanítása. (Tanárképző főiskolai jegyzet) Tankönyvkiadó, Budapest
- Goldberg, D. (1991): “What every computer scientist should know about floating-point arithmetic” pp. 5-48 in ACM Computing Surveys vol. 23 #1
http://docs.oracle.com/cd/E19957-01/806-3568/ncg_goldberg.html (2010.10.17.)
- Hajdu Sándor (1990, szerk.): Matematika feladatgyűjtemény 7-8. Tankönyvkiadó, Budapest
- Hajdu Sándor (2001, szerk.): Matematika 5. tankönyv bővített változat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Hajdu Sándor (2002, szerk.): Matematika 6. tankönyv (bővített változat) Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Halmos Istvánné – Dr. Ill Mártonné – Tiszai Zoltánné (1977): Kézikönyv az ideiglenes matematika-tanterv 4. osztályos anyagának tanításához. Tankönyvkiadó, Budapest
- Hármori Miklós – Kovács Zoltán – Radnainé Szendrei Julianna – Szálka Györgyné – Varga Tamás (1981): Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához. Tankönyvkiadó, Budapest
- Horváth Péter (2001): Az információtudomány történeti háttere II. Tudományos és Műszaki Tájékoztatás Könyvtár- és Információtudományi szakfolyóirat 48. évfolyam 4. szám

- Ill Mártonné – Király Sándorné – Kovács Zoltán – C. Neményi Eszter – R. Szendrei Julianna – Tiszai Zoltánné (1982): Kézikönyv a matematika 4. osztályos anyagának tanításához. Tankönyvkiadó, Budapest
- Imrecze Zoltánné (1976): Nem nehéz a matematika. Minerva, Budapest
- Inhelder, B. – Piaget, J. (1984): A gyermek logikájától az ifjú logikájáig. Akadémiai Kiadó, Budapest
- Jerome S. Bruner (1974): Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat kiadó, Budapest
- Juhász József – Szőke István – O. Nagy Gábor – Kovalovszky Miklós (2003): Magyar értelmező kéziszótár, Akadémiai Kiadó, Budapest
- Kahan, W. (1996): Lecture Notes on the Status of IEEE Standard 754 for Binary Floating-Point Arithmetic
<http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/IEEE754.PDF> (2010.10.17.)
- Kahan, W. (1996): The Baleful Effect of Computer Benchmarks upon Applied Mathematics, Physics and Chemistry
<http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/baleful.pdf>
- Káldi Éva – Varga Tamás (1988): Matematika munkafüzet általános iskola 4. osztály. Tankönyvkiadó
- Kerber Zoltán – Ranschburg Ágnes (2004): OKI-műhelytanulmányok - A középiskolai tantárgyi obszerváció tanulságai
Új Pedagógiai Szemle 2004. július-augusztus 127–151. oldal
<http://www.ofi.hu/tudastar/oki-muhelytanulmanyok/oki-muhelytanulmanyok> (2011.05.25.)
- Kerber Zoltán (2002): A tantárgyi obszerváció néhány tanulsága
Új Pedagógiai Szemle 2002. 12.sz. 3–15.
<http://www.ofi.hu/tudastar/tantargyi-obszervacio> (2011.05.25.)
- Kerettanterv 2000: Az oktatási miniszter 28/2000. (IX.21.) OM rendelete a kerettantervek kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

- Kerettanterv 2003: Az oktatási miniszter 10/2003. (IV.28.) OM rendelete a kerettantervek kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 28/2000. (IX. 21.) OM rendelet módosításáról.
- Kerettanterv 2008a: Az oktatási és kulturális miniszter 2/2008. (II. 8.) OKM rendelete a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről, valamint egyes oktatási jogszabályok módosításáról szóló 17/2004. (V. 20.) OM rendelet módosításáról.
- Kerettanterv 2008b: Az oktatási és kulturális miniszter 34/2008. (XII.12.) OKM rendelete a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről, valamint egyes oktatási jogszabályok módosításáról szóló 17/2004. (V. 20.) OM rendelet módosításáról.
- Kerettanterv 2008c:
http://www.nefmi.gov.hu/letolt/kozokt/kerettanterv/ktt_kompetencia_matematika_080630.zip (2010.12.28.)
 programcsomag:
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/index.html (programcsomag); (2010.12.28.)
- Kerettanterv 2012: Az emberi erőforrások minisztere 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelete a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről <http://kerettanterv.ofi.hu/index.html> (2013.03.15)
- Klix, Friedhart (1985): Az ébredő gondolkodás – Az emberi intelligencia fejlődéstörténete. Gondolat Könyvkiadó, Budapest
- Knuth, D. E. (1994): A számítógép-programozás művészete 2. Műszaki Könyvkiadó, Budapest
- Konfár László (évszám nélkül): A számírás története.
<http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kcq/0/16210/2> (2011.06.10.)
- Kovács András: A matematika tanításának pszichológiája (előadás-vázlat) <http://www.math.klte.hu/~kovacs/pszicho.rtf>
- Kőrösné Mikis Márta (2002): Az informatika helyzete és fejlesztési feladatai. Új Pedagógiai Szemle, 2002. 6. sz. 35–49.
<http://www.ofi.hu/tudastar/informatika-tantargy-090617> (2011.05.25.)

- Kőrösné Mikis Márta: Az informatika helyzete és fejlesztési feladatai.
Új Pedagógiai Szemle, 2002. június, 35-49. o. <http://www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/informatika-helyzete> (2010. 03. 06.)
- Közköztatási Törvény: 1993. évi LXXIX. törvény a közoktatásról
http://www.complex.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=99300079.TV
- Maja számrendszer (évszám nélkül):
http://hu.wikipedia.org/wiki/Maja_sz%C3%A1mrendszer
(2011.06.10.)
- Mansfield, D.E., Thompson, D. (1972): Matematika új felfogásban.
Gondolat Kiadó, Budapest
- Markó Tamás (1996): A számítástechnika története.
Janus Pannonius Tudományegyetem, Alkalmazott Matematika és Informatika Tanszék.
<http://www.ttk.pte.hu/ami/phare/tortenet/tartalom> (2011.06.05.)
- Matematika/Módszertani alapelvek
http://alsos.fazekas.hu/wiki/Matematika/M%C3%B3dszertani_alapelvek
- Microsoft Office Excel (2007): Számok átváltása más számrendszerből.
<http://office.microsoft.com/hu-hu/excel/HA100705111038.aspx>
(2011.07.21.)
- Nagy József (1971): Az elemi számolási készségek mérése és fejlettségének országos színvonala. Tankönyvkiadó, Budapest
- NAT 1995: 130/1995. (X. 26.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról.
- NAT 2003: A Kormány 243/2003.(XII. 17.) rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról.
- NAT 2007: A Kormány 202/2007. (VII. 31.) rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet módosításáról.
- NAT 2012: A Kormány 110/2012. (VI. 4.) rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról Magyar Közlöny, 2012/66.
- Némethné Rakos Katalin (1995): A mi matekunk 5. osztály, 2. kiadás
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

- OM rendelet (2004): 23/2004. (VIII. 27.) OM rendelet a tankönyvvé nyilvánítás, a tankönyvtámogatás, valamint az iskolai tankönyvellátás rendjéről
http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=a0400023.om
 (2011.05.25.)
- Parhami, B. (2001): Number Representation and Computer Arithmetic
 Encyclopedia of Information Systems, Academic Press
http://www.ece.ucsb.edu/~parhami/pubs_folder/parh02-arith-encycl-infosys.pdf (2010.10.17)
- Perge Imre (1993): Bevezetés az informatikába
 Főiskolai jegyzet, Eger
- Péter Rózsa (1963): Játék a végtelennel. Gondolat Kiadó, Budapest
- Racskó Péter (1989): Bevezetés a számítástechnikába. Számítástechnika - Alkalmazási Vállalat, Budapest
- Racskó Péter (1989): Bevezetés a számítástechnikába.
 Számítástechnika-Alkalmazási Vállalat, Budapest
- Réthy Endréné (1993): Bölcsészhallgatók vizsgateljesítményekkel kapcsolatos attribúciói. Magyar Pedagógia, 93. évf. 3-4. szám 117-134.
- Réthy Endréné (2003): Motiváció, tanulás, tanítás. Miért tanulunk jól vagy rosszul? Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Rozgonyi-Borus Ferenc (2006): RAM-ba zárt világ
 Mozaik Kiadó, Szeged
- Sain Márton (1986): Nincs királyi út! Gondolat, Budapest
- Sitkuné Görömbei Cecília – Homoki Erika – Jenei Teréz – Koi Balázs – Schmercz István (2011): Diagnosztikus mérés-értékelés az általános iskola kezdő és alapozó szakaszában
 Nyíregyházi Főiskola Pedagógusképző Karának kiadványa, Nyíregyháza
- Sitkuné Görömbei Cecília (2005): How to teach the fundamentals of information science coding, decoding and number systems?
 International Multidisciplinary Conference, Baia Mare Vol2
- Sitkuné Görömbei Cecília (2008): Mit mutatnak a számok? Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai.
 Informatika a Felsőoktatásban Konferencia, Debrecen

- <http://www.agr.unideb.hu/if2008/kiadvany/index.htm>
(2009.03.11.)
- Sitkuné Görömbei Cecília (2009): Examination of the Factors Influencing the Exam Results
in: Acta Didactica Napocensia 2009. Volume 2 Number 2; 85-94.o. <http://adn.teaching.ro/> (2009. 07. 11.)
- Sitkuné Görömbei Cecília, Faluszkai János (2005): Az informatikai alapismeretek oktatásának tapasztalatai a Nyíregyházi Főiskolán
Informatika a Felsőoktatásban Konferencia, Debrecen
<http://agrinf.agr.unideb.hu/if2005/kiadvany/index.htm>
(2009.03.11.)
- Skemp, Richard R. (1975): A matematikatanulás pszichológiája.
Gondolat Könyvkiadó, Budapest
- Somfai Zsuzsa (2002): A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában. Új Pedagógiai Szemle, 2002. 12. sz. 99–115.
<http://www.ofi.hu/tudastar/matematika-tantargy> (2011.05.25.)
- Sternberg, R. J. – Ben-Zeev, T. (1998): A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest
- Suták Mihályné – Varga Tamás (1988): Matematika munkafüzet általános iskola 3. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest
(Engedélyezve az 1988/89-es tanévtől)
- Szendrei János (1986): Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest
- Szendrei János (évszám nélkül, szerk.): A korszerű matematikatanítás néhány témaköre az általános iskolában.
Módszertani közlemények könyvtára, Szeged
- Szerencsi Sándor – Papp Olga (1985): A matematika tanítása II. (Tanítóképző főiskolai jegyzet) Tankönyvkiadó, Budapest
- Szikszai Csaba (1985): Barátunk, a számítógép. Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapest
- Varga Tamás (1969): A matematika tanítása. Tankönyvkiadó, Budapest
http://www.tofk.elte.hu/matek/mat_tan.pdf (2011.07.28)
- Varga Tamás (1972): Játsszunk matematikát! I-II. Móra Ferenc Ifjúsági Könyvkiadó, Budapest

- Vári Péter – Auxné Bánfi Ilona – Felvégi Emese – Rózsa Csaba – Szalay Balázs (2002): Gyorsjelentés a PISA 2000 vizsgálatról
Új Pedagógiai Szemle 2002. 1. sz. 38–65.
- Várterész Magda (2003): Matematikai programozás előadások.
<http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mp/mpeafo.pdf> (2011.07.21.)
- Várterész Magda (2003): Matematikai programozás gyakorlatok.
<http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mp/gyfo.pdf> (2011.07.21.)
- Zsinkó Erzsébet – P. Víg Marianna (évszám nélkül): ÉKSZER
Matematika feladatgyűjtemény 5. Nemzeti Tankönyvkiadó,
Budapest
- Zsinkó Erzsébet (1999): Matematika 5. Munkafüzet (ÉKSZER
matematika). Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

PUBLIKÁCIÓS LISTA – LIST OF PUBLICATIONS

Referált publikációk – Referred publications

1. Sitkuné Görömbei Cecília: How to teach the fundamentals of information science, coding, decoding and number systems?
in: Scientific Bulletin Series C, Volume XIX, Part 1, North University of Baia Mare
701-706.o. ISSN: 1224-3264; ISBN: 973-87237-1-X

Ref.: HighBeam Research
(<http://www.highbeam.com/doc/1P3-1791705951.html>)

2. Sitkuné Görömbei Cecília: Shall we use one more representation? Suggestions about establishing the notion of recursion in teaching informatics in primary schools in: Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2008. 6/1. 209-229.o.

Ref.: Zentralblatt Mathematics Education Database ZMATH ME
2009e.00680
(<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>)

3. Sitkuné Görömbei Cecília: Examination of the factors influencing the exam results of the subject Introduction to Informatics in: Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, 2009. 7/1. 10-11.o.

Ref.: Zentralblatt Mathematics Education Database ZMATH ME
2010b.00060
(<http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/>)

4. Sitkuné Görömbei Cecília: Examination of the Factors Influencing the Exam Results
in: Acta Didactica Napocensia 2009. Volume 2 Number 2; 85-94.o.
<http://adn.teaching.ro/> (2009. 07. 11.)

Ref.: FIS Bildung Literaturdatenbank 1504-9922; 2065-1430
(http://www.fachportal-paedagogik.de/fis_bildung/suche/fis_set.html?FId=860549&mstn=1)

**Magyar nyelvű lektorált publikációk – Peer-reviewed publications
in Hungarian**

5. Sitkuné Görömbei Cecília, Tóthné dr. Szűcs Etelka: A számítástechnika tanítása különböző iskolatípusokban
in: Módszertani Lapok Informatika + Technika 5/1. OKSZI, 2000. 15-19.o.
6. Sitkuné Görömbei Cecília, Tóthné dr. Szűcs Etelka: Alföldi Regionális Számítástechnikai Verseny
in: Módszertani Lapok Informatika + Technika 6/2. OKSZI, 2001. 28-33.o.
7. Sitkuné Görömbei Cecília: A „Bevezetés az informatikába” tantárgy tanításának tapasztalatai
in: Természettudományi Közlemények 5. Nyíregyháza, 2005. 371-375.o. ISSN 1587-7922
8. Sitkuné Görömbei Cecília: Tehetséggondozás a Logo Számítástechnikai Verseny keretében
in: Pedagógiai Műhely 2006/4. 53-62.o.
Megyei Pedagógiai, Közművelődési és Képzési Intézet, Nyíregyháza, 2006.
9. Sitkuné Görömbei Cecília: Konstruktív tanulásszemlélet az informatikaórán
in: Tudásbázis és pedagógusképzés - Pedagógiai, pszichológiai és módszertani tanulmányok, 195-206.o. Nyíregyházi Főiskola Pedagógusképző Kar, Nyíregyháza, 2007.
10. Sitkuné Görömbei Cecília: Informatikai kurzusok tartalmának, és a tanító szakos hallgatók informatikai felkészültségének összefüggései
in: Tudásbázis és pedagógusképzés - Tudományos körkép, 147-156.o. Nyíregyházi Főiskola Pedagógusképző Kar, Nyíregyháza, 2009.

Magyar nyelvű lektorált könyv (könyvrészlet) – Peer-reviewed book (book chapter) in Hungarian

11. Sitkuné Görömbei Cecília, Tóthné dr. Szűcs Etelka:
Számítástechnikai feladatgyűjtemény (Hardware, DOS
alapismeretek)
Bessenyei György Könyvkiadó Nyíregyháza, 1997.
ISBN: 963 9130 028; 90 o.
12. Sitkuné Görömbei Cecília, Tóthné dr. Szűcs Etelka:
Számítástechnikai feladatgyűjtemény (Norton Commander 4.5)
Bessenyei György Könyvkiadó Nyíregyháza, 1998. 90 o.
13. Sitkuné Görömbei Cecília: Bereznai Gyula Matematika
Emlékversenyek 1991 – 1999. Feladatsorok és megoldások
Bessenyei György Könyvkiadó Nyíregyháza, 2000. ISBN: 963-
9130-71-0; 106 o.
14. Sitkuné Görömbei Cecília, Tóthné dr. Szűcs Etelka:
Számítástechnikai feladatgyűjtemény (Hardver, DOS, Windows
'9x ismeretek)
Bessenyei György Könyvkiadó Nyíregyháza, 2001. és 2003.
ISBN: 963 9385 06 9; 112 o.
15. Sitkuné Görömbei Cecília: IKT eszközök a természettudományos
nevelésben
– A Világháló alapú tanulás. in: A természettudományok tanításának
elméleti alapjai
Debreceni Egyetem Tudományegyetemi Karok, Debrecen, 2011. 205-
217.o.
16. Homoki Erika, Jenei Teréz, Koi Balázs, Schmercz István, Sitkuné
Görömbei Cecília: Diagnosztikus mérés-értékelés az általános
iskola kezdő és alapozó szakaszában.
Nyíregyházi Főiskola Pedagógusképző Kar, Nyíregyháza, 2011.
64-120. o.

Konferencia kiadványában megjelent lektorált cikk – Peer-reviewed articles published in conference proceedings

17. Sitkuné Görömbei Cecília: Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése az általános iskolai számítástechnika-órákon in: A tanári mesterség gyakorlata - Tanárképzés és tudomány 482-488.o. Nemzeti Tankönyvkiadó – ELTE Tanárképző Főiskolai Kar Budapest, 2002.
18. Sitkuné Görömbei Cecília: Informatikai alapismereteket közvetítő tantárgy vizsgálata vizsgaeredményeit befolyásoló tényezők vizsgálata in: VII. Pedagógiai Értékelési Konferencia kiadványa, 101. o. Szegedi Tudományegyetem, Szeged, 2009. ISBN 978-963-06-7134-7
19. Sitkuné Görömbei Cecília: Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai in: PhD/DLA Konferencia kiadványa, Nyíregyháza, 2009. 233-240.o.
20. Sitkuné Görömbei Cecília: A tanító szakos hallgatók informatikai felkészültsége a Nyíregyházi Főiskolán in: XII. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia, Győr, 2009. 6 o.

Konferencia kiadványában megjelent cikk - Articles published in conference proceedings

21. Sitkuné Görömbei Cecília: A külső tantárgyi koncentráció lehetőségei az informatikaórán in: Főiskolák Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatóinak XXVIII. Országos Konferenciája, Nyíregyháza, 2004. (CD 1 o. + prezentáció)
22. Sitkuné Görömbei Cecília, Falucskai János: Az informatikai alapismeretek oktatásának tapasztalatai a Nyíregyházi Főiskolán in: Informatika a felsőoktatásban Konferencia, Debrecen, 2005. 273. o. CD: 1-4.o. ISBN: 963 472 909 6

23. Sitkuné Görömbei Cecília: A programtervező informatikus BSc alapszak „Informatika és elektronika” alapozó tárgyának oktatás-módszertani problémái
in: Felsőfokú alapképzésben matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXII. konferenciájának kiadványa, Kecskemét, 2008. 243-248.o. ISBN 978-963-7294-70-9
24. Sitkuné Görömbei Cecília: Mit mutatnak a számok? Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai
in: Informatika a felsőoktatásban konferencia kiadványa, Debrecen, 2008. 1-8.o. ISBN 978-963-473-129-0

Elektronikusan publikált egyéb közlemények – Others published online

25. Sitkuné Görömbei Cecília: Mit mutatnak a számok? Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai
in: e - Inspiráció, Informatika - Számítástechnika Tanárok Egyesülete, 2008.
<http://www.isze.hu/download/514>, 6-9.o. (2008. 10. 04.)

Egyéb közlemények - Others

26. Sitkuné Görömbei Cecília: Tanmenet a számítástechnika tanításához
in: METÓDUS Gyakorlóiskolai füzetek 38-46.o.
Bessenyei György Tanárképző Főiskola Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Szabolcs-Szatmár-Bereg Megyei Pedagógiai Intézet Nyíregyháza, 1993.
27. Sitkuné Görömbei Cecília: Számítástechnika témazáró feladatlapok
in: METÓDUS Gyakorlóiskolai füzetek 29-39.o.
Bessenyei György Tanárképző Főiskola Eötvös József Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium; Szabolcs-Szatmár-Bereg Megyei Pedagógiai Intézet Nyíregyháza, 1994.
28. Sitkuné Görömbei Cecília: Programozási alapfogalmak kialakításnak, bevezetésének módszerei Logo környezetben. Oktatási segédanyag az Algoritmizálás, adatmodellezés tanítása című tantárgyhoz. 60 oldal. Debrecen, 2011.

Konferencia-előadások – List of talks

29. Sitkuné Görömbei Cecília: Munkáltató feladatlapok alkalmazása az általános iskolai számítástechnika tanításában
Természettudományi Szakmódszertanosok 3. Országos Találkozója, KLTE Debrecen, 1999.
30. Sitkuné Görömbei Cecília: Az algoritmikus gondolkodás fejlesztése az általános iskolai számítástechnika-órákon
„Tanárképzés és Tudomány” Országos Tudományos és Módszertani Konferencia
ELTE Budapest, 2000.
31. Sitkuné Görömbei Cecília: A kreatív tulajdonságok fejlesztése a számítástechnika-órákon (előadás és poszter)
Neumann János Tudományos Tanácskozás, NJSZT Nyíregyháza, 2002.
32. Sitkuné Görömbei Cecília: Kreativitásfejlesztő feladatlapok alkalmazása a számítástechnika-órákon
A Magyar Tudomány Napja, Nyíregyháza, 2003.
33. Sitkuné Görömbei Cecília: A külső tantárgyi koncentráció lehetőségei az informatikaórán plenáris előadás Főiskolák Matematika, Fizika és Számítástechnika Oktatóinak XXVIII. Országos Konferenciája, Nyíregyháza, 2004.
34. Sitkuné Görömbei Cecília: How to teach the fundamentals of information science, coding, decoding and number systems?
International Multidisciplinary Conference Baia Mare, 2005.
35. Sitkuné Görömbei Cecília: Az informatikai alapismeretek oktatásának tapasztalatai a Nyíregyházi Főiskolán
Informatika a felsőoktatásban konferencia, Debrecen, 2005.
36. Sitkuné Görömbei Cecília: Konstruktív tanulásszemlélet az informatika-órán
A Magyar Tudomány Napja, Nyíregyháza, 2006.

37. Sitkuné Görömbei Cecília: A programtervező informatikus BSc alapszak „Informatika és elektronika” alapozó tárgyának oktatás-módszertani problémái
Felsőfokú alapképzésben matematikát, fizikát és informatikát oktatók XXXII. konferenciája, Kecskemét, 2008.
38. Sitkuné Görömbei Cecília: Mit mutatnak a számok? Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai
Informatika a felsőoktatásban 2008 konferencia, Debrecen, 2008.
39. Sitkuné Görömbei Cecília: A tanító szakos hallgatók informatikai felkészültsége a Nyíregyházi Főiskolán
XII. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia, Győr, 2008.
40. Sitkuné Görömbei Cecília: Az informatika alapjainak oktatási tapasztalatai
PhD/DLA Konferencia, Nyíregyháza, 2008.
41. Sitkuné Görömbei Cecília: A Bevezetés az informatikába tantárgy vizsgaeredményeit befolyásoló tényezők vizsgálata
Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Tudományos Konferencia Debrecen 2009.
42. Sitkuné Görömbei Cecília: Gyermekeinformatika – játék határok nélkül?
50 éves a Tanítóképzés Jubileumi Konferencia, Kaposvár, 2009.
43. Sitkuné Görömbei Cecília: Gyermekeinformatika – játék vagy tanulás?
Regionális Pedagógusképző és -Továbbképző Hálózat és Adatbázis az Észak-Alföldi Régióban Debrecen, 2011.