



FÜGGVÉNYEGYENLETEK STABILITÁSA ABSZTRAKT STRUKTÚRÁKON

doktori (PhD) értekezés

Kaiser Zoltán

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Debrecen, 2005

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika doktori program Analízis alprogramja keretében készítettem 2000-2003 között és ezúton nyújtom be a Debreceni Egyetem doktori (Ph.D.) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2005. június 28.

.....
Kaiser Zoltán
jelölt

Tanúsítom, hogy Kaiser Zoltán doktorjelölt 2000-2003 között a fent nevezett doktori alprogram keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározó módon járult hozzá. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2005. június 28.

.....
Dr. Boros Zoltán
témavezető

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Boros Zoltánnak, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott nekem mind a tanulmányaim, mind a kutatásaim során.

Ugyancsak köszönettel tartozom Dr. Páles Zsoltnak, akitől sok hasznos tanácsot és segítséget kaptam. Köszönöm továbbá társszerzőimnek, az Analízis Tanszék oktatóinak és a Matematika Intézet minden dolgozójának a munkáját, segítségét és biztatását. Komoly segítséget jelentett a T-043080 számú OTKA valamint a 0215/2001 számú FKFP pályázatok támogatása is.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm szüleimnek, testvéreimnek és barátaimnak azt, hogy támogattak, bíztattak és végig mellettem álltak.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	1
1 STABILITÁS ÉRTÉKELT TESTEK FELETTI NORMÁLT TEREKEN	5
1.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA	5
1.2 CAUCHY-EGYENLET	8
1.3 GYŰRŰ HOMOMORFIA	18
1.4 MONOM EGYENLET	22
1.5 FRÉCHET-EGYENLET	35
2 STABILITÁS GRUPOIDOKON	49
2.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA	50
2.2 EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK	53
2.3 CAUCHY-EGYENLET	61
2.4 TOVÁBBI TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK	70
2.5 EGY PÉLDA, AMIKOR A HYERS-MÓDSZER NEM MŰKÖDIK	72
ÖSSZEFOGLALÓ	81
SUMMARY	89
IRODALOMJEGYZÉK	97

BEVEZETÉS

A függvényegyenletek és függvényegyenlőtlenségek témaköre napjaink egyik olyan kutatási irányzata, amelyben számos matematikus végez vizsgálatokat. Az első nagyszabású átfogó munkát Aczél János 1961-ben megjelent könyvében (lásd [Acz61], [Acz66]) találhatjuk, amely az addig elért legfontosabb eredmények összefoglalása. Egy másik jelentős, összefoglaló mű Marek Kuczma munkája (lásd [Kuc85]), melyben már számos eredmény található a függvényegyenletek stabilitására vonatkozóan is, amely a disszertáció témája.

A függvényegyenletek stabilitáselmélete azt a problémát tárgyalja, hogy egy adott egyenletet "kis hibával megoldó" függvény vajon közelíthető-e a függvényegyenlet egy megoldásával. A Cauchy-egyenletre vonatkozóan ezt a kérdést először Pólya György és Szegő Gábor tette fel (és válaszolta meg) 1925-ben (lásd [PSz25]), de nagyobb érdeklődést váltott ki S. M. Ulam 1940-ben megfogalmazott, általánosabb alakú problémája (lásd [Ula60], [Ula64]). A megoldást D. H. Hyers adta meg 1941-ben (lásd [Hye41]). A későbbiekben számos módosítása, általánosítása készült ezeknek az eredményeknek a Cauchy-egyenlettel, illetve egyéb függvényegyenletekkel kapcsolatban, melyekről újabb összefoglaló írások találhatóak többek között a [Ger94], [For95], [HIR98], [Szék00] dolgozatokban. Az értekezés célja hasonló eredmények igazolása eddig nem tárgyalt vagy az eddigieknél általánosabb struktúrákon értelmezett függvények körében.

A disszertáció két fejezetből áll, amelyek további öt-öt részre tagolódnak. Az egyes fejezetek és alfejezetek önálló bevezetővel rendelkeznek, most tartalmuk rövid ismertetése következik.

A dolgozat első fejezetében értékelt testek feletti normált terek között értelmezett függvények esetén vizsgáljuk különböző függvényegyenletek illetve függvényegyenlet-rendszerek stabilitását. A fejezet első részében a későbbiekben használt fogalmakat és jelöléseket vezetjük be, és ízelítőt adunk az értékelt testek elméletéből. A további alfejezetek az adott részben tárgyalt függvényegyenlet stabilitásával kapcsolatos történelmi áttekintéssel és a vizsgálatokhoz szükséges eredményekkel kezdődnek, majd a saját eredmények követik őket. A második alfejezetben a Cauchy-egyenlettel foglalkozunk. Megfogalmazzuk az egyenlet egy általános stabilitási tételét nulla karakterisztikájú értékelt test feletti normált teret nulla karakterisztikájú értékelt test feletti Banach-térbe képező függvényeket tekintve. A Cauchy-egyenletet "kis hibával megoldó" függvény egy gyenge regularitási tulajdonságából következtetünk a közelítő függvény li-

nearítására is. A tétel az első fejezet negyedik részében tárgyalt monom egyenletre vonatkozó eredményekből következik, így a bizonyítást nem közöljük. Stabilitási tételünk néhány speciális esetét részletesebben megvizsgáljuk, a közelítő függvény és az eredeti függvény távolságbecslését javítjuk, továbbá a tétel megfordítását is kimondjuk, melyet példákkal is alátámasztunk. Alkalmazásként levezetjük a Jensen-egyenlet hasonló értelemben vett stabilitását is. A fejezet harmadik részében ugyancsak a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási tétel segítségével látjuk be a két függvényegyenletet is teljesítő gyűrű homomorfizmusok stabilitását. Azt is megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén egy olyan függvény, amely "kis hibával" oldja meg a gyűrű homomorfia két egyenletét, szükségképpen megoldása is az egyenleteknek, azaz gyűrű homomorfizmus. A negyedik alfejezetben a monom egyenlettel foglalkozunk. Igazoljuk az egyenlet stabilitási tételét, továbbá n -additív illetve monom függvények regularitási tulajdonságainak kiterjesztése segítségével megfogalmazunk olyan feltételeket, amelyekkel biztosíthatjuk a "majdnem monom" függvényt közelítő monom függvény n -homogenitását. A fejezet utolsó alfejezetében a Fréchet-egyenletet vizsgáljuk. Fontos megjegyezni, hogy az itt szereplő stabilitási tétel a valós esetre vonatkozóan is új eredmény.

A második fejezetben egyszerű struktúrák között értelmezett függvények esetén vizsgáljuk egyváltozós, illetve többváltozós függvényegyenletek stabilitását. Csakúgy, mint az első fejezetben, először definiáljuk a később használt fogalmakat és jelöléseket. A második alfejezetben egyváltozós függvényegyenletek stabilitásával foglalkozunk olyan függvényeket tekintve, melyek egy nem üres halmazt képeznek metrikus térbe. Vizsgáljuk az eredeti függvényünket közelítő megoldásfüggvény egyértelműségét, továbbá a két függvény pontonkénti távolságát felülről becsülő kifejezéseket. Megadunk egy olyan függvényegyenlőtlenséget, amelynek minden megoldása megfelelő becslést ad az előbb említett távolságra, és példát adunk olyan függvényegyenletre, amelynél ezek a becslések élesebbek, mint a szokásos technikával kaptak. A fejezet harmadik alfejezetében a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitást vizsgáljuk kétváltozós művelettel ellátott halmazok, azaz grupoidok között értelmezett függvényekre vonatkozóan. Speciálisan, igazoljuk a Cauchy-egyenlet stabilitását l -hatványszimmetrikus grupoidokon. Az eredmények bizonyítását az egyváltozós függvényegyenletekre vonatkozó tételekre visszavezetve végezzük. A negyedik alfejezetben megfogalmazunk egy általános stabilitási tételt, melynek egy alkalmazásaként levezetünk egy Gilányi Attila által 1999-ben igazolt (lásd [Gil99]), a monom egyenletre vonatkozó stabilitási tételt.

A fenti eredményekben nagy szerepet játszik D. H. Hyers már említett [Hye41] munkájában használt iterációs eljárás, amelyből kialakult technikát

Hyers-módszernek vagy direkt módszernek nevezünk. A második fejezet utolsó, ötödik alfejezetében olyan grupoidokra adunk példát, amelyek között értelmezve a Cauchy-egyenletet, a stabilitás teljesül, de ez nem látható be a direkt módszerrel. A stabilitás igazolásához egy speciális technikát használunk, amely különbözik a Cauchy-egyenletnél eddig alkalmazott három módszertől, melyek az előbb említett direkt módszer, a Székelyhidi László által bevezetett invariáns közép technika (lásd [Szék86]) továbbá a Páles Zsolt által használt szendvics tételekre épülő eljárás (lásd [Pál98]).

A disszertációban az egyes alfejezetek, illetve fejezetek elején fel van sorolva, hogy a saját eredmények melyik dolgozatból származnak, és mely társszerzőkkel készültek. A más dolgozatokból származó eredményeknél szintén fel van tüntetve a szerző, amennyiben kiléte ismert.

1 STABILITÁS ÉRTÉKELT TESTEK FELETTI NORMÁLT TEREKEN

Ebben a fejezetben nulla karakterisztikájú értékelt testek feletti normált tereken vizsgáljuk a Cauchy-egyenlet, monom egyenlet, Fréchet-egyenlet és a gyűrű homomorfizmusok stabilitását. Ezen normált terek különlegessége többek között az, hogy a legtöbb esetben normájukból nem emelhetőek ki a nem negatív racionális számok, tehát a klasszikus értelemben nem nevezhetőek normának. Éppen ezért a szokásos bizonyítási technikák vagy nem működnek, vagy csak valamilyen módosított verziójuk használható.

1.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

A disszertációban az $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ szimbólumok a szokásoknak megfelelően rendre a természetes (pozitív egész), egész, racionális, illetve valós számokat jelölik. A számítások egyszerűsítése érdekében a $0^0 = 1$ és $\lambda \neq 0$ esetén $0^\lambda = 0$ értelmezést fogjuk használni.

Legyen X vektortér az F test felett, $m \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. A $\mathcal{H} : X^m \rightarrow X$ függvényt α -homogénnek nevezzük, ha tetszőleges $t \in F$ és $\underline{x} \in X^m$ esetén teljesül a $\mathcal{H}(t\underline{x}) = t^\alpha \mathcal{H}(\underline{x})$ egyenlőség. $\alpha = 1$ esetén egyszerűen a *homogén* elnevezést használjuk.

Legyen F tetszőleges test, $v : F \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy v *értékelés* F -en, ha

1. $v(x) \geq 0$ és $v(x) = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$ (pozitív definités),
2. $v(xy) = v(x)v(y)$ (multiplikatívitas),
3. $v(x + y) \leq v(x) + v(y)$ (szubadditivitás).

Ha adott F -en egy v értékelés, akkor F -et *értékelt testnek* nevezzük. Amennyiben tetszőleges $x, y \in F$ esetén teljesül a

$$v(x + y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$$

egyenlőtlenség is, akkor azt mondjuk, hogy v egy *nem archimédieszi értékelés*, ellenkező esetben *archimédieszi értékelésről* beszélünk. Az elnevezés indoklásához megemlíjtjük az archimédieszi tulajdonság fogalmát: Azt mondjuk, hogy az

F testen adott v értékelés rendelkezik az *archimédeszi tulajdonsággal*, ha tetszőleges $x, y \in F$, $x \neq 0$ esetén létezik egy n természetes szám, melyre $v(nx) \geq v(y)$. Könnyen igazolható (lásd például [Nar90, Proposition 1.10]) hogy a v értékelés pontosan akkor rendelkezik az archimédeszi tulajdonsággal, ha archimédeszi értékelés.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha adott egy $|\cdot|_F$ értékelés az F testen, akkor a $d(x, y) = |x - y|_F$ módon definiált függvény egy metrika. Ha még $t_0 \in F$ és $0 < \mu \in \mathbb{R}$, akkor a μ sugarú és t_0 középpontú nyílt gömb alatt a

$$(1.1) \quad \mathcal{B}_\mu(t_0) = \{t \in F : |t - t_0|_F < \mu\}$$

halmazt, μ sugarú és t_0 középpontú zárt gömb alatt pedig a

$$(1.2) \quad \overline{\mathcal{B}}_\mu(t_0) = \{t \in F : |t - t_0|_F \leq \mu\}$$

halmazt értjük (zárt gömb esetén megengedhető a $\mu = 0$ sugár is).

F^n -en a $d(\underline{x}, \underline{y}) = \max_i \{|x_i - y_i|_F\}$ metrikát fogjuk használni, ahol $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in F^n$ és $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in F^n$.

Értékelt test feletti vektorterekben, illetve algebrákban értelmezhető a norma fogalma, amely annyiban tér el a klasszikus értelemben vett norma definíciójától, hogy egy adott skalárnak nem az abszolút értékét, hanem az értékelését tudjuk kiemelni a normából. Azt mondjuk tehát, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ pár *normált tér* az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott F test felett, ha X egy vektortér F felett, továbbá a $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pozitív definit, szubadditív és teljesül a

$$\|\lambda x\| = |\lambda|_F \|x\|$$

egyenlőség tetszőleges $\lambda \in F$ és $x \in X$ esetén. Ezenfelül, ha tetszőleges $x, y \in X$ elemekre fennáll az

$$\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

egyenlőtlenség is, akkor nem archimédeszi normált térről beszélünk. Ha az $(X, \|\cdot\|)$ (nem archimédeszi) normált tér teljes a norma által generált metrikára nézve, akkor (nem archimédeszi) *Banach-térnek* nevezzük. Ha még az X lineáris tér algebra, és a $\|\cdot\|$ függvény szubmultiplikatív is, azaz tetszőleges $x, y \in X$ esetén fennáll az $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ egyenlőtlenség, akkor (nem archimédeszi) *normált algebráról*, illetve (nem archimédeszi) *Banach-algebráról* beszélünk.

Ha egy test nulla karakterisztikájú, akkor tartalmazza a racionális számokat. Így ha adott rajta egy értékelés, az indukál egy értékelést $\mathbb{Q}$ -n is. A. Ostrowski [Ost17] eredményei alapján a racionális számok teste feletti értékeléseket pontosan ismerjük. Amennyiben $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ egy értékelés $\mathbb{Q}$ -n, akkor a következő állítások valamelyike teljesül:

1. Létezik egy $\beta \in (0, 1]$ szám, amelyre $|\cdot|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|^{\beta}$, ahol $|\cdot|$ a szokásos abszolút érték függvény.
2. $|0|_{\mathbb{Q}} = 0$ és létezik olyan p prímszám és $\varrho \in (0, 1]$, melyekre $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ és $x = p^k \frac{n}{m}$ ($p \nmid n$, $p \nmid m$, $k \in \mathbb{Z}$) esetén $|x|_{\mathbb{Q}} = \varrho^k$.

Ha az $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ értékelésre az első állítás igaz, akkor $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ archimédeszi értékelés. Ha a második eset teljesül, akkor fennáll az $|x + y|_{\mathbb{Q}} \leq \max\{|x|_{\mathbb{Q}}, |y|_{\mathbb{Q}}\}$ egyenlőtlenség is, így $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ egy nem archimédeszi értékelés. A $\varrho = 1$ esetet *triviális értékelésnek* nevezzük, ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ esetén $|x|_{\mathbb{Q}} = 1$. Amennyiben $\varrho = 1/p$, akkor az $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ értékelést *p-adikus értékelésnek* nevezzük és a $|\cdot|_p$ szimbólummal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy bármely $\varrho \in (0, 1]$ előállítható az $1/p$ valamely nem negatív hatványaként, így a második eset a következő alakban is írható:

- 2*. Létezik egy p prímszám és egy $\beta \geq 0$ valós szám, melyekre $|\cdot|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|_p^{\beta}$.

Legyen adott a racionális számok halmazán a $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ értékelés. Ha $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ archimédeszi értékelés, akkor $\mathbb{Q}$ ezen értékelésből származó metrikára vonatkozó teljes metrikus burka a valós számok halmaza. Ha valamely $\beta \geq 0$ és p prímszám esetén teljesül a $|\cdot|_{\mathbb{Q}} = |\cdot|_p^{\beta}$ azonosság, azaz $|\cdot|_{\mathbb{Q}}$ egy nem archimédeszi értékelés, akkor $\mathbb{Q}$ -nak az értékelésből származó metrikára vonatkozó teljes metrikus burkát a *p-adikus számok halmazának* nevezzük és $\mathbb{Q}_p$ -vel jelöljük. Az értékelt testek és ezen belül a *p-adikus számok* elméletében számos érdekes és értékes eredmény született, ezekről összefoglaló írásokat találhatunk az [NBB71], [Mah81], [Gou93], [VVZ94] könyvekben, illetve az alapvető tulajdonságokról egy kisebb összefoglaló megtalálható a [Kai00] diplomamunkában is. Ízelítőül megemlíjtjük a *p-adikus számok topológiájának* pár érdekes tulajdonságát, melyek tetszőleges nem archimédeszi normált térben is teljesülnek.

1.1.1. ÁLLÍTÁS. $\mathbb{Q}_p$ -ben

1. minden háromszög egyenlőszárú.
2. bármely nyílt gömb zárt is.
3. bármely nem nulla sugarú zárt gömb nyílt is.
4. bármely két gömb esetén a metszetük vagy üres, vagy az egyik tartalmazza a másikat.
5. minden nem nulla sugarú gömb nem összefüggő.

Végezetül megemlíjtjük a p -adikus analízis egyik alapvető tételét, amely rávilágít arra, hogy bizonyos dolgok egyszerűbben működnek $\mathbb{Q}_p$ -ben, mint a valós számok halmazán.

1.1.2. ÁLLÍTÁS. *A p -adikus számok egy (x_n) sorozata akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0,$$

ahol a $d : \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \rightarrow [0, \infty[$ függvény a $\mathbb{Q}_p$ -beli metrikát jelöli.

Az állítás azonnali következménye a konvergens p -adikus sorok egyszerű karakterizációja: A $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ p -adikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

1.2 CAUCHY-EGYENLET

Legyen $(X, +)$ és $(Y, +)$ két csoport. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény *Cauchy-differenciájának* vagy *additív differenciájának* nevezzük az

$$(1.3) \quad f(x+y) - f(x) - f(y) \quad (x, y \in X)$$

kifejezést. Az Y csoporton egy metrikát feltételezve, a függvényegyenletek stabilitáselméletének alapproblémája azt kérdezi, hogy egy korlátos Cauchy-differenciával rendelkező függvény közel van-e a

$$(1.4) \quad g(x+y) = g(x) + g(y) \quad (x, y \in X)$$

úgynevezett *Cauchy-egyenlet* egy megoldásához (ezen megoldásokat szokás *additív függvénynek* nevezni). Ezt a problémáját először Pólya György és Szegő Gábor fogalmazta és oldotta meg (lásd [PSz25], Teil I, Aufgabe 99) pozitív egész számokon értelmezett függvényekre. S. Ulam (lásd [Ula60], [Ula64]) általánosabb esetben tette fel az említett kérdést. D. H. Hyers a következő megoldást adta a problémára:

1.2.1. TÉTEL. [Hye41] *Ha X és Y valós Banach-terek, ε egy nem negatív valós szám és az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az*

$$(1.5) \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in X)$$

úgynevezett stabilitási egyenlőtlenséget, akkor egyértelműen létezik egy olyan $g : X \rightarrow Y$ megoldása a Cauchy-egyenletnek, amelyre $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon$.

1951-ben D. G. Bourgin [Bou51] bizonyítás nélkül megfogalmazta Hyers tételének egy általánosítását, ahol az (1.5) egyenlőtlenség jobb oldalán az ε konstans helyett a $\Phi(\|x\|, \|y\|)$ kifejezést használta, ahol Φ mindkét változójában monoton növekvő, szimmetrikus függvény, továbbá feltételezte a

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \Phi(2^{i-1}x, 2^{i-1}x)$$

sor konvergenciáját minden $x \in X$ esetén. Ez a fajta feltétel már megengedi azt is, hogy a Cauchy-differencia ne legyen korlátos.

1978-ban Th. M. Rassias igazolta Hyers tételének egy másik általánosítását, melyben bizonyos feltételek mellett a közelítő függvény egy regularitási tulajdonságát is megmutatja:

1.2.2. TÉTEL. [Ras78] Legyenek E_1, E_2 valós Banach-terek és $f : E_1 \rightarrow E_2$ egy olyan függvény, melyre minden rögzített $x \in E_1$ esetén a $t \rightarrow f(tx)$ transzformáció folytonos $\mathbb{R}$ -en. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan $\varepsilon \geq 0$ és $\alpha \in [0, 1[$ számok, melyekre

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)$$

minden $x, y \in E_1$ esetén. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $T : E_1 \rightarrow E_2$ lineáris leképezés, amelyre

$$(1.7) \quad \|f(x) - T(x)\| \leq \delta \|x\|^\alpha$$

minden $x \in E_1$ esetén, ahol $\delta = \frac{2\varepsilon}{2^\alpha - 2}$.

A tétel bizonyításban szereplő módszer minden további nélkül működik $\alpha < 0$ esetén is, továbbá a $t \rightarrow f(tx)$ transzformációk folytonossági feltételét elhagyva is biztosított egy T additív függvény létezése, melyre (1.7) teljesül (ilyen formában a tétel tulajdonképpen Bourgin tételének speciális esete). Megjegyzendő, hogy a tétel jelentése $\alpha = 0$ esetén a Hyers-féle stabilitás, $\alpha < 0$ esetén egyfajta aszimptotikus stabilitás a végtelenben, $\alpha > 0$ esetén pedig lokális stabilitás az origóban. A tétel $\delta = \frac{2\varepsilon}{2^\alpha - 2}$ választásával $\alpha > 1$ esetén is teljesül, melyet Z. Gajda [Gaj91] bizonyított be 1991-ben. Megmutatta továbbá, hogy az állítás nem igaz $\alpha = 1$ esetén. Th. M. Rassias és P. Šemrl 1993-ban megjelent [RŠ93] munkájukban megfogalmazták az 1.2.2. Tételt abban az esetben, ha az (1.5) egyenlőtlenség jobb oldalán a $\mathcal{H}(\|x\|, \|y\|)$ függvény áll, ahol $\mathcal{H}$ egy szimmetrikus, mindkét változójában monoton növekvő, továbbá valamely

$\alpha \in [0, \infty[\setminus \{1\}$ esetén α -rendben homogén függvény, azaz tetszőleges λ, t_1, t_2 nem negatív valós számok esetén teljesül a

$$\mathcal{H}(\lambda t_1, \lambda t_2) = \lambda^\alpha \mathcal{H}(t_1, t_2)$$

egyenlőség. Megjegyzendő, hogy tételük a $\mathcal{H}$ függvény monotonitását és szimmetriáját elhagyva is igaz. A szimmetria feltételezése egyébként nem jelenti a tétel gyengítését, ugyanis ha teljesül az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \mathcal{H}(\|x\|, \|y\|) \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség, akkor teljesül az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \frac{\mathcal{H}(\|x\|, \|y\|) + \mathcal{H}(\|y\|, \|x\|)}{2} \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség is, és a jobb oldalon álló tag $\mathcal{H}$ alakjától függetlenül az $\|x\|$ és $\|y\|$ kifejezések szimmetrikus függvénye.

Az utóbbi évtizedekben rengeteg hasonló eredmény született a Cauchy-egyenlet stabilitására vonatkozóan számos kutatótól, melyek a tekintett függvények értelmezési tartományát és értékkészletét, illetve az (1.5) stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalát változtatták, általánosították. Ezek közül kiemelkedő G. L. Forti 1980-ban megjelent eredménye [For80], melynek rengeteg, később publikált dolgozatban szereplő tétel speciális esete. Ezen dolgozatok szerzőinek mentségére szólhat, hogy a Forti tételében szereplő feltételek teljesülésének leellenőrzése nem egyszerű. Ennek a tételnek az általánosítása a disszertáció második fejezetében található, a későbbiekben még tárgyalunk róla.

A most következőkben olyan stabilitási tételt fogalmazunk meg, amely a fent említett eredmények többségének általánosítása. A bizonyítás technikája módosított Hyers-iteráció segítségével történik, melyet szokás *direkt módszernek* nevezni. A módszer lényegéről bővebben szintén a disszertáció második részében lesz szó (lásd még [For04]). Az ebben a részben tárgyalt eredmények a [Kai04] dolgozatban lettek publikálva a

$$\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon \max\{t_1^\alpha, t_2^\alpha\} \quad (t_1, t_2 \in [0, \infty[)$$

függvény használatával, ahol $\varepsilon \geq 0$ konstans.

EREDMÉNYEK

Legyen α egy rögzített valós szám és $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -rendben homogén függvény a továbbiakban. Az alábbi lemma kulcsfontosságú szerepet vállal a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási tétel igazolásában.

1.2.3. LEMMA. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy normált tér egy tetszőleges értékelt test felett. Ha tetszőleges $x, y \in X$ esetén az $f : X \rightarrow Y$ függvényre fennáll az

$$(1.8) \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

egyenlőtlenség, akkor

$$(1.9) \quad \|f(lx) - lf(x)\|_2 \leq \sigma(l)\|x\|_1^\alpha$$

minden $l \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ esetén, ahol $\sigma(1) = 0$ és

$$(1.10) \quad \sigma(l) = \sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1) \quad (l \in \mathbb{N}, l \geq 2).$$

A lemma bizonyítása teljes indukcióval könnyen elvégezhető. A most következő tételben a Cauchy-egyenletre teljesülő stabilitást fogalmazzuk meg. A tétel speciális esete a későbbiekben tárgyalt monom egyenletre vonatkozó 1.4.8. és 1.4.13. tételeknek, így a bizonyítását nem részletezzük.

1.2.4. TÉTEL. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az (1.8) egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, melyre tetszőleges $x \in X$ esetén

$$(1.11) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \frac{\sigma(l)}{||l|_K - |l|_F^\alpha|} \|x\|_1^\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{||l|_K - |l|_F^\alpha|} \|x\|_1^\alpha,$$

továbbá

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n x) \quad (x \in X),$$

ahol $r \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan racionális szám, melyre $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Ha még $K = F$, $|\cdot|_F$ nem triviális értékelés, melyre nézve $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű F -ben, továbbá minden $x \in X$ esetén az $f_x : t \mapsto f(tx)$ ($t \in F$) függvény korlátos valamely $\mathcal{B}_{\mu_x}(t_x)$ nem nulla középpontú, pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor g lineáris.

1.2.5. MEGJEGYZÉS. Abban az esetben, ha fennáll a $|2|_F^\alpha < |2|_K$ egyenlőtlenség, a tétel állítása $l = 2$ választásával következik G. L. Forti

$$g[F(x, y)] = H[g(x), g(y)]$$

függvényegyenletre vonatkozó stabilitási tételéből (lásd [For80]), melyet az alfejezet bevezető részében már említettünk. Ez az eredmény tulajdonképpen négyzetszimmetrikus grupoidokon értelmezett Cauchy-egyenletre vonatkozik, melyről a dolgozat második részében tárgyalunk.

1.2.6. MEGJEGYZÉS. A Rassias [Ras78] és Gajda [Gaj91] által vizsgált esetet $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ választással kapjuk. Ebben az esetben az (1.10)-ben definiált σ függvény alakja

$$(1.12) \quad \sigma(l) = \varepsilon \left(l - 1 + \sum_{k=0}^{l-1} |k|_F^\alpha \right) \quad (l \in \mathbb{N}).$$

Természetesen σ explicit alakja bármely konkrét $\mathcal{H}$ függvény esetén pontosan megadható. Ha az 1.2.3. Lemmát az F testen lévő értékelések típusától, illetve α előjelétől függően több esetre bontva igazoljuk, akkor σ értéke javítható is. Példaként tekintsük a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon \max\{t_1^\alpha, t_2^\alpha\}$ ($t_1, t_2 \geq 0$) függvényre vonatkozó esetet, ahol ε valamely nem negatív valós szám.

1.2.7. LEMMA. *Egy adott x pozitív valós szám esetén jelölje $\Theta_p(x)$ azt a legnagyobb egész kitevős hatványát p -nek, amely nem nagyobb, mint x . Legyen ε egy nem negatív valós szám, továbbá*

$$\varrho(l) = \begin{cases} \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l}} \right) \right|_F^\alpha & \text{ha } \alpha < 0 \text{ és bármely } r \in \mathbb{Q} \text{ választásával} \\ |r|_F = |r|_p^\beta \text{ valamely } p \text{ prím és } \beta \geq 0 \text{ esetén} \\ |l - 1|_F^\alpha & \text{ha } \alpha > 0 \text{ és } | \cdot |_F \text{ archimédieszi,} \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az 1.2.3. Lemma feltételei mellett, ha $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon \max\{t_1^\alpha, t_2^\alpha\}$ ($t_1, t_2 \geq 0$), akkor a

$$(1.13) \quad \sigma(l) = \varepsilon(l - 1)\varrho(l) \quad (l \in \mathbb{N})$$

függvény választásával teljesül az (1.9) egyenlőtlenség.

B i z o n y í t á s. A lemmát l szerinti teljes indukcióval igazoljuk. $l = 1$ esetén az állítás nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy $l > 1$ és

$$\|f[(l-1)x] - (l-1)f(x)\|_2 \leq \varepsilon(l-2)\varrho(l-1)\|x\|_1^\alpha.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} & \|f(lx) - lf(x)\|_2 \\ &= \|f(lx) - f[(l-1)x] - f(x) + f[(l-1)x] - (l-1)f(x)\|_2 \\ &\leq \|f(lx) - f[(l-1)x] - f(x)\|_2 + \|f[(l-1)x] - (l-1)f(x)\|_2 \\ &\leq \varepsilon \max \left\{ \|(l-1)x\|_1^\alpha, \|x\|_1^\alpha \right\} + \varepsilon(l-2)\varrho(l-1, \alpha)\|x\|_1^\alpha. \end{aligned}$$

A továbbiakban négy esetet különböztetünk meg α előjelétől és az $|\cdot|_F$ értékelés típusától függően.

1. $|\cdot|_F$ nem archimédieszi és $\alpha < 0$. Ekkor létezik egy olyan p prímszám, melyre az $|\cdot|_F$ értékelés $\mathbb{Q}$ -ra való megszorítása az $|\cdot|_p^\beta$ ($\beta \geq 0$) értékelés. Felhasználjuk, hogy bármely $l \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1.14) \quad l-1 \leq p^{1+\sqrt{l}}$$

(nyilvánvalóan elegendő az egyenlőtlenséget $p = 2$ -re leellenőrizni, amely rövid számolással végrehajtható). Most $\|(l-1)x\|_1 = |l-1|_F \|x\|_1 \leq \|x\|_1$, így

$$(1.15) \quad \|(l-1)x\|_1^\alpha \geq \|x\|_1^\alpha.$$

Másrészt

$$\Theta_p(p^{1+\sqrt{l-1}}) \leq \Theta_p(p^{1+\sqrt{l}}),$$

továbbá mindkét szám p -nek hatványa, ezért

$$\left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l-1}}) \right|_p \geq \left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l}}) \right|_p.$$

Így $\left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l-1}}) \right|_F \geq \left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l}}) \right|_F$, melyből következik, hogy

$$(1.16) \quad \left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l-1}}) \right|_F^\alpha \leq \left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{l}}) \right|_F^\alpha.$$

Az (1.14) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $|l-1|_F \geq \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l}} \right) \right|_F$, így

$$(1.17) \quad |l-1|_F^\alpha \leq \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l}} \right) \right|_F^\alpha.$$

Sorrendben az (1.15), (1.16) és az (1.17) egyenlőtlenséget használva

$$\begin{aligned} \|f(lx) - lf(x)\|_2 &\leq \varepsilon \|(l-1)x\|_1^\alpha + \varepsilon(l-2) \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l-1}} \right) \right|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha \\ &\leq \varepsilon |l-1|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha + \varepsilon(l-2) \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l}} \right) \right|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha \\ &\leq \varepsilon(l-1) \left| \Theta_p \left(p^{1+\sqrt{l}} \right) \right|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha. \end{aligned}$$

2. $| \cdot |_F$ archimédeszi és $\alpha > 0$. Ekkor

$$\|(l-1)x\|_1^\alpha = |l-1|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha \geq \|x\|_1^\alpha,$$

melyből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|f(lx) - lf(x)\|_2 &\leq \varepsilon |l-1|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha + \varepsilon(l-2) |l-2|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha \\ &\leq \varepsilon(l-1) |l-1|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha. \end{aligned}$$

3. $| \cdot |_F$ nem archimédeszi és $\alpha \geq 0$. Ekkor $\|(l-1)x\|_1 \leq \|x\|_1$, így

$$\|f(lx) - lf(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\alpha + \varepsilon(l-2) \|x\|_1^\alpha = \varepsilon(l-1) \|x\|_1^\alpha.$$

4. $| \cdot |_F$ archimédeszi és $\alpha \leq 0$. Ekkor

$$\|(l-1)x\|_1^\alpha = |l-1|_F^\alpha \|x\|_1^\alpha \leq \|x\|_1^\alpha,$$

tehát

$$\|f(lx) - lf(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\alpha + \varepsilon(l-2) \|x\|_1^\alpha \leq \varepsilon(l-1) \|x\|_1^\alpha.$$

Mind a négy esetben a kívánt eredményt kaptuk, tehát az állítás teljesül l -re is, mellyel a bizonyításunk készen van. $\square$

Mivel tetszőleges $t_1, t_2 \in [0, \infty[$ esetén

$$\max\{t_1^\alpha, t_2^\alpha\} \leq t_1^\alpha + t_2^\alpha \leq 2 \max\{t_1^\alpha, t_2^\alpha\},$$

az 1.2.7. Lemma és az 1.2.4. Tétel alkalmazásával a következőt mondhatjuk:

1.2.8. TÉTEL. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, $f : X \rightarrow Y$ és ε egy nem negatív valós szám. Ha létezik egy l pozitív egész szám úgy, hogy $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$ és az $f : X \rightarrow Y$ függvény kielégíti az

$$(1.18) \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \varepsilon(\|x\|_1^\alpha + \|y\|_1^\alpha) \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenséget, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, melyre

$$(1.19) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \frac{2\sigma(l)}{|l|_K - |l|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X),$$

ahol $\sigma(l)$ az (1.13) formulával definiált.

Ebből a tételből $l = 2$ választásával azonnal adódik Rassias (lásd [Ras78]) és Gajda tétele (lásd [Gaj91]), amikor F és K a valós abszolút értékkel ellátott.

Most tekintsük azon kivételes eseteket, amikor teljesül az $|l|_F^\alpha = |l|_K$ egyenlőség tetszőleges $l \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor nyilvánvalóan minden $w \neq 0$ racionális számra fennáll az $|w|_F^\alpha = |w|_K$ egyenlőség. Természetesen az F és K nulla karakterisztikájú testeken adott $|\cdot|_F$ és $|\cdot|_K$ értékelések megszorítása $\mathbb{Q}$ -n egy értékelés lesz. A fejezet első alfejezetében tárgyalt lehetőségeket szem előtt tartva azt kapjuk, hogy ha tetszőleges $w \in \mathbb{Q}$ számra teljesül az $|w|_F^\alpha = |w|_K$ egyenlőség, akkor az alábbi esetek egyike teljesül:

1. $\alpha = 0$ és $|\cdot|_K$ a triviális értékelés $\mathbb{Q}$ -n.
2. $\alpha \neq 0$, $|\cdot|_F = |\cdot|^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = \beta_2$.
3. $\alpha \neq 0$ és létezik egy p prímszám úgy, hogy $|\cdot|_F = |\cdot|_p^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|_p^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = \beta_2$.

Gajda [Gaj91] konstruált egy valós normált terek között értelmezett függvényt, amire fennáll az

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\| + \|y\|) \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség, de nem létezik olyan additív g függvény, amelyre az

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \delta\|x\|$$

feltétel teljesülne valamely $\delta \geq 0$ esetén. Ugyanezen esetre egy másik, a stabilitás teljesülését cáfoló példa található az [RS92] dolgozatban is. A Gajda féle példához hasonló függvény a 2. esetre (a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ függvény esetén) általánosan is megadható, tehát a stabilitás ekkor nem teljesül. Azonban ez a példa nem működik a másik két esetben, így egyelőre nem tudni, hogy fennáll-e a stabilitás.

1.2.9. MEGJEGYZÉS. Bizonyos esetekben az 1.2.8. Tétel megfordítható. Ugyanis a tétel feltételei mellett, ha $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, $\alpha \geq 0$ és a $\varphi : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti a $\|\varphi(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$ egyenlőtlenséget valamely $\delta \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = g(x) + \varphi(x)$ függvény teljesíti az (1.18) stabilitási egyenlőtlenséget az $\varepsilon = (2^\alpha + 1)\delta$ konstanssal, hiszen

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 &= \|\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)\|_2 \\ &\leq \|\varphi(x+y)\|_2 + \|\varphi(x)\|_2 + \|\varphi(y)\|_2 \leq \delta \|x+y\|_1^\alpha + \delta \|x\|_1^\alpha + \delta \|y\|_1^\alpha \\ &\leq \delta (\|x\|_1 + \|y\|_1)^\alpha + \delta \|x\|_1^\alpha + \delta \|y\|_1^\alpha \\ &\leq 2^\alpha \delta \max\{\|x\|_1^\alpha, \|y\|_1^\alpha\} + \delta \|x\|_1^\alpha + \delta \|y\|_1^\alpha \leq (2^\alpha + 1)\delta (\|x\|_1^\alpha + \|y\|_1^\alpha). \end{aligned}$$

Tekintsünk két példát olyan, a $\|\varphi(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$ feltételt teljesítő függvényekre, melyeknél az értelmezési tartományok és értékkészletek különböző értékelésekkel vannak ellátva.

1.2.10. PÉLDA. Legyen p egy prímszám, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy valós normált tér, $\alpha \geq 0$, $y \in Y$ és $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow Y$, $\varphi(x) = |x|_p^\alpha y$. Ekkor $\|\varphi(x)\|_2 = |x|_p^\alpha \|y\|_2$ minden $x \in \mathbb{Q}_p$ esetén, azaz a $\delta = \|y\|_2$ és $\|x\|_1 = |x|_p$ jelölésekkel $\|\varphi(x)\|_2 = \delta \|x\|_1^\alpha$.

1.2.11. PÉLDA. Legyen p egy prímszám, $(Y, \|\cdot\|_2)$ normált tér $\mathbb{Q}_p$ felett, α pozitív egész és $y \in Y$. Ekkor legyen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Y$, $\varphi(0) = 0$ és $\varphi(x) = \frac{1}{\Theta_p(|x|)^\alpha} y$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén, ahol $\Theta_p(x)$ az 1.2.7. Lemmában már használt azon függvény, amelyik az $x > 0$ valós számhoz az x -nél nem nagyobb legnagyobb p -hatványt rendeli. Felhasználva, hogy $\left| \frac{1}{\Theta_p(|x|)^\alpha} \right|_p = \Theta_p(|x|)^\alpha \leq |x|^\alpha$ kapjuk, hogy $\|\varphi(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$, ahol $\delta = \|y\|_2$ és $\|x\|_1 = |x|$.

Most bemutatjuk az 1.2.4. Tétel egy alkalmazását. Szükségünk lesz a következő, jól ismert tételre (lásd például [Kuc85]).

1.2.12. TÉTEL. Legyen X és Y lineáris terek $\mathbb{Q}$ felett és $f : X \rightarrow Y$ egy függvény. Az f függvény akkor és csak akkor megoldása az

$$(1.20) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x \in X)$$

Jensen-egyenletnek, ha létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény és $c \in Y$, melyekre $f(x) = g(x) + c$ minden $x \in X$ esetén.

A következő tételben a Jensen-egyenlet stabilitásával foglalkozunk ugyanolyan értelemben, mint ahogyan azt tettük a Cauchy-egyenletnél.

1.2.13. TÉTEL. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Tegyük fel továbbá, hogy a $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ α -homogén függvény a második változójában monoton növekvő. Ekkor, ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az

$$(1.21) \quad \left\| \frac{f(x) + f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$, akkor létezik egy olyan $h : X \rightarrow Y$ megoldása az (1.20) Jensen-egyenletnek, amelyre

$$\|f(x) - h(x)\|_2 \leq 2 \cdot |2|_F^{\frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{|l|_K - |l|_F^\alpha}} \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X).$$

B i z o n y í t á s. A bizonyításban a Jacek Tabor és József Tabor [TT97] által használt módszert követjük. Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy olyan függvény, melyre teljesül az (1.21) stabilitási egyenlőtlenség és legyen $f_1(x) = f(x) - f(0)$. Ekkor

$$\begin{aligned} & \left\| f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2} \right\|_2 \\ &= \left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) - \frac{f(x) + f(y) - 2f(0)}{2} \right\|_2 \\ &= \left\| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x) + f(y)}{2} \right\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1), \end{aligned}$$

így f_1 -re szintén teljesül az (1.21) egyenlőtlenség, továbbá $f_1(0) = 0$. Az $y = 0$ választással kapjuk, hogy

$$\left\| f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{f_1(x)}{2} \right\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, 0),$$

tehát

$$\left| \frac{1}{2} \right|_F \left\| 2f_1\left(\frac{x}{2}\right) - f_1(x) \right\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, 0).$$

Így

$$\left\| 2f_1\left(\frac{x}{2}\right) - f_1(x) \right\|_2 \leq |2|_F \mathcal{H}(\|x\|_1, 0),$$

következésképpen

$$\begin{aligned} & \|f_1(x+y) - f_1(x) - f_1(y)\|_2 \\ = & \left\| f_1(x+y) - 2f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2\frac{1}{2}(f_1(x) + f_1(y)) \right\|_2 \\ \leq & \left\| f_1(x+y) - 2f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) \right\|_2 + \left\| 2f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - 2\frac{f_1(x) + f_1(y)}{2} \right\|_2 \\ = & \left\| 2f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - f_1(x+y) \right\|_2 + |2|_F \left\| f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2} \right\|_2 \\ \leq & |2|_F \mathcal{H}(\|x\|_1, 0) + |2|_F \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) \leq 2|2|_F \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1). \end{aligned}$$

Alkalmazhatjuk a Cauchy-egyenlet stabilitására vonatkozó 1.2.4. Tételt a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = 2 \cdot |2|_F \mathcal{H}(t_1, t_2)$ α -homogén függvény esetén, melyből adódik, hogy egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, melyre tetszőleges $x \in X$ választásával teljesül az

$$\|f_1(x) - g(x)\|_2 \leq 2 \cdot |2|_F \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{|l|_K - |l|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha$$

egyenlőtlenség. Így

$$\|f(x) - (g(x) + f(0))\|_2 \leq 2 \cdot |2|_F \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{|l|_K - |l|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X),$$

ahol a $h(x) = g(x) + f(0)$ függvény megoldása az (1.20) Jensen-egyenletnek. $\square$

1.3 GYŰRŰ HOMOMORFIA

Legyen $(X, +, \cdot)$ és $(Y, +, \cdot)$ két gyűrű. Az $f : X \rightarrow Y$ függvény *multiplikatív differenciája* az

$$f(xy) - f(x) - f(y) \quad (x, y \in X)$$

kifejezés. Ha egy függvény multiplikatív differenciája azonosan nulla, akkor *multiplikatívnak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $g : X \rightarrow Y$ függvény *gyűrű homomorfizmus* X és Y között, ha g egyaránt additív és multiplikatív. Ezenfelül, ha X és Y egyaránt algebrák egy F test felett és a g gyűrű homomorfizmus homogén is, akkor g -t *algebra homomorfizmusnak* nevezzük.

D. H. Hyers [Hye41] Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási eredményétől (lásd 1.2.1. Tétel) motiválva, D. G. Bourgin [Bou49] 1949-ben bebizonyította egységelemes Banach-algebrák gyűrű homomorfizmusainak stabilitását. Ez az eredmény tulajdonképpen a gyűrű homomorfizmusok szuperstabilitása (pontosabban hiperstabilitása, lásd [MP01]), ugyanis azt állítja, hogy egy szürjektív függvény, amelynek korlátos az additív és multiplikatív differenciája, szükségképpen gyűrű homomorfizmus. 2002-ben R. Badora [Bad02] bebizonyította Bourgin tételének egy általánosítását olyan módon, hogy nem tételezte fel az egységelemek létezését továbbá a függvények szürjektivitását. Th. M. Rassias [Ras78] (lásd 1.2.2. Tétel) és Z. Gajda [Gaj91] megközelítően additív függvényekre vonatkozó eredményeit alkalmazva Badora kimutatta a gyűrű vagy algebra homomorfizmusok aszimptotikus stabilitását normált algebrát Banach-algebrába képező függvényekre. Az előző alfejezetben tárgyaltuk az előbb említett Rassias és Gajda féle tételek általánosítását olyan függvényekre, melyek értékelt test feletti normált teret képeznek értékelt test feletti Banach-térbe. Tételünkben a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán α -homogén függvényt szerepeltettünk. Ezt az eredményt felhasználva ebben a részben bebizonyítjuk Badora tételének egy általánosítását értékelt test feletti normált algebrát értékelt test feletti Banach-algebrába képező függvényekre. Ezeket az eredményeket Boros Zoltánnal közösen készítettük és a [BK04] dolgozatban publikáltuk.

EREDMÉNYEK

Következő tételünk a gyűrű homomorfizmusok stabilitását fogalmazza meg.

1.3.1. TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált algebra az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ Banach-algebra az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, $\varepsilon \geq 0$, α és β rögzített valós számok továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -homogén függvény. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, melyre $|r|_F^\alpha > |r|_K$, $|r|_F^\beta > |r|_K$ vagy $|r|_F^\alpha < |r|_K$, $|r|_F^\beta < |r|_K$. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény tetszőleges $x, y \in X$ esetén teljesíti az*

$$(1.22) \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

és

$$(1.23) \quad \|f(xy) - f(x)f(y)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta$$

egyenlőtlenségeket, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ gyűrű homomorfizmus, melyre tetszőleges $x, y \in X$ választásával

$$(1.24) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$$

valamely $\delta \in \mathbb{R}$ esetén. Továbbá

$$(1.25) \quad g(x)(f(y) - g(y)) = (f(x) - g(x))g(y) = 0 \quad (x, y \in X).$$

B i z o n y í t á s. Megjegyezzük, hogy elegendő csak az $|r|_F^\alpha < |r|_K$ és $|r|_F^\beta < |r|_K$ esettel foglalkoznunk. Ugyanis, ha a fordított egyenlőtlenségek teljesülnek, kicserélhetjük r -t $1/r$ -re.

Az (1.22) egyenlőtlenség éppen a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási egyenlőtlenség. Az r racionális szám $|r|_F^\alpha \neq |r|_K$ tulajdonságából azonnal adódik, hogy létezik olyan l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$. Alkalmazva az 1.2.4. Tételt kapjuk, hogy egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, melyre

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X),$$

ahol

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{||l|_K - |l|_F^\alpha|}.$$

Tehát

$$\|f(r^n x) - g(r^n x)\|_2 \leq \delta \|r^n x\|_1^\alpha \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\left\| \frac{1}{r^n} f(r^n x) - g(x) \right\|_2 \leq \delta \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K} \right)^n \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

amely azt jelenti, hogy

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n x) \quad (x \in X).$$

Legyen $h(x, y) = f(xy) - f(x)f(y)$. Az (1.23) egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{r^n} h(r^n x, y) \right\|_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{r^n} (f(r^n xy) - f(r^n x)f(y)) \right\|_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|r|_K^n} \|f(r^n xy) - f(r^n x)f(y)\|_2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|r|_F^\beta}{|r|_K} \right)^n \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta = 0, \end{aligned}$$

így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} h(r^n x, y) = 0$. Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned} g(xy) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n xy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} (f(r^n x)f(y) + f(r^n xy) - f(r^n x)f(y)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} (f(r^n x)f(y) + h(r^n x, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n x)f(y) \\ &= g(x)f(y). \end{aligned}$$

Felhasználva g additivitását kapjuk, hogy

$$g(x)f(r^n y) = g(x(r^n y)) = g((r^n x)y) = g(r^n x)f(y) = r^n g(x)f(y),$$

ezért

$$g(x) \frac{1}{r^n} f(r^n y) = g(x)f(y).$$

Következésképpen az $n \rightarrow \infty$ határértéket véve adódik, hogy

$$(1.26) \quad g(x)g(y) = g(x)f(y) = g(xy) \quad (x, y \in X),$$

tehát g multiplikatív függvény.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$(1.27) \quad g(x)g(y) = f(x)g(y) = g(xy) \quad (x, y \in X).$$

Az (1.26) és (1.27) egyenletekből adódik (1.25). $\square$

1.3.2. MEGJEGYZÉS. Az (1.25) képletben szereplő egyenlőségekből adódik, hogy ha létezik olyan $x \in X$, melyre $g(x)$ nem nullosztó Y -ban, akkor $f = g$, azaz f gyűrű homomorfizmus. Speciálisan, ha Y nullosztó-mentes, akkor $g = 0$ vagy $f = g$, azaz

$$\|f(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

vagy f gyűrű homomorfizmus. Ez a gyűrű homomorfia egyenletének egyfajta szuperstabilitását jelenti.

Az 1.2.4. Tételben található, az approximáló additív függvény linearitására vonatkozó állítás alapján a következő tételt is megfogalmazhatjuk:

1.3.3. TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test egy nem triviális $|\cdot|_F$ értékeléssel, melyre vonatkozóan $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű F -ben. Legyen továbbá $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált algebra F felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-algebra F felett, $\varepsilon \geq 0$, α és β rögzített valós számok továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -homogén függvény. Tegyük fel, hogy létezik $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ úgy, hogy $|r|_F^\alpha > |r|_F$, $|r|_F^\beta > |r|_F$ vagy $|r|_F^\alpha < |r|_F$, $|r|_F^\beta < |r|_F$. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az (1.22) és (1.23) feltételeket minden $x, y \in X$ esetén, továbbá tetszőleges $x \in X$ választásával az $f_x : t \mapsto f(tx)$ ($t \in F$) függvény korlátos egy $\mathcal{B}_{\mu_x}(t_x)$ nem nulla középpontú, pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ algebra homomorfizmus, melyre (1.24) és (1.25) teljesül minden $x, y \in X$ esetén.*

1.3.4. MEGJEGYZÉS. Az 1.3.1. Tétel bizonyításából látható, hogy az (1.24) egyenlőtlenségben szereplő δ konstans nem függ sem ε -tól, sem β -tól.

1.3.5. MEGJEGYZÉS. Az $|r|_F^\alpha = |r|_K$ ($r \in \mathbb{Q}$) esetben a stabilitás nem áll fenn. Egy ellenpélda az $F = K = \mathbb{R}$, $\alpha = 1$ esetre megtalálható R. Badora [Bad02] dolgozatában.

1.4 MONOM EGYENLET

Legyen X és Y két lineáris tér a racionális számok halmaza felett. $y \in X$ esetén definiáljuk a Δ_y differencia operátort a következőképpen: Egy $f : X \rightarrow Y$ függvény és $x \in X$ esetén legyen

$$(1.28) \quad \Delta_y f(x) = f(x + y) - f(x)$$

és tetszőleges $n \geq 2$ egész szám esetén

$$(1.29) \quad \Delta_{y_1, \dots, y_{n-1}, y_n} f(x) = \Delta_{y_1, \dots, y_{n-1}} (\Delta_{y_n} f(x)).$$

Könnyen látható, hogy bármely $y_1, y_2 \in X$ esetén $\Delta_{y_1, y_2} f(x) = \Delta_{y_2, y_1} f(x)$, tehát a differencia operátorok egymással felcserélhetők, továbbá teljesül a

$$(1.30) \quad \Delta_{y_1 + y_2} f(x) - \Delta_{y_1} f(x) - \Delta_{y_2} f(x) = \Delta_{y_1, y_2} f(x) \quad (y_1, y_2, x \in X)$$

egyenlőség. Ha adott egy $h : X \rightarrow Y$ függvény is, akkor nyilvánvalóan teljesül a $\Delta_y(f(x) + h(x)) = \Delta_y f(x) + \Delta_y h(x)$ egyenlőség is minden $x, y \in X$ esetén.

Amennyiben $y_1 = y_2 = \dots = y_n = y$, $\Delta_{y,\dots,y}f(x)$ helyett a $\Delta_y^n f(x)$ jelölést fogjuk használni. Egyszerűen igazolható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(1.31) \quad \Delta_y^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + ky).$$

Ha valamilyen n természetes szám esetén a $g : X \rightarrow Y$ függvényre tetszőleges $x, y \in X$ választásával teljesül a

$$(1.32) \quad \Delta_y^n g(x) = n!g(y)$$

úgynevezett *monom egyenlet*, akkor azt mondjuk, hogy g *n -edfokú monom függvény*. $n = 1$ esetén a monom-egyenlet éppen a Cauchy-egyenletet, $n = 2$ -re pedig a *norma-négyzet egyenlet*:

$$(1.33) \quad g(x + y) + g(x - y) = 2g(x) + 2g(y) \quad (x, y \in X).$$

Ha n egy pozitív egész és az n változós $G : X^n \rightarrow Y$ függvény minden változójában additív, akkor G -t *n -additív*nak nevezzük. A *0-additív* kifejezést a konstans függvényekre használjuk. Nyilvánvaló, hogy egy n -additív függvény értéke 0, ha valamely változójának értéke 0.

Ha adott egy $G : X^n \rightarrow Y$ n -additív függvény, akkor *diagonalizáltja* vagy *polarizáltja* azon $G^* : X \rightarrow Y$ függvény, amely a

$$G^*(x) = G(x, \dots, x) \quad (x \in X)$$

formulával definiált (0-additív függvény diagonalizáltja önmaga). A következő tételek fontos szerepet játszanak a monom egyenleten végzett vizsgálatokban és egyben karakterizálják az egyenlet megoldásait (lásd pl. [MO34], [McK67], [Kuc85], általánosabb struktúrákra [Djo70], [Szék82b], [Szék88], [Szék91]).

1.4.1. TÉTEL. *Ha $G : X^n \rightarrow Y$ szimmetrikus és n -additív, akkor minden $x, y_1, \dots, y_k \in X$ esetén*

$$(1.34) \quad \Delta_{y_1} \dots \Delta_{y_k} G^*(x) = \begin{cases} n!G(y_1, \dots, y_n) & \text{ha } k = n, \\ 0 & \text{ha } k > n. \end{cases}$$

1.4.2. TÉTEL. *A $g : X \rightarrow Y$ függvény pontosan akkor megoldása az (1.32) monom egyenletnek, ha létezik egy $G : X^n \rightarrow Y$ szimmetrikus, n -additív függvény, melyre $g = G^*$.*

1.4.3. KÖVETKEZMÉNY. Ha $g : X \rightarrow Y$ megoldása az (1.32) monom egyenletnek, akkor bármely $q \in \mathbb{Q}$ és $x \in X$ esetén $g(qx) = q^n g(x)$, azaz g n -homogén $\mathbb{Q}$ felett.

1.4.4. MEGJEGYZÉS. Az 1.4.1. Tétel alapján világos, hogy az 1.4.2. Tételben szereplő G függvény éppen a

$$G(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{y_1, \dots, y_n} g(x) \quad (x, y_1, \dots, y_n \in X)$$

függvény, amely független x megválasztásától.

A Cauchy-egyenletnél bevezetett fogalmaknak megfelelően, az f függvény n -edrendű monom-differenciájának nevezzük a

$$(1.35) \quad \Delta_y^n f(x) - n! f(y) \quad (x, y \in X)$$

kifejezést. Y normált tér esetén a monom egyenlet klasszikus értelemben vett stabilitási problémája azt kérdezi, hogy a

$$(1.36) \quad \|\Delta_y^n f(x) - n! f(y)\| \leq \varepsilon$$

stabilitási egyenlőtlenséget kielégítő f függvényhez található-e olyan g monom függvény, melyre $f - g$ korlátos. A norma-négyzet egyenlet stabilitását St. Czerwik [Cze92] vizsgálta 1992-ben, amelyben a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán a Rassias (lásd 1.2.2. Tétel) által használt $\varepsilon(\|x\|^\alpha + \|y\|^\alpha)$ függvényt használta. Gilányi Attila 2000-ben megjelent [Gil00] cikkében ugyanilyen értelemben véve igazolta a monom egyenlet stabilitását valós normált tereken. A stabilitási egyenlőtlenségben jobb oldalon konstans szerepeltetve J. Schwaiger [Sch94] belátta a monom egyenlet stabilitását olyan függvényekre, melyek értékkészlete egy Banach-tér a $\mathbb{Q}_p$ p -adikus számtest felett.

Ebben a részben a fenti eredményeknek, továbbá az 1.2. részben megfogalmazott, a Cauchy-egyenletre vonatkozó eredményeknek egy általánosítását igazoljuk értékelt testek feletti normált tereken értelmezett függvények esetén, a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán $\mathcal{H}(\|x\|, \|y\|)$ függvényt használva, ahol $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ α -homogén függvény. Bizonyításunkban nagy szerepe lesz a következő, Gilányi Attilától származó lemmának:

1.4.5. LEMMA. [Gil97a]; [Gil97b] Legyen $n, \lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq 2$ esetén

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & \dots & \alpha_0^{(\lambda n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(\lambda-1)n}^{(0)} & \dots & \alpha_{(\lambda-1)n}^{(\lambda n)} \end{pmatrix},$$

ahol $i = 0, \dots, (\lambda - 1)n$ és $j = -i, \dots, \lambda n - i$ -re

$$\alpha_i^{(i+j)} = \begin{cases} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} & \text{if } 0 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Jelölje $i \in \{0, \dots, (\lambda - 1)n\}$ esetén az A mátrix i -edik sorát a_i , továbbá legyen $b = (\beta^{(0)} \dots \beta^{(\lambda n)})$, ahol

$$\beta^{(j)} = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{j}{\lambda}} \binom{n}{j/\lambda} & \text{ha } \lambda | j, \\ 0 & \text{ha } \lambda \nmid j \end{cases} \quad (j = 0, \dots, \lambda n).$$

Ekkor léteznek olyan $Z_0, \dots, Z_{(\lambda-1)n}$ pozitív egész számok, melyekre

$$Z_0 a_0 + \dots + Z_{(\lambda-1)n} a_{(\lambda-1)n} = b$$

és

$$Z_0 + \dots + Z_{(\lambda-1)n} = \lambda^n.$$

Az ebben a részben szereplő eredmények a [Kai] dolgozatban lettek közölve $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon (t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ függvénnyel, ahol $\varepsilon \geq 0$ konstans.

EREDMÉNYEK

A most következőkben α egy rögzített valós számot, n pedig egy rögzített természetes számot jelöl, továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -rendben homogén függvényt.

Első lemmánk Gilányi Attila lemmájának (lásd [Gil00, Lemma 2.]) átirata a megfelelő struktúrára és a jobb oldalon szereplő korlátozó függvényre azzal a kiegészítéssel, hogy a mi esetünkben a lemmában szereplő r szám nem csak egész szám lehet, hanem egy egész szám reciproka is, amellyel a későbbi stabilitási tételünk bizonyítását jelentősen le tudjuk rövidíteni.

1.4.6. LEMMA. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $\|\cdot\|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy normált tér az $\|\cdot\|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, $f : X \rightarrow Y$ továbbá r egy pozitív egész vagy egy pozitív egész reciproka. Ha tetszőleges $x, y \in X$ esetén fennáll a*

$$(1.37) \quad \|\Delta_y^n f(x) - n! f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

egyenlőtlenség, akkor létezik egy $\kappa(r)$ valós szám, amelyre

$$\|f(rx) - r^n f(x)\|_2 \leq \kappa(r) \|x\|_1^\alpha$$

minden $x \in X$ esetén.

B i z o n y í t á s. Tegyük fel először, hogy r egy pozitív egész szám. Defináljuk az $F_i : X \rightarrow Y$ ($i = 0, 1, \dots, n(r-1)$) függvényeket az alábbi módon:

$$F_i(x) := \Delta_x^n f(ix) - n!f(x) \quad (x \in X, i = 0, 1, \dots, n(r-1)),$$

továbbá legyen $G : X \rightarrow Y$,

$$G(x) := \Delta_{rx}^n f(0) - n!f(rx) \quad (x \in X).$$

Az (1.37) egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges $x \in X$ és $i \in \{0, 1, \dots, n(r-1)\}$ esetén

$$(1.38) \quad \|F_i(x)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|ix\|_1, \|x\|_1) = \mathcal{H}(\|i\|_F \|x\|_1, \|x\|_1) = \mathcal{H}(\|i\|_F, 1) \|x\|_1^\alpha$$

és

$$(1.39) \quad \|G(x)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|0\|_1, \|rx\|_1) = \mathcal{H}(0 \cdot \|x\|_1, \|r\|_F \|x\|_1) = \mathcal{H}(0, \|r\|_F) \|x\|_1^\alpha.$$

Vegyük észre, hogy felhasználva az (1.31) formulát, az 1.4.5. Lemma jelöléseivel tetszőleges $x \in X$ és $i \in \{0, 1, \dots, n(r-1)\}$ esetén

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f((i+k)x) - n!f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n-(j-i)} \binom{n}{j-i} f(jx) - n!f(x) = \sum_{j=0}^{rn} \alpha_i^{(j)} f(jx) - n!f(x), \end{aligned}$$

továbbá

$$G(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} f(krx) = \sum_{j=0}^{rn} \beta^{(j)} f(jx) - n!f(rx).$$

Tehát az 1.4.5. Lemmát $\lambda = r$ -rel alkalmazva kapjuk, hogy léteznek olyan $Z_0, \dots, Z_{n(r-1)}$ pozitív egész számok, melyekre

$$G(x) = Z_0 F_0(x) + \dots + Z_{n(r-1)} F_{n(r-1)}(x) + r^n n!f(x) - n!f(rx).$$

Következésképpen (1.38) és (1.39) felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|r^n f(x) - f(rx)\|_2 &\leq \frac{1}{|n!|_K} \left(\|G(x)\|_2 + \sum_{i=0}^{n(r-1)} |Z_i|_K \|F_i(x)\|_2 \right) \\ &\leq \frac{1}{|n!|_K} \left(\mathcal{H}(0, \|r\|_F) + \sum_{i=0}^{n(r-1)} |Z_i|_K \mathcal{H}(\|i\|_F, 1) \right) \|x\|_1^\alpha. \end{aligned}$$

Most legyen $r = \frac{1}{l}$, ahol l egy pozitív egész szám. Felhasználva az előző egyenlőtlenséget x helyett $\frac{1}{l}x$ -et és r helyett l -t alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned}
 \|f(rx) - r^n f(x)\|_2 &= \|r^n f(x) - f(rx)\|_2 = \left\| \left(\frac{1}{l}\right)^n f(x) - f\left(\frac{1}{l}x\right) \right\|_2 \\
 &= \frac{1}{|l|_K^n} \left\| f\left(l\left(\frac{1}{l}x\right)\right) - l^n f\left(\frac{1}{l}x\right) \right\|_2 \\
 &\leq \frac{\frac{1}{|l|_K^n}}{|n!|_K} \left(\mathcal{H}(0, |l|_F) + \sum_{i=0}^{n(l-1)} |Z_i|_K \mathcal{H}(|i|_F, 1) \right) \left\| \frac{1}{l}x \right\|_1^\alpha \\
 &= \frac{\frac{1}{|l|_K^n} |l|_F^\alpha}{|n!|_K} \left(\mathcal{H}(0, |l|_F) + \sum_{i=0}^{n(l-1)} |Z_i|_K \mathcal{H}(|i|_F, 1) \right) \|x\|_1^\alpha.
 \end{aligned}$$

Ezért a

$$\kappa(r) = \begin{cases} \frac{1}{|n!|_K} \left(\mathcal{H}(0, |r|_F) + \sum_{i=0}^{n(r-1)} |Z_i|_K \mathcal{H}(|i|_F, 1) \right) \|x\|_1^\alpha & \text{ha } r \in \mathbb{N}, \\ \frac{|r|_K^n |r|_F^\alpha}{|n!|_K} \left(\mathcal{H}(0, |\frac{1}{r}|_F) + \sum_{i=0}^{n(\frac{1}{r}-1)} |Z_i|_K \mathcal{H}(|i|_F, 1) \right) \|x\|_1^\alpha & \text{ha } \frac{1}{r} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

választással a tétel állítása teljesül. $\square$

A következő lemma segítségével a későbbi stabilitási tételünk egyértelműségére vonatkozó részt fogjuk bebizonyítani.

1.4.7. LEMMA. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy normált tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett és $f : X \rightarrow Y$ egy adott n -edfokú monom függvény. Ha valamely $\delta \in \mathbb{R}$ és tetszőleges $x \in X$ esetén fennáll az $\|f(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$ egyenlőtlenség, továbbá létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, akkor $f(x) = 0$ minden $x \in X$ esetén.*

Bizonyítás. Mivel létezik egy $l \in \mathbb{N}$, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, ezért létezik egy r racionális szám ($r \in \{l, \frac{1}{l}\}$), melyre $|r|_F^\alpha < |r|_K^n$. Mivel egy n -edfokú monom függvény n -homogén a racionális számok felett (lásd 1.4.3. Következmény), így tetszőleges $x \in X$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$|r|_K^{mn} \|f(x)\|_2 = \|f(r^m x)\|_2 \leq \delta \|r^m x\|_1^\alpha = \delta |r|_F^{m\alpha} \|x\|_1^\alpha.$$

Tehát a $q := |r|_F^\alpha / |r|_K^n \in]0, 1[$ jelölést bevezetve adódik, hogy

$$\|f(x)\|_2 \leq \delta q^m \|x\|_1^\alpha,$$

amelyből az $m \rightarrow \infty$ határértéket véve kapjuk az állítást. $\square$

Most már megfogalmazható a monom egyenlet stabilitására vonatkozó tételünk.

1.4.8. TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az (1.37) egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ monom függvény, melyre*

$$(1.40) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

valamely $(l$ -től függő) $\delta \in \mathbb{R}$ esetén.

B i z o n y í t á s. I. Először a tétel egzisztenciális részét látjuk be. Legyen $r \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan, hogy $|r|_F^\alpha < |r|_K^n$. Tekintsük a

$$(1.41) \quad g_m(x) = \frac{1}{r^{nm}} f(r^m x) \quad (x \in X, m \in \mathbb{N})$$

függvényeket. Belátjuk, hogy $(g_m(x))$ Cauchy-sorozat minden $x \in X$ esetén. Az 1.4.6. Lemmából következik, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ esetén

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_m(x)\|_2 &= \left\| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{r^{nk}} f(r^k x) - \frac{1}{r^{n(k+1)}} f(r^{k+1} x) \right) \right\|_2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{|r^n|_K^{k+1}} \|r^n f(r^k x) - f(r^{k+1} x)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{|r|_K^n} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{|r|_K^n} \right)^k \|f(r(r^k x)) - r^n f(r^k x)\|_2 \leq \frac{\kappa}{|r|_K^n} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K^n} \right)^k \|x\|_1^\alpha \\ &\leq \frac{\kappa}{|r|_K^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K^n} \right)^k \|x\|_1^\alpha = \frac{\kappa}{|r|_K^n - |r|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha \end{aligned}$$

valamely $\kappa = \kappa(r)$ valós számra. Ezt felhasználva, amennyiben $m, k \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $k > m$, akkor

$$\begin{aligned}
 \|g_m(x) - g_k(x)\|_2 &= \left\| \frac{1}{r^{nm}} f(r^m x) - \frac{1}{r^{nk}} f(r^k x) \right\|_2 \\
 &= \left| \frac{1}{r^{nm}} \right|_K \left\| f(r^m x) - \frac{1}{r^{n(k-m)}} f(r^{k-m} r^m x) \right\|_2 \\
 &= \frac{1}{|r|_K^{nm}} \|f(r^m x) - g_{k-m}(r^m x)\|_2 \\
 &\leq \frac{1}{|r|_K^{nm}} \frac{\kappa}{|r|_K^n - |r|_F^\alpha} \|r^m x\|_1^\alpha = \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K^n} \right)^m \frac{\kappa \|x\|_1^\alpha}{|r|_K^n - |r|_F^\alpha},
 \end{aligned}$$

következésképpen $(g_m(x))$ Cauchy-sorozat minden $x \in X$ esetén, így Y teljessége miatt a $g(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$ ($x \in X$) definíció korrekt. Továbbá, tetszőleges $x, y \in X$ esetén

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|\Delta_y^n g(x) - n! g(y)\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\Delta_y^n g_m(x) - n! g_m(y)\|_2 \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{r^{nm}} f(r^m(x + ky)) - n! \frac{1}{r^{nm}} f(r^m y) \right\|_2 \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|r|_K^{nm}} \|\Delta_{r^m y}^n f(r^m x) - n! f(r^m y)\|_2 \\
 &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|r|_K^{nm}} \mathcal{H}(\|r^m x\|_1, \|r^m y\|_1) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K^n} \right)^m \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) = 0,
 \end{aligned}$$

így g egy monom függvény. Végül kapjuk, hogy

$$(1.42) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f(x) - g_m(x)\|_2 \leq \frac{\kappa}{|r|_K^n - |r|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha,$$

tehát $\delta = \frac{\kappa}{|r|_K^n - |r|_F^\alpha}$ választásával teljesül az (1.40) egyenlőtlenség.

II. Az egyértelműség belátásához legyenek $g, h : X \rightarrow Y$ olyan monom függvények, melyekre

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta_1 \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

és

$$\|f(x) - h(x)\|_2 \leq \delta_2 \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X).$$

Ekkor

$$\|g(x) - h(x)\|_2 \leq \|f(x) - g(x)\|_2 + \|f(x) - h(x)\|_2 \leq (\delta_1 + \delta_2)\|x\|_1^\alpha \quad (x \in X).$$

Nyilvánvalóan a $g - h$ függvény monom függvény, így az 1.4.7. Lemma felhasználásával adódik, hogy $g - h = 0$, azaz $g = h$. $\square$

1.4.9. MEGJEGYZÉS. Konkrét $\mathcal{H}$ függvény esetén a δ kifejezés explicit formáját ki lehet számolni. Tekintsük a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ esetet. Legyen

$$\eta(l) = \begin{cases} |l|_K^n & \text{ha } | \cdot |_K \text{ arhimédieszi,} \\ 1 & \text{ha } | \cdot |_K \text{ nem arhimédieszi,} \end{cases}$$

továbbá

$$\varrho(l) = \begin{cases} \left| \Theta_p(p^{1+\sqrt{n(l-1)+1}}) \right|_F^\alpha + 1 & \text{ha } \alpha < 0 \text{ és létezik egy } p \text{ prím és} \\ & \beta \geq 0, \text{ hogy } |r|_F = |r|_p^\beta \text{ (} r \in \mathbb{Q} \text{),} \\ |n(l-1)|_F^\alpha + 1 & \text{ha } \alpha > 0 \text{ és } | \cdot |_F \text{ arhimédieszi,} \\ 2 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\Theta_p(x)$ jelöli a legnagyobb olyan p -hatványt, amely nem nagyobb, mint x ($x \in \mathbb{R}^+$). Az 1.2.7. Lemmában alkalmazott esetszétválasztást használva az 1.4.6. Lemma bizonyításában igazolható, hogy a

$$\delta = \frac{1}{|n!|_K} \frac{(n(l-1) + 2)\varrho(l)\eta(l)}{||l|_K^n - |l|_F^\alpha|}$$

választás megfelelő.

1.4.10. MEGJEGYZÉS. Bizonyos esetekben az 1.4.8. Tétel megfordítható. Legyen ugyanis $g : X \rightarrow Y$ egy n -edfokú monom függvény, $\alpha \geq 0$ és tegyük fel, hogy a $\varphi : X \rightarrow Y$ függvény kielégíti a $\|\varphi(x)\|_2 \leq \delta\|x\|_1^\alpha$ egyenletet valamely $\delta \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor az $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = g(x) + \varphi(x)$ függvény teljesíti a

$$\|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\|_2 \leq \varepsilon(\|x\|_1^\alpha + \|y\|_1^\alpha)$$

egyenlőtlenséget az $\varepsilon = \delta \left(2^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_K \max\{1, |k|_F^\alpha\} + |n!|_K \right)$ konstanssal,

ugyanis

$$\begin{aligned}
\|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\|_2 &= \|\Delta_y^n \varphi(x) - n!\varphi(y)\|_2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \varphi(x+ky) - n!\varphi(y) \right\|_2 \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \right|_K \|\varphi(x+ky)\|_2 + \|n!\varphi(y)\|_2 \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \right|_K \delta \|x+ky\|_1^\alpha + |n!|_K \delta \|y\|_1^\alpha \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \right|_K \delta (2 \max\{\|x\|_1, \|k\|_F \|y\|_1\})^\alpha + |n!|_K \delta \|y\|_1^\alpha \\
&\leq \delta \left(2^\alpha \sum_{k=0}^n \left| \binom{n}{k} \right|_K \max\{1, \|k\|_F^\alpha\} + |n!|_K \right) (\|x\|_1^\alpha + \|y\|_1^\alpha).
\end{aligned}$$

A $\|\varphi(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$ feltételnek eleget tevő függvényeket az 1.2.10. és 1.2.11. példákban találhatunk.

A most következőkben megvizsgáljuk a közelítő monom függvény homogenitását. Először a monom függvények egy, a valós esetben jól ismert tulajdonságát igazoljuk értékelt testek fölötti normált terekre. Hasonló eredmények találhatóak Székelyhidi László [Szék85] dolgozatában (lásd még [Szék91]) általános struktúrákra vonatkozóan, azonban ezekben az eredményekben a képtér lokálisan konvex, viszont nem archimédeszi esetben a konvexitásról nincs is értelme beszélni.

A későbbiekben használni fogjuk a következő lemmát, mely n -additív függvények regularitási tulajdonságairól szól. A lemmát meg lehetne fogalmazni általánosabb formában is, azonban célunk eléréséhez ez nem szükséges.

1.4.11. LEMMA. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test valamely nem triviális $|\cdot|_F$ értékeléssel, melyre vonatkozóan a racionális számok halmaza mindenütt sűrű F -ben és legyen $(Y, \|\cdot\|)$ egy normált tér F felett. Ha a $G : F^n \rightarrow Y$ n -additív függvény folytonos a $(0, \dots, 0)$ pontban, akkor minden $i \in \{1, \dots, n\}$ és minden rögzített $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in F$ esetén a*

$$G_i(t) := G(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \quad (t \in F)$$

függvény folytonos.

B i z o n y í t á s. A G_1 függvény folytonosságát látjuk be. Legyenek $t_2, \dots, t_n \in F$ rögzítettek és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A G függvény folytonos a $(0, \dots, 0)$ pontban, így létezik egy $\mu_n > 0$, melyre

$$\|G(x_1, x_2, \dots, x_n)\| < \varepsilon,$$

ha $|x_i|_F < \mu_n$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén. Legyen $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|q|_F \neq 1$ (ilyen q létezik, hiszen az értékelésünk nem triviális). Mivel $\left|\frac{1}{q}\right|_F = \frac{1}{|q|_F}$, ezért feltehető, hogy $|q|_F > 1$. Nyilvánvalóan létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, melyre minden $i \in \{2, \dots, n\}$ esetén fennáll a

$$\left|\frac{t_i}{q^m}\right|_F = \frac{1}{|q|_F^m} |t_i|_F < \mu_n$$

egyenlőtlenség. Legyen $\mu := \frac{\mu_n}{|q|_F^{m(n-1)}}$. Felhasználva, hogy az additív függvények homogének $\mathbb{Q}$ felett és G minden változójában additív, ha $|t|_F < \mu$, akkor

$$\|G_1(t)\| = \|G(t, t_2, \dots, t_n)\| = \left\|G\left(q^{m(n-1)}t, \frac{t_2}{q^m}, \dots, \frac{t_n}{q^m}\right)\right\| < \varepsilon,$$

tehát G_1 folytonos a 0-ban. A $G_1(t) - G_1(s) = G_1(t - s)$ egyenlőségből pedig azonnal adódik, hogy G_1 mindenütt folytonos. $\square$

1.4.12. TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test valamely nem triviális $|\cdot|_F$ értékeléssel, melyre vonatkozóan a racionális számok halmaza mindenütt sűrű F -ben és legyen $(Y, \|\cdot\|)$ egy normált tér F felett. Tegyük fel továbbá, hogy $g : F \rightarrow Y$ egy n -edfokú monom függvény. Ha g korlátos valamely $\mathcal{B}_\mu(t_0)$ nyílt gömbön ($\mu > 0$), akkor $g(t) = t^n g(1)$.*

B i z o n y í t á s. Először belátjuk, hogy amennyiben g korlátos a $\mathcal{B}_\mu(t_0)$ nyílt gömbön, akkor g szintén korlátos a $\mathcal{B}_{\mu'}(0)$ gömbön is, ahol

$$\mu' = \begin{cases} \frac{1}{|n|_F} \mu & \text{ha } |\cdot|_F \text{ arhimédeszi,} \\ \mu & \text{ha } |\cdot|_F \text{ nem arhimédeszi.} \end{cases}$$

Legyen ugyanis $t \in \mathcal{B}_{\mu'}(0)$. Ekkor $t = (t + t_0) - t_0 = t' - t_0$, ahol $t' = t + t_0 \in \mathcal{B}_{\mu'}(t_0)$. $t_0 + it \in \mathcal{B}_\mu(t_0)$ minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén, mivel

$$|t_0 - (t_0 + it)|_F = |it|_F = |i|_F |t' - t_0|_F \leq |i|_F \mu' \leq \mu.$$

Ezért létezik olyan $M \in \mathbb{R}$, melyre $\|g(t_0 + it)\| \leq M$ bármely $i \in \{0, \dots, n\}$ választásával. Így

$$\begin{aligned} \|n!g(t)\| &= \|\Delta_t^n g(t_0)\| = \left\| \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} g(t_0 + it) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \left| \binom{n}{i} \right|_F \|g(t_0 + it)\| \leq M \sum_{i=0}^n \left| \binom{n}{i} \right|_F. \end{aligned}$$

Következésképpen $|t|_F < \mu'$ esetén

$$\|g(t)\| \leq \frac{1}{|n!|_F} M \sum_{i=0}^n \left| \binom{n}{i} \right|_F = M',$$

tehát g valóban korlátos a $\mathcal{B}_{\mu'}(0)$ gömbön.

Legyen $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ olyan, hogy $|q|_F > 1$. Legyen továbbá $k \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $|q|_F \leq k$ és $t \neq 0$ tetszőleges. Ekkor nyilvánvalóan létezik olyan $m \in \mathbb{Z}$, melyre

$$\frac{\mu'}{k} \leq \frac{|t|_F}{|q|_F^m} = |q^{-m}t|_F < \mu'.$$

Tehát $|q^m|_F \leq (k/\mu')|t|_F$, ezért $|q^{mn}|_F \leq (k/\mu')^n |t|_F^n$, továbbá $q^{-m}t \in \mathcal{B}_{\mu'}(0)$, így alkalmazva az 1.4.3. Következményt

$$|q^{-mn}|_F \|g(t)\| = \|g(q^{-m}t)\| \leq M'.$$

A fentiekből adódik, hogy

$$\|g(t)\| \leq M' |q^{mn}|_F \leq M' \left(\frac{k}{\mu'} \right)^n |t|_F^n = M'' |t|_F^n,$$

melyből következik, hogy g a 0-ban folytonos.

A $G : F^n \rightarrow Y$, $G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{t_1, \dots, t_n} g(0)$ ($t_1, \dots, t_n \in F$) függvény az 1.4.4. Megjegyzés alapján szimmetrikus, n -additív és $G^*(t) = g(t)$ minden $t \in F$ -re. Mivel

$$G(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{n-k} g(t_{i_1} + t_{i_2} + \dots + t_{i_k}),$$

így G szintén folytonos a $(0, \dots, 0)$ pontban. Ezért alkalmazva az 1.4.11. Lemmát kapjuk, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ és minden rögzített $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in F$ esetén a

$$G_i(t) = G(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) \quad (t \in F)$$

additív függvény folytonos. Mivel egy additív függvény homogén $\mathbb{Q}$ felett és a racionális számok halmaza sűrű F -ben, ezért a G_i folytonos függvény mindenütt homogén, azaz

$$G(t_1, \dots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \dots, t_n) = tG(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n) \quad (t \in F).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$g(t) = G(t, \dots, t) = t^n G(1, \dots, 1) = t^n g(1),$$

melyet bizonyítani akartunk. $\square$

Ennek az eredménynek a segítségével az 1.4.8. Tételt megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az approximáló függvény n -homogenitását is biztosítjuk.

1.4.13. TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test egy nem triviális $|\cdot|_F$ értékeléssel, melyben $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált tér F felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér F felett. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény kielégíti az (1.37) egyenlőtlenséget, minden $x \in X$ esetén az $f_x : t \mapsto f(tx)$ ($t \in F$) függvény korlátos egy nem nulla középpontú $\mathcal{B}_{\mu_x}(t_x)$ nyílt gömbön ($\mu_x > 0$), továbbá létezik egy olyan l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_F^n$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ n -homogén monom függvény, melyre*

$$(1.43) \quad \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

valamely (l -től függő) $\delta \in \mathbb{R}$ esetén.

B i z o n y í t á s. A g függvény létezését és egyértelműségét az 1.4.8. Tételben beláttuk, tehát csak az n -homogenitást kell igazolnunk. Legyen $x \in X$ tetszőleges és tekintsük a $g_x : F \rightarrow Y$, $g_x(t) = g(tx)$ függvényt. Ekkor

$$\|g_x(t)\|_2 \leq \|f(tx) - g(tx)\|_2 + \|f_x(t)\|_2 \leq M_1 |t|_F^\alpha + \|f_x(t)\|_2$$

minden $t \in \mathcal{B}_{\mu_x}(t_x)$ esetén, ahol $t_x \neq 0$, továbbá $M_1 = \delta \|x\|_1^\alpha$ konstans. Ha $\mu'_x = \min \left\{ \frac{1}{2} |t_x|_F, \mu_x \right\}$, akkor tetszőleges $t \in \mathcal{B}_{\mu'_x}(t_x)$ esetén

$$0 < \frac{1}{2} |t_x|_F \leq |t|_F \leq \frac{3}{2} |t_x|_F,$$

azaz

$$|t|_F^\alpha \leq M_2 = \max \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha, \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \right\} |t_x|_F^\alpha.$$

Továbbá, ha $s, t \in F$, akkor

$$\begin{aligned}\Delta_s^n g_x(t) - n!g_x(s) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g_x(t + ks) - n!g_x(s) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(tx + ksx) - n!g(sx) \\ &= \Delta_{sx}^n g(tx) - n!g(sx) = 0,\end{aligned}$$

tehát a $\mathcal{B}_{\mu'_x}(t_x)$ nyílt gömbön korlátos $g_x : F \rightarrow Y$ függvény egy monom függvény, így alkalmazva az 1.4.12. Tételt kapjuk, hogy $g(tx) = g_x(t) = t^n g_x(1) = t^n g(x)$ minden $t \in F$ -re, amit bizonyítani akartunk. $\square$

Csakúgy mint a Cauchy-egyenletnél, tekintsük azon kivételes eseteket, amikor nem létezik olyan l pozitív egész szám, amelyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, azaz ha a stabilitási tételeink feltételei nem teljesülnek. Ekkor az alábbi 3 eset valamelyike teljesül:

1. $\alpha = 0$ és $|\cdot|_K$ a triviális értékelés $\mathbb{Q}$ -n.
2. $\alpha \neq 0$, $|\cdot|_F = |\cdot|^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = n\beta_2$.
3. $\alpha \neq 0$ és létezik egy p prímszám, hogy $|\cdot|_F = |\cdot|_p^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|_p^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ esetén, ahol $\alpha\beta_1 = n\beta_2$.

Természetesen a Cauchy-egyenletre ($n = 1$ eset) már említett ellenpéldák cáfolják a stabilitás fennállását a 2. esetben. Gilányi Attila (lásd [Gil00]) az $|\cdot|_F = |\cdot|_K = |\cdot|$ esetben tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha = n$ fennállásával is konstruált egy ellenpéldát (a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ függvény esetén), melyhez hasonló példa megadható a 2. esetre általánosan is. Azonban a másik két esetben ez a példa nem működik, így egyenlőre nem tudjuk megmondani, hogy teljesül-e a stabilitás.

1.5 FRÉCHET-EGYENLET

Legyen X és Y két lineáris tér a racionális számok halmaza felett, $n \in \mathbb{N}$ és $g : X \rightarrow Y$ adott függvény. Az (1.28)-ban definiált differencia operátor használatával, a

$$(1.44) \quad \Delta_{y_1, y_2, \dots, y_n} g(x) = 0 \quad (y_1, \dots, y_n, x \in X)$$

Fréchet-egyenlet stabilitásával foglalkozunk a következőkben.

Azt mondjuk, hogy a $g : X \rightarrow Y$ függvény egy legfeljebb $n - 1$ -edfokú általánosított polinom, ha teljesíti a

$$(1.45) \quad \Delta_y^n g(x) = 0$$

úgynevezett *polinom egyenletet* minden $x, y \in X$ esetén. Azonban egy g függvény pontosan akkor megoldása az (1.44) egyenletnek, ha megoldása az (1.45) egyenletek (lásd [Djo70], [Szék79]), így az általánosított polinomokat definiálhattuk volna az (1.44) egyenlettel is.

A most következő tétel karakterizálja az általánosított polinomokat (lásd pl. [MO34], [Hos64], [McK67], [Djo70], [Szék79], [Kuc85], [Szék91]).

1.5.1. TÉTEL. *Az $f : X \rightarrow Y$ függvény egy legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinom pontosan akkor, ha előáll*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} G_k^*(x) \quad (x \in X)$$

alakban, ahol $G_k : X^k \rightarrow Y$ szimmetrikus, k -additív függvény minden $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ esetén.

Legyen a továbbiakban Y normált tér. A Fréchet-egyenletre vonatkozó stabilitási probléma a következő: Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény n -edik differenciái korlátosak, azaz

$$(1.46) \quad \|\Delta_{y_1, \dots, y_n} f(x)\| \leq \varepsilon \quad (y_1, \dots, y_n, x \in X)$$

valamely $\varepsilon > 0$ esetén, akkor létezik-e egy g legfeljebb $n - 1$ -edfokú általánosított polinom, melyre $f - g$ korlátos? A problémát számos kutató vizsgálta. Az első, tetszőleges pozitív egész n esetén érvényes pozitív választ H. Whitney [Whi57], [Whi59] adta, ahol feltételezte az f függvény korlátosságát, viszont az (1.46) egyenlőtlenség helyett a gyengébb

$$(1.47) \quad \|\Delta_y^n f(x)\| \leq \varepsilon \quad (y, x \in X)$$

feltételt használta.

1961-ben Hyers az f függvényre vonatkozó regularitási feltételek nélkül igazolta a következőt:

1.5.2. TÉTEL. [Hye61] Legyen S egy kúp a racionális számok feletti T vektortérben, azaz egy olyan halmaz, melyre bármely $x, y \in S$ esetén $x + y \in S$ és $\alpha x \in S$ tetszőleges $\alpha \geq 0$ esetén. Legyen továbbá B egy Banach-tér. Ha az $f : S \rightarrow B$ függvényre teljesül az (1.46) egyenlőtlenség valamely $\varepsilon > 0$ esetén, akkor létezik egy $P_{n-1}(x)$ legfeljebb $n - 1$ -edfokú polinom, melyre

$$\|f(x) - P_{n-1}(x)\| \leq \varepsilon \quad (x \in S).$$

1980-ban M. Albert és J. A. Baker [AB83] a fenti eredményt általánosabb formában fogalmazták meg, és a Hyers által adott bizonyításnál jóval rövidebb módon igazolták tételüket. 1982-ben Székelyhidi László [Szék82a] (lásd még [Szék88]) invariáns közepeket használva egy új, rövid bizonyítást adott a stabilitás teljesülésére kommutatív, egységelemes csoporton értelmezett komplex értékű függvényeket tekintve. J. Schwaiger 1994-ben igazolta a Fréchet-egyenlet stabilitását $\mathbb{Q}_p$ feletti Banach-térre képező függvények esetén.

Természetesen a Fréchet-egyenlettel kapcsolatosan is felmerül a kérdés, hogy mit mondhatunk, ha (1.46) jobb oldalán az ε konstans helyett egy α -homogén függvényt szerepeltetünk. Ilyen típusú vizsgálódást végzett 1999-ben C. Borelli és C. Invernizzi, és az alábbi tételt fogalmazták meg:

1.5.3. TÉTEL. [BI99] Legyen S egy valós normált tér, B egy valós Banach-tér és tegyük fel, hogy az $f : S \rightarrow B$ függvény teljesíti a

$$(1.48) \quad \|\Delta_{y_1, \dots, y_n} f(x)\| \leq \mathcal{H}_{n+1}(\|x\|, \|y_1\|, \dots, \|y_n\|)$$

egyenlőtlenséget minden $x, y_1, \dots, y_n \in S$ esetén, ahol $\mathcal{H}_{n+1} : [0, \infty)^{n+1} \rightarrow [0, \infty[$ egy $n + 1$ változós, szimmetrikus, minden változójában monoton növekvő α -homogén függvény valamely $\alpha \in [0, 1[$ esetén. Ekkor létezik egy $P_{n-1} : S \rightarrow B$ legfeljebb $n - 1$ -edfokú általánosított polinom, melyre

$$\|f(x) - P_{n-1}(x)\| \leq \delta \|x\|^\alpha \quad (x \in S)$$

valamely $\delta = \delta(\alpha)$ valós szám esetén.

A tétel bizonyításában a szerzők a Hyers [Hye61] által használt módszert követték, azonban elkövettek egy hibát. Nem vették figyelembe, hogy egy n -változós α -homogén függvényben egy változót rögzítve, a kapott $n - 1$ változós függvény nem feltétlenül (sőt, általában nem) lesz β -homogén függvény semmilyen $\beta \in \mathbb{R}$ esetén. A bizonyításuk csak a

$$\mathcal{H}_{n+1}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) = \varepsilon(t_1 t_2 \dots t_{n+1})^\alpha \quad (t_1, t_2, \dots, t_{n+1} \in [0, \infty[)$$

szimmetrikus, minden változójában monoton növekvő, $(n+1)\alpha$ -homogén függvényre működne, kisebb módosításokkal. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy még nem eldöntött, vajon ez a fajta stabilitás érvényes-e a Fréchet-egyenletre. Ebben a fejezetben pozitív választ adunk erre a kérdésre, amikor (1.48) jobb oldalán a

$$(1.49) \quad \mathcal{H}_{n+1}(t, t_1, \dots, t_n) = \varepsilon t^\beta t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} \quad (t, t_1, \dots, t_n \in [0, \infty])$$

$\beta \cdot \alpha_1 \dots \alpha_n$ -homogén függvényt szerepeltetjük, és a függvényeket értékelt testek feletti normált terek között értelmezzük. Ilyen típusú korlátozó függvény használata nem újdonság, J. M. Rassias a Cauchy-egyenlet stabilitását hasonló értelemben vizsgálta a [Ras82] és [Ras84] dolgozatában. Az ebben a részben tárgyalt eredmények még nem publikáltak.

EREDMÉNYEK

A továbbiakban legyen $n \geq 2$ egy pozitív egész szám, $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $\|\cdot\|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $\|\cdot\|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett.

A következő állítás alapján a stabilitási egyenlőtlenségünk jobb oldalán elegendő az olyan, az (1.49) formulában definiált $\mathcal{H}_{n+1}$ függvényeket tekintenünk, ahol $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

1.5.4. ÁLLÍTÁS. *Tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvényre teljesül a*

$$(1.50) \quad \|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^{\alpha_1} \dots \|h_n\|_1^{\alpha_n} \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ valamely rögzített valós számok. Ekkor teljesül a

$$(1.51) \quad \|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta (\|h_1\|_1 \dots \|h_n\|_1)^\alpha \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenség is, ahol α az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ számok számtani közepe.

B i z o n y í t á s. A differencia operátorok felcserélhetőségéből és (1.50)-ből következik, hogy a

$$\|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^{\alpha_{\sigma(1)}} \dots \|h_n\|_1^{\alpha_{\sigma(n)}} \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenség fennáll az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elemek tetszőleges $\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}$ permutációja esetén. Az így kapott $n!$ darab egyenlőtlenséget összeszorozva kapjuk, hogy tetszőleges $x, h_1, \dots, h_n \in X$ esetén

$$\|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2^{n!} \leq \left(\varepsilon \|x\|_1^\beta \right)^{n!} (\|h_1\|_1 \dots \|h_n\|_1)^{(n-1)! \sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

melyből mindkét oldalnak $n!$ -edik gyökét véve kapjuk az állítást. $\square$

A képletek lerövidítése céljából tetszőleges k pozitív egész szám esetén legyen a továbbiakban a k változós $\xi_k : X^k \rightarrow Y$ függvény az alábbi formulával definiált:

$$\xi_k(x_1, \dots, x_k) := \|x_1\|_1 \dots \|x_k\|_1 \quad (x_1, \dots, x_k \in X).$$

Azonnal látható, hogy bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén a ξ_k^α függvény szimmetrikus, $k\alpha$ -homogén, továbbá minden változójában α -homogén, azaz

$$\xi_k^\alpha(x_1, \dots, tx_i, \dots, x_k) = |t|_F^\alpha \xi_k^\alpha(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \quad (x_1, \dots, x_k \in X, t \in F).$$

A következő lemma az n -additív függvények egyfajta stabilitását fogalmazza meg, mely az Albert és Baker által igazolt [AB83, Theorem 2.] eredmény általánosítása.

1.5.5. LEMMA. *Legyen α egy rögzített valós szám. Tegyük fel, hogy létezik olyan l egész szám, melyre $|l|_F^\alpha > |l|_K$, $|l|_F^{2\alpha} > |l|_K$ vagy $|l|_F^\alpha < |l|_K$, $|l|_F^{2\alpha} < |l|_K$. Ekkor, ha az $f : X^n \rightarrow Y$ függvényre teljesülnek az*

$$\begin{aligned} \|f(x_1 + y, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - f(y, \dots, x_n)\|_2 &\leq \varepsilon_1 \xi_{n+1}^\alpha(y, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \|f(x_1, \dots, x_n + y) - f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, y)\|_2 &\leq \varepsilon_n \xi_{n+1}^\alpha(y, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

egyenlőtlenségek tetszőleges $y, x_1, \dots, x_n \in X$ esetén, akkor létezik egy olyan $G : X^n \rightarrow Y$ n -additív függvény, melyre

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_n)\| \leq \varepsilon_1 \delta(l, \alpha) \|x_1\|_1^\alpha \xi_n^\alpha(x_1, \dots, x_n),$$

$$\text{ahol } \delta(l, \alpha) = \frac{\sum_{k=1}^{l-1} |k|_F^\alpha}{\left| |l|_K - |l|_F^{2\alpha} \right|}.$$

Ezenfelül, ha f szimmetrikus és $|l|_F^{3\alpha} \neq |l|_K$, akkor G is szimmetrikus.

B i z o n y í t á s. Legyen $r_1 \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan racionális szám, melyre $|r_1|_F^\alpha < |r_1|_K$ és $|r_1|_F^{2\alpha} < |r_1|_K$. Az $x_2, \dots, x_n$ változók rögzítésével, bevezetve a

$$\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad \mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon_1 t_1^\alpha t_2^\alpha \cdot \xi_{n-1}^\alpha(x_2, \dots, x_n)$$

2α -homogén függvényt, az első egyenlet alakja

$$\|f(x_1 + y, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) - f(y, \dots, x_n)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x_1\|_1, \|y\|_1),$$

mely éppen a Cauchy-egyenletre vonatkozó (1.8) stabilitási egyenlőtlenség a $h(x) := f(x, x_2, \dots, x_n)$ egyváltozós függvényt tekintve. Így alkalmazhatjuk az 1.2.4. Tételt minden $x_2, \dots, x_n \in X$ esetén, melyből adódik, hogy a

$$G(x_1, \dots, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(r_1^m x_1, x_2, \dots, x_n)}{r_1^m} \quad (x_1, \dots, x_n \in X)$$

függvény additív az első változójában és tetszőleges $x_1, \dots, x_n \in X$ választásával

$$\begin{aligned} (1.52) \quad & \|f(x_1, \dots, x_n) - G(x_1, \dots, x_n)\|_2 \leq \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{||l|_K - |l|_F^{2\alpha}|} \|x_1\|_1^{2\alpha} \\ &= \frac{\varepsilon_1 \sum_{k=1}^{l-1} |k|_F^\alpha}{||l|_K - |l|_F^{2\alpha}|} \|x_1\|_1^\alpha \xi_n^\alpha(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon_1 \delta(l, \alpha) \|x_1\|_1^\alpha \xi_n^\alpha(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Mivel bármely $y, x_1, \dots, x_n \in X$ esetén

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{f(r_1^m x_1, x_2 + y, \dots, x_n)}{r_1^m} - \frac{f(r_1^m x_1, x_2, \dots, x_n)}{r_1^m} - \frac{f(r_1^m x_1, y, \dots, x_n)}{r_1^m} \right\|_2 \\ & \leq \frac{1}{|r_1|_K^m} \varepsilon_2 \xi_{n+1}^\alpha(y, r_1^m x_1, \dots, x_n) \leq \left(\frac{|r_1|_F^\alpha}{|r_1|_K} \right)^m \varepsilon_2 \xi_{n+1}^\alpha(y, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ezért az $m \rightarrow \infty$ határértéket véve adódik, hogy G additív a második változójában is és ugyanígy kapjuk, hogy G additív a többi változójában is.

A lemma szimmetriára vonatkozó állítása igazolásához tegyük fel, hogy f szimmetrikus és $|l|_F^{3\alpha} \neq |l|_K$. Ekkor (1.52)-ből következik, hogy tetszőleges $x_1, \dots, x_n$ esetén

$$\begin{aligned} & \|G(x_1, x_2, \dots, x_n) - G(x_2, x_1, \dots, x_n)\|_2 \\ & \leq \varepsilon_1 \delta(l, \alpha) (\|x_1\|_1^\alpha + \|x_2\|_1^\alpha) \xi_n^\alpha(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Legyen $r_2 \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan, melyre $|r_2|_F^{3\alpha} < |r_2|_K$. Mivel G additív az első változójában, így a racionális számok felett homogén az első változójában. Ezt

felhasználva adódik, hogy bármely $x_1, \dots, x_n \in X$ esetén

$$\begin{aligned}
& \|G(x_1, x_2, \dots, x_n) - G(x_2, x_1, \dots, x_n)\|_2 \\
&= \left\| \frac{1}{r_2^m} G(r_2^m x_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{r_2^m} G(r_2^m x_2, x_1, \dots, x_n) \right\|_2 \\
&\leq \frac{1}{|r_2|_K^m} \delta(l, \alpha) (\|r_2 x_1\|_1^\alpha + \|r_2 x_2\|_1^\alpha) \xi_n^\alpha(r_2 x_1, r_2 x_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\leq \left(\frac{|r_2|_F^{3\alpha}}{|r_2|_K} \right)^m \delta(l, \alpha) (\|x_1\|_1^\alpha + \|x_2\|_1^\alpha) \xi_n^\alpha(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

melyből az $m \rightarrow \infty$ határértéket véve kapjuk, hogy G -ben az első két változó felcserélhető. Hasonlóan kapjuk, hogy az első változó felcserélhető a többi változóval is, melyből adódik, hogy bármely két változó felcserélhető G -ben, tehát G szimmetrikus. $\square$

A következő tételben a Fréchet-egyenlet stabilitását fogalmazzuk meg. Amint azt látni fogjuk, bizonyos esetekben nem csak a stabilitás, hanem a hiperstabilitás (lásd [MP01]) is teljesül, azaz a stabilitási egyenlőtlenséget teljesítő függvények megoldásai is a Fréchet-egyenletnek.

1.5.6. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvényre teljesül a*

$$(1.53) \quad \|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_n^\alpha(h_1, \dots, h_n) \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenség valamely α és β valós számok esetén. Ekkor, ha létezik egy l pozitív egész szám, melyre

$$(1.54) \quad |l|_F^\alpha > |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} > |l|_K \quad \text{vagy} \quad |l|_F^\alpha < |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} < |l|_K,$$

akkor léteznek olyan szimmetrikus, k -additív $G_k : X^k \rightarrow Y$ ($1 \leq k \leq n-1$) függvények, melyekre $\beta \neq 0$ esetén

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \quad (x \in X),$$

azaz f egy legfeljebb $n-1$ -edfokú általánosított polinom, $\beta = 0$ esetén pedig

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \right\|_2 \leq \varepsilon \delta_n(l, \alpha) \|x\|_1^{n\alpha} \quad (x \in X),$$

ahol

$$\delta_2(l, \alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^\alpha}{||l|_F - |l|_F^{2\alpha}|}$$

és $n > 2$ esetén

$$\delta_n(l, \alpha) = \delta_2(l, \alpha) \prod_{j=2}^{n-1} \delta_2\left(l, \frac{n}{j}\alpha\right).$$

B i z o n y í t á s. Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Legyen $n = 2$ és tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei, azaz létezik egy l pozitív egész szám, melyre

$$(1.55) \quad |l|_F^\alpha > |l|_K, \quad |l|_F^{2\alpha} > |l|_K \quad \text{vagy} \quad |l|_F^\alpha < |l|_K, \quad |l|_F^{2\alpha} < |l|_K,$$

továbbá az $f : X \rightarrow Y$ függvényre teljesül a

$$\|\Delta_{h_1, h_2} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_2^\alpha(h_1, h_2) \quad (x, h_1, h_2 \in X)$$

egyenlőtlenség. Legyen továbbá $g(x) = f(x) - f(0)$. Ekkor nyilván $g(0) = 0$ és

$$\|\Delta_{h_1, h_2} g(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_2^\alpha(h_1, h_2) \quad (x, h_1, h_2 \in X),$$

azaz tetszőleges $x, h_1, h_2 \in X$ -re

$$\|g(x + h_1 + h_2) - g(x + h_1) - g(x + h_2) + g(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_2^\alpha(h_1, h_2).$$

Ebből $x = 0$, $h_1 = x$ és $h_2 = y$ helyettesítésével kapjuk, hogy

$$\|g(x + y) - g(x) - g(y)\|_2 \leq \varepsilon \cdot 0^\beta \xi_2^\alpha(x, y) \quad (x, y \in X).$$

A $\beta \neq 0$ esetben kapjuk, hogy g additív, így a $G_1 = g$ választással

$$f(x) = G_1(x) + f(0) = G_1^*(x) + f(0),$$

amit igazolni akartunk.

Ha $\beta = 0$, akkor a $0^0 = 1$ értelmezés alapján, bevezetve a

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon t_1^\alpha t_2^\alpha \quad (t_1, t_2 \in [0, \infty[)$$

2α -homogén függvényt teljesül a

$$\|g(x + y) - g(x) - g(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség. Az (1.55) feltételekből azonnal adódik, hogy $|l|_F^{2\alpha} \neq |l|_K$, így alkalmazhatjuk az 1.2.4. Tételt. Ezért létezik egy G_1 additív függvény, melyre

$$\|g(x) - G_1(x)\|_2 \leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^{2\alpha} \quad (x \in X),$$

ahol $\delta_2(l, \alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^\alpha}{|l|_K - |l|_F^{2\alpha}}$. Ebből azonnal adódik, hogy

$$\|f(x) - f(0) - G_1^*(x)\|_2 \leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^{2\alpha} \quad (x \in X),$$

tehát a tétel állítása igaz, ha $n = 2$.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n = m \geq 2$ esetén és tekintsük az $n = m+1$ esetet. Tegyük fel, hogy létezik egy l pozitív egész szám, melyre

$$(1.56) \quad |l|_F^\alpha > |l|_K, \quad |l|_F^{(m+1)\alpha} > |l|_K \quad \text{vagy} \quad |l|_F^\alpha < |l|_K, \quad |l|_F^{(m+1)\alpha} < |l|_K,$$

továbbá $f: X \rightarrow Y$ olyan, hogy teljesül a

$$\|\Delta_{h, h_1, \dots, h_m} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_{m+1}^\alpha(h, h_1, \dots, h_m) \quad (x, h, h_1, \dots, h_m \in X)$$

egyenlőtlenség. Ekkor tetszőleges rögzített $h_1, \dots, h_m$ választásával fennáll a

$$(1.57) \quad \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x+h) - \Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m)$$

egyenlőtlenség bármely $x, h \in X$ esetén. Másrészt, felhasználva a differencia operátorokra vonatkozó (1.30) egyenlőséget, tetszőleges $x, y, h_1, \dots, h_m \in X$ esetén

$$\begin{aligned} & \|\Delta_{h_1+y, h_2, \dots, h_m} f(x) - \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x) - \Delta_{y, h_2, \dots, h_m} f(x)\|_2 \\ &= \|\Delta_{y, h_1, h_2, \dots, h_m} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_{m+1}^\alpha(y, h_1, \dots, h_m), \end{aligned}$$

tehát minden rögzített $x \in X$ -re a

$$\Psi_x(h_1, h_2, \dots, h_m) := \Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x)$$

függvény első változóra vonatkozó Cauchy-differenciája majorálható az $\varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_{m+1}^\alpha(y, h_1, \dots, h_m)$ kifejezéssel. A differencia operátorok egymással felcserélhetőségéből adódik, hogy a fent definiált Ψ_x leképezés szimmetrikus, így az $\varepsilon \|x\|_1^\beta \xi_{m+1}^\alpha(y, h_1, \dots, h_m)$ kifejezéssel tetszőleges változóra vonatkozó Cauchy-differenciája is korlátozható. Az (1.56) feltételekből azonnal adódik, hogy $|l|_F^\alpha > |l|_K$, $|l|_F^{2\alpha} > |l|_K$ és $|l|_F^{3\alpha} > |l|_K$ vagy $|l|_F^\alpha < |l|_K$, $|l|_F^{2\alpha} < |l|_K$

és $|l|_F^{3\alpha} < |l|_K$, ezért alkalmazhatjuk az 1.5.5. Lemmát, melyből kapjuk, hogy létezik egy $G_x : X^m \rightarrow Y$ m -additív, szimmetrikus függvény, melyre (1.58)

$$\|\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x) - G_x(h_1, \dots, h_m)\|_2 \leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m)$$

tetszőleges $h_1, \dots, h_m$ esetén. Ebből az egyenlőtlenségből és (1.57)-ből kapjuk, hogy tetszőleges $h_1, \dots, h_m$ választásával

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x+h) - G_x(h_1, \dots, h_m)\|_2 \\ \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta (\|h\|_1^\alpha + \delta_2(l, \alpha) \|h_1\|_1^\alpha) \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m). \end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenségben először x helyébe $x+y$ -t, majd h helyébe $h+y$ -t írva az alábbi két egyenlőtlenség adódik:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x+y+h) - G_{x+y}(h_1, \dots, h_m)\|_2 \\ \leq \varepsilon \|x+y\|_1^\beta (\|h\|_1^\alpha + \delta_2(l, \alpha) \|h_1\|_1^\alpha) \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m), \\ \|\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x+y+h) - G_x(h_1, \dots, h_m)\|_2 \\ \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta (\|h+y\|_1^\alpha + \delta_2(l, \alpha) \|h_1\|_1^\alpha) \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m). \end{aligned}$$

Legyen $r \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan racionális szám, melyre $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Bevezetve a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, y, h, h_1, l, \alpha) &= \varepsilon \|x+y\|_1^\beta (\|h\|_1^\alpha + \delta_2(l, \alpha) \|h_1\|_1^\alpha) \\ &+ \varepsilon \|x\|_1^\beta (\|h+y\|_1^\alpha + \delta_2(l, \alpha) \|h_1\|_1^\alpha) \end{aligned}$$

jelölést kapjuk, hogy bármely $h_1, \dots, h_m$ választásával

$$\begin{aligned} \|G_{x+y}(h_1, \dots, h_m) - G_x(h_1, \dots, h_m)\|_2 \\ = \frac{1}{|r|_K^k} \|G_{x+y}(h_1, \dots, r^k h_m) - G_x(h_1, \dots, r^k h_m)\|_2 \\ \leq \left(\frac{|r|_F^\alpha}{|r|_K} \right)^k \mathcal{D}(x, y, h, h_1, l, \alpha) \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m), \end{aligned}$$

melyből $k \rightarrow \infty$ határértéket véve kapjuk, hogy $G_x = G_{x+y}$, azaz $G_x = G_y$ minden $x, y \in X$ esetén. Bevezetve a $G_m = \frac{1}{m!} G_x$ függvényt (1.58)-ból kapjuk, hogy

$$\|\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_m} f(x) - m! G_m(h_1, \dots, h_m)\|_2 \leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m)$$

minden $x, h_1, \dots, h_m \in X$ esetén. Legyen $f_1 = f - G_m^*$. Ekkor, felhasználva az 1.4.1. Tételt adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f_1(x)\|_2 &= \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x) - \Delta_{h_1, \dots, h_m} G_m^*(x)\|_2 \\ &= \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x) - m! G_m(h_1, \dots, h_m)\|_2 \\ &\leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m). \end{aligned}$$

Mivel a differencia operátorok egymással felcserélhetők, teljesül a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned} \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f_1(x)\|_2 &\leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m) \\ \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f_1(x)\|_2 &\leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_2\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m) \\ &\vdots \\ \|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f_1(x)\|_2 &\leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \|h_m\|_1^\alpha \xi_m^\alpha(h_1, \dots, h_m) \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket egymással összeszorozva, majd mindkét oldalból m -edik gyököt vonva kapjuk, hogy

$$\|\Delta_{h_1, \dots, h_m} f_1(x)\|_2 \leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \|x\|_1^\beta \xi_m^{\frac{m+1}{m}\alpha}(h_1, \dots, h_m).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy α helyére $\frac{m+1}{m}\alpha$ -t, ε helyébe pedig az $\varepsilon \delta_2(l, \alpha)$ kifejezést írva teljesülnek a tétel feltételei $n = m$ esetén, tehát alkalmazhatjuk az indukciós feltevésünket.

A $\beta \neq 0$ esetben kapjuk, hogy léteznek olyan szimmetrikus és k -additív $G_k : X^k \rightarrow Y$ függvények ($1 \leq k \leq m-1$), melyekre

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{m-1} G_k^*(x) + f_1(0) \quad (x \in X),$$

így az $f_1(0) = f(0)$ egyenlőség felhasználásával kapjuk, hogy

$$f(x) = \sum_{k=1}^m G_k^*(x) + f(0) \quad (x \in X).$$

A $\beta = 0$ esetben adódik, hogy léteznek szimmetrikus, k -additív $G_k : X^k \rightarrow Y$

függvények ($1 \leq k \leq m-1$), melyekre

$$\begin{aligned} \left\| f_1(x) - f_1(0) - \sum_{k=1}^{m-1} G_k^*(x) \right\|_2 &\leq \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \delta_m \left(l, \frac{m+1}{m} \alpha \right) \|x\|_1^{m \frac{m+1}{m} \alpha} \\ &= \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \delta_2 \left(l, \frac{m+1}{m} \alpha \right) \prod_{j=2}^{m-1} \delta_2 \left(l, \frac{m}{j} \cdot \frac{m+1}{m} \alpha \right) \|x\|_1^{(m+1)\alpha} \\ &= \varepsilon \delta_2(l, \alpha) \prod_{j=2}^m \delta_2 \left(l, \frac{m+1}{j} \alpha \right) \|x\|_1^{(m+1)\alpha}, \end{aligned}$$

melyből $f_1(0) = f(0)$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^m G_k^*(x) \right\|_2 \leq \varepsilon \delta_{m+1}(l, \alpha) \|x\|_1^{(m+1)\alpha},$$

mely éppen az igazolandó volt $n = m+1$ esetén. Ezzel a tétel bizonyítása teljes. $\square$

1.5.7. MEGJEGYZÉS. A Fréchet-egyenletre vonatkozó stabilitási problémát tekinthetjük az $n = 1$ esetben is, azaz amikor stabilitási egyenletünk alakja

$$\|\Delta_y f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\alpha \quad (x, y \in X).$$

Ekkor $x = 0, y = x$ választásával adódik, hogy

$$\|f(x) - f(0)\|_2 \leq \varepsilon 0^\beta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X),$$

melyből kapjuk, hogy $\beta \neq 0$ esetén $f(x) = f(0)$ azaz f konstans, illetve $\beta = 0$ esetén $\|f(x) - f(0)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\alpha$. Tehát az 1.5.6. Tétel $n = 1$ esetén is érvényes.

1.5.8. MEGJEGYZÉS. Egyenlőre nem ismert, hogy mit mondhatunk abban az esetben, ha az 1.5.6. Tételben az (1.53) egyenlőtlenség helyett a

$$\|\Delta_y^n f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\alpha \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség teljesülését feltételezzük, azaz amikor a polinom egyenlet stabilitását tekintjük. Amikor a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán konstans áll, a $\Delta_{h_1, \dots, h_n}$ differencia Δ_u^k típusú differenciákkal való előállításával (lásd pl. [Kuc85, Theorem 15.2.1]) és a Fréchet-egyenletre vonatkozó stabilitási tétel segítségével könnyen igazolható a polinom egyenlet stabilitása, azonban nem konstans jobb oldal esetén ez a módszer nem működik.

1.5.9. MEGJEGYZÉS. Ahogy a Cauchy- és a monom egyenletnél, úgy most is felmerülhet a kérdés, hogy mikor nem létezik olyan l pozitív egész szám, melyre teljesülnek az (1.54) feltételek (egy adott $n \in \mathbb{N}$ esetén). A korábbiakhoz hasonlóan felírható az a három eset, amikor ez történik:

1. $\alpha = 0$ és $|\cdot|_K$ a triviális értékelés $\mathbb{Q}$ -n.
2. $\alpha \neq 0$, $|\cdot|_F = |\cdot|^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \in (0, 1]$ esetén, és

$$\min\{\alpha\beta_1, n\alpha\beta_1\} \leq \beta_2 \leq \max\{\alpha\beta_1, n\alpha\beta_1\},$$

amely a β_1, β_2 és n számok pozitivitása miatt leredukálódik az

$$\alpha\beta_1 \leq \beta_2 \leq n\alpha\beta_1$$

esetre, ahol $\alpha > 0$.

3. $\alpha > 0$ és létezik egy p prímszám, hogy $|\cdot|_F = |\cdot|_p^{\beta_1}$ és $|\cdot|_K = |\cdot|_p^{\beta_2}$ valamely $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ esetén és csak úgy, mint az előző esetben,

$$\alpha\beta_1 \leq \beta_2 \leq n\alpha\beta_1,$$

Például, ha $|\cdot|_F$ és $|\cdot|_K$ egyaránt a standard abszolút érték, azaz amikor a 2. eset áll fenn a $\beta_1 = \beta_2 = 1$ konstansokkal, akkor minden kritikus α érték az $[\frac{1}{n}, 1]$ intervallumban van. Tehát az $\alpha > 1$ vagy $\alpha \leq 0$ esetben a stabilitás biztosan teljesül. Megjegyzendő, hogy a Cauchy- és a monom egyenletre vonatkozó eredményektől eltérően α most nem egyezik meg a stabilitási egyenlőtlenségben szereplő függvény homogenitásának rendjével, a $\beta + n\alpha$ értékkel.

2 STABILITÁS GRUPOIDOKON

Ebben a fejezetben egy-, illetve többváltozós függvényegyenletek stabilitását vizsgáljuk egyszerű halmazokon és *grupoidokon*, azaz bináris művelettel ellátott nem üres halmazokon.

Legyenek $(X, \diamond)$ és $(Y, *)$ grupoidok. A következőkben számos eredmény a Cauchy-egyenlettel lesz kapcsolatos, amely ezekre az általános struktúrákra vonatkozóan a

$$(2.1) \quad g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenlet, ahol $g : X \rightarrow Y$ az ismeretlen függvény. Ezt az egyenletet szokás homomorfia egyenletnek is nevezni, hiszen megoldásai természetesen az $(X, \diamond)$ és $(Y, *)$ struktúrák közötti homomorfizmusok.

Feltételezve hogy Y metrikus tér a d metrikával, vizsgálhatjuk azokat az $f : X \rightarrow Y$ függvényeket, amelyek a (2.1) egyenletet kis hibával oldják meg, azaz teljesítik a

$$(2.2) \quad d(f(x \diamond y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon(x, y) \quad (x, y \in X)$$

úgynevezett stabilitási egyenlőtlenséget valamely $\varepsilon : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén. Ahogy azt már az előző fejezetben tárgyaltuk, arra a kérdésre keressük a választ, vajon léteznek-e olyan g megoldásai (2.1)-nek, amelyek az eredeti f függvényhez közel vannak.

1980-ban J. Rätz [Rät80] és G. L. Forti [For80] nem asszociatív, illetve nem kommutatív struktúrákon értelmezett függvények esetén vizsgálták a Cauchy-egyenlet stabilitását. Újabb eredmények találhatók a [BV02], [Pál01], [Pál99], [PVL98], [Vol98], [Vol99] publikációkban. Hatványasszociatív és hatványszimmetrikus struktúrákon értelmezett függvényekre a [Rät80] dolgozatban, négyzetszimmetrikus grupoidokon értelmezett függvényekre a [For80], [PVL98] és [Vol98] cikkekben, továbbá azon függvényekre, melyek négyzetszimmetrikus grupoidot képeznek négyzetszimmetrikus grupoidba, a [BV02], [Pál01] és [Pál99] publikációkban születtek eredmények. Egyváltozós függvényegyenletek stabilitásával kapcsolatos eredmények, melyek a később részletezett direkt módszer (lásd 2.5 fejezet) alkalmazhatóságára vonatkoznak, P. Volkmann [Vol01] dolgozatában illetve G. L. Forti nemrégiben megjelent [For04] publikációjában találhatók.

Ezek a kutatások kutatások motiválták a fejezetben található vizsgálatainkat, melyekben először halmazt metrikus térbe képező függvények esetén igazoljuk

egyváltozós függvényegyenletek stabilitását, vizsgáljuk az eredeti függvény és az approximáló függvény egymástól való pontonkénti távolságát. A kapott eredményeink alkalmazásaként levezetjük a Cauchy-egyenlet néhány stabilitási tételét hatványasszociatív grupoidokra vonatkozóan. Tárgyaljuk olyan általánosabb függvényegyenletek stabilitását is, melyek többek között a monom egyenletet is magukba foglalják. Ezeket az eredményeket a Gilányi Attilával és Páles Zsolttal közös [GKP] dolgozatban publikáltuk, és a fejezet 2.–4. részében beszélünk róluk. Stabilitási eredményeink csakúgy, mint az előző fejezetben, iterációs eljárásokon alapulnak. A használt technikát Hyers-módszernek vagy direkt módszernek nevezzük. A fejezet utolsó részében egy olyan grupoidokon értelmezett Cauchy-egyenletre mutatunk példát, melyre a stabilitás teljesül, azonban az iterációs eljárással a stabilitás nem igazolható. Ezek az eredmények a Páles Zsolttal közös [KP05] dolgozatban jelentek meg.

2.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

Legyen $(X, \diamond)$ egy grupoid. X egy tetszőleges x elemének hatványait rekurzívan definiáljuk a következőképpen: legyen $x^1 = x$ továbbá $x^{k+1} = x^k \diamond x$ ($k \in \mathbb{N}$). A formulák könnyebb átláthatósága céljából vezessük be a következő zárójelzési szabályt: $k \geq 3$ és $x_1, \dots, x_k \in X$ esetén legyen

$$x_1 \diamond x_2 \diamond x_3 \diamond \dots \diamond x_{k+1} \diamond x_k = (\dots((x_1 \diamond x_2) \diamond x_3) \dots \diamond x_{k-1}) \diamond x_k.$$

Azt mondjuk, hogy az $(X, \diamond)$ grupoid (és a $\diamond$ operátor) *hatványasszociatív*, ha minden n, m pozitív egész szám és $x \in X$ esetén fennáll az

$$x^{n+m} = x^n \diamond x^m$$

egyenlet. Teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor

$$(x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n \quad (n, m \in \mathbb{N}, x \in X).$$

Egy $l \geq 2$ adott egész szám esetén azt mondjuk, hogy az $(X, \diamond)$ grupoid (és a $\diamond$ operátor) *l -l elgyértelműen osztható*, ha bármely $x \in X$ -hez egyértelműen létezik olyan $y \in X$, melyre $y^l = x$ teljesül.

Azt mondjuk, hogy az $(X, \diamond)$ grupoid (és a $\diamond$ operátor) *l -hatványszimmetrikus* valamely $l \geq 2$ adott egészre, ha $(x \diamond y)^l = x^l \diamond y^l$ minden $x, y \in X$ esetén. Amennyiben $l = 2$, akkor használjuk a *négyzetszimmetrikus* elnevezést is. Megjegyzendő, hogy $(X, \diamond)$ akkor és csak akkor l -hatványszimmetrikus, ha az $x \mapsto x^l$ függvény endomorfizmusa $(X, \diamond)$ -nak. Továbbá $(X, \diamond)$ pontosan akkor egyszerre

l -hatványszimmetrikus és l -lel egyértelműen osztható, ha az $x \mapsto x^l$ függvény automorfizmusa $(X, \diamond)$ -nak.

Nyilvánvalóan azok az operátorok, amelyek egyaránt kommutatívák és asszociatívák, l -hatványszimmetrikusak is. Viszont a hatványszimmetriából nem következik sem a kommutativitás, sem az asszociativitás. Például egy legalább két elemű X alaphalmazon az $x \diamond y := y$ operátor asszociatív, minden $l \geq 2$ egész esetén l -hatványszimmetrikus, de nem kommutatív. Másrészt az $x \diamond y := |x - y|$ operátor $X = [0, \infty[$ -en kommutatív, minden $l \geq 2$ egész esetén l -hatványszimmetrikus, de nem asszociatív. Sőt, az utolsó operátor nem is biszimmetrikus. (Az $\diamond$ operátort *biszimmetrikusnak* nevezzük, ha minden $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in X$ esetén $(x \diamond \bar{x}) \diamond (y \diamond \bar{y}) = (x \diamond y) \diamond (\bar{x} \diamond \bar{y})$.) Mivel a biszimmetrikus grupoidok nyilvánvalóan négyzetszimmetrikusak is, azt mondhatjuk, hogy az l -hatványszimmetria gyengébb feltétel, mint a biszimmetria.

A következő, Gilányi Attilától és Páles Zsolttól származó tétel rávilágít az l -hatványszimmetrikus műveletek széles skálájára.

2.1.1. TÉTEL. [GKP] Legyen $(G, \cdot)$ egy grupoid jobb (vagy bal) oldali egységelemmel. Tegyük fel, hogy $F : G \times G \rightarrow G$ egy homogén függvény, azaz

$$F(z \cdot x, z \cdot y) = z \cdot F(x, y) \quad \text{és} \quad F(x \cdot z, y \cdot z) = F(x, y) \cdot z$$

minden $x, y, z \in G$ esetén. Ekkor $a \diamond : G \times G \rightarrow G$

$$x \diamond y = F(x, y) \quad (x, y \in G)$$

operátor l -hatványszimmetrikus minden $l \geq 2$ egész szám esetén.

A tétel alapján például az $\frac{x+y}{2}$, $\sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$, $\sqrt[3]{x^3 - 3xy^2}$ műveletek l -hatványszimmetrikusak a nem negatív valós számok halmazán minden l pozitív egész szám esetén.

Egy tetszőleges H halmaz esetén jelöljük a $\varphi : H \rightarrow H$ függvény n -edik iteráltját φ^n -nel, és legyen φ^0 az identikus leképezés. Amennyiben φ invertálható, jelöljük φ^{-1} n -edik iteráltját φ^{-n} -nel.

Definiáljuk az l -edik hatványfüggvényeket az alábbi módon:

$$(2.3) \quad \varphi_{\diamond, l} : X \rightarrow X, \quad \varphi_{\diamond, l}(x) := x^l \quad (x \in X, l \in \mathbb{N}).$$

Amennyiben X l -lel egyértelműen osztható, akkor $\varphi_{\diamond, l}$ invertálható.

Ha az $(X, \diamond)$ grupoidon adott egy d metrika, továbbá a $\diamond$ operátor folytonos az (X, d) -beli topológiára nézve, akkor azt mondjuk, hogy $(X, \diamond, d)$ egy metrikus grupoid.

Amennyiben adott egy (X, d) metrikus tér és egy $\varphi : X \rightarrow X$ függvény, akkor a φ függvény *egyenletes folytonossági modulusa* alatt az

$$(2.4) \quad \omega_\varphi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad \omega_\varphi(t) := \sup \{d(\varphi(x), \varphi(y)) \mid x, y \in X, d(x, y) \leq t\}$$

függvényt értjük, *Lipschitz-modulusa* alatt pedig a

$$(2.5) \quad \text{Lip } \varphi := \sup \left\{ \frac{d(\varphi(x), \varphi(y))}{d(x, y)} \mid x, y \in X, x \neq y \right\}$$

kifejezést. Könnyen látható, hogy $\omega_\varphi(t) \leq \text{Lip } \varphi \cdot t$ tetszőleges $t \in [0, \infty[$ esetén, ω_φ egy nem negatív, monoton növekvő függvény, továbbá

$$(2.6) \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \omega_\varphi(d(x, y)) \quad (x, y \in X).$$

Az egyenletes folytonossági modulus rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal is:

2.1.2. ÁLLÍTÁS. *Legyen (X, d) metrikus tér, $\varphi : X \rightarrow X$, $\psi : X \rightarrow X$ adott függvények. Ekkor tetszőleges $t \geq 0$ valós szám esetén*

$$(2.7) \quad \omega_{\psi \circ \varphi}(t) \leq \omega_\psi \circ \omega_\varphi(t).$$

Speciálisan

$$(2.8) \quad \omega_{\varphi^n}(t) \leq \omega_\varphi^n(t) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

B i z o n y í t á s. Legyen $t \geq 0$ tetszőleges,

$$A := \{d(\psi \circ \varphi(x), \psi \circ \varphi(y)) \mid x, y \in X, d(x, y) \leq t\}$$

továbbá

$$B := \{d(\psi(u), \psi(v)) \mid u, v \in X, d(u, v) \leq \omega_\varphi(t)\}.$$

Ha $a \in A$, akkor $\exists x, y \in X$, melyekre $d(x, y) \leq t$ és $d(\psi \circ \varphi(x), \psi \circ \varphi(y)) = a$. Mivel $d(x, y) \leq t$, az ω_φ egyenletes folytonossági modulus monotonitásából adódik, hogy $\omega_\varphi(d(x, y)) \leq \omega_\varphi(t)$. Ebből (2.6) felhasználásával kapjuk a $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \omega_\varphi(t)$ egyenlőtlenséget, melyből az $u = \varphi(x)$ és $v = \varphi(y)$ jelöléseket bevezetve azonnal látható, hogy $a \in B$. Tehát beláttuk, hogy $A \subset B$, így

$$\omega_{\psi \circ \varphi}(t) = \sup A \leq \sup B = \omega_\psi \circ \omega_\varphi(t),$$

amit bizonyítani akartunk.

Az állítás második része n szerinti teljes indukcióval adódik a (2.7) egyenlőtlenségből, $\psi = \varphi$ választásával. $\square$

A későbbiekben használni fogjuk a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ jelölést, amely az (X, d) metrikus térbeli (x_n) sorozat torlódási pontjainak halmazát jelöli, azaz

$$(2.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n := \{x \in X \mid \exists n_k : x_{n_k} \rightarrow x\}.$$

2.2 EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Ebben a részben legyen X egy nemüres halmaz, (Y, d) egy metrikus tér, továbbá $\varphi : X \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow Y$ és $\gamma : X \rightarrow [0, \infty[$ adott függvények. A továbbiakban a

$$(2.10) \quad g(x) = \psi \circ g \circ \varphi(x) \quad (x \in X)$$

egyváltozós függvényegyenlet stabilitását fogjuk vizsgálni.

Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy függvény, melyre teljesül a

$$(2.11) \quad d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \gamma(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenség. Legyen

$$(2.12) \quad g_0 = f, \quad g_{n+1} = \psi \circ g_n \circ \varphi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A következő kérdések merülhetnek fel a (2.11) függvényegyenlet stabilitásának vizsgálata során:

1. Mikor konvergens a (2.12) iteráció?
2. Mely $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ függvények esetén teljesül a

$$d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenség?

3. Mikor lesz a $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ függvény megoldása a (2.10) függvényegyenletnek?
4. Van-e másik $h : X \rightarrow Y$ megoldása (2.10)-nek, amelyre a $d(f(x), h(x))$ távolság $\delta(x)$ -szel felülről becsülhető?

A következőkben ezekre a kérdésekre adjuk meg a választ. Az alábbi lemma a második kérdést vizsgálja meg egy általánosabb formában.

2.2.1. LEMMA. *Legyen f megoldása a (2.11) egyenlőtlenségnek. Ha létezik egy $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ függvény, melyre*

$$(2.13) \quad \delta(x) \geq \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x) \quad (x \in X),$$

akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \subset \overline{\mathcal{B}}_{\delta(x)}(f(x)) \quad (x \in X),$$

ahol $\overline{\mathcal{B}}_{\delta(x)}(f(x))$ az $f(x)$ középpontú, $\delta(x)$ sugarú zárt gömböt jelöli.

B i z o n y í t á s. Jelöljük $\mathcal{F}$ -el az X halmazon értelmezett nem negatív valós értékű függvények halmazát. Először bevezetünk $\mathcal{F}$ -en egy $\mathcal{T}$ operátort. Ha adott egy $\vartheta : X \rightarrow [0, \infty[$ függvény, akkor legyen

$$(2.14) \quad (\mathcal{T}\vartheta)(x) := \gamma(x) + \omega_\psi \circ \vartheta \circ \varphi(x) \quad (x \in X).$$

Ezen $\mathcal{T}$ operátor segítségével az (2.13) egyenlőtlenség a

$$(2.15) \quad \delta(x) \geq (\mathcal{T}\delta)(x) \quad (x \in X)$$

alakban írható. Legyen tehát δ egy megoldása a (2.15) egyenlőtlenségnek. Az ω_ψ egyenletes folytonossági modulus nem negatív, így $\gamma(x) \leq (\mathcal{T}\gamma)(x)$ továbbá $\gamma(x) \leq \delta(x)$ tetszőleges $x \in X$ esetén. Felhasználva ω_ψ monotonitását teljes indukcióval adódik, hogy tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ számokra

$$\gamma(x) \leq (\mathcal{T}^m \gamma)(x) \leq (\mathcal{T}^n \gamma)(x) \leq (\mathcal{T}^n \delta)(x) \leq (\mathcal{T}^m \delta)(x) \leq \delta(x) \quad (x \in X).$$

Tehát tetszőleges $x \in X$ esetén a $((\mathcal{T}^n \gamma)(x))$ felülről korlátos sorozat monoton növekvő, a $((\mathcal{T}^n \delta)(x))$ alulról korlátos sorozat pedig monoton csökkenő, tehát konvergensek és

$$(2.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}^{n-1} \gamma)(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}^{n-1} \delta)(x) \quad (x \in X).$$

A következőkben bebizonyítjuk teljes indukcióval, hogy

$$(2.17) \quad d(f(x), g_n(x)) \leq (\mathcal{T}^{n-1} \gamma)(x) \quad (x \in X).$$

Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan teljesül a (2.11) egyenlőtlenség miatt. Tegyük fel, hogy (2.17) teljesül valamely $n \geq 2$ esetén $n - 1$ -re, azaz

$$d(f(x), g_{n-1}(x)) \leq (\mathcal{T}^{n-2} \gamma)(x) \quad (x \in X).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} d(f(x), g_n(x)) &= d(f(x), g_1(x)) + d(g_1(x), g_n(x)) \\ &\leq \gamma(x) + \omega_\psi \circ d(f \circ \varphi(x), \psi^{n-1} \circ f \circ \varphi^n(x)) \\ &\leq \gamma(x) + \omega_\psi \circ (\mathcal{T}^{n-2}\gamma) \circ \varphi(x) = (\mathcal{T}^{n-1}\gamma)(x) \end{aligned}$$

minden $x \in X$ esetén, amit bizonyítani akartunk.

Most legyen $y \in \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$. Ekkor $y = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x)$ valamely $(g_{n_k}(x))$ részsorozatára $(g_n(x))$ -nek. Így, felhasználva a (2.16) és (2.17) egyenlőtlenségeket kapjuk az állítást:

$$\begin{aligned} d(f(x), y) &= d(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n_k}(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}^{n_k-1}\gamma)(x) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}^{n_k-1}\delta)(x) \leq \delta(x). \end{aligned}$$

□

2.2.2. ÁLLÍTÁS. A 2.2.1. Lemmával egyenértékű állítást kapunk, ha benne a (2.13) egyenlőtlenség megoldhatósága helyett a

$$(2.18) \quad \delta(x) = \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x) \quad (x \in X)$$

egyenlet megoldhatóságát tételezzük fel.

B i z o n y í t á s. A Tarski-féle fixponttétel szerint, ha $(X, \preceq)$ egy teljes féligrendezett halmaz, $f : X \rightarrow X$ monoton növekvő és léteznek $x_0, x_1 \in X$, melyekre $x_0 \leq f(x_0) \preceq f(x_1) \preceq x_1$, akkor f -nek létezik x_0 és x_1 között fixpontja (lásd például [GD03]).

Az X -en értelmezett nem negatív valós függvények $\mathcal{F}$ halmaza ellátva a szokásos pontonkénti rendezéssel egy teljes féligrendezett halmaz. A (2.14) formulával definiált $\mathcal{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ operátor monoton növekvő, továbbá $0 \preceq \mathcal{T}0$. Amennyiben (2.13) megoldható, létezik olyan $\delta \in \mathcal{F}$, melyre $\mathcal{T}\delta \preceq \delta$. Ekkor alkalmazható Tarski tétele, tehát létezik olyan $\vartheta \in \mathcal{F}$, melyre $\mathcal{T}\vartheta = \vartheta$.

Így beláttuk, hogy a (2.13) egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van megoldása, ha (2.18) megoldható, melyből az állítás következik. □

2.2.3. MEGJEGYZÉS. A (2.18) egyenlőség megoldhatóságára könnyebben tudunk elégséges feltételeket megadni, mint a (2.13) egyenlőtlenség megoldhatóságára. Például tekintsük a $\mathcal{B} = \{\delta \in \mathcal{F} \mid \delta \text{ korlátos}\}$ halmazt. Ha Y egy

teljes metrikus tér, akkor $\mathcal{T}$ bizonyos feltételek mellett általánosított kontrakció lesz a $D(\delta_1, \delta_2) = \sup_{x \in X} d(\delta_1(x), \delta_2(x))$ metrikával ellátott $\mathcal{B}$ halmazon. Ugyanis tetszőleges $x \in X$ esetén kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}\delta_1(x), \mathcal{T}\delta_2(x)) &\leq d(\omega_\psi \circ \delta_1 \circ \varphi(x), \omega_\psi \circ \delta_2 \circ \varphi(x)) \\ &\leq \omega_\psi(d(\delta_1 \circ \varphi(x), \delta_2 \circ \varphi(x))) \leq \omega_\psi(D(\delta_1, \delta_2)), \end{aligned}$$

így

$$D(\mathcal{T}\delta_1, \mathcal{T}\delta_2) \leq \omega_\psi(D(\delta_1, \delta_2)),$$

ezért felhasználva a Banach-féle fixpont tétel egy általánosítását (lásd [GD03]) kapjuk, hogy ha $\omega_\psi(t) < t$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_\psi)^n(t) \rightarrow 0$ minden $t \in [0, \infty[$ esetén, akkor (2.18) egyértelműen megoldható.

Alkalmazva a 2.2.1. Lemmát megfogalmazhatjuk a következő stabilitási tételt a (2.10) egyváltozós függvényegyenletre vonatkozóan:

2.2.4. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a ψ függvény folytonos és $f : X \rightarrow Y$ egy megoldása a (2.11) egyenlőtlenségnek. Ha a (2.12)-ben definiált iteráció konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor a*

$$(2.19) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x) \quad (x \in X)$$

függvény megoldása (2.10)-nek és

$$(2.20) \quad d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

a (2.13) egyenlőtlenség minden δ megoldása esetén.

B i z o n y í t á s. Felhasználva a 2.2.1. Lemmát kapjuk, hogy a (2.12) formulában definiált g függvény teljesíti a (2.20) egyenlőtlenséget tetszőleges δ megoldására (2.13)-nak. A tétel igazolásához azt kell még belátnunk, hogy g teljesíti az egyváltozós (2.10) egyenletet, amely következik ψ folytonosságából és g definíciójából. $\square$

A következő lemma egy elégséges feltételt ad meg a (2.13) egyenlőtlenség megoldhatóságára, továbbá megadja egy megoldását is.

2.2.5. LEMMA. *Ha létezik egy σ -szubadditív $\kappa : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ függvény, melyre $\kappa(t) \geq \omega_\psi(t)$ ($t \geq 0$) és*

$$(2.21) \quad \tilde{\delta}(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \gamma \circ \varphi^j(x)$$

konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor $\tilde{\delta}(x)$ egy megoldása (2.13)-nak.

B i z o n y í t á s. A 2.2.1. Lemma jelöléseit használva, tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\begin{aligned} \gamma(x) + \omega_\varphi \circ \tilde{\delta} \circ \varphi(x) &\leq \gamma(x) + \kappa \circ \tilde{\delta} \circ \varphi(x) \\ &\leq \kappa^0 \circ \gamma \circ \varphi^0(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^{j+1} \circ \gamma \circ \varphi^{j+1}(x) = \tilde{\delta}(x), \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. $\square$

Megjegyzendő, hogy sok esetben az ω_ψ függvény maga is σ -szubadditív. Például teljesül ez a tulajdonság abban az esetben is, ha Y egy normált tér és a d metrika a normából származik. Ezenfelül, ha Y teljes, akkor a (2.21) sor konvergenciája a $\kappa = \omega_\psi$ választással garantálja a (2.12) iteráció konvergenciáját. A következő lemma alapján azt mondhatjuk, hogy gyengébb feltételek is elegendőek, ugyanis (2.21)-ben az ω_ψ^j függvények helyett használhatjuk a kisebb ω_{ψ^j} függvényeket is. A lemma a $d(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x))$ kifejezés egy újabb felső korlátját is megadja.

2.2.6. LEMMA. *Legyen Y teljes metrikus tér. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény megoldása a (2.11) egyenlőtlenségnek és*

$$(2.22) \quad \chi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x) < \infty \quad (x \in X),$$

akkor a (2.12) sorozat minden $x \in X$ esetén konvergens. Ezenfelül

$$d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right) \leq \chi(x) \quad (x \in X).$$

B i z o n y í t á s. Legyen $n > m$. Ekkor tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\begin{aligned} d(g_m(x), g_n(x)) &\leq \sum_{j=m}^{n-1} d(g_j(x), g_{j+1}(x)) \\ &= \sum_{j=m}^{n-1} d(\psi^j \circ f \circ \varphi^j(x), \psi^{j+1} \circ f \circ \varphi^{j+1}(x)) \leq \sum_{j=m}^{n-1} \omega_{\varphi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x), \end{aligned}$$

és $\chi(x)$ konvergenciájából következik, hogy a $(g_n(x))$ sorozat Cauchy-sorozat minden $x \in X$ esetén, amely Y teljessége miatt azt jelenti, hogy a sorozat konvergens. Másrészt, tetszőleges $x \in X$ választásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x), g_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_0(x), g_n(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x) = \chi(x),$$

azaz a $\chi(x)$ függvény valóban felső korlátja a $d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right)$ kifejezésnek. $\square$

Az előző eredményeket alkalmazva azonnal adódik a következő stabilitási tétel:

2.2.7. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy Y egy teljes metrikus tér és ψ folytonos. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény megoldása a (2.11) egyenlőtlenségnek és a (2.22)-ben definiált $\chi(x)$ függvény véges minden $x \in X$ esetén, akkor létezik egy g megoldása (2.10)-nek, melyre*

$$(2.23) \quad d(f(x), g(x)) \leq \chi(x) \quad (x \in X)$$

és g a (2.19) formulával definiált. Ezenfelül

$$d(f(x), g(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

minden $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ megoldására (2.13)-nak.

Az Y tér teljessége és (2.22) konvergenciája nem szükséges ahhoz, hogy a (2.12) iteráció konvergens legyen, így a 2.2.4. Tétel tétel feltételei gyengébbek, mint a 2.2.7. Tétel feltételei. Továbbá létezhet olyan megoldása a (2.13) egyenlőtlenségnek, amely kisebb felső korlátja a $d(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x))$ kifejezésnek, mint χ . A következő példa ezeket a tulajdonságokat támasztja alá.

2.2.8. PÉLDA. Legyen $\varepsilon > 0$, $X = [0, 1]$, $Y =]0, \infty[$, $\varphi : X \rightarrow X$, $\varphi(x) = x$ és $\psi : Y \rightarrow Y$, $\psi(x) = \sqrt{x}$. Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy függvény, melyre teljesül az

$$\left| f(x) - \sqrt{f(x)} \right| \leq \varepsilon \quad (x \in X).$$

egyenlőtlenség. Ekkor adódik, hogy

$$\gamma(x) := |f(x) - \psi \circ f \circ \varphi(x)| = \left| f(x) - \sqrt{f(x)} \right| \leq \varepsilon \quad (x \in X).$$

Esetünkben

$$\omega_{\psi^n}(t) = \sup \{ | \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} | : |x - y| \leq t \} = \sqrt[n]{t} \quad (t \geq 0)$$

és $f(x) \neq 1$ esetén $\gamma(x) > 0$, így

$$\chi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt[j]{\gamma(x)} = \infty.$$

Másrészt, tetszőleges $x \in X$ választásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = 1,$$

tehát, bár Y nem teljes és $\chi(x)$ nem véges, a (2.12) iteráció konvergens. Vegyük észre, hogy a $\delta(x) = 1 + 2\varepsilon$ függvény teljesíti a

$$\delta(x) \geq \varepsilon + \sqrt{\delta(x)} \geq \gamma(x) + \omega_{\psi} \circ \delta \circ \varphi(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenséget, így alkalmazva a 2.2.1. Lemmát kapjuk, hogy

$$(2.24) \quad |f(x) - 1| \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Megjegyzendő, hogy a konstans 1 függvény megoldása az

$$f(x) = \sqrt{f(x)} \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenletnek, így egyfajta stabilitási tulajdonságot is kaptunk. A (2.24) egyenlőtlenség jobb oldala nem csökkenthető jelentősen, ugyanis $f(x)$ közel lehet a nullához is. A példában szereplő függvényegyenlettel részletesebben foglalkozunk a fejezet utolsó részében.

Bizonyos feltételekkel az f függvényt közelítő g megoldás egyértelműsége is biztosítható.

2.2.9. TÉTEL. *A 2.2.7. Tétel feltételei mellett, ha létezik egy olyan σ -szubadditív $\kappa : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ függvény, amelyre $\kappa(t) \geq \omega_{\psi}(t)$ ($t \geq 0$) és a (2.21)-ben definiált sor konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor a (2.19)-ben definiált g függvény az egyetlen olyan megoldása (2.10)-nek, amelyre teljesül a (2.23) távolságbecslés.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\bar{g} : X \rightarrow Y$ egy olyan megoldása (2.10)-nek, melyre fennáll a $d(f(x), \bar{g}(x)) \leq \chi(x)$ egyenlőtlenség minden $x \in X$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} d(g_n(x), \bar{g}(x)) &= d(\psi^n \circ f \circ \varphi^n(x), \psi^n \circ \bar{g}(x) \circ \varphi^n(x)) \\ &\leq \omega_{\psi^n} \circ d(f \circ \varphi^n(x), \bar{g}(x) \circ \varphi^n(x)) \leq \omega_{\psi^n} \circ \chi(\varphi^n(x)) \\ &= \omega_{\psi^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\psi^j} \circ \gamma \circ \varphi^{n+j}(x) \right) \leq \kappa^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \gamma \circ \varphi^{n+j}(x) \right) \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} \kappa^j \circ \gamma \circ \varphi^j(x), \end{aligned}$$

így $\bar{g}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ ($x \in X$), azaz $\bar{g} = g$, melyet bizonyítani akartunk. $\square$

A következő tételben megvizsgáljuk a stabilitást abban az esetben, amikor a (2.11) stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő függvény konstans.

2.2.10. TÉTEL. *Legyen Y teljes metrikus tér, $\varepsilon \geq 0$ egy valós szám és tegyük fel, hogy a $\psi : Y \rightarrow Y$ függvényre fennáll az*

$$(2.25) \quad L = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Lip } \psi^n < \infty$$

tulajdonság. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvényre teljesül a

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \varepsilon \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenség, akkor a (2.19) iteráció által definiált $g : X \rightarrow Y$ függvény minden $x \in X$ esetén értelmezve van, megoldása a (2.10) függvényegyenletnek, továbbá teljesíti a

$$(2.26) \quad d(f(x), g(x)) \leq L\varepsilon \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenséget. Ezenfelül g az egyetlen olyan megoldása (2.10)-nek, melyre (2.26) bal oldala korlátos.

Bizonyítás. A tétel első részének igazolásához belátjuk, hogy teljesülnek a 2.2.7. Tétel feltételei. A ψ függvény folytonossága következik a (2.25) feltételből.

Felhasználva, hogy bármely $t \in [0, \infty[$ esetén $\omega_\psi(t) \leq \text{Lip } \psi \cdot t$, esetünkben a (2.22) formula a

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{\psi^n}(\varepsilon) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \text{Lip } \psi^n \cdot \varepsilon = L\varepsilon < \infty$$

egyenlőtlenséget jelenti, így a 2.2.7. Tétel tétel feltételei teljesülnek.

Másrészt, a $\kappa(t) := \text{Lip } \psi \cdot t$ függvény lineáris, így az egyértelműség következik a 2.2.9. Tételből. $\square$

2.3 CAUCHY-EGYENLET

Ebben a részben (ha mást nem mondunk) legyen $l \geq 2$ egy egész szám, $(X, \diamond)$ l -hatványszimmetrikus grupoid, $(Y, *, d)$ l -hatványszimmetrikus teljes metrikus grupoid, melyre fennáll a

$$(2.27) \quad d(x * y, z * y) \leq d(x, z) \quad (x, y, z \in Y)$$

egyenlőtlenség és legyen $\varepsilon : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ egy adott függvény. Vezessük be a

$$(2.28) \quad \Lambda(x) := \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(x^j, x) \quad (x \in X)$$

jelölést. A következőkben megvizsgáljuk a

$$(2.29) \quad g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-egyenlet stabilitását az egyváltozós függvényegyenletekre vonatkozó eredmények felhasználásával.

Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy olyan függvény, amelyre fennáll a

$$(2.30) \quad d(f(x \diamond y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon(x, y) \quad (x, y \in X)$$

stabilitási egyenlőtlenség. Az egyváltozós esetnek megfelelően 4 kérdést vizsgálunk:

1. Mikor konvergens a (2.12)-ben definiált g_n iteráció?

2. Mely $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ függvények esetén teljesül a

$$d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenség?

3. Mikor lesz a $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ függvény megoldása a (2.29) egyenletnek?

4. Létezik-e másik $h : X \rightarrow Y$ megoldása (2.29)-nek, amelyre $d(f(x), h(x))$ felülről becsülhető a $\delta(x)$ függvénnyel?

A következőkben a (2.3)-ban bevezetett $\varphi_{\diamond, l}$ és $\varphi_{*, l}$ l -edik hatványfüggvényeket fogjuk használni.

2.3.1. TÉTEL. *Legyen X l -l-el egyértelműen osztható. Legyen $f : X \rightarrow Y$ egy függvény, melyre teljesül a (2.30) egyenlőtlenség. A (2.28) jelölést használva, ha*

$$\delta^\diamond(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\varphi_{*, l}^j} \circ \Lambda \circ \varphi_{\diamond, l}^{-j-1}(x) < \infty \quad (x \in X)$$

és

$$(2.31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\varphi_{*, l}^n} \circ \varepsilon(\varphi_{\diamond, l}^{-n}(x), \varphi_{\diamond, l}^{-n}(y)) = 0 \quad (x, y \in X),$$

akkor létezik egy g megoldása a (2.29) egyenletnek, melyre

$$(2.32) \quad d(g(x), f(x)) \leq \delta^\diamond(x) \quad (x \in X)$$

és

$$(2.33) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*, l}^n \circ f \circ \varphi_{\diamond, l}^{-n}(x) \quad (x \in X).$$

Továbbá, ha a δ függvény rendelkezik a

$$(2.34) \quad \delta(x) \geq \Lambda \circ \varphi_{\diamond, l}^{-1}(x) + \omega_{\varphi_{*, l}} \circ \delta \circ \varphi_{\diamond, l}^{-1}(x) \quad (x \in X)$$

tulajdonsággal, akkor a

$$(2.35) \quad d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenség is fennáll. Ezenfelül, ha létezik egy olyan σ -szubadditív $\kappa : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ függvény, melyre $\kappa(t) \geq \omega_{\varphi_{*,l}}(t)$ ($t \geq 0$) és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \Lambda \circ \varphi_{\diamond, l}^{-j-1}(x) < \infty \quad (x \in X),$$

akkor a (2.33)-ban definiált g függvény az egyetlen olyan megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, amelyre a (2.32) egyenlőtlenség teljesül.

B i z o n y í t á s. Felhasználva a (2.27) és (2.30) egyenlőtlenségeket, minden $x \in X$ esetén

$$\begin{aligned} d(f \circ \varphi_{\diamond, l}(x), \varphi_{*, l} \circ f(x)) &\leq d(f(x^l), f(x^{l-1}) * f(x)) \\ &\quad + d(f(x^{l-1}) * f(x), f(x^{l-2}) * f(x) * f(x)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + d(f(x^2) * \underbrace{f(x) * \cdots * f(x)}_{l-2 \text{ darab}}, \underbrace{f(x) * \cdots * f(x)}_{l \text{ darab}}) \\ &\leq d(f(x^l), f(x^{l-1}) * f(x)) \\ &\quad + d(f(x^{l-1}), f(x^{l-2}) * f(x)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + d(f(x^2), f(x) * f(x)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{l-1} \varepsilon(x^j, x) = \Lambda(x). \end{aligned}$$

Így az f függvényre teljesül a

$$d(f(x), \varphi_{*, l} \circ f \circ \varphi_{\diamond, l}^{-1}(x)) \leq \Lambda \circ \varphi_{\diamond, l}^{-1}(x) \quad (x \in X)$$

egyváltozás függvényegyenlet. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2.2.7. Tétel feltételei teljesülnek a $\psi = \varphi_{*, l}$, $\varphi = \varphi_{\diamond, l}^{-1}$ és $\gamma(x) = \Lambda \circ \varphi_{\diamond, l}^{-1}(x)$ függvényekkel, így a (2.33)-ban definiált g függvény teljesíti (2.32)-t és (2.35)-öt a (2.34) egyenlőtlenség minden δ megoldására. Következésképpen csak azt kell belátnunk, hogy g megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek. Felhasználva, hogy

$\varphi_{*,l}$ és $\varphi_{\diamond,l}^{-1}$ homomorfizmusok kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 &\leq d(g(x \diamond y), g(x) * g(y)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi_{*,l}^n \circ f \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n}(x \diamond y), \varphi_{*,l}^n \circ (f \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n}(x) * f \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n}(y))) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\varphi_{*,l}^n} \circ d(f(\varphi_{\diamond,l}^{-n}(x) \diamond \varphi_{\diamond,l}^{-n}(y)), f(\varphi_{\diamond,l}^{-n}(x)) * f(\varphi_{\diamond,l}^{-n}(y))) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\varphi_{*,l}^n} \circ \varepsilon(\varphi_{\diamond,l}^{-n}(x), \varphi_{\diamond,l}^{-n}(y)) = 0
\end{aligned}$$

minden $x \in X$ esetén, tehát g valóban megoldása (2.29)-nek.

A g függvény egyértelműségére vonatkozó állítás következik a 2.2.9. Tételből, ugyanis ha g megoldása (2.29)-nek, akkor $\psi = \varphi_{*,l}$ és $\varphi = \varphi_{\diamond,l}^{-1}$ választásával megoldása a (2.10) egyváltozós függvényegyenletnek is, és az egyértelműségre vonatkozó 2.2.9. Tétel feltételei teljesülnek. $\square$

A következő tételben azt az esetet tárgyaljuk, amikor a (2.30) stabilitási egyenlőtlenségben a jobb oldalon álló $\varepsilon(x, y)$ függvény konstans.

2.3.2. TÉTEL. *Legyen X l -el egyértelműen osztható és tegyük fel, hogy*

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Lip } \varphi_{*,l}^j < \infty.$$

Ha $\varepsilon \geq 0$ és az $f : X \rightarrow Y$ függvény kielégíti a

$$(2.36) \quad d(f(x \diamond y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenséget, akkor létezik egy $g : X \rightarrow Y$ megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, amelyre

$$(2.37) \quad d(g(x), f(x)) \leq L(l-1)\varepsilon \quad (x \in X)$$

és g a (2.33) formulával definiált. Továbbá g az egyetlen olyan megoldása (2.29)-nek, amelyre a (2.36) egyenlőtlenség bal oldala korlátos.

B i z o n y í t á s. Belátjuk, hogy teljesülnek a 2.3.1. Tétel feltételei az $\varepsilon(x, y) = \varepsilon$ esetben. Mivel

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\varphi_{*,l}^n} \left(\varepsilon(\varphi_{\diamond,l}^{-n}(x), \varphi_{\diamond,l}^{-n}(y)) \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Lip } \varphi_{*,l}^n \cdot \varepsilon = 0 \quad (x, y \in X),$$

így a (2.31) feltétel teljesül. Esetünkben $\Lambda(x) = (l-1)\varepsilon$ minden $x \in X$ esetén, így

$$\delta^\diamond(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\varphi_{*,l}^j} \circ \Lambda \circ \varphi_{\diamond,l}^{-n-1}(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \text{Lip } \varphi_{*,l}^j \cdot (l-1)\varepsilon = L(l-1)\varepsilon < \infty$$

tetszőleges $x \in X$ választásával, így az approximáló g függvény létezését beláttuk, melynek egyértelmősége a $\kappa(t) = \text{Lip } \varphi_{*,l} \cdot t$ választásból adódik. $\square$

Hasonló tételeket igazolhatunk, ha az l -lel való oszthatóságot a $*$ műveletnél tételezzük fel. Ekkor a $\varphi_{*,l}$ függvény invertálható.

2.3.3. TÉTEL. *Legyen Y l -lel egyértelműen osztható és tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvényre fennáll a (2.30) egyenlőtlenség. A (2.28) jelölés használatával, ha*

$$\delta^*(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{\varphi_{*,l}^{-j+1}} \circ \Lambda \circ \varphi_{\diamond,l}^j(x) < \infty \quad (x \in X)$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\varphi_{*,l}^{-n}} \circ \varepsilon(\varphi_{\diamond,l}^n(x), \varphi_{\diamond,l}^n(y)) = 0 \quad (x, y \in X),$$

akkor létezik egy $g : X \rightarrow Y$ megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, melyre teljesül

$$(2.38) \quad d(g(x), f(x)) \leq \delta^*(x) \quad (x \in X)$$

és

$$(2.39) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*,l}^{-n} \circ f \circ \varphi_{\diamond,l}^n(x) \quad (x \in X).$$

Továbbá, ha a δ függvény rendelkezik a

$$\delta(x) \geq \omega_{\varphi_{*,l}^{-1}} \circ \Lambda(x) + \omega_{\varphi_{*,l}^{-1}} \circ \delta \circ \varphi_{\diamond,l}(x) \quad (x \in X)$$

tulajdonsággal, akkor

$$d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X).$$

Ezenfelül, ha létezik egy σ -szubadditív $\kappa : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ függvény, melyre $\kappa(x) \geq \omega_{\varphi_{*,l}^{-1}}(x)$ ($x \in X$) és

$$\sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j \circ \Lambda \circ \varphi_{\diamond,l}^{j-1}(x) < \infty \quad (x \in X),$$

akkor a (2.39)-ben definiált g függvény az egyetlen olyan megoldása (2.29)-nek, melyre a (2.38) egyenlőtlenség fennáll.

B i z o n y í t á s. A 2.3.1. Tétel tétel bizonyításának első lépésével analóg módon kapjuk, hogy

$$(2.40) \quad d(f \circ \varphi_{\circ, l}(x), \varphi_{*, l} \circ f(x)) \leq \Lambda(x)$$

minden $x \in X$ esetén, így fennáll a

$$\begin{aligned} d(f(x), \varphi_{*, l}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\circ, l}(x)) &= d(\varphi_{*, l}^{-1} \circ \varphi_{*, l} \circ f(x), \varphi_{*, l}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\circ, l}(x)) \\ &\leq \omega_{\varphi_{*, l}^{-1}} \circ d(f \circ \varphi_{\circ, l}(x), \varphi_{*, l} \circ f(x)) \leq \omega_{\varphi_{*, l}^{-1}} \circ \Lambda(x) \end{aligned}$$

egyváltozós függvényegyenlőtlenség tetszőleges $x \in X$ választásával. A 2.3.1. Tétel bizonyításában használt lépéseket használva belátható, hogy a 2.2.7. Tétel és a 2.2.9. Tétel feltételei teljesülnek a $\psi = \varphi_{*, l}^{-1}$, $\varphi = \varphi_{\circ, l}$ és $\gamma(x) = \omega_{\varphi_{*, l}^{-1}} \circ \Lambda(x)$ függvényekkel, melyből az állítás következik. $\square$

Most megfogalmazzuk a 2.3.2. Tétel megfelelőjét.

2.3.4. TÉTEL. *Legyen Y l -el egyértelműen osztható és tegyük fel, hogy*

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Lip}_{\alpha} \varphi_{*, l}^{-j} < \infty.$$

Ha $\varepsilon \geq 0$ és az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti a (2.36) egyenlőtlenséget, akkor létezik egy $g : X \rightarrow Y$ megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, melyre teljesül a (2.37) távolságbecslés és g a (2.39) formulával definiált. Továbbá g az egyetlen olyan megoldása a (2.29) egyenletnek, amelyre (2.37) bal oldala korlátos.

B i z o n y í t á s. A bizonyítás lépései megegyeznek a 2.3.2. Tételnél használtakkal. $\square$

A 2.3.1. és 2.3.3. Tételek számos, a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási eredménynek általánosításai. A vizsgált függvények értelmezési tartománya és értékkészlete a Cauchy-egyenlet stabilitását művelettel ellátott halmazokon tárgyaló eredmények között a legáltalánosabb (vannak eredmények hagyományos értelemben vett művelettel nem rendelkező, úgynevezett hiper csoportokra vonatkozóan is, lásd [Szék03]), továbbá a jobb oldalon szereplő $\varepsilon(x, y)$ függvényre vonatkozó feltételrendszernek eleget tevő függvények sora is igen széleskörű.

2.3.5. PÉLDA. Vizsgáljuk meg mit mondhatunk, ha X valós normált tér és Y valós Banach-tér. Ebben az esetben a Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási egyenlőtlenség az

$$(2.41) \quad \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(x, y) \quad (x, y \in X)$$

alakot ölti. Nyilvánvalóan X és Y l -hatványszimmetrikusak tetszőleges $l \geq 2$ egész szám esetén, továbbá a távolság eltolás invarianciája miatt teljesül a (2.27) egyenlőtlenség is. Tehát tetszőleges $l \geq 2$ egész szám esetén megfogalmazható az $\varepsilon(x, y)$ függvényre vonatkozó olyan feltételrendszer, mely biztosítja a stabilitás teljesülését.

Nézzük meg az $l = 2$ esetet. Ekkor a (2.3)-ban definiált hatványfüggvények $\varphi_{*,2}(x) = \varphi_{\circ,2}(x) = 2x$ alakúak, így $\omega_{\varphi_{*,2}}(t) = \omega_{\varphi_{\circ,2}}(t) = 2t$. A 2.3.1. és 2.3.3. Tételek alapján, ha a

$$(2.42) \quad \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \cdot \varepsilon\left(\frac{1}{2^j}x, \frac{1}{2^j}x\right) < \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \varepsilon\left(\frac{1}{2^n}x, \frac{1}{2^n}y\right) < \infty$$

vagy

$$(2.43) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \varepsilon(2^j x, 2^j x) < \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \varepsilon(2^n x, 2^n y) < \infty$$

feltételrendszerek valamelyike teljesül minden $x, y \in X$ esetén, akkor létezik egy olyan $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, amelyre az $\|f(x) - g(x)\|$ kifejezés majorálható a (2.42)-ben, illetve a (2.43)-ban definiált konvergens sor összegfüggvényével.

Könnyen látható, hogy például az $\varepsilon(x, y) = \mathcal{H}(\|x\|, \|y\|)$ típusú függvények teljesítik ezen feltételek valamelyikét, ha a $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ függvény α -rendben homogén, ahol $\alpha \neq 1$.

2.3.6. PÉLDA. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált tér az $\|\cdot\|_F$ értékeléssel ellátott F test felett, $(Y, \|\cdot\|_K)$ egy Banach-tér a $\|\cdot\|_K$ értékeléssel ellátott K test felett, $l \geq 2$ egész szám és $f : X \rightarrow Y$ pedig egy olyan függvény, melyre teljesül

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1),$$

ahol $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -rendben homogén függvény. Ekkor a (2.3)-ban definiált hatványfüggvények $\varphi_{*,l}(x) = \varphi_{\circ,l}(x) = lx$ alakúak, így

$$\omega_{\varphi_{\circ,l}}(t) = \sup \{ \|lx - ly\|_1 \mid x, y \in Y, \|x - y\|_1 \leq t \} = |l|_F t \quad (t \geq 0),$$

továbbá $\omega_{\varphi \circ, l}(t) = |l|_K t$. A (2.28)-ban definiált Λ függvényre kapjuk, hogy

$$\Lambda(x) = \sum_{j=1}^{l-1} \mathcal{H}(\|jx\|_1, \|x\|_1) = \sum_{j=1}^{l-1} \mathcal{H}(|j|_F, 1) \|x\|_1^\alpha = \sigma(l) \|x\|_1^\alpha,$$

ahol $\sigma(l)$ éppen az (1.10) formula által definiált függvény. A 2.3.1. és 2.3.3. Tételek alapján, ha az

$$(2.44) \quad \frac{1}{|l|_K} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|l|_F^\alpha}{|l|_K} \right)^j \|x\|_1^\alpha < \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|l|_F^\alpha}{|l|_K} \right)^n \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) < \infty$$

vagy

$$(2.45) \quad \frac{1}{|l|_F^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{|l|_K}{|l|_F^\alpha} \right)^j \|x\|_1^\alpha < \infty \text{ és } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|l|_K}{|l|_F^\alpha} \right)^n \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1) < \infty$$

feltételrendszerek valamelyike teljesül minden $x, y \in X$ esetén, akkor létezik egy olyan $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, amelyre az $\|f(x) - g(x)\|_2$ kifejezés majorálható a (2.44)-ben, illetve a (2.45)-ben definiált konvergencia sor összegfüggvényével. Nyilvánvalóan ezen feltételek valamelyike teljesül, ha létezik olyan l egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$. Ekkor a fenti sorok összegfüggvénye $\frac{\sigma(l)}{||l|_K - |l|_F^\alpha|} \|x\|_1^\alpha$, tehát éppen az 1.2.4. Tételben megfogalmazottakat kaptuk.

Amint azt láttuk az előzőekben, a kétváltozós Cauchy-egyenlet stabilitásának vizsgálatát visszavezettük egyváltozós függvényekre vonatkozó eredményekre. Sok esetben nem könnyű leellenőrizni, hogy teljesülnek az egyváltozós stabilitási tételek feltételei. Azonban egyszerűen meg tudunk fogalmazni a Cauchy-egyenlettel kapcsolatosan általános stabilitási tételeket az előző alfejezetben leírtaknak megfelelően. A következő tétel a 2.2.4. Tétel átírata a Cauchy-egyenlete, melyől látható, hogy a Cauchy-egyenlet stabilitásának egy elégséges feltétele két olyan φ és ψ homomorfizmus létezése, melyekre a (2.12) iteráció konvergencia, ψ folytonos, (2.13) megoldható és teljesül a

$$(2.46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\psi^n} \circ \varepsilon(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) = 0 \quad (x, y \in X)$$

feltétel.

2.3.7. TÉTEL. Legyen $(X, \diamond)$ grupoid, $(Y, *, d)$ teljes metrikus grupoid és f egy olyan függvény, melyre teljesül a (2.30) egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy léteznek $\varphi : X \rightarrow X$ és $\psi : Y \rightarrow Y$ homomorfizmusok, melyekre a (2.12)-ben definiált $(g_n(x))$ sorozat konvergens minden $x \in X$ esetén, a ψ függvény folytonos és teljesül a (2.46) feltétel. A

$$(2.47) \quad \gamma(x) = d(f(x), g_1(x)) \quad (x \in X),$$

jelölést bevezetve, létezik egy g megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, melyre

$$(2.48) \quad d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

a

$$(2.49) \quad \delta(x) \geq \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x) \quad (x \in X)$$

minden δ megoldása esetén. Továbbá g a (2.19) formulával definiált.

B i z o n y í t á s. Alkalmazva a 2.2.1. Lemmát kapjuk, hogy a (2.19) iterációval definiált g függvény teljesíti (2.48)-at minden δ megoldására (2.49)-nek. Felhasználva ψ folytonosságát továbbá azt, hogy φ és ψ homomorfizmusok, a 2.3.1. Tétel bizonyításában látható módon igazolható, hogy g megoldása (2.29)-nek is. $\square$

Az előző tételből és a 2.2.6. Lemmából azonnal kapjuk a következő tételt, mely a 2.2.7. Tétel megfelelője:

2.3.8. TÉTEL. Legyen $(X, \diamond)$ grupoid, $(Y, *, d)$ teljes metrikus grupoid és f egy megoldása a (2.30) egyenlőtlenségnek. Ha léteznek $\varphi : X \rightarrow X$ és $\psi : Y \rightarrow Y$ homomorfizmusok, melyekre (2.46) teljesül, ψ folytonos és a (2.47) formulában definiált γ függvény használatával, a (2.22)-ben definiált $\chi(x)$ függvény véges minden $x \in X$ esetén, akkor létezik egy g megoldása a (2.29) Cauchy-egyenletnek, melyre

$$d(g(x), f(x)) \leq \chi(x)$$

és g a (2.19) formulával definiált. Továbbá fennáll a

$$d(g(x), f(x)) \leq \delta(x)$$

egyenlőtlenség is (2.49) minden $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ megoldása esetén.

2.4 TOVÁBBI TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Ebben a részben egy általános stabilitási tételt fogalmazunk meg az egyváltozós függvényegyenletre vonatkozó eredményeink alapján. A tétel egy alkalmazásaként levezetünk egy stabilitási tételt a

$$(2.50) \quad (-1)^m f(x) + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x \diamond y^i) = m! f(y) \quad (x, y \in X)$$

általánosított monom egyenletre vonatkozóan, ahol $(X, \diamond)$ egy grupoid.

2.4.1. TÉTEL. *Legyen X egy nemüres halmaz a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ bináris operátorokkal, (Y, d) egy teljes metrikus tér és $\varepsilon \geq 0$ valós szám. Ezenfelül tegyük fel, hogy $\varphi : X \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow Y$, $f : X \rightarrow Y$ és $F : Y^k \rightarrow [0, \infty[$ olyan függvények, hogy φ endomorfizmus a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ operátorokra nézve, F folytonos, továbbá az*

$$(2.51) \quad L = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Lip } \psi^n < \infty,$$

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \varepsilon \quad (x \in X),$$

$$(2.52) \quad F(\psi^n(y_1), \dots, \psi^n(y_k)) \leq \text{Lip } \psi^n F(y_1, \dots, y_k) \quad (n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_k \in Y)$$

és

$$(2.53) \quad \sup_{x, y \in X} F(f(x \diamond_1 y), \dots, f(x \diamond_k y)) < \infty$$

feltételek teljesülnek. Ekkor létezik egy $g : X \rightarrow Y$ függvény, mely megoldása az

$$(2.54) \quad F(g(x \diamond_1 y), \dots, g(x \diamond_k y)) = 0 \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenletnek és kielégíti a

$$(2.55) \quad d(f(x), g(x)) \leq L\varepsilon \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenséget.

B i z o n y í t á s. Defináljuk a $g_n : X \rightarrow Y$ függvényeket a következőképpen:

$$g_n(x) = \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in X).$$

Legyen $g : X \rightarrow Y$,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \quad (x \in X).$$

A 2.2.10. Tétel alapján a g függvény értelmezve van minden $x \in X$ esetén és teljesül rá a (2.55) tulajdonság. Továbbá, a (2.52) egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\begin{aligned} & F(g_n(x \diamond_1 y), \dots, g_n(x \diamond_k y)) \\ &= F(\psi^n \circ f \circ \varphi^n(x \diamond_1 y), \dots, \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x \diamond_k y)) \\ &\leq \text{Lip } \psi^n F(f \circ \varphi^n(x \diamond_1 y), \dots, f \circ \varphi^n(x \diamond_k y)) \\ &\leq \text{Lip } \psi^n F(f \circ \varphi^n(x) \diamond_1 \varphi^n(y), \dots, f \circ \varphi^n(x) \diamond_k \varphi^n(y)), \end{aligned}$$

így (2.51)-ből, (2.53)-ból és F folytonosságából adódik (2.54). $\square$

A (2.54) függvényegyenlet számos jól ismert függvényegyenletet magába foglal. Legyen például $(X, \diamond)$ egy grupoid, Y egy valós Banach-tér és $m \in \mathbb{N}$. Ha $x, y \in X$, legyen

$$x \diamond_1 y := x, \quad x \diamond_i y := x \diamond y^{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, m+1) \quad \text{és} \quad x \diamond_{m+2} y := y.$$

Legyen $F : Y^{m+2} \rightarrow [0, \infty[$,

$$F(y_1, \dots, y_{m+2}) := \left\| (-1)^m y_1 + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} y_{i+1} - m! y_{m+2} \right\|$$

tetszőleges $y_1, \dots, y_{m+2} \in Y$ esetén. Ekkor (2.54) alakja

$$\left\| \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x \diamond_{i+1} y) - m! f(y) \right\| = 0 \quad (x, y \in X),$$

amely ekvivalens a (2.50) m -edrendű monom egyenlettel. Tegyük fel továbbá, hogy X hatványasszociatív és l -hatványszimmetrikus grupoid. Esetünkben a $\varphi : X \rightarrow X$, $\varphi(x) = x^l$ függvény endomorfizmus a $\diamond_1, \dots, \diamond_{m+2}$ operátorokra nézve. A $\psi : Y \rightarrow Y$, $\psi(x) = \frac{1}{l^m} x$ függvényre teljesülnek a (2.51) és (2.52) feltételek, továbbá

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{l^m} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{l^m}} = \frac{l^m}{l^m - 1}.$$

Ahhoz, hogy alkalmazhassuk a 2.4.1. Tételt és a (2.50) monom egyenlet stabilitási tételét megfogalmazhassuk már csak azt kell belátnunk, hogy a $d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x))$ távolság felülről becsülhető egy valós számmal, ha az f függvény kielégíti a (2.53) egyenlőtlenséget. Ehhez felhasználjuk a következő, Gilányi Attila által igazolt Lemmát.

2.4.2. LEMMA. [Gil99] Legyen $(X, \diamond)$ egy hatványasszociatív grupoid, Y egy normált tér, m egy pozitív egész és $f : X \rightarrow Y$ egy adott függvény. Ha valamely nem negatív ε valós számra fennáll a

$$(2.56) \quad \|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\| \leq \varepsilon \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség, akkor bármely l pozitív egész szám esetén

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) = \left\| f(x) - \frac{1}{l^m} f(x^l) \right\| \leq \frac{1}{l^m} \cdot \frac{l^m + 1}{m!} \varepsilon \quad (x \in X).$$

A fenti gondolatmenetet összefoglalva, igazoltuk a következő stabilitási tételt:

2.4.3. TÉTEL. [Gil99] Legyen $m \geq 1$ és $l \geq 2$ adott egész számok, $(X, \diamond)$ egy hatványasszociatív, l -hatványszimmetrikus grupoid, Y Banach-tér és $\varepsilon \geq 0$ egy valós szám. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény kielégíti a (2.56) egyenlőtlenséget, akkor létezik egy g megoldása a (2.50) monom egyenletnek, melyre

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \frac{1}{l^m - 1} \frac{l^m + 1}{m!} \varepsilon \quad (x \in X).$$

2.5 EGY PÉLDA, AMIKOR A HYERS-MÓDSZER NEM MŰKÖDIK

A most következő részben olyan grupoidok felett értelmezett Cauchy-egyenletre látunk példát, amelyre a 2.3 alfejezet eredményei nem működnek, viszont a stabilitás fennáll. Ezzel a példával rámutatunk arra, hogy a Hyers-féle iterációs eljárás, amellyel számos kutató igazolta különféle körülmények között a Cauchy-egyenlet stabilitását, nem mindig vezet eredményre.

Legyenek $(X, \diamond)$, $(Y, *)$ grupoidok. A Cauchy-egyenlet Hyers-Ulam értelemben vett stabilitása alatt a következőt értjük:

Azt mondjuk, hogy a

$$(2.1) \quad g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-egyenlet *Hyers-Ulam értelemben stabil*, ha minden pozitív δ esetén létezik egy $\varepsilon > 0$ úgy, hogy a

$$(2.57) \quad d(f(x \diamond y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon \quad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség tetszőleges f megoldása esetén található olyan g megoldása (2.1)-nek, melyre $d(f(x), g(x)) \leq \delta$ minden $x \in X$ esetén.

A (2.3)-ban bevezetett jelölést használva, ha a Cauchy-egyenletben és (2.57)-ben y helyére x -et írunk, a következő egyváltozós függvényegyenletet és egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(2.58) \quad g \circ \varphi_{2,\diamond}(x) = \varphi_{2,*} \circ g(x) \quad (x \in X)$$

és

$$(2.59) \quad d(f \circ \varphi_{2,\diamond}(x), \varphi_{2,*} \circ f(x)) \leq \varepsilon \quad (x \in X).$$

A Cauchy-egyenlet azon g megoldásai megkonstruálásához, amelyek a (2.59) stabilitási egyenlőtlenségnek eleget tevő f függvényeket közelítik, a *Hyers-módszer*, vagy más néven *direkt módszer* a következőképpen hajtható végre: A $\varphi_{2,*}$ és $\varphi_{2,\diamond}$ függvények valamelyikének invertálhatóságát feltételezve, a

$$(2.60) \quad g_1 := f, \quad g_{n+1} = \varphi_{2,*}^{-1} \circ g_n \circ \varphi_{2,\diamond} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(2.61) \quad g_1 := f, \quad g_{n+1} = \varphi_{2,*} \circ g_n \circ \varphi_{2,\diamond}^{-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

iterációk egyikéről megmutatjuk, hogy a (2.59) egyenlőtlenség tetszőleges f megoldása esetén konvergál egy olyan g függvényhez, amely megoldása (2.58)-nak és a Cauchy-egyenletnek, továbbá $d(f(x), g(x)) \leq c\varepsilon$ valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén.

A következőkben olyan négyzetszimmetrikus grupoidokon értelmezett függvényekre vonatkozóan igazoljuk a Cauchy-egyenlet stabilitását, ahol a megfelelő Hyers-sorozatok határfüggvényei vagy nem is léteznek, vagy megoldásai ugyan az egyváltozós (2.58) függvényegyenletnek, de a (2.59) egyenlőtlenség összes megoldása esetén nem teljesítik a Cauchy-egyenletet. Ezenfelül, a határfüggvények nem közelíthetik meg tetszőlegesen az eredeti függvényt.

EREDMÉNYEK

A továbbiakban X egy racionális számok feletti vektorteret jelöl. A

$$(2.62) \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt[4]{g(x)g(y)} \quad (x, y \in H)$$

függvényegyenlet stabilitásával fogunk foglalkozni, ahol $H \subset X$ egy középpontosan konvex halmaz, azaz tetszőleges $x, y \in H$ esetén $\frac{x+y}{2} \in H$. Az

$$x \diamond y := \frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad x * y := \sqrt[4]{xy}$$

jelöléseket bevezetve könnyen látható, hogy $(H, \diamond)$ és $([0, \infty[, *)$ négyzetszimmetrikus grupoidok, a (2.62) függvényegyenlet speciális esete a Cauchy-egyenletnek, a rá vonatkozó stabilitási egyenlőtlenség pedig az

$$(2.63) \quad \left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \sqrt[4]{f(x)f(y)} \right| \leq \varepsilon \quad (x, y \in H)$$

alakot ölti.

(2.62)-ben és (2.63)-ban az $y = x$ helyettesítést elvégezve a következő egyváltozós egyenletet és egyenlőtlenséget kapjuk:

$$(2.64) \quad g(x) = \sqrt{g(x)} \quad (x \in H)$$

és

$$(2.65) \quad |f(x) - \sqrt{f(x)}| \leq \varepsilon \quad (x \in H).$$

A (2.60) iteráció alakja most

$$g_n(x) = (f(x))^{2^{n-1}} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

amely nem konvergens mindazon $x \in X$ pontokban, amelyekre $f(x) > 1$. Ha $f(x) \leq 1$ minden $x \in X$ esetén, akkor

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } f(x) < 1, \\ 1 & \text{ha } f(x) = 1, \end{cases}$$

amely nyilvánvalóan megoldása (2.64)-nek. A most következőkben azonban olyan függvényeket konstruálunk, melyekre $g(x)$ nem lesz megoldása a Cauchy-egyenletnek. Ehhez tegyük fel, hogy $0 < \varepsilon \leq 1$ továbbá H -nak van legalább két eleme. Legyen $x_0 \in H$ rögzített. Legyen $f_1 : H \rightarrow [0, \infty[$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_0, \\ 1 + \varepsilon & \text{ha } x \neq x_0, \end{cases}$$

és $f_2 : H \rightarrow [0, \infty[$,

$$(2.66) \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_0, \\ 1 - \varepsilon & \text{ha } x \neq x_0. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 egyaránt teljesítik a (2.63) egyenlőtlenséget. Természetesen az f_1 -re vonatkozó (2.60) iteráció az $x \neq x_0$ pontokban nem konvergens, hiszen ott $f(x) > 1$. Az f_2 -re vonatkozó (2.60) iteráció konvergens és konvergál a

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = x_0, \\ 0 & \text{ha } x \neq x_0, \end{cases}$$

függvényhez, amely megoldása (2.64)-nek, azonban, ahogy azt később látni fogjuk, nem feltétlenül teljesíti a (2.62) egyenletet. Nyilvánvaló az is, hogy nem létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre tetszőleges ε esetén teljesül a $d(f_2(x), g(x)) \leq c\varepsilon$ egyenlőtlenség. Sőt, ha $\varepsilon \approx 0$, akkor $x \neq x_0$ esetén $d(f_2(x), g(x)) \approx 1$.

Teljesen hasonlóan, a (2.61) iterációra kapjuk, hogy

$$g_n(x) = (f(x))^{\frac{1}{2^n-1}} \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}),$$

tehát

$$g(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } f(x) = 0, \\ 1 & \text{ha } f(x) \neq 0, \end{cases}$$

amely megoldása (2.64)-nek. Tegyük fel, hogy H -nak van legalább két eleme és $0 < \varepsilon \leq 1$. Legyen $f_3 : H \rightarrow [0, \infty[$,

$$(2.67) \quad f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = x_0, \\ \varepsilon^2 & \text{ha } x \neq x_0, \end{cases}$$

ahol $x_0 \in H$ rögzített. Egyszerűen belátható, hogy az f_3 függvény kielégíti (2.63)-at, azonban a Hyers iteráció a

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = x_0, \\ 1 & \text{ha } x \neq x_0 \end{cases}$$

függvényhez tart, amely teljesíti ugyan (2.64)-et, de csakúgy, mint az előző esetben, nem feltétlenül megoldása (2.62)-nek. Továbbá nem létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, amelyre tetszőleges ε esetén teljesül a $d(f_3(x), g(x)) \leq c\varepsilon$ egyenlőtlenség, hiszen ha ε közelítőleg 0, akkor a $d(f_3(x), g(x))$ kifejezés értéke közelítőleg 1, ha $x \neq x_0$.

2.5.1. MEGJEGYZÉS. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha a (2.60) és (2.61) iterációkban valamely $l \geq 2$ egész szám esetén a $\varphi_{l,*}$ és $\varphi_{l,*}$ függvényekkel dolgozunk a $\varphi_{2,*}$ és $\varphi_{2,*}$ függvények helyett, ugyanezekre az eredményekre jutottunk.

A következőkben bebizonyítjuk a (2.64) és (2.62) függvényegyenletek stabilitását. Azonnal látható, hogy a (2.64) egyenlet megoldásai 0–1 értékű függvények, azaz H valamely részhalmazának karakterisztikus függvényei. Az alábbi eredmény azt mutatja, hogy ha f egy megoldása (2.65)-nek, akkor közel van egy karakterisztikus függvényhez is, tehát a (2.64) függvényegyenlet Hyers-Ulam értelemben stabil.

2.5.2. TÉTEL. Legyen $H \subset X$ egy nem üres halmaz és legyen $f : H \rightarrow [0, \infty[$ egy megoldása a (2.65) függvényegyenlőtlenségnek valamely $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 := 4/25$ esetén. Ekkor tetszőleges $x \in H$ választásával

$$f(x) \leq \frac{25\varepsilon^2}{16} \quad \text{vagy} \quad -\frac{9\varepsilon}{4} \leq f(x) - 1 \leq 2\varepsilon.$$

B i z o n y í t á s. Legyen

$$A := \left\{ x \in H : -\frac{9\varepsilon}{4} \leq f(x) - 1 \leq 2\varepsilon \right\}$$

és

$$B := \left\{ x \in H : f(x) \leq \frac{25\varepsilon^2}{16} \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy az A és B halmazok H -nak egy osztályozását alkotják. Legyen $x \in H$ tetszőleges. A (2.65) egyenlet ekvivalens a

$$(2.68) \quad -\varepsilon \leq \left(\sqrt{f(x)} \right)^2 - \sqrt{f(x)} \leq \varepsilon$$

másodfokú egyenlőtlenségekkel. Mivel $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = 4/25$, a következő becslést kapjuk:

$$(2.69) \quad \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} = \frac{4\varepsilon}{2(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon})} \leq \frac{2\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon_0}} = \frac{2\varepsilon}{1 + \sqrt{9/25}} \leq \frac{5}{4}\varepsilon.$$

Felhasználva (2.69)-et, (2.68)-ból kapjuk, hogy vagy

$$0 \leq f(x) = \left(\sqrt{f(x)} \right)^2 \leq \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \right)^2 \leq \frac{25\varepsilon^2}{16}$$

azaz $x \in B$, vagy

$$\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \leq \sqrt{f(x)} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2},$$

következésképpen, (2.69) és

$$(2.70) \quad \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon} - 1}{2} = \frac{4\varepsilon}{2(\sqrt{1 + 4\varepsilon} + 1)} \leq \varepsilon$$

felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 - \frac{9\varepsilon}{4} &\leq 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} - \varepsilon = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2} \right)^2 \\ &\leq f(x) \\ &\leq \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon} - 1}{2} + \varepsilon \leq 1 + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

amely éppen azt jelenti, hogy $x \in A$.

Megmutattuk tehát, hogy $A \cup B = H$. Másrészt, mivel $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = 4/25$, azonnal látható, hogy $A \cap B = \emptyset$. $\square$

Ahhoz, hogy megvizsgáljuk a kétváltozós (2.62) függvényegyenlet stabilitását, bevezetjük a középpontosan konvex halmazok ideáljának fogalmát. Azt mondjuk, hogy az $I \subset H$ halmaz a középpontosan konvex H halmaznak a *középpont operátorra vonatkozó ideálja*, ha

$$x \in H \text{ és } y \in I \implies \frac{x + y}{2} \in I.$$

Nyilvánvalóan $\emptyset$ és H mindig ideálok H -ban, de általában léteznek más ideálok is. Például, ha $H = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, akkor a $]0, 1[$, $[0, 1[$, és $]0, 1]$ halmazok szintén ideálok H -ban. Ahogy azt látni fogjuk, bizonyos feltételek teljesülésével biztosítható, hogy H -nak csak triviális ideáljai legyenek.

Azt mondjuk, hogy a H halmaz *$\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt*, ha minden $p \in H$ pont és minden $v \in X$ vektor esetén létezik egy τ pozitív szám úgy, hogy $p + tv \in H$ minden $t \in [0, \tau] \cap \mathbb{Q}$ esetén. Nyilvánvaló, hogy minden nyílt halmaz (egy topológikus vektortérben) $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt, de a fordított állítás nem igaz.

2.5.3. LEMMA. *Legyen $H \subset X$ egy $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt középpontosan konvex halmaz. Ekkor H -nak csak triviális ideáljai vannak a középpont operátorra vonatkozóan.*

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy $I \subset H$ egy nem üres ideál és legyen $y \in I$ rögzített. Indukcióval igazolható, hogy tetszőleges $x \in H$ esetén

$$(2.71) \quad \frac{2^n - 1}{2^n}x + \frac{1}{2^n}y \in I.$$

Legyen $x \in H$ tetszőleges. Mivel H $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt, elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül, hogy

$$x_n = x + \frac{1}{2^n - 1}(x - y) \in H.$$

Tehát

$$\frac{2^n - 1}{2^n}x_n + \frac{1}{2^n}y = x,$$

amely (2.71) miatt azt jelenti, hogy $x \in I$. Így beláttuk, hogy H minden eleme benne van I -ben, azaz $H = I$, amelyből már következik a lemma állítása. $\square$

A következő tétel, mint az később látni fogjuk, a (2.62) egyenlet stabilitását fogalmazza meg.

2.5.4. TÉTEL. *Legyen $H \subset X$ egy $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt középpontosan konvex halmaz és legyen $f : H \rightarrow [0, \infty[$ egy megoldása a (2.63) függvényegyenlőtlenségnek valamely $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 := 4/25$ esetén. Ekkor*

$$f(x) \leq \frac{25\varepsilon^2}{16} \quad (x \in H) \quad \text{vagy} \quad -\frac{9\varepsilon}{4} \leq f(x) - 1 \leq 2\varepsilon \quad (x \in H).$$

B i z o n y í t á s. Definiáljuk az A és B halmazokat a 2.5.2. Tétel bizonyításában leírtak szerint. Ezek a halmazok H egy osztályozását alkotják, így a bizonyítás teljességéhez csak azt kell igazolnunk, hogy valamelyikük üres. Ehhez belátjuk, hogy B egy ideálja H -nak a középpont operátorra vonatkozóan.

Legyen $x \in H$ és $y \in B$. Elegendő igazolnunk, hogy $\frac{x+y}{2} \notin A$, hiszen ekkor $\frac{x+y}{2} \in H \setminus A = B$. A (2.63) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \varepsilon + \sqrt{\sqrt{f(x)}\sqrt{|f(y)|}} \leq \varepsilon + \sqrt{\sqrt{1+2\varepsilon}\sqrt{\frac{25\varepsilon^2}{16}}} \\ &\leq \varepsilon_0 + \sqrt{\sqrt{1+2\varepsilon_0}\frac{5\varepsilon_0}{4}} = \frac{4}{25} + \frac{\sqrt[4]{33}}{5} < \frac{16}{25} = 1 - \frac{9\varepsilon_0}{4} \leq 1 - \frac{9\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

amely valóban azt jelenti, hogy $\frac{x+y}{2} \notin A$. A 2.5.3. Lemma alapján B triviális ideál, tehát $B = H$ vagy $B = \emptyset$, amelyből adódik, hogy $A = H$. Ezzel a bizonyítás készen van. $\square$

Nyilvánvaló, hogy a $g \equiv 0$ és $g \equiv 1$ függvények megoldásai a (2.62) függvényegyenletnek. A 2.5.4. Tételből $\varepsilon = 0$ választásával azonnal kapjuk, hogy a fordított állítás is igaz, így a következő eredményt fogalmazhatjuk meg:

2.5.5. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen X egy lineáris tér, $H \subset X$ egy $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt középpontosan konvex halmaz. A $g : H \rightarrow [0, \infty[$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (2.62) egyenletnek, ha $g \equiv 0$ vagy $g \equiv 1$.*

Most már a 2.5.4. Tétel a (2.62) függvényegyenlet stabilitási tételeként értelmezhető, hiszen azt állítja, hogy ha f megoldása a (2.63) stabilitási egyenlőtlenségnek, akkor közel van a (2.62) függvényegyenlet egy megoldásához, azaz a (2.62) függvényegyenlet Hyers-Ulam értelemben stabil.

Másrészt a 2.5.5. Következmény mutatja, hogy ha a (2.62) egyenletet egy $\mathbb{Q}$ -algebrailag nyílt középpontosan konvex halmazon tekintjük, akkor a (2.66) és (2.67) formulákkal definiált f_2 és f_3 függvényekre vonatkozó Hyers-iterációk határértékei nem megoldásai (2.62)-nek, így a stabilitás nem látható be a direkt módszerrel.

ÖSSZEFOGLALÓ

A disszertációban függvényegyenletek stabilitási problémáival foglalkozunk különféle struktúrák között értelmezett függvényeket tekintve.

Az első fejezetben olyan nulla karakterisztikájú testeken dolgozunk, melyeken adott egy értékelés, azaz egy valós értékű, pozitív definit, multiplikatív, szubaditív függvény. Ilyen értékelt test például a valós számok halmaza a standard abszolút értékkel, illetve valamely p prímszám esetén a p -adikus számok halmaza a p -adikus értékeléssel. Az értékelt testek feletti lineáris tereken bevezetjük a norma fogalmát. A klasszikus norma fogalomhoz képest fontos különbség, hogy a normából egy racionális számnak az értékelése emelhető ki, amely nem feltétlenül az abszolút érték. Természetesnek mondható, hogy először a függvényegyenletek stabilitáselméletének alapvető problémáját, a Cauchy-egyenlet stabilitását vizsgáljuk, és a következő eredményt fogalmazzuk meg (1.2.4. Tétel):

TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Legyen α egy rögzített valós szám és $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -rendben homogén függvény. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti az*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ additív függvény, melyre tetszőleges $x \in X$ esetén

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{|l|_K - |l|_F^\alpha} \|x\|_1^\alpha,$$

továbbá

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n x) \quad (x \in X),$$

ahol $r \in \{l, \frac{1}{l}\}$ olyan racionális szám, melyre $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Ha még $K = F$, $|\cdot|_F$ nem triviális értékelés, melyre nézve $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű F -ben, továbbá minden $x \in X$ esetén az $f_x : t \mapsto f(tx)$ ($t \in F$) függvény korlátos valamely nem nulla középpontú, pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor g lineáris.

A $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ esetben javítjuk az eredeti f függvény és az approximáló g függvény távolságbecslését (1.2.8. Tétel), igazoljuk a tétel bizonyos

értelemben vett megfordítását (1.2.9. Megjegyzés) és példákkal is illusztráljuk azt (1.2.10. Példa, 1.2.11. Példa).

Megvizsgáljuk azokat a kivételes eseteket, amikor nem található olyan $l \in \mathbb{N}$, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$ teljesülne. Az értékelések típusától függően három különböző esetet kapunk, melyek közül az egyik esetben ismert eredmények alapján arra következtetünk, hogy a stabilitás nem teljesül, a másik kettő esetben azonban eldöntetlen a kérdés.

A tétel alkalmazásaként igazoljuk a Jensen-egyenlet stabilitását (1.2.13. Tétel), majd megmutatjuk a gyűrű homomorfizmusok stabilitását is (1.3.1. Tétel):

TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ normált algebra az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ Banach-algebra az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, α és β rögzített valós számok, $\varepsilon \geq 0$ továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -homogén függvény. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, melyre $|r|_F^\alpha > |r|_K$, $|r|_F^\beta > |r|_K$ vagy $|r|_F^\alpha < |r|_K$, $|r|_F^\beta < |r|_K$. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény tetszőleges $x, y \in X$ esetén teljesíti az*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

és

$$\|f(xy) - f(x)f(y)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta$$

egyenlőtlenségeket, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ gyűrű homomorfizmus, melyre tetszőleges $x, y \in X$ választásával

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha$$

valamely $\delta \in \mathbb{R}$ esetén. Továbbá

$$g(x)(f(y) - g(y)) = (f(x) - g(x))g(y) = 0 \quad (x, y \in X).$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha létezik olyan $x \in X$, melyre $g(x)$ nem null-osztó Y -ban, akkor $f = g$, azaz f gyűrű homomorfizmus. Speciálisan, ha Y nullosztó-mentes, akkor $g = 0$ vagy $f = g$, azaz

$$\|f(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

vagy f gyűrű homomorfizmus. Ez a gyűrű homomorfia egyenletének egyfajta szuperstabilitását jelenti. További feltételek teljesülése esetén igazoljuk azt is, hogy a g függvény algebra homomorfizmus (1.3.3. Tétel).

Ezt követően a

$$\Delta_y^n g(x) = n!g(y)$$

n -edfokú monom egyenlettel foglalkozunk ($n \in \mathbb{N}$), amely $n = 1$ esetén éppen a Cauchy-egyenlet, $n = 2$ esetén pedig a norma-négyzet egyenlet. Igazolunk két lemmát, melyek közül az első (1.4.6. Lemma) a későbbi stabilitási tételünk egzisztenciális, a második (1.4.7. Lemma) pedig az unicitási részének belátására szolgál. Majd megfogalmazzuk a monom egyenletre vonatkozó stabilitási tételt (1.4.8. Tétel):

TÉTEL. *Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett, $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett, α egy rögzített valós szám továbbá $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ egy α -homogén függvény. Ha az $f : X \rightarrow Y$ függvény teljesíti a*

$$\|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

egyenlőtlenséget és létezik egy l pozitív egész szám, melyre $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, akkor egyértelműen létezik egy $g : X \rightarrow Y$ monom függvény, melyre

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

valamely $(l$ -től függő) $\delta \in \mathbb{R}$ esetén.

Csakúgy, mint a Cauchy-egyenletnél, a $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ esettel külön foglalkozunk.

Ezt követően megvizsgáljuk a tételben szereplő g függvény homogenitását, melyhez először igazolunk egy állítást (1.4.11. Lemma), amely az n -additív függvények regularitási tulajdonságának egyfajta kiterjesztéséről szól, majd belátjuk az alábbi tételt (1.4.12. Tétel):

TÉTEL. *Legyen F egy nulla karakterisztikájú test valamely nem triviális $|\cdot|_F$ értékeléssel, melyre vonatkozóan a racionális számok halmaza mindenütt sűrű F -ben és legyen $(Y, \|\cdot\|)$ egy normált tér F felett. Tegyük fel továbbá, hogy $g : F \rightarrow Y$ egy n -edfokú monom függvény. Ha g korlátos valamely pozitív sugarú nyílt gömbön, akkor $g(t) = t^n g(1)$.*

Most már a monom egyenletre vonatkozó stabilitási tételünket meg tudjuk fogalmazni olyan feltételekkel, amelyekkel biztosíthatjuk az approximáló függvény n -homogenitását (1.4.13. Tétel).

A fejezet utolsó részében a

$$\Delta_{y_1, y_2, \dots, y_n} g(x) = 0$$

Fréchet-egyenlet stabilitását vizsgáljuk ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Egy technikai eredmény (1.5.4. Állítás) és egy, az n -additív függvények stabilitására vonatkozó állítás

(1.5.5. Lemma) igazolása után megfogalmazzuk az alfejezet fő eredményét (1.5.6. Tétel):

TÉTEL. Legyen $(X, \|\cdot\|_1)$ egy normált tér az $|\cdot|_F$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú F test felett és $(Y, \|\cdot\|_2)$ egy Banach-tér az $|\cdot|_K$ értékeléssel ellátott nulla karakterisztikájú K test felett. Tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvényre teljesül a

$$\|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \dots \|h_n\|_1^\alpha \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

egyenlőtlenség valamely α és β valós számok esetén. Ekkor, ha létezik egy l pozitív egész szám, melyre

$$|l|_F^\alpha > |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} > |l|_K \quad \text{vagy} \quad |l|_F^\alpha < |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} < |l|_K,$$

akkor léteznek olyan szimmetrikus, k -additív $G_k : X^k \rightarrow Y$ ($1 \leq k \leq n-1$) függvények, melyekre $\beta \neq 0$ esetén

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \quad (x \in X),$$

ahol $G_k^*(x) = G_k(x, \dots, x)$ ($x \in X, k = 1, \dots, n-1$), azaz f egy legfeljebb $n-1$ -edfokú általánosított polinom, $\beta = 0$ esetén pedig

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \right\|_2 \leq \varepsilon \delta_n(l, \alpha) \|x\|_1^{n\alpha} \quad (x \in X),$$

ahol

$$\delta_2(l, \alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^\alpha}{||l|_F - |l|_F^{2\alpha}|}$$

és $n > 2$ esetén

$$\delta_n(l, \alpha) = \delta_2(l, \alpha) \prod_{j=2}^{n-1} \delta_2\left(l, \frac{n}{j}\alpha\right).$$

Ez az eredmény valós normált tereket tekintve is teljesen új, bár ismeretes hiányos (vagy hibásnak tűnő) próbálkozás hasonló állítás igazolására (bővebben lásd az 1.5 alfejezet bevezetőjét).

A stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő korlátozó függvény alakja nem olyan általános, mint a korábbi eredményekben. A stabilitás általános

α -homogén függvény használatával való igazolása nyílt probléma. Szintén a további kutatások tárgyát képezheti a

$$\Delta_y^n f(x) = 0$$

polinom egyenlet hasonló értelemben vett stabilitásának vizsgálata.

A második fejezetben egyszerű halmazokon, illetve grupoidokon, azaz bináris művelettel ellátott halmazokon értelmezett függvényekkel dolgozunk. Először egy nem üres X halmazról egy (Y, d) metrikus térbe képező függvények esetén vizsgáljuk az egyváltozós

$$(1) \quad g(x) = \psi \circ g \circ \varphi(x) \quad (x \in X)$$

függvényegyenletet, ahol $\psi : X \rightarrow X$ és $\varphi : Y \rightarrow Y$ rögzítettek.

Egy $f : X \rightarrow Y$ függvényt tekintve, amelyre teljesül a

$$(2) \quad d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \gamma(x) \quad (x \in X)$$

stabilitási egyenlőtlenség valamely $\gamma : X \rightarrow [0, \infty[$ esetén, a következő kérdésekre keressük a választ:

1. Mikor konvergens a

$$(3) \quad g_0 = f, \quad g_{n+1} = \psi \circ g_n \circ \varphi \quad (n \in \mathbb{N})$$

iteráció?

2. Mely $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ függvények esetén teljesül

$$d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right) \leq \delta(x) \quad (x \in X)?$$

3. Mikor lesz a $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ függvény megoldása (1)-nek?

4. Van-e másik $h : X \rightarrow Y$ megoldása (1)-nek, amelyre a $d(f(x), h(x))$ távolság $\delta(x)$ -szel felülről becsülhető?

Első fontos eredményünk a következő (2.2.4. Tétel):

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a ψ függvény folytonos és $f : X \rightarrow Y$ egy megoldása (2)-nek. Jelöljük ω_ψ -vel a ψ függvény egyenletes folytonossági modulusát (lásd a (2.4) formulát). Ha a (3)-ban definiált iteráció konvergens minden $x \in X$ esetén, akkor a*

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x) \quad (x \in X)$$

függvény megoldása (1)-nek és a

$$(4) \quad \delta(x) \geq \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x)$$

egyenlőtlenség minden δ megoldása esetén

$$d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X).$$

Látható tehát, hogy a (4) függvényegyenlőtlenség minden megoldása felső becslése lesz az eredeti f függvény és az approximáló g függvény távolságának. Megvizsgáljuk (4) megoldhatóságát (2.2.2. Állítás, 2.2.3. Megjegyzés, 2.2.5. Lemma), majd elégséges feltételt adunk a (3) iteráció konvergenciájára (2.2.6. Lemma). Eredményeinket összefoglalva megfogalmazunk egy újabb stabilitási tételt (2.2.7. Tétel), melyben az f és g függvény távolságára megadunk egy új korlátot is. A 2.2.9. Tételben olyan feltételeket fogalmazunk meg, amelyekkel biztosíthatjuk az approximáló g megoldás egyértelműségét. Végezetül megvizsgáljuk azt az esetet, amikor a (2) stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán konstans függvény áll (2.2.10. Tétel).

A 2.3 részben az $(X, \diamond)$ és $(Y, *)$ grupoidok között értelmezett

$$g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in X)$$

Cauchy-egyenlettel foglalkozunk. Először l -hatványszimmetrikus grupoidok között értelmezett függvényekre fogalmazunk meg és igazolunk stabilitási tételeket (2.3.1. Tétel, 2.3.3. Tétel). Csakúgy, mint az egyváltozós egyenletnél, külön foglalkozunk azzal az esettel, amikor a stabilitási egyenlőtlenség jobb oldalán konstans függvény áll (2.3.2. Tétel, 2.3.4. Tétel). Bizonyításunkban az (1) függvényegyenletre vonatkozó eredményeket használjuk. A 2.3.5. és 2.3.6. példákban a tételeink két alkalmazását írjuk le valós illetve értékeléssel ellátott testek feletti normált terek esetén. Az alfejezet végén egyszerű grupoidok között értelmezett Cauchy-egyenletnél is megadunk feltételrendszereket a stabilitás fennállására (2.3.7. Tétel, 2.3.8. Tétel).

A 2.4 részben a következő általános stabilitási tételt igazoljuk:

TÉTEL. *Legyen X egy nem üres halmaz a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ bináris operátorokkal, (Y, d) egy teljes metrikus tér és $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\varphi : X \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow Y$, $f : X \rightarrow Y$ és $F : Y^k \rightarrow [0, \infty[$ olyan függvények, hogy φ endomorfizmus a $\diamond_1, \dots, \diamond_k$ operátorokra nézve, F folytonos, továbbá a (2.5)-ben definiált Lipschitz-modulust használva, az*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Lip } \psi^n < \infty,$$

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \varepsilon \quad (x \in X),$$

$$F(\psi^n(y_1), \dots, \psi^n(y_k)) \leq \text{Lip } \psi^n F(y_1, \dots, y_k) \quad (n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_k \in Y)$$

és

$$\sup_{x, y \in X} F(f(x \diamond_1 y), \dots, f(x \diamond_k y)) < \infty$$

feltételek teljesülnek. Ekkor létezik egy $g : X \rightarrow Y$ függvény, mely megoldása az

$$(5) \quad F(g(x \diamond_1 y), \dots, g(x \diamond_k y)) = 0 \quad (x, y \in X)$$

függvényegyenletnek és kielégíti a

$$d(f(x), g(x)) \leq L\varepsilon \quad (x \in X)$$

egyenlőtlenséget.

Az (5) függvényegyenlet számos jól ismert függvényegyenletet magába foglal. Példaként a tétel segítségével levezetjük a grupoidon értelmezett

$$(-1)^m f(x) + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x \diamond y^i) = m! f(y).$$

általánosított monom egyenlet stabilitását.

A fejezet utolsó részében a

$$(6) \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt[4]{g(x)g(y)} \quad (x, y \in H)$$

függvényegyenlettel foglalkozunk, ahol H egy középpontosan konvex részhalmaza egy racionális számok feletti vektortérnek. Az

$$x \diamond y := \frac{x+y}{2} \quad \text{és} \quad x * y := \sqrt[4]{xy}$$

jelöléseket bevezetve azonnal adódik, hogy $(H, \diamond)$ és $([0, \infty[, *)$ négyzetszimmetrikus grupoidok és a (6) függvényegyenlet éppen a Cauchy-egyenlet ezeken a grupoidokon. H -nak egy gyenge nyíltsági tulajdonságát feltételezve egy speciális technikával bizonyítjuk az egyenlet stabilitását. Megmutatjuk azt is, hogy a stabilitás nem igazolható a korábbi részekben általunk is használt iterációs eljárással, melyet szokás Hyers-módszernek vagy direkt módszernek nevezni. Ezzel az eljárással számos kutató igazolta különféle körülmények között a Cauchy-egyenlet stabilitását, azonban eredményeink alapján azt mondhatjuk, hogy a módszer csak általában működik, de nem mindig.

SUMMARY

In this PhD dissertation we deal with the stability of functional equations in general structures.

In the first chapter we work on fields of characteristic zero with a valuation, which is a positive definite, multiplicative, subadditive function with real values. For example, the field of real numbers with the standard absolute value or the field of the p -adic numbers with the p -adic valuation are fields with valuations. We introduce the concept of a norm in a linear space over a field with valuation. There is an important difference between this norm and the classical notion of the norm. In these settings we can take out the valuation of a rational number from the norm, which does not equal the standard absolute value in general. At the beginning we investigate the elementary problem of the stability theory of functional equations, namely we deal with the stability of the Cauchy equation and we formulate the following result (1.2.4. Tétel):

THEOREM. *Let $(X, \|\cdot\|_1)$ be a normed space over a field F of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_F$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_K$, α be a real number and $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ be a function, which is homogeneous of order α . If the function $f : X \rightarrow Y$ satisfies the inequality*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1 \|y\|_1)$$

and there exists a positive integer l such that $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$, then there exists a unique additive function $g : X \rightarrow Y$ for which

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \frac{\sum_{k=1}^{l-1} \mathcal{H}(|k|_F, 1)}{||l|_K - |l|_F^\alpha|} \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X),$$

and

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} f(r^n x) \quad (x \in X),$$

where $r \in \{l, \frac{1}{l}\}$ has the property $|r|_F^\alpha < |r|_K$. Moreover, if $K = F$, the valuation $|\cdot|_F$ is non trivial, the field of rational numbers is dense in F with respect to this valuation and for every $x \in X$ the mapping $f_x : t \mapsto f(tx)$ ($t \in F$) is bounded on an open ball of non zero center and positive radius, then g is linear.

In the case $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ we improve the estimation for the point-wise distance of the original function f and the approximating function g (1.2.8. Tétel), we prove the converse of the stability theorem (1.2.9. Megjegyzés) and we illustrate it by some examples (1.2.10. Példa, 1.2.11. Példa).

We consider the exceptional case when $|l|_F^\alpha \neq |l|_K$ for all $l \in \mathbb{N}$. According to the type of the valuations we get three cases. We know, that the stability does not hold in one of these cases, but it is not yet decided whether the Cauchy equation is stable in the other cases.

As application we prove the stability of the Jensen equation (1.2.13. Tétel), then we show the stability of ring homomorphisms too (1.3.1. Tétel):

THEOREM. *Let $(X, \|\cdot\|_1)$ be a normed algebra over a field F of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_F$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ be a Banach algebra over a field K of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_K$, α, β be real numbers, $\varepsilon \geq 0$ and $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ be a function, which is homogeneous of order α . Let us suppose that there exists an $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ such that $|r|_F^\alpha > |r|_K$, $|r|_F^\beta > |r|_K$ or $|r|_F^\alpha < |r|_K$, $|r|_F^\beta < |r|_K$. If the function $f : X \rightarrow Y$ satisfies*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

and

$$\|f(xy) - f(x)f(y)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|y\|_1^\beta$$

for every $x, y \in X$, then there exists a unique ring homomorphism $g : X \rightarrow Y$ for which

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

with some $\delta \in \mathbb{R}$. Furthermore, we have

$$g(x)(f(y) - g(y)) = (f(x) - g(x))g(y) = 0 \quad (x, y \in X).$$

If we have an $x \in X$ for which the element $g(x)$ is not a zero divisor in Y , then from the last statement of the theorem we get that f is equal to g , therefore f is a ring homomorphism. In particular, if Y is free of zero divisors, then $g = 0$ or $f = g$, that is

$$\|f(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

or f is ring homomorphism. This is a superstability property of the ring homomorphisms. Supposing some further condition we prove that the function g is an algebra homomorphism too (1.3.3. Tétel).

In the next section we deal with the monomial functional equation

$$\Delta_y^n g(x) = n!g(y)$$

where $n \in \mathbb{N}$. Obviously, this equation involves the Cauchy equation ($n = 1$) and the quadratic equation ($n = 2$) too. After proving two lemmas (1.4.6. Lemma, 1.4.7. Lemma), which help us to show the existence and the uniqueness of the approximating function, we formulate our stability theorem for the monomial equation (1.4.8. Tétel).

THEOREM. *Let $(X, \|\cdot\|_1)$ be a normed space over a field F of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_F$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_K$, α be a real number and $\mathcal{H} : [0, \infty[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ be a function, which is homogeneous of order α . If the function $f : X \rightarrow Y$ satisfies the inequality*

$$\|\Delta_y^n f(x) - n!f(y)\|_2 \leq \mathcal{H}(\|x\|_1, \|y\|_1)$$

and there exists a positive integer l such that $|l|_F^\alpha \neq |l|_K^n$, then there exists a unique monomial function $g : X \rightarrow Y$ for which

$$\|f(x) - g(x)\|_2 \leq \delta \|x\|_1^\alpha \quad (x \in X)$$

for some $\delta \in \mathbb{R}$, which depends on l .

Again, we deal with the case $\mathcal{H}(t_1, t_2) = \varepsilon(t_1^\alpha + t_2^\alpha)$ in detail.

Next we investigate the homogeneity of the approximating monomial function g . For this purpose we formulate a regularity theorem for n -additive functions (1.4.11. Lemma). Next we show the following:

THEOREM. *Let F be a field of characteristic zero with some non trivial valuation $|\cdot|_F$ such that $\mathbb{Q}$ is dense in F with respect to this valuation. Let $(Y, \|\cdot\|)$ be a normed space over F . Moreover assume that $g : F \rightarrow Y$ is a monomial function of degree n . If g is bounded on some open ball of positive radius, then g is of the form $g(t) = t^n g(1)$.*

Now we are able to formulate the stability theorem concerning the monomial equation in a new form, where we guarantee the n -homogeneity of the approximating function g (1.4.13. Tétel).

In the last section of the first chapter we investigate the Fréchet equation

$$\Delta_{y_1, y_2, \dots, y_n} g(x) = 0$$

where $n \in \mathbb{N}$ and $n \geq 2$. After establishing some lemmas (1.5.4. Állítás, 1.5.5. Lemma) we are able to formulate the main result of the section (1.5.6. Tétel):

THEOREM. Let $(X, \|\cdot\|_1)$ be a normed space over a field F of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_F$ and $(Y, \|\cdot\|_2)$ be a Banach space over a field K of characteristic zero with a valuation $|\cdot|_K$. Suppose that the function $f : X \rightarrow Y$ satisfies the inequality

$$\|\Delta_{h_1, \dots, h_n} f(x)\|_2 \leq \varepsilon \|x\|_1^\beta \|h_1\|_1^\alpha \dots \|h_n\|_1^\alpha \quad (x, h_1, \dots, h_n \in X)$$

for some real numbers α and β . If there exists a positive integer l such that

$$|l|_F^\alpha > |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} > |l|_K \quad \text{or} \quad |l|_F^\alpha < |l|_K, \quad |l|_F^{n\alpha} < |l|_K,$$

then there exist symmetric, k -additive functions $G_k : X^k \rightarrow Y$ ($1 \leq k \leq n-1$), for which the following statements hold:

If $\beta \neq 0$, then

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \quad (x \in X),$$

where $G_k^*(x) = G_k(x, \dots, x)$ ($x \in X, k = 1, \dots, n-1$), which means, that f is a generalized polynomial of degree $n-1$.

If $\beta = 0$, then

$$\left\| f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n-1} G_k^*(x) \right\|_2 \leq \varepsilon \delta_n(l, \alpha) \|x\|_1^{n\alpha} \quad (x \in X),$$

where

$$\delta_2(l, \alpha) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{|k|_F^\alpha}{||l|_F - |l|_F^{2\alpha}|}$$

and

$$\delta_n(l, \alpha) = \delta_2(l, \alpha) \prod_{j=2}^{n-1} \delta_2\left(l, \frac{n}{j}\alpha\right) \quad (n \in 2).$$

This theorem is an absolutely new result even if we consider real normed spaces, although there was an attempt to prove similar results (see [BI99]).

Unfortunately, the right-hand side of the stability inequality is not so general, as in the previous results. It is an open problem to verify the stability of the Fréchet equation when the error is estimated by an arbitrary homogeneous function of order α . The stability of the polynomial functional equation $\Delta_y^n f(x) = 0$ should also be the subject of further investigations.

In the second chapter we simply work in sets or in groupoids, which are nonempty sets with a binary operation. At first we deal with the single variable functional equation

$$(1) \quad g(x) = \psi \circ g \circ \varphi(x) \quad (x \in X),$$

where the unknown function g maps from the nonempty set X into the metric space (Y, d) , and the functions $\psi : X \rightarrow X$, $\varphi : Y \rightarrow Y$ are fixed.

Let us consider a function $f : X \rightarrow Y$, for which the inequality

$$(2) \quad d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \gamma(x) \quad (x \in X)$$

is satisfied with some function $\gamma : X \rightarrow [0, \infty[$. We try to find the answers for the following questions:

1. When does the iteration

$$(3) \quad g_0 = f, \quad g_{n+1} = \psi \circ g_n \circ \varphi \quad (n \in \mathbb{N})$$

converge?

2. For which functions $\delta : X \rightarrow [0, \infty[$ does the inequality

$$d\left(f(x), \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

hold?

3. When does the function $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ solve equation (1)?
4. Is there any other solution $h : X \rightarrow Y$ of (1), for which $d(f(x), h(x))$ can be majorized by $\delta(x)$?

The first important result concerning this questions is the following (2.2.4. Tétel):

THEOREM. *Suppose that the function ψ is continuous and $f : X \rightarrow Y$ is a solution of the inequality (2). Let us denote the modulus of uniform continuity of ψ by ω_ψ (see formula (2.4) in Section 2.1). If the iteration defined in (3) is convergent for all $x \in X$, then the function*

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n \circ f \circ \varphi^n(x) \quad (x \in X)$$

is a solution of (1), for which

$$d(g(x), f(x)) \leq \delta(x) \quad (x \in X)$$

for all solutions δ of inequality

$$(4) \quad \delta(x) \geq \gamma(x) + \omega_\psi \circ \delta \circ \varphi(x).$$

We see, that every solution of inequality (4) is an upper estimate for the pointwise distance of the original function f and the approximating function g . We investigate the solvability of (4) (2.2.2. Állítás, 2.2.3. Megjegyzés, 2.2.5. Lemma), then we give sufficient conditions for the convergence of the iteration (3) (2.2.6. Lemma). We summarize our results by formulating a new stability theorem (2.2.7. Tétel), where we give a new upper bound for the distance of f and g . Then we give sufficient conditions for the uniqueness of the approximating function g (2.2.9. Tétel), and we investigate the case when the right-hand side of the stability inequality (2) is a constant function (2.2.10. Tétel).

In Section 2.3 we deal with the Cauchy equation for functions between the groupoids $(X, \diamond)$ and $(Y, *)$, which has the form

$$g(x \diamond y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in X).$$

In the rest of this section we look for conditions to give affirmative answer for the stability of the Cauchy equation by using the results from the previous section. For example, we prove stability theorems on l -power symmetric groupoids (2.3.1. Tétel, 2.3.3. Tétel). Again as before, we formulate separate theorems in the case when the right-hand side of the stability inequality is constant (2.3.2. Tétel, 2.3.4. Tétel). We show two simple examples (2.3.5. Példa, 2.3.6. Példa) for the applicability of our results.

In Section 2.4 we prove the following general stability theorem:

THEOREM. *Let X be a nonempty set with binary operations $\diamond_1, \dots, \diamond_k$, (Y, d) be a complete metric space and $\varepsilon \geq 0$. Suppose that $\varphi : X \rightarrow X$, $\psi : Y \rightarrow Y$, $f : X \rightarrow Y$ and $F : Y^k \rightarrow [0, \infty[$ are functions such that φ is an endomorphism under $\diamond_1, \dots, \diamond_k$, F is continuous and with the Lipschitz modulus of ψ defined in formula (2.5), the properties*

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Lip } \psi^n < \infty,$$

$$d(f(x), \psi \circ f \circ \varphi(x)) \leq \varepsilon \quad (x \in X),$$

$$F(\psi^n(y_1), \dots, \psi^n(y_k)) \leq \text{Lip } \psi^n F(y_1, \dots, y_k) \quad (n \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_k \in Y)$$

and

$$\sup_{x, y \in X} F(f(x \diamond_1 y), \dots, f(x \diamond_k y)) < \infty$$

are valid. Then there exists a function $g : X \rightarrow Y$ which solves the functional equation

$$(5) \quad F(g(x \diamond_1 y), \dots, g(x \diamond_k y)) = 0 \quad (x, y \in X)$$

and satisfies the inequality

$$d(f(x), g(x)) \leq L\varepsilon \quad (x \in X).$$

The functional equation (5) involves several well-known functional equations. As an application, we deduce a stability theorem for the generalized monomial functional equation

$$(-1)^m f(x) + \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} f(x \diamond y^i) = m! f(y).$$

In the last section of Chapter 2 we investigate the functional equation

$$(6) \quad g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt[4]{g(x)g(y)} \quad (x, y \in H),$$

where H is a midpoint-convex set of a linear space over the field of rational numbers. Observe that, with the notations

$$x \diamond y := \frac{x+y}{2} \quad \text{and} \quad x * y := \sqrt[4]{xy},$$

the structures $(H, \diamond)$ and $([0, \infty[, *)$ are square-symmetric groupoids and functional equation (6) is just the Cauchy equation on these structures. Supposing a certain openness property of H , we prove the stability of equation (6) with a special technique. We also show, that the stability cannot be proved via the iterative method which is also called direct method or Hyers method. Several authors have used this procedure to prove the stability of the Cauchy equation (and also other equations) in different settings. We have used this method in the previous sections as well. Now, in the view of this result we can say that the direct method works for the Cauchy equation in general but does not always work.

IRODALOMJEGYZÉK

- [AB83] M. Albert and J. A. Baker, *Functions with bounded n th differences*, Ann. Polon. Math. **43** (1983), no. 1, 93–103. MR 85m:39001
- [Acz61] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser, Basel, 1961, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 25. MR 23 #A1959
- [Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966. MR 34 #8020
- [Bad02] R. Badora, *On approximate ring homomorphisms*, J. Math. Anal. Appl. **276** (2002), no. 2, 589–597. MR 2003m:39038
- [BI99] C. Borelli and C. Invernizzi, *Sulla stabilità dell'equazione funzionale dei polinomi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **57** (1999), no. 3, 197–208. MR 2004b:39027
- [BK04] Z. Boros and Z. Kaiser, *Note on approximate ring homomorphisms in algebras over fields with valuations*, Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput., **24** (2004), 119–124.
- [Bou49] D. G. Bourgin, *Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings*, Duke Math. J. **16** (1949), 385–397. MR 11,115e
- [Bou51] D. G. Bourgin, *Classes of transformations and bordering transformations*, Bull. Amer. Math. Soc. **57** (1951), 223–237. MR 13,138d
- [BV02] K. Baron and P. Volkmann, *On functions close to homomorphisms between square symmetric structures*, Seminar LV (<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv/>) (2002), no. 14, 12 pp. (electronic).
- [Cze92] St. Czerwik, *On the stability of the quadratic mapping in normed spaces*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **62** (1992), 59–64. MR 94e:39026
- [Djo70] D. Ž. Djoković, *A representation theorem for $(X_1 - 1)(X_2 - 1) \cdots (X_n - 1)$ and its applications*, Ann. Polon. Math. **22** (1969/1970), 189–198. MR 42 #707
- [For80] G.-L. Forti, *An existence and stability theorem for a class of functional equations*, Stochastica **4** (1980), no. 1, 23–30. MR 81i:39006
- [For95] G.-L. Forti, *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 143–190. MR 96i:39033
- [For04] G.-L. Forti, *Comments on the core of the direct method for proving Hyers-Ulam stability of functional equations*, J. Math. Anal. Appl. **295** (2004), no. 1, 127–133.

- [Gaj91] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci. **14** (1991), no. 3, 431–434. MR 92e:39029
- [GD03] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, Berlin, 2003.
- [Ger94] R. Ger, *A survey of recent results on stability of functional equations*, Proc. of the 4th International Conference on Functional Equations and Inequalities (Cracow), Pedagogical University of Cracow, 1994, pp. 5–36.
- [Gil97a] A. Gilányi, *A characterization of monomial functions*, Aequationes Math. **54** (1997), no. 3, 289–307. MR 99g:39027
- [Gil97b] A. Gilányi, *On locally monomial functions*, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), no. 3-4, 343–361. MR 99c:39028
- [Gil99] A. Gilányi, *Hyers-Ulam stability of monomial functional equations on a general domain*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **96** (1999), no. 19, 10588–10590.
- [Gil00] A. Gilányi, *On the stability of monomial functional equations*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), no. 1-2, 201–212. MR 2001b:39025
- [GKP] A. Gilányi, Z. Kaiser, and Zs. Páles, *Estimates to the stability of functional equations*, submitted.
- [Gou93] F. Q. Gouvêa, *p -adic numbers*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993, An introduction. MR 95b:11111
- [HIR98] D. H. Hyers, G. Isac, and Th. M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 34, vol. 27, Birkhäuser, Basel–Boston, 1998.
- [Hos64] M. Hosszú, *On the Fréchet’s functional equation*, Bul. Inst. Politehn. Iași (N.S.) **10** (14) (1964), no. 1-2, 27–28. MR 33 #2986
- [Hye41] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222–224. MR 2,315a
- [Hye61] D. H. Hyers, *Transformations with bounded m th differences*, Pacific J. Math. **11** (1961), 591–602. MR 24 #A2246
- [Kai] Z. Kaiser, *On stability of the monomial functional equation in normed spaces over fields with valuation*, J. Math. Anal. Appl., accepted.
- [Kai00] Z. Kaiser, *Függvényegyenletek stabilitási problémái p -adikus számtestek felett*, Diplomamunka (2000).
- [Kai04] Z. Kaiser, *On stability of the Cauchy equation in normed spaces over fields with valuation*, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), no. 1-2, 189–200. MR 2004m:39045
- [KP05] Z. Kaiser and Zs. Páles, *An example of a stable functional equation when the Hyers method does not work*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **6** (2005), no. 1, Art. 14, 11 pp. (electronic). MR 2122939

- [Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985. MR 86i:39008
- [Mah81] K. Mahler, *p-adic numbers and their functions*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 76, Cambridge University Press, Cambridge, 1981. MR 83i:12002
- [McK67] M. A. McKiernan, *On vanishing n th ordered differences and Hamel bases*, Ann. Polon. Math. **19** (1967), 331–336. MR 36 #4183
- [MO34] S. Mazur and W. Orlicz, *Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen. i.*, Studia math. **5** (1934), 50–68.
- [MP01] Gy. Maksa and Zs. Páles, *Hyperstability of a class of linear functional equations*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) **17** (2001), no. 2, 107–112 (electronic). MR 2003f:39090
- [Nar90] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 1990. MR MR1055830 (91h:11107)
- [NBB71] L. Narici, E. Beckenstein, and G. Bachman, *Functional analysis and valuation theory*, Marcel Dekker Inc., New York, 1971, Pure and Applied Mathematics, Vol. 5. MR 50 #14142
- [Ost17] A. Ostrowski, *Über einige lösungen der funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$* , Acta Math. **41** (1917), 271–284.
- [Pál98] Zs. Páles, *Generalized stability of the Cauchy functional equation*, Aequationes Math. **56** (1998), no. 3, 222–232. MR 99k:39076
- [Pál99] Zs. Páles, *Újabb módszerek a függvényegyenletek és a függvényegyenlőtlenségek elméletében (Newer Methods in the Theory of Functional Equations and Functional Inequalities)*, (in Hungarian), Doct. of Sci. Thesis, Institute of Mathematics and Informatics, Kossuth L. University, Debrecen, Hungary, 1999.
- [Pál01] Zs. Páles, *Hyers-Ulam stability of the Cauchy functional equation on square-symmetric grupoids*, Publ. Math. Debrecen **58** (2001), no. 4, 651–666. MR 2002f:39058
- [PSz25] Gy. Pólya and G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol. I*, Springer, Berlin, 1925.
- [PVL98] Zs. Páles, P. Volkman, and R. D. Luce, *Hyers-Ulam stability of functional equations with a square-symmetric operation*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **95** (1998), no. 22, 12772–12775 (electronic). MR 2000a:39030
- [Ras78] Th. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), no. 2, 297–300. MR 80d:47094

- [Ras82] J. M. Rassias, *On approximation of approximately linear mappings by linear mappings*, J. Funct. Anal. **46** (1982), no. 1, 126–130. MR 84e:47027
- [Ras84] J. M. Rassias, *On approximation of approximately linear mappings by linear mappings*, Bull. Sci. Math. (2) **108** (1984), no. 4, 445–446. MR 86h:47095
- [Rät80] J. Rätz, *On approximately additive mappings*, General Inequalities, 2 (Oberwolfach, 1978) (Basel–Boston) (E. F. Beckenbach, ed.), International Series in Numerical Mathematics, vol. 47, Birkhäuser, 1980, pp. 233–251.
- [RŠ92] Th. M. Rassias and P. Šemrl, *On the behavior of mappings which do not satisfy Hyers-Ulam stability*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), no. 4, 989–993. MR 92g:47101
- [RŠ93] Th. M. Rassias and P. Šemrl, *On the Hyers-Ulam stability of linear mappings*, J. Math. Anal. Appl. **173** (1993), no. 2, 325–338. MR 94d:39011
- [Sch94] J. Schwaiger, *Functional equations for homogeneous polynomials arising from multilinear mappings and their stability*, Ann. Math. Sil. (1994), no. 8, 157–171, Polish-Austrian Seminar on Functional Equations and Iteration Theory (Cieszyn, 1994). MR 96e:39020
- [Szék79] L. Székelyhidi, *Remark on a paper of M. A. McKiernan: “On vanishing n th-ordered differences and Hamel bases”*, Ann. Polon. Math. **36** (1979), no. 3, 245–247. MR 80h:39011
- [Szék82a] L. Székelyhidi, *Note on a stability theorem*, Canad. Math. Bull. **25** (1982), no. 4, 500–501. MR 83m:39002
- [Szék82b] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29** (1982), no. 1-2, 19–28. MR 84j:39013
- [Szék85] L. Székelyhidi, *Regularity properties of exponential polynomials on groups*, Acta Math. Hungar. **45** (1985), no. 1-2, 21–26. MR 86h:39018b
- [Szék86] L. Székelyhidi, *Note on Hyers’s theorem*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **8** (1986), no. 2, 127–129. MR 87g:39019
- [Szék88] L. Székelyhidi, *Fréchet’s equation and Hyers theorem on noncommutative semigroups*, Ann. Polon. Math. **48** (1988), no. 2, 183–189. MR 89j:39013
- [Szék91] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological abelian groups*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, 1991. MR 92f:39017
- [Szék00] L. Székelyhidi, *Ulam’s problem, Hyers’s solution — and to where they led*, Functional Equations and Inequalities (Th. M. Rassias, ed.), Math. Appl., vol. 518, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 259–285. MR 2003a:39035
- [Szék03] L. Székelyhidi, *Functional equations on hypergroups*, Functional equations, inequalities and applications, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, pp. 167–181.

- [TT97] J. Tabor and J. Tabor, *Remark 15, report of meeting: 34th international symposium on functional equations*, Aequationes Math. **53** (1997), 192–193.
- [Ula60] S. M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience Publishers, New York-London, 1960. MR 22 #10884
- [Ula64] S. M. Ulam, *Problems in Modern Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1964. MR 43 #6031
- [Vol98] P. Volkmann, *On the stability of the cauchy equation*, Proceedings of the International Conference Numbers, Functions, Equations '98 (Zs. Páles, ed.), Leaflets in Mathematics, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1998, pp. 150–151.
- [Vol99] P. Volkmann, *Zur Rolle der ideal konvexen Mengen bei der Stabilität der Cauchyschen Funktionalgleichung*, Seminar LV (<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv/>) (1999), no. 6, 6 pp. (electronic).
- [Vol01] P. Volkmann, *O stabilnosci równan funkcyjnych o jednej zmiennej*, Seminar LV (<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv/>) (2001), no. 11, 6 pp. (electronic).
- [VVZ94] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, and E. I. Zelenov, *p-adic analysis and mathematical physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 1, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1994. MR 95k:11155
- [Whi57] H. Whitney, *On functions with bounded n th differences*, J. Math. Pures Appl. (9) **36** (1957), 67–95. MR 18,889f
- [Whi59] H. Whitney, *On bounded functions with bounded n th differences*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 480–481. MR 21 #5699

**Függvényegyenletek stabilitása
absztrakt struktúrákon**

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Kaiser Zoltán okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika doktori programja Analízis alprogramja
keretében.

Témavezető: Dr. Boros Zoltán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 200... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 200... ..