



FÜGGVÉNYEGYENLETEK ÉS KARAKTERIZÁCIÓS PROBLÉMÁK

doktori (PhD) értekezés

Mészáros Fruzsina

Témavezető: Dr. Lajkó Károly

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományok Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2010.

.....

Mészáros Fruzsina
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Mészáros Fruzsina doktorjelölt 2005-2008 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglal eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2010.

.....

Dr. Lajkó Károly
témavezető

**Függvényegyenletek
és karakterizációs problémák**

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Mészáros Fruzsina okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori
Iskolája (Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek
programja) keretében.

Témavezető: Dr. Lajkó Károly

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Lajkó Károlynak, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott nekem mind a tanulmányaim, mind a kutatásaim során.

Köszönettel tartozom az Analízis Tanszék minden oktatójának, akik ösztönző, baráti légkört teremtettek a munkához és akiktől sok hasznos tanácsot és segítséget kaptam. Köszönöm továbbá a Matematika Intézet minden dolgozójának a munkáját, segítségét és biztatását. Az NK-68040 és NK-81402 számú OTKA pályázatok támogatása is sokat jelentett.

Köszönöm családomnak és barátaimnak, hogy támogattak, bíztattak és mellettem álltak.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. Egyváltozós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek	3
1.1. Bevezetés, felhasznált eredmények	3
1.2. Az Olkin-Baker egyenlet	4
1.3. A béta eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenletek . . .	11
1.4. A normális eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenlet . .	29
1.5. Pexider egyenletek	36
2. Feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek	42
2.1. A skálaparaméter jellegű feltétel esete	42
2.2. Az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esete	83
3. Egyváltozós eloszlások karakterizációja	88
3.1. Bevezetés, felhasznált eredmények	88
3.2. A gamma eloszlás karakterizációi	88
3.3. A béta eloszlás egy karakterizációja	94
3.4. A normális eloszlás karakterizációja	96
3.5. Az exponenciális eloszlás egy karakterizációja	98
4. Feltételesen meghatározott kétdimenziós abszolút folytonos eloszlások karakterizációja	105
4.1. Bevezetés	105
4.2. Az eltolásparaméter jellegű feltétel esete	105
4.3. A skálaparaméter jellegű feltétel esete	107
4.4. Az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esete	109
Összefoglaló	112
Summary	116
Irodalomjegyzék	120

Bevezetés

Függvényegyenletek megoldása az analízis egyik régi problémája. A közgazdaságtan, fizika, statisztika számos területén alkalmazott függvényegyenletek kutatását Magyarországon elsőként Aczél János kezdte. Az első nagyobb átfogó munkák is az ő nevéhez kötődnek (lásd [1], [2]). Függvényegyenletekkel és alkalmazásaikkal azóta is sokan foglalkoznak, közgazdasági téren lásd például Eichhorn [17] könyvét, műszaki téren Castillo és Ruiz-Cobo [11] munkáját, valószínűségelméleti alkalmazásokkal Ramachandran és Lau [61] illetve Yaderenko [64] könyvét, míg információelméleti vonatkozásban Aczél és Daróczy [3] monográfiáját.

A disszertáció eredményei hangsúlyosan kapcsolódnak az úgynevezett korlátozott tartományokon teljesülő függvényegyenletek vizsgálatához. Részben azokhoz, amikor explicite megadjuk a függvényegyenlet tartományának korlátozását. Itt név szerint is ki kell emelni Aczél és Erdős [5], Daróczy és Losonczi [12], Székelyhidi [62], Ger [21] és Páles [59] eredményeit, de más szerzők (lásd [15], [30], [31]) munkásságát is. Másrészt az Erdős [18] felvetése nyomán induló azon vizsgálatokhoz kötődnek, amikor az egyenletek (a Lebesgue-mértékre nézve) majdnem mindenütt teljesülnek az alaphalmazon. Ilyenkor több esetben (pl. a Cauchy-alapecyenet [13], [14], [28] és a Cauchy exponenciális egyenlet [4] esetén) az általános megoldások is meghatározhatók, melyek majdnem mindenütt megegyeznek a teljes alaphalmazon teljesülő egyenletek megoldásaival. Ugyanakkor, a függvényegyenletek egy szélesebb körénél, Járai [25], [26] igen általános eredményei segítségével beláthatjuk, hogy a majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenlet mérhető megoldásai majdnem mindenütt megegyeznek az adott egyenlet folytonos megoldásaival, de az általános megoldás meghatározása még nyílt probléma.

A dolgozatban a valószínűségelmélet karakterizációs problémáihoz kapcsolódó függvényegyenleteket vizsgálunk, majd ezeket a karakterizációs problémákat be is mutatjuk a függvényegyenletek megoldása során kapott eredmények felhasználásával a különböző jellemzésekben. Ezzel a témakörrel első között Narumi (lásd [57]), majd az ő vizsgálatait pontosítva Arnold, Castillo és Sarabia (lásd [6] és [7]) foglalkozott. Végez ilyen irányú vizsgálatokat Wołoski is (lásd pl. [63]). Az értekezés célja hasonló eredmények igazolása az eddigieknél gyengébb - az alkalmazások szempontjából sokkal természetesebb - feltételek mellett.

A disszertáció négy fejezetből áll, amelyek további részekre tagolódnak. Az

egyres fejezetek és alfejezetek önálló bevezetővel rendelkeznek így most tartalmuk rövid ismertetése következik.

A dolgozat első fejezetében egyváltozós eloszlások jellemzése során használt függvényegyenleteket vizsgálunk. Az első alfejezetben a későbbiekben használt fogalmakat és eredményeket mutatjuk be. A második alfejezetben a gamma eloszlás jellemzéséhez használt úgynevezett Olkin-Baker egyenletet tekintjük. Megvizsgáljuk a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető, majd pedig a sűrűségfüggvény megoldásait. A harmadik alfejezetben a béta eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenletet vizsgáljuk különböző feltételek teljesülése esetén, többek között megadjuk a mindenütt teljesülő egyenlet általános megoldását (mindenféle regularitási feltétel nélkül) és a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet sűrűségfüggvény megoldásait is. A negyedik alfejezetben a normális eloszlások jellemzéséhez kapcsolódó majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető illetve sűrűségfüggvény megoldásait adjuk meg. Az utolsó alfejezetben pedig a majdnem mindenütt teljesülő exponenciális és a logaritmikus Pexider egyenletet vizsgáljuk, melyek szükségesek bizonyos jellemzéseknél.

A második fejezet feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek vizsgálatát tartalmazza. Az első alfejezet a skálaparaméter jellegű feltétel esetében előforduló egyenlet alkalmazások szempontjából fontos speciális eseteit tárgyalja. Két módszert is mutatunk a majdnem mindenütt teljesülő speciális egyenletek mérhető megoldásainak megkeresésére és a sűrűségfüggvény megoldásokat is megadjuk. A második alfejezet az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esetében felmerülő egyenletet tárgyalja.

A harmadik fejezetben egyváltozós eloszlások jellemzése során használjuk fel az első fejezetben elért eredményeket. A gamma, a béta, a normális és az exponenciális eloszlás jellemzésével foglalkozunk.

A negyedik fejezet feltételesen meghatározott kétdimenziós abszolút folytonos eloszlások karakterizációját tárgyalja. Vizsgáljuk az eltolás, a skála- és az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltételek különböző eseteit.

1. Egyváltozós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek

1.1. Bevezetés, felhasznált eredmények

Ebben a fejezetben azon függvényegyenletek általános, illetve mérhető (vagy sűrűségfüggvény) megoldásait vizsgáljuk, amelyekkel egyváltozós eloszlások karakterizációs problémáinak vizsgálata során találkozunk. A felhasználás szempontjából mindenképp fontos, hogy egyenleteink vizsgálata során maga a függvényegyenlet csak majdnem mindenütt teljesüljön az adott tartományon és a szereplő ismeretlen függvényekről csak annyit feltételezünk, hogy mérhetőek vagy pedig sűrűségfüggvényei valamilyen valószínűségi változónak (azaz mérhetőek, a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenütt nemnegatívak és integráljuk 1).

Bizonyításaink egy része Járai Antal alábbi tételén alapszik (ld. [25], [26]):

1.1.1. Tétel. [Járai, [25]] Legyen Z reguláris tér, Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) topologikus tér és T egy első megszámlálható topologikus tér. Legyen Y nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^k$ -nak, X_i nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^{r_i}$ -nek ($i = 1, 2, \dots, n$) és D nyílt részhalmaza $T \times Y$ -nak. Legyen T' a T egy sűrű részhalmaza, $f: T' \rightarrow Z$, $g_i: D \rightarrow X_i$ és $h: D \times Z_1 \times \dots \times Z_n \rightarrow Z$ függvények. Tegyük fel, hogy az f_i függvény majdnem mindenütt definiált az r_i dimenziós Lebesgue mérték szerint az X_i halmazon, Z_i -beli értékekkel ($i = 1, 2, \dots, n$), és az alábbi feltételek teljesülnek:

1. minden $t \in T'$ -re és majdnem minden $y \in D_t = \{y \in Y : (t, y) \in D\}$ -re

$$(1) \quad f(t) = h(t, y, f_1(g_1(t, y)), \dots, f_n(g_n(t, y)));$$

2. bármely rögzített $y \in Y$ -ra a h függvény folytonos a többi változójában;

3. az f_i függvény Lebesgue mérhető X_i -n ($i = 1, 2, \dots, n$);

4. g_i és a $\frac{\partial g_i}{\partial y}$ parciális deriváltja folytonos D -n ($i = 1, 2, \dots, n$);

5. minden $t \in T$ -hez létezik olyan y , hogy $(t, y) \in D$ és a $\frac{\partial g_i}{\partial y}$ parciális derivált rangja r_i a $(t, y) \in D$ pontban ($i = 1, 2, \dots, n$).

Ekkor egyértelműen létezik egy folytonos $\tilde{f}$ függvény úgy, hogy $f = \tilde{f}$ majdnem mindenütt T -n, és ha f -et $\tilde{f}$ -al helyettesítjük, akkor az (1) egyenlet majdnem mindenütt teljesül D -n.

Több esetben használjuk a Steinhaus tétel alábbi általánosítását.

1.1.2. Tétel. [Erdős, Oxtoby, [19]] Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmaza és $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény nemzérő parciális deriváltakkal, továbbá legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$ ($A \times B \subset U$) pozitív Lebesgue mértékű mérhető halmazok, akkor az $F(A, B)$ halmaznak van belső pontja, azaz $F(A, B)$ tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

1.2. Az Olkin-Baker egyenlet

1.2.1. Bevezetés

Az

$$(2) \quad f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

függvényegyenlet vizsgálatát Olkin [58] vetette fel az $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényekre. Az első, eléggé általános eredményeket Baker ([10]) és Lajkó ([34]) érték el. A továbbiakban fontos szerepet játszó mérhető (folytonos) megoldásokra igaz a következő.

1.2.1. Tétel. [Baker, [10], Lajkó, [34]] Ha az $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_0 \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mérhető (folytonos) függvények kielégítik a (2) egyenletet akkor előállnak az

$$\begin{aligned} f(x) &= A \exp[ax + b \ln x] & (x \in \mathbb{R}_+), \\ g(x) &= B \exp[ax + (c - b) \ln x] & (x \in \mathbb{R}_+), \\ p(x) &= C \exp[ax + c \ln x] & (x \in \mathbb{R}_+), \\ q(x) &= D \exp[b \ln x - c \ln(x + 1)] & (x \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

alakban, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $A, B, C, D \in \mathbb{R}_0$ az $AB = CD$ feltételt teljesítő konstansok.

Ezen fejezet célja, hogy meghatározzuk a majdnem mindenütt teljesülő (2) függvényegyenlet $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető, majd az úgynevezett sűrűség-függvény megoldásait.

A fejezet eredményeit az [54] közlemény és az [55] előadás tartalmazzák.

1.2.2. A majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (2) egyenlet mérhető megoldásai

Először belátjuk az alábbi lemmát:

1.2.1. Lemma. [Mészáros, [54]] Ha az $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények kielégítik a (2) függvényegyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{p}, \tilde{q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{p} = p$ és $\tilde{q} = q$ majdnem mindenütt, és ha az f, g, p, q függvényeket a $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{p}, \tilde{q}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (2) egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy egyértelműen létezik olyan $\tilde{p}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő p -vel $\mathbb{R}_+$ -on, és p helyére $\tilde{p}$ -ot helyettesítve a (2) függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül.

A $t = x + y$ helyettesítéssel kapjuk a (2) egyenletből, hogy

$$(3) \quad p(t) = \frac{f(t-y)g(y)}{q\left(\frac{t}{y} - 1\right)}$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid y < t\}$. A Fubini Tétel szerint ekkor létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}_+$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ esetén a (3) egyenlet majdnem minden $y \in D_t = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid (t, y) \in D\} = (0, t)$ esetén teljesül.

Definiáljuk a g_1, g_2, g_3, h függvényeket a következő módon:

$$\begin{aligned} g_1(t, y) &= t - y, & g_2(t, y) &= y, \\ g_3(t, y) &= \frac{t}{y} - 1, & h(t, y, z_1, z_2, z_3) &= \frac{z_1 z_2}{z_3}, \end{aligned}$$

és alkalmazzuk az 1.1.1. Tételt a (3) egyenletre.

Az 1.1.1. Tétel első feltétele a (3) egyenletre nyilván fenn áll. Rögzített y esetén a h függvény folytonos a többi változójában, így a második feltétel szintén teljesül. Mivel a (3) egyenletben szereplő függvényekről feltételeztük, hogy mérhetőek, ezért a harmadik feltétel nyilvánvalóan teljesül.

A g_i függvények és a

$$D_2 g_1(t, y) = -1, \quad D_2 g_2(t, y) = 1, \quad D_2 g_3(t, y) = \frac{-t}{y^2}$$

parciális deriváltak folytonosak, ebből következik a negyedik feltétel.

Minden $t \in \mathbb{R}_+$ -hoz létezik olyan $y \in \mathbb{R}_+$, hogy $(t, y) \in D$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el (t, y) -ban, így a rangjuk 1. Emiatt az utolsó feltétel is teljesül.

Így kapjuk a 1.1.1. Tételből, hogy egyértelműen létezik olyan folytonos $\tilde{p}$ függvény, amely majdnem mindenütt megegyezik p -vel $\mathbb{R}_+$ -on és az f , g , $\tilde{p}$, q függvények majdnem mindenütt kielégítik a (2) függvényegyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy a

$$(4) \quad f(x) g(y) = \tilde{p}(x+y) q\left(\frac{x}{y}\right)$$

egyenlet teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Hasonló lépésekkel bizonyíthatjuk ezt a q függvény esetén is. A (4) egyenletből a $t = \frac{x}{y}$ helyettesítéssel kapjuk a

$$q(t) = \frac{f(ty) g(y)}{\tilde{p}(y(t+1))},$$

egyenletet, amely a

$$g_1(t, y) = ty, \quad g_2(t, y) = y, \\ g_3(t, y) = y(t+1), \quad h(t, y, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

választással, a Fubini illetve az 1.1.1. Tétel ismételt teljesülése miatt adja, hogy egyértelműen létezik olyan $\tilde{q}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt megegyezik q -val az $\mathbb{R}_+$ halmazon és az f , g , $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ függvények majdnem mindenütt kielégítik a (2) egyenletet, azaz

$$(5) \quad f(x) g(y) = \tilde{p}(x+y) \tilde{q}\left(\frac{x}{y}\right)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Léteznek olyan x_0 és y_0 elemek, hogy $f(x_0) \neq 0$ és $g(y_0) \neq 0$, így az $y = y_0$, illetve $x = x_0$ helyettesítésekkel az (5) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{g(y_0)} \tilde{p}(x+y_0) \tilde{q}\left(\frac{x}{y_0}\right)$$

majdnem minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, illetve

$$g(y) = \frac{1}{f(x_0)} \tilde{p}(x_0+y) \tilde{q}\left(\frac{x_0}{y}\right)$$

majdnem minden $y \in \mathbb{R}_+$ esetén. Mivel $\tilde{p}, \tilde{q}$ folytonos függvények, ezért egyértelműen léteznek a fenti két egyenlet jobb oldalaival definiált $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt megegyeznek az f illetve a g függvényekkel az $\mathbb{R}_+$ halmazon, és ha az f helyére az $\tilde{f}$ -ot, a g helyére a $\tilde{g}$ -ot helyettesítjük (5)-ben, akkor az

$$(6) \quad \tilde{f}(x) \tilde{g}(y) = \tilde{p}(x+y) \tilde{q}\left(\frac{x}{y}\right)$$

függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon.

Mivel a (6) egyenlet mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}_+^2$ -en, amelyek $\mathbb{R}_+^2$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért megállapíthatjuk, hogy a (6) egyenlet mindenütt teljesül az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon.

Továbbá a fentiek miatt $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$, $p = \tilde{p}$, $q = \tilde{q}$ majdnem mindenütt az értelmezési tartományaikon. $\square$

Így a mindenütt teljesülő (2) egyenlet mérhető (folytonos) megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető (folytonos) megoldásait, azaz a 1.2.1. Tétel és az előző Lemma azonnal adja a következő állítást.

1.2.2. Tétel. [Mészáros, [54]] *Tegyük fel, hogy a mérhető $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények kielégítik a (2) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor*

$$\begin{aligned} f(x) &= A \exp[ax + b \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ g(x) &= B \exp[ax + (c - b) \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ p(x) &= C \exp[ax + c \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ q(x) &= D \exp[b \ln x - c \ln(x + 1)] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $A, B, C, D \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, amelyek teljesítik az $AB = CD$ feltételt.

1.2.3. A majdnem mindenütt teljesülő (2) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai

Tételezzünk fel most csak annyit, hogy a (2) egyenletet majdnem mindenütt teljesítő $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények nemnegatívak és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor következik-e, hogy majdnem mindenütt pozitívak?

Járai Antal, a Dirichlet eloszlás karakterizációjával kapcsolatban használt (lásd [26]), illetve Baker (lásd [10]) módszeréhez hasonlóan alkalmazva igenlő választ tudunk adni a fenti kérdésre.

A Steinhaus tétel 1.1.2 általánosítását fogjuk használni, hogy $U = \mathbb{R}_+^2$ teljesül.

1.2.3. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [55]] *Legyenek az $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ olyan nemnegatív függvények, amelyek kielégítik a majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (2) egyenletet és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak. Ekkor $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ majdnem mindenütt pozitívak.*

Bizonyítás. Az $\{f \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}_+ | f(x) \neq 0\}$ illetve az ezzel analóg $\{g \neq 0\}, \{p \neq 0\}, \{q \neq 0\}$ jelöléseket fogjuk használni.

Először lássuk azt be, hogy az $\{f \neq 0\}, \{g \neq 0\}, \{p \neq 0\}, \{q \neq 0\}$ halmazok (Járai [26]-beli terminológiájával) majdnem tartalmazzak egy nemüres nyílt intervallumot, azaz léteznek I, J, L, M nemüres nyílt intervallumok, hogy azokon az f, g, p, q függvények rendre majdnem mindenütt különböznek 0-tól.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a $\{p \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, ellenőrizni kell, hogy az $F(x, y) = x + y$ ($x, y > 0$) függvény parciális deriváltjai

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1$$

nem tűnnek el, ami nyilvánvaló. Mivel f és g pozitívak az A_1 és A_2 Lebesgue mérhető, pozitív mértékű halmazokon, és az 1.1.2. Tétel miatt az $F(A_1, A_2) = A_1 + A_2$ halmaz tartalmaz egy L nemüres nyílt intervallumot, így (2) adja, hogy p nem egyenlő 0-val L majdnem minden pontjára, más szavakkal: $\{p \neq 0\}$ majdnem tartalmazza az L nemüres nyílt intervallumot.

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy $\{q \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot. Használjuk most az $F(x, y) = \frac{x}{y}$ ($x, y > 0$) függvényt, és azt, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} \neq 0$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. A 1.1.2. Tétel miatt az $F(A_1, A_2) = \frac{A_1}{A_2}$ halmaz tartalmaz egy M nemüres nyílt intervallumot, így $q \neq 0$ M majdnem minden pontjára, azaz a $\{q \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmazza az M nemüres nyílt intervallumot.

Használjuk az

$$u = x + y, \quad v = \frac{x}{y} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

helyettesítést, akkor (2)-ből kapjuk, hogy

$$(7) \quad f\left(\frac{uv}{1+v}\right) g\left(\frac{u}{1+v}\right) = p(u) q(v) \quad (\text{m.m. } (u, v) \in \mathbb{R}_+^2)$$

teljesül. Felhasználva ezt az egyenletet bizonyíthatjuk, hogy az $\{f \neq 0\}$ és $\{g \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot.

Az $F(u, v) = \frac{uv}{1+v}$ ($u, v > 0$) függvény parciális deriváltjai kielégítik a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{v}{1+v} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{u}{(1+v)^2} \neq 0$$

feltételeket minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. Mivel p és q pozitívak az A_3 illetve A_4 pozitív mértékű Lebesgue mérhető halmazokon, és az 1.1.2. Tétel miatt az $\frac{A_3 A_4}{1+A_4}$ halmaz tartalmaz egy $I = (a, b)$ nemüres nyílt intervallumot, így (7) adja, hogy f nem egyenlő 0-val az I intervallum majdnem minden pontjára, ezért az $\{f \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmazza az I nemüres nyílt intervallumot.

Végül az $F(u, v) = \frac{u}{1+v}$ ($u, v > 0$) függvénnyel kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{1+v} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = -\frac{u}{(1+v)^2} \neq 0$$

minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. Így az 1.1.2. Tétel alapján az $\frac{A_3}{1+A_4}$ halmaz tartalmaz egy $J = (c, d)$ nemüres nyílt intervallumot, ezért (7) adja, hogy $g \neq 0$ a J majdnem minden pontjára, azaz $\{g \neq 0\}$ majdnem tartalmazza a J nemüres nyílt intervallumot.

Ekkor

$$f(x) g(y) \neq 0 \quad \text{m.m. } x \in (a, b) \quad \text{és m.m. } y \in (c, d).$$

Így (2) adja, hogy $p(u) q(v) \neq 0$ majdnem minden

$$u \in \{x + y | x \in (a, b), y \in (c, d)\} = (a + c, b + d)$$

és majdnem minden

$$v \in \left\{ \frac{x}{y} | x \in (a, b), y \in (c, d) \right\} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c} \right)$$

esetén. A (7) egyenletet felhasználva könnyen belátható, hogy $f(x)g(y) \neq 0$ majdnem minden

$$x \in \left\{ \frac{uv}{1+v} \mid u \in (a+c, b+d), v \in \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c} \right) \right\} = \left(\frac{a+c}{a+d}a, \frac{b+d}{b+c}b \right) =: (a_1, b_1)$$

és majdnem minden

$$y \in \left\{ \frac{u}{1+v} \mid u \in (a+c, b+d), v \in \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c} \right) \right\} = \left(\frac{a+c}{b+c}c, \frac{b+d}{a+d}d \right) =: (c_1, d_1)$$

esetén. Defináljuk az $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$, $\langle c_k \rangle$, $\langle d_k \rangle$ sorozatokat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + c_n}{a_n + d_n} a_n, & b_{n+1} &= \frac{b_n + d_n}{b_n + c_n} b_n, \\ c_{n+1} &= \frac{a_n + c_n}{b_n + c_n} c_n, & d_{n+1} &= \frac{b_n + d_n}{a_n + d_n} d_n \end{aligned}$$

minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Megismételve a fenti gondolatmenetet és indukciót használva kapjuk, hogy

$$f(x)g(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a_n, b_n) \text{ és m.m. } y \in (c_n, d_n)$$

teljesül minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Egyszerűen belátható (lásd pl. [10]), hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \infty$.

Ekkor kapjuk, hogy $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ majdnem mindenütt pozitívak. Ezért (2) alapján $p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ szintén majdnem mindenütt pozitív. Ezzel kapjuk állításunkat. $\square$

Megjegyzés. Ha $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények, akkor mérhetőek, nemnegatívak és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, továbbá teljesítik a (2) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor majdnem mindenütt pozitívak.

Így az előző fejezet 1.2.1. Lemmája érvényes marad sűrűségfüggvényekkel is.

1.2.2. Lemma. [Mészáros, Lajkó, [55]] Ha az ismeretlen $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények kielégítik a (2) függvényegyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor egyértelműen léteznek olyan $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{p}, \tilde{q} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{p} = p$ és $\tilde{q} = q$ majdnem mindenütt, és ha az f, g, p, q függvényeket a $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{p}, \tilde{q}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (2) egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Így a mindenütt teljesülő (2) egyenlet folytonos megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásait.

1.2.4. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [55]] *Tegyük fel, hogy az $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények kielégítik a (2) egyenletet majdnem mindenütt, ekkor*

$$\begin{aligned} f(x) &= A \exp[ax + b \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ g(x) &= B \exp[ax + (c - b) \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ p(x) &= C \exp[ax + c \ln x] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ q(x) &= D \exp[b \ln x - c \ln(x + 1)] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

teljesül, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, amelyek teljesítik az $AB = CD$ feltételt.

1.3. A béta eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenletek

1.3.1. Bevezetés

Jelölje f_X, f_Y, f_U, f_V rendre az abszolút folytonos és $(0, 1)$ -beli értékű $X, Y, U = \frac{1-Y}{1-XY}, V = 1 - XY$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

Wesołowski ([63]) a béta eloszlás egy jellemzése során vizsgálta a minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesülő

$$(8) \quad f_U(u) f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

függvényegyenletet az ismeretlen $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sűrűségfüggvényekre, és meghatározta a mindenütt teljesülő (8) egyenlet pozitív és lokálisan integrálható megoldásait $(0, 1)$ -en. Vizsgálatai a

$$(9) \quad g_1\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + g_2\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = \alpha_1(x) + \alpha_2(y) \quad (x, y \in (0, 1))$$

függvényegyenlet lokálisan integrálható valós $g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásain alapultak.

Megoldatlan problémaként szerepelt a (8) egyenlet mérhető, illetve a (9) egyenlet általános megoldásának meghatározása.

Ezen fejezet célja

- (I) megadni mindenféle regularitási feltétel nélkül a minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesülő (8) egyenlet általános megoldását az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényekkel, továbbá megadni a (9) egyenlet általános megoldását,
- (II) meghatározni a (8) egyenlet megoldását az alábbi természetes feltételekkel:
- az ismeretlen függvények mérhetőek, pozitívak,
 - a (8) egyenlet majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül,
- (III) megadni (8) megoldását a következő feltételekkel:
- az ismeretlen mérhető függvények nemnegatívak 1 Lebesgue integrállal,
 - (8) majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül,
- (IV) megadni mindenféle regularitási feltétel nélkül a minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesülő (8) egyenlet általános megoldását az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvényekkel, ahol léteznek $A, B, C, D \subset (0, 1)$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon a függvények rendre pozitívak.

A (8) (majd később a (9)) egyenlet általános megoldásának meghatározásához szükségünk van Maksa Gyula következő eredményére (lásd [49]) a négy ismeretlen függvényt tartalmazó általánosított információ-alapegyenletről.

1.3.1. Tétel. [Maksa, [49]] Legyen

$$D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y, x + y \in (0, 1)\}.$$

Az $F, G, H, K : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csakis akkor elégítik ki az

$$(10) \quad F(x) + G\left(\frac{y}{1-x}\right) = H(y) + K\left(\frac{x}{1-y}\right) \quad ((x, y) \in D_0)$$

egyenletet, ha

$$\begin{aligned} F(x) &= l_1(1-x) + l_2(x) + a & (x \in (0, 1)), \\ G(x) &= l_1(1-x) + l_3(x) - l_3(1-x) + b & (x \in (0, 1)), \\ H(x) &= l_1(1-x) + l_2(1-x) + l_3(x) - l_3(1-x) + c & (x \in (0, 1)), \\ K(x) &= l_1(1-x) + l_2(x) - l_3(1-x) + d & (x \in (0, 1)), \end{aligned}$$

ahol az $l_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) függvények kielégítik az

$$(11) \quad l_i(xy) = l_i(x) + l_i(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

logaritmikus egyenletet és $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olyan konstansok, hogy $a + b = c + d$.

A fejezet eredményeit a [43] közlemény és az [52] és [56] előadások tartalmazzák.

1.3.2. A (8) egyenlet általános megoldása

1.3.1. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [43]] Ha az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén kielégítik a (8) egyenletet, akkor

$$(12) \quad f_X(x) = \exp[l_1(x) + l_2(1-x) + a_1] \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(13) \quad \frac{xf_U(x)}{f_V(x)} = \exp[-l_1(1-x) - l_2(x) + l_2(1-x) - b_1] \quad (x \in (0, 1))$$

teljesül, ahol $l_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) kielégítik (11)-et és $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Bizonyítás. A (8) egyenletet írhatjuk az

$$(14) \quad uf_U(u)f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) \frac{uv}{1-uv} f_Y(1-uv) \quad (u, v \in (0, 1))$$

alakban. Mivel

$$u, \quad \frac{uv}{1-uv}, \quad f_U(u), \quad f_V(v), \quad f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) \text{ és } f_Y(1-uv)$$

mind pozitívak minden $u, v \in (0, 1)$ esetén, ezért véve (14) logaritmusát kapjuk, hogy a

$$(15) \quad G_1(u) = \ln[uf_U(u)], \quad G_2(u) = \ln[f_V(u)],$$

$$F_1(u) = \ln[f_X(u)], \quad F_2(u) = \ln\left[\frac{u}{1-u} f_Y(1-u)\right],$$

módon definiált $G_1, G_2, F_1, F_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a

$$(16) \quad G_1(u) + G_2(v) = F_1\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) + F_2(uv) \quad (u, v \in (0, 1))$$

függvényegyenletet. Felcserélve (16)-ban az u és v változókat kapjuk, hogy

$$G_1(v) + G_2(u) = F_1\left(\frac{1-u}{1-uv}\right) + F_2(uv) \quad (u, v \in (0, 1))$$

teljesül. Kivonva ezt az egyenletet (16)-ból, teljesül a

$$(G_1 - G_2)(u) - (G_1 - G_2)(v) = F_1\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) - F_1\left(\frac{1-u}{1-uv}\right) \quad (u, v \in (0, 1))$$

egyenlet. Az $\frac{1-u}{1-uv} = x$ és $\frac{1-v}{1-uv} = y$ helyettesítéseket elvégezve kapjuk, hogy $u = \frac{1-x}{y}$, $v = \frac{1-y}{x}$, $x, y \in (0, 1)$, $x + y > 1$ teljesül és a $G = G_2 - G_1$, F_1 függvények kielégítik az

$$F_1(x) + G\left(\frac{1-y}{x}\right) = F_1(y) + G\left(\frac{1-x}{y}\right) \quad (x, y \in (0, 1), x + y > 1)$$

egyenletet. Ezen egyenletből az $x \rightarrow 1-x$, $y \rightarrow 1-y$ helyettesítésekkel következik, hogy

$$F_1(1-x) + G\left(\frac{y}{1-x}\right) = F_1(1-y) + G\left(\frac{x}{1-y}\right) \quad (x, y, x+y \in (0, 1))$$

teljesül, azaz az $F : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = F_1(1-x)$ és $G : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik az

$$(17) \quad F(x) + G\left(\frac{y}{1-x}\right) = F(y) + G\left(\frac{x}{1-y}\right) \quad (x, y, x+y \in (0, 1))$$

függvényegyenletet. A (17) egyenlet a (10) egyenlet egy speciális esete, ahol $H = F$, $K = G$.

Így az 1.3.1. Tételből következik, hogy

$$\begin{aligned} F(x) &= l_1(1-x) + l_2(x) + a_1 \quad (x \in (0, 1)), \\ G(x) &= l_1(1-x) + l_2(x) - l_2(1-x) + b_1 \quad (x \in (0, 1)), \end{aligned}$$

ahol az $l_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) függvények kielégítik a (11) egyenletet és $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Végül, használva F_1 , F és G definícióját, kapjuk Lemmánk állítását és így (12)-őt és (13)-at $f_X(x)$ -re illetve $\frac{xf_U(x)}{f_V(x)}$ -re. $\square$

Másrészt az

$$\frac{1-v}{1-uv} = x, \quad 1-uv = y \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{1-y}{1-xy}, \quad v = 1-xy,$$

helyettesítésekkel a (8) egyenletből kapjuk, hogy

$$(18) \quad xf_X(x) f_Y(y) = f_U\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) \frac{xy}{1-xy} f_V(1-xy) \quad (x, y \in (0, 1))$$

teljesül. Így az 1.3.1. Lemmához hasonlóan bizonyíthatjuk a következőt:

1.3.2. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [43]] Ha az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén kielégítik a (8) (és így a (18)) egyenletet, akkor

$$(19) \quad f_U(x) = \exp[l_3(x) + l_4(1-x) + a_2] \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(20) \quad \frac{xf_X(x)}{f_Y(x)} = \exp[-l_3(1-x) - l_4(x) + l_4(1-x) - b_2] \quad (x \in (0, 1)),$$

ahol az $l_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 3, 4$) függvények teljesítik a (11) egyenletet és $a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Ezen fejezet fő eredményét a következő módon fogalmazhatjuk meg.

1.3.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [43]] Az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények akkor és csak akkor teljesítik a (8) egyenletet minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, ha

$$(21) \quad f_X(x) = \exp[l_1(x) + l_2(1-x) + a_1] \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(22) \quad f_Y(x) = x \exp[l_1(x) + l_2(x) + l_3(1-x) + a_1 + b_2] \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(23) \quad f_U(x) = \exp[l_2(1-x) + l_3(x) + a_2] \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(24) \quad f_V(x) = x \exp[l_1(1-x) + l_2(x) + l_3(x) + a_2 + b_1] \quad (x \in (0, 1)),$$

ahol az l_i ($i = 1, 2, 3$) függvények kielégítik a (11) logaritmikus egyenletet és $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$.

Bizonyítás. Felhasználva a (12), (13) formulákat az 1.3.1. Lemmából és a (19), (20) formulákat az 1.3.2. Lemmából, azonnal kapjuk (21)-et, és azt, hogy

$$(25) \quad f_Y(x) = x \exp[l_1(x) + l_2(1-x) + l_3(1-x) + l_4(x) - l_4(1-x) + a_1 + b_2],$$

$$(26) \quad f_U(x) = \exp[l_3(x) + l_4(1-x) + a_2],$$

$$(27) \quad f_V(x) = x \exp[l_3(x) + l_4(1-x) + l_1(1-x) + l_2(x) - l_2(1-x) + a_2 + b_1]$$

teljesül minden $x \in (0, 1)$ esetén.

Másrészt egyszerű számolás adja, hogy a (21), (25), (26) és (27) függvények pontosan akkor elégítik ki a (8) egyenletet, ha bármely $u, v \in (0, 1)$ esetén

$$l_4 \left[\frac{(1-u)(1-v)uv}{1-uv} \right] + 2a_2 + b_1 = l_2 \left[\frac{(1-u)(1-v)uv}{1-uv} \right] + 2a_1 + b_2.$$

Könnyen belátható, hogy a $h : (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(u, v) = \frac{(1-u)(1-v)uv}{1-uv}$ függvény értékkészlete tartalmazza a $(0, \frac{1}{6})$ nyílt intervallumot, így $l_4(t) + 2a_2 + b_1 = l_2(t) + 2a_1 + b_2$ ha $t \in (0, \frac{1}{6})$, azaz $(l_4 - l_2)(t) = (2a_1 + b_2) - (2a_2 + b_1)$ ha $t \in (0, \frac{1}{6})$.

Az $l_4 - l_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szintén kielégíti a (11) logaritmikus egyenletet. Így (lásd [4], [30]) $l_4 - l_2 \equiv 0$ és $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$. Ebből következik, hogy a (21), (25), (26), (27) függvények akkor és csakis akkor elégítik ki (8)-at ha $l_4 \equiv l_2$ és $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$, ami adja tételünk állítását. $\square$

Ezek után könnyen kapjuk a következő eredményt.

1.3.1. Következmény. [Lajkó, Mészáros, [43]] *A folytonos (vagy mérhető) $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények pontosan akkor teljesítik a (8) egyenletet minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, ha*

$$(28) \quad f_X(x) = e^{a_1} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(29) \quad f_Y(x) = e^{a_1+b_2} x^{p+q-1} (1-x)^{r-1} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(30) \quad f_U(x) = e^{a_2} x^{r-1} (1-x)^{q-1} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(31) \quad f_V(x) = e^{a_2+b_1} x^{q+r-1} (1-x)^{p-1} \quad (x \in (0, 1)),$$

ahol $a_1, a_2, b_1, b_2, p, q, r \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, hogy $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$.

Bizonyítás. Az 1.3.2. Tételből következően az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények akkor és csakis akkor elégítik ki (8)-at, ha (21), (22), (23), (24) alakúak, amely egyszerűen adja, hogy

$$(32) \quad l_2(x) = \log \left[\frac{(1-x)f_X(x)f_U(1-x)}{f_V(1-x)} \right] + b_1 - a_1 \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(33) \quad l_1(x) = \log[f_X(x)] - l_2(1-x) - a_1 \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(34) \quad l_3(x) = \log[f_V(x)] - l_1(1-x) - l_2(x) - \log x - a_2 - b_1 \quad (x \in (0, 1)).$$

Az f_X, f_U, f_V függvények folytonossága (mérhetősége) miatt (32) adja l_2 folytonosságát (mérhetőségét) a $(0, 1)$ halmazon. Eztán l_2 és f_X folytonossága

(mérhetősége) miatt (33) adja, hogy l_1 is folytonos (mérhető) $(0, 1)$ -en. Végül (34), felhasználva l_1 , l_2 és f_V folytonosságát (mérhetőségét), adja l_3 folytonosságát (mérhetőségét).

$l_1, l_2, l_3 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ kielégíti a (11) logaritmikus egyenletet és folytonosak (mérhetőek) a $(0, 1)$ halmazon. Ebből következik (lásd [4], [30]), hogy

$$(35) \quad l_1(x) = A_1 \log x, \quad l_2(x) = A_2 \log x, \quad l_3(x) = A_3 \log x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

teljesül, ahol $A_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$) tetszőleges konstans.

l_i ($i = 1, 2, 3$) ezen alakját a (21), (22), (23), (24) formulákba beírva könnyen látható, hogy

$$(36) \quad f_X(x) = e^{a_1} x^{A_1} (1-x)^{A_2} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(37) \quad f_Y(x) = e^{a_1+b_2} x^{A_1+A_2+1} (1-x)^{A_3} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(38) \quad f_U(x) = e^{a_2} x^{A_3} (1-x)^{A_2} \quad (x \in (0, 1)),$$

$$(39) \quad f_V(x) = e^{a_2+b_1} x^{A_2+A_3+1} (1-x)^{A_1} \quad (x \in (0, 1))$$

teljesül, ha $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$. Ez pedig a $p = A_1 + 1$, $q = A_2 + 1$ és $r = A_3 + 1$ konstansokkal adja következményünk állítását. $\square$

Megjegyzés. Ha az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények logaritmusa lokálisan integrálható, akkor ezen függvények pontosan akkor elégítik ki (8)-at minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ -re, ha (28), (29), (30), (31) alakúak, ahol $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ és $p, q, r \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, hogy $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$. Ami adja Wesolowski [63]-beli eredményét.

1.3.3. A majdnem mindenütt teljesülő (8) egyenlet mérhető megoldásai

1.3.3. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [43]] Ha az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesítik a (8) egyenletet, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények úgy, hogy $\tilde{f}_X = f_X$, $\tilde{f}_Y = f_Y$, $\tilde{f}_U = f_U$, $\tilde{f}_V = f_V$ majdnem mindenütt, és ha az f_X, f_Y, f_U, f_V függvényeket sorban az $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (8) függvényegyenlet mindenütt teljesül a $(0, 1)^2$ halmazon.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy egyértelműen létezik $\tilde{f}_X$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő az f_X függvénnyel $(0, 1)$ -en és f_X -et $\tilde{f}_X$ -al helyettesítve a (8) egyenlet majdnem mindenütt teljesül.

A

$$t = \frac{1-v}{1-uv}, \quad y = v$$

helyettesítést elvégezve a (8) egyenletből kapjuk, hogy

$$(40) \quad f_X(t) = \frac{f_U\left(\frac{y+t-1}{yt}\right) \frac{f_V(y)}{y}}{\frac{f_Y\left(\frac{1-y}{t}\right)}{\frac{1-y}{t}}},$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol

$$D = \{(t, y) \mid t, y \in (0, 1), t + y > 1\}.$$

Fubini tétele szerint ekkor létezik olyan $T \subseteq (0, 1)$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T$ esetén a (40) egyenlet majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül, ahol

$$D_t = \{y \in (0, 1) \mid (t, y) \in D\}.$$

Definiáljuk a g_1, g_2, g_3, h függvényeket a következő módon:

$$g_1(t, y) = \frac{y + t - 1}{yt},$$

$$g_2(t, y) = y,$$

$$g_3(t, y) = \frac{1-y}{t},$$

$$h(t, y, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 z_2}{z_3},$$

és alkalmazzuk az 1.1.1. Tételt a (40) egyenletre a következő választással:

$$f_X(t) = f(t), \quad f_U(t) = f_1(t), \quad \frac{f_V(t)}{t} = f_2(t), \quad \frac{f_Y(t)}{t} = f_3(t),$$

$$Z = \mathbb{R}_+, \quad Z_i = \mathbb{R}_+, \quad T = (0, 1), \quad Y = (0, 1), \quad X_i = (0, 1), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ilyen választással az 1.1.1. Tételben szereplő első feltétel teljesül a (40) egyenlettel.

Rögzített y mellett a h függvény folytonos a többi változójában, és a (40) egyenletben szereplő ismeretlen függvényekről feltételeztük, hogy mérhetőek, ezért az 1.1.1. Tételben szereplő második, illetve harmadik feltétel is teljesül.

A g_i függvények és a

$$D_2 g_1(t, y) = \frac{1-t}{y^2 t}, \quad D_2 g_2(t, y) = 1, \quad D_2 g_3(t, y) = -\frac{1}{t}$$

parciális deriváltjaik szintén folytonosak, emiatt a negyedik feltétel is teljesül.

Minden $t \in (0, 1)$ esetén létezik egy olyan $y \in (0, 1)$, hogy $(t, y) \in D$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el a (t, y) pontban, azaz rangjuk 1. Emiatt az utolsó feltétel is fenn áll.

Következésképpen kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $\tilde{f}_X$ folytonos függvény amely majdnem mindenütt megegyezik f_X -el $(0, 1)$ -en és f_X , f_Y , f_U , f_V majdnem mindenütt kielégíti a (40) egyenletet, amely ekvivalens az

$$(41) \quad f_U(u) f_V(v) = \tilde{f}_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

egyenlettel majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén.

Hasonló állítás látható be f_Y -ra is.

A (41) egyenletből a $t = 1 - uv$, $y = v$ helyettesítéssel az

$$(42) \quad f_Y(t) = \frac{f_U\left(\frac{1-t}{y}\right) \frac{f_V(y)t}{y}}{\tilde{f}_X\left(\frac{1-y}{t}\right)},$$

egyenletet kapjuk, ami a Fubini tétel miatt, majdnem minden $t \in (0, 1)$ és majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül.

A

$$g_1(t, y) = \frac{1-t}{y}, \quad g_2(t, y) = y, \quad g_3(t, y) = \frac{1-y}{t},$$

$$h(t, y, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

választással alkalmazzuk az 1.1.1. Tételt a (42) egyenletre. Ebben az esetben is láthatjuk, hogy az 1.1.1. Tétel feltételei mind teljesülnek, és így egyértelműen létezik olyan $\tilde{f}_Y$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt megegyezik f_Y -al $(0, 1)$ -en és $\tilde{f}_X$, $\tilde{f}_Y$, f_U , f_V majdnem mindenütt kielégíti a (42) egyenletet, azaz

$$\tilde{f}_Y(t) = \frac{f_U\left(\frac{1-t}{y}\right) \frac{f_V(y)t}{y}}{\tilde{f}_X\left(\frac{1-y}{t}\right)},$$

teljesül majdnem mindenütt $(0, 1)^2$ -en, ami ekvivalens (8)-al, ha f_X -et $\tilde{f}_X$ -el, f_Y -t pedig $\tilde{f}_Y$ -al helyettesítjük, azaz

$$(43) \quad f_U(u) f_V(v) = \tilde{f}_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) \tilde{f}_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

teljesül majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén.

A (43) egyenletből az $\frac{1-v}{1-uv} = x$ és $1-uv = y$ helyettesítéssel könnyen kapjuk az

$$(44) \quad \tilde{f}_X(x) \tilde{f}_Y(y) = f_U\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) f_V(1-xy) \frac{y}{1-xy}$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in (0, 1)^2$ -re. Az (44) egyenlet hasonló (43)-hoz, ha felcseréljük (f_U, f_V) -t $(\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y)$ -al.

Emiatt $\tilde{f}_X$ és $\tilde{f}_Y$ esetéhez hasonlóan beláthatjuk, hogy egyértelműen léteznek $\tilde{f}_U$ illetve $\tilde{f}_V$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt egyenlőek az f_U illetve f_V függvényekkel a $(0, 1)$ intervallumon, és f_U -t $\tilde{f}_U$ -val és f_V -t $\tilde{f}_V$ -al helyettesítve, a (44) egyenlet, és így a

$$(45) \quad \tilde{f}_U(u) \tilde{f}_V(v) = \tilde{f}_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) \tilde{f}_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül $(0, 1)^2$ -ben és így $(0, 1)^2$ egy sűrű részhalmazán.

A (45) egyenletben szereplő függvények folytonossága miatt nyilvánvaló, hogy a (45) egyenlet minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül. Továbbá $f_X = \tilde{f}_X$, $f_Y = \tilde{f}_Y$, $f_U = \tilde{f}_U$ és $f_V = \tilde{f}_V$ majdnem mindenütt $(0, 1)$ -en. $\square$

Felhasználva az 1.3.3. Lemmát és az 1.3.1. Következményt könnyen bizonyíthatjuk a következőt.

1.3.3. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [43]] Az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények akkor és csakis akkor elégítik ki az (8) egyenletet majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, ha léteznek olyan pozitív p, q, r, ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) konstansok az $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4$ tulajdonsággal, hogy

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \varepsilon_1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} & (m.m. \ x \in (0, 1)), \\ f_Y(y) &= \varepsilon_2 y^{p+q-1} (1-y)^{r-1} & (m.m. \ y \in (0, 1)), \\ f_U(u) &= \varepsilon_3 u^{r-1} (1-u)^{q-1} & (m.m. \ u \in (0, 1)), \\ f_V(v) &= \varepsilon_4 v^{q+r-1} (1-v)^{p-1} & (m.m. \ v \in (0, 1)) \end{aligned}$$

teljesül.

Bizonyítás. A tétel feltételei mellett a 1.3.3. Lemmából következik, hogy egyértelműen léteznek $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $f_X = \tilde{f}_X, f_Y = \tilde{f}_Y, f_U = \tilde{f}_U, f_V = \tilde{f}_V$ teljesül majdnem mindenütt és a (45) függvényegyenlet minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül. Ekkor az 1.3.1. Következmény miatt kapjuk, hogy a $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények pontosan akkor elégítik ki a (45) egyenletet, ha (28), (29), (30) és (31) alakúak. Mindezt összevetve kapjuk tételünk állítását az $\varepsilon_1 = e^{a_1}, \varepsilon_2 = e^{a_1+b_2}, \varepsilon_3 = e^{a_2}, \varepsilon_4 = e^{a_2+b_1}$ konstansokkal, hogy $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_4$. $\square$

1.3.4. A majdnem mindenütt teljesülő (8) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai

Tételezzünk most fel először csak annyit, hogy a (8)-ban szereplő $f_X, f_Y, f_U, f_V : (1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvények valamilyen valószínűségi változó sűrűségfüggvényei (azaz nemnegatívak és Lebegue integrálhatóak 1 integrállal). Következik-e ebből, hogy majdnem mindenütt pozitívak $(0, 1)$ -en?

Az 1.2.3. fejezethez hasonlóan igenlő választ tudunk adni a fenti kérdésre. Most is a Steinhaus tétel 1.1.2. általánosítását fogjuk használni $U = (0, 1)^2$ mellett, hogy megmutassuk, a majdnem mindenütt teljesülő (8) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai majdnem mindenütt pozitívak $(0, 1)$ -en.

Igaz a következő általánosabb eredmény is.

1.3.4. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [56]] *Legyenek az $f_U, f_V, f_X, f_Y : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyek kielégítik a (8) egyenletet majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, nemnegatívak és léteznek $A, B, C, D \subset (0, 1)$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak. Ekkor az $f_U, f_V, f_X, f_Y : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények majdnem mindenütt pozitívak.*

Bizonyítás. Az $\{f_X \neq 0\} = \{x \in (0, 1) \mid f_X(x) \neq 0\}$ illetve az ezzel analóg $\{f_Y \neq 0\}, \{f_U \neq 0\}, \{f_V \neq 0\}$ jelöléseket fogjuk használni.

Először lássuk be, hogy az $\{f_X \neq 0\}, \{f_Y \neq 0\}, \{f_U \neq 0\}, \{f_V \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy nemüres nyílt intervallumot. Az 1.1.2. Tételt fogjuk használni.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a $\{f_X \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, ellenőrizzük, hogy az $F_1(u, v) = \frac{1-v}{1-uv}$ ($u, v \in (0, 1)$) függvény

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(u, v) = \frac{v(1-v)}{(1-uv)^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v}(u, v) = \frac{u-1}{(1-uv)^2}$$

parciális deriváltjai nem tűnnek el. Ez nyilván igaz. Mivel f_U és f_V pozitívak az A és B Lebesgue mérhető, pozitív mértékű halmazokon, ezért az 1.1.2. Tétel miatt az $\frac{1-B}{1-AB}$ halmaz tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, így (8) adja, hogy f_X nem egyenlő 0-val ezen intervallum majdnem minden pontjára, azaz $\{f_X \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy $\{f_Y \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot. Használjuk most az $F_2(u, v) = 1 - uv$ ($u, v \in (0, 1)$) függvényt, és azt, hogy

$$\frac{\partial F_2}{\partial u}(u, v) = -v \neq 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial v}(u, v) = -u \neq 0$$

teljesül minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén. Az 1.1.2. Tétel miatt az $1 - AB$ halmaz tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, így (8) adja, hogy $f_Y \neq 0$ ezen nemüres nyílt intervallum majdnem minden pontjára, azaz $\{f_Y \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

Ha használjuk az

$$(T) \quad x = F_1(u, v) = \frac{1-v}{1-uv}, \quad y = F_2(u, v) = 1-uv \quad \left((u, v) \in (0, 1)^2 \right)$$

transzformációt, akkor (8)-ból kapjuk, hogy

$$(46) \quad f_X(x) f_Y(y) = f_U \left(\frac{1-y}{1-xy} \right) f_V(1-xy) \frac{y}{1-xy} \quad \left(\text{m.m. } (x, y) \in (0, 1)^2 \right)$$

teljesül. Követve erre az egyenletre az előző gondolatmenetet, könnyen bizonyíthatjuk, hogy az $\{f_U \neq 0\}$ és $\{f_V \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot, legyenek ezek sorra $(a, b) \subset (0, 1)$ illetve $(c, d) \subset (0, 1)$.

Ekkor

$$f_U(u) f_V(v) \neq 0 \quad \text{m.m. } u \in (a, b) \quad \text{és m.m. } v \in (c, d).$$

Így (8) adja, hogy

$$f_X(x) \neq 0 \quad \text{m.m. } x \in \left\{ \frac{1-v}{1-uv} \mid u \in (a, b), v \in (c, d) \right\} = L_1$$

és

$$f_Y(y) \neq 0 \quad \text{m.m. } y \in \{1-uv \mid u \in (a, b), v \in (c, d)\} = M_1.$$

Belátjuk, hogy

$$(47) \quad \begin{aligned} L_1 &= \left(\frac{1-d}{1-ad}, \frac{1-c}{1-bc} \right) = (a', b') \\ M_1 &= (1-bd, 1-ac) = (c', d') \end{aligned}$$

teljesül. Könnyen megmutatható, hogy a (T) transzformáció inverze

$$(T^{-1}) \quad u = F_1(x, y) = \frac{1-y}{1-xy}, \quad v = F_2(x, y) = 1-xy \quad \left((x, y) \in (0, 1)^2 \right),$$

azaz $T=T^{-1}$.

A partiális deriváltakat felhasználva T Jacobi determinánsára kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{v(1-v)}{(1-uv)^2} & \frac{u-1}{(1-uv)^2} \\ -v & -u \end{vmatrix} = -\frac{v}{1-uv} < 0 \quad \left((u, v) \in (0, 1)^2 \right),$$

azaz T reguláris.

Ismert, hogy reguláris transzformáció esetén az $(a, b) \times (c, d)$ nyílt téglalap képe összefüggő nyílt tartomány lesz. Továbbá az $[a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap képe pedig egy zárt tartomány és ezen tartomány határa a zárt téglalap határának a képe. Könnyen látható, hogy az

$$u = a, \quad u = b, \quad v = c, \quad v = d$$

egyeneselek képei az

$$y = \frac{1-1/a}{x-1/a}, \quad y = \frac{1-1/b}{x-1/b}, \quad y = \frac{1-c}{x}, \quad y = \frac{1-d}{x}$$

görbék (lásd 1. ábra).

Ez pedig adja (47)-et.

Ismét a (46) egyenletet használva kapjuk, hogy

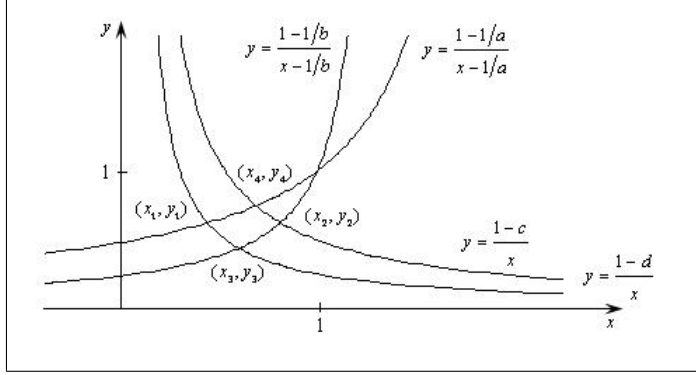
$$f_U(u) \neq 0 \text{ m.m. } u \in \left\{ \frac{1-y}{1-xy} \mid x \in (a', b'), y \in (c', d') \right\} = L_2$$

és

$$f_V(v) \neq 0 \text{ m.m. } v \in \{1-xy \mid x \in (a', b'), y \in (c', d')\} = M_2.$$

Mivel $T^{-1}=T$ reguláris, a fentihez hasonló módon kapjuk, hogy

$$L_2 = \left(\frac{1-d'}{1-a'd'}, \frac{1-c'}{1-b'c'} \right), \quad M_2 = (1-b'd', 1-a'c').$$



1. ábra.

Ez adja, hogy

$$L_2 = \left(\frac{c - acd}{d - ad + ac - acd}a, \frac{d - bcd}{c - bc + bd - bcd}b \right) = (a_1, b_1),$$

$$M_2 = \left(\frac{1 + a - b - ac}{1 - bc}c, \frac{1 + b - a - bd}{1 - ad}d \right) = (c_1, d_1).$$

Megmutattuk, hogy az

$$f_U(u) f_V(v) \neq 0 \text{ m.m. } u \in (a, b), v \in (c, d)$$

azonosság adja, hogy

$$f_U(u) f_V(v) \neq 0 \text{ m.m. } u \in (a_1, b_1), v \in (c_1, d_1)$$

teljesül.

Igaz továbbá az is, hogy

$$0 < a_1 < a, \quad b < b_1 < 1, \quad 0 < c_1 < c, \quad d < d_1 < 1.$$

Definiáljuk most az $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$, $\langle c_k \rangle$ és $\langle d_k \rangle$ sorozatokat az alábbi módon:

$$a_{n+1} = \frac{c_n - a_n c_n d_n}{d_n - a_n d_n + a_n c_n - a_n c_n d_n} a_n, \quad b_{n+1} = \frac{d_n - b_n c_n d_n}{c_n - b_n c_n + b_n d_n - b_n c_n d_n} b_n,$$

$$c_{n+1} = \frac{1 - b_n + a_n - a_n c_n}{1 - b_n c_n} c_n, \quad d_{n+1} = \frac{1 - a_n + b_n - b_n d_n}{1 - a_n d_n} d_n$$

minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Megismételve a fenti gondolatmenetet és indukciót használva kapjuk, hogy

$$f_U(u)f_V(v) \neq 0 \text{ m.m. } u \in (a_n, b_n) \text{ és m.m. } v \in (c_n, d_n)$$

teljesül minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Egyszerűen látható, hogy $\langle a_k \rangle$ és $\langle c_k \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, míg $\langle b_k \rangle$ és $\langle d_k \rangle$ szigorúan monoton növekedő sorozatok, továbbá $a_k, b_k, c_k, d_k \in (0, 1)$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. Megmutatjuk, hogy $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\bar{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1$.

$$\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{\bar{c} - \bar{a}\bar{c}\bar{d}}{\bar{d} - \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} - \bar{a}\bar{c}\bar{d}}\bar{a},$$

ami adja, hogy $\bar{a} = 0$ vagy $\frac{\bar{c} - \bar{a}\bar{c}\bar{d}}{\bar{d} - \bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{c} - \bar{a}\bar{c}\bar{d}} = 1$. Ám az utóbbi egyenlőség mutatja, hogy

$$\bar{c}(1 - \bar{a}) = \bar{d}(1 - \bar{a}) \iff \bar{c} = \bar{d},$$

de $\bar{c} < c_1 < d_1 < \bar{d}$, így $\bar{c} \neq \bar{d}$. Ezért $\bar{a} = 0$.

$$\bar{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1} = \frac{1 - \bar{b} + \bar{a} - \bar{a}\bar{c}}{1 - \bar{b}\bar{c}}\bar{c} = \frac{1 - \bar{b}}{1 - \bar{b}\bar{c}}\bar{c},$$

ami adja, hogy $\bar{c} = 0$ vagy $1 - \bar{b} = 1 - \bar{b}\bar{c} \iff \bar{b} = \bar{b}\bar{c} \iff \bar{c} = 1$ ($\bar{b} > 0$). De $c_n < c_1 < 1$, így $\bar{c} < 1$. Ezért $\bar{c} = 0$.

$$\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \frac{\bar{d} - \bar{b}\bar{c}\bar{d}}{\bar{c} - \bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}\bar{d}}\bar{b} = \frac{\bar{d}}{\bar{b}\bar{d}}\bar{b} = 1.$$

$$\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1} = \frac{1 - \bar{a} + \bar{b} - \bar{b}\bar{d}}{1 - \bar{a}\bar{d}}\bar{d} = \frac{1 + \bar{b} - \bar{b}\bar{d}}{1}\bar{d} = (2 - \bar{d})\bar{d},$$

ami adja, hogy vagy $\bar{d} = 1$ vagy $2 - \bar{d} = 1 \iff \bar{d} = 1$. Azaz $\bar{d} = 1$.

Ekkor kapjuk, hogy f_U, f_V majdnem minden $u, v \in (0, 1)$ esetén különbözik nullától. Ezért f_X és f_Y is különbözik nullától majdnem minden $x, y \in (0, 1)$ esetén. $\square$

Megjegyzés. Ha f_U, f_V, f_X, f_Y sűrűségfüggvények, akkor teljesítik a tétel feltételeit, így majdnem mindenütt pozitívak, ezért az előző fejezet 1.3.3. Lemmája továbbra is érvényes, csak most már sűrűségfüggvényekkel.

1.3.4. Lemma. [Mészáros, Lajkó, [56]] Ha az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén kielégítik a (8) egyenletet, akkor egyértelműen léteznek olyan $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $\tilde{f}_X = f_X, \tilde{f}_Y = f_Y, \tilde{f}_U = f_U, \tilde{f}_V = f_V$ majdnem mindenütt, és ha az f_X, f_Y, f_U, f_V függvényeket sorban az $\tilde{f}_X, \tilde{f}_Y, \tilde{f}_U, \tilde{f}_V$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (8) függvényegyenlet mindenütt teljesül a $(0, 1)^2$ halmazon.

Így a mindenütt teljesülő (8) egyenlet folytonos megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet sűrűségfüggvény megoldásait.

1.3.5. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [56]] Az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények akkor és csak akkor elégítik ki a (8) egyenletet majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, ha léteznek olyan pozitív p, q, r, ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) konstansok az $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4$ tulajdonsággal, hogy

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \varepsilon_1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} & (m.m. \ x \in (0, 1)), \\ f_Y(y) &= \varepsilon_2 y^{p+q-1} (1-y)^{r-1} & (m.m. \ y \in (0, 1)), \\ f_U(u) &= \varepsilon_3 u^{r-1} (1-u)^{q-1} & (m.m. \ u \in (0, 1)), \\ f_V(v) &= \varepsilon_4 v^{q+r-1} (1-v)^{p-1} & (m.m. \ v \in (0, 1)) \end{aligned}$$

teljesül.

1.3.5. A (8) egyenlet általános megoldása (IV) mellett

Az 1.3.4. Tétel bizonyítása mutatja, hogy ha (8) minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ -re teljesül, f_X, f_Y, f_U, f_V nemnegatívak és léteznek $A, B, C, D \subset (0, 1)$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak akkor az f_X, f_Y, f_U, f_V függvények mindenütt pozitívak.

Így az 1.3.2. Tételt felhasználva kapjuk a (8) egyenlet általános megoldását (IV) mellett.

1.3.6. Tétel. [Mészáros] Az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvények, amelyekhez léteznek $A, B, C, D \subset (0, 1)$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor és csak akkor teljesítik a (8)

egyenletet minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \exp[l_1(x) + l_2(1-x) + a_1] \quad (x \in (0, 1)), \\ f_Y(x) &= x \exp[l_1(x) + l_2(x) + l_3(1-x) + a_1 + b_2] \quad (x \in (0, 1)), \\ f_U(x) &= \exp[l_2(1-x) + l_3(x) + a_2] \quad (x \in (0, 1)), \\ f_V(x) &= x \exp[l_1(1-x) + l_2(x) + l_3(x) + a_2 + b_1] \quad (x \in (0, 1)), \end{aligned}$$

ahol az l_i ($i = 1, 2, 3$) függvények kielégítik a (11) logaritmikus egyenletet és $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, hogy $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$.

1.3.6. A (9) egyenlet általános megoldása

1.3.7. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [43]] A $g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (9) egyenletet, ha

$$\begin{aligned} g_1(x) &= A(x) + B(1-x) + a \quad (x \in (0, 1)), \\ (48) \quad g_2(x) &= C(x) + D(1-x) - c \quad (x \in (0, 1)), \\ \alpha_1(x) &= A(1-x) + B(x) + D(1-x) + d \quad (x \in (0, 1)), \\ \alpha_2(x) &= B(1-x) + C(1-x) + D(x) - b \quad (x \in (0, 1)), \end{aligned}$$

ahol az $A, B, C, D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (11) logaritmikus egyenletet, $A + B + C + D = 0$ és $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pedig konstansok, hogy $a + b = c + d$.

Bizonyítás. A (9) egyenletből az

$$\frac{1-x}{1-xy} = u, \quad \frac{1-y}{1-xy} = v$$

azaz a

$$x = \frac{1-u}{v}, \quad y = \frac{1-v}{u}, \quad u, v \in (0, 1), \quad u + v > 1$$

helyettesítésekkel kapjuk a

$$(49) \quad g_1(u) + g_2(v) = \alpha_1\left(\frac{1-u}{v}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-v}{u}\right) \quad (u, v \in (0, 1), u + v > 1)$$

függvényegyenletet.

Helyettesítsünk u helyére $1-x$ -et, v helyére $1-y$ -t (49)-ben, úgy kapjuk, hogy

$$g_1(1-x) + g_2(1-y) = \alpha_1\left(\frac{x}{1-y}\right) + \alpha_2\left(\frac{y}{1-x}\right) \quad (x, y, x+y < 1).$$

Ebből pedig az következik, hogy az

$$F(x) = g_1(1-x), G(x) = -\alpha_2(x), H(x) = -g_2(1-x), K(x) = \alpha_1(x)$$

szerint definiált $F, G, H, K : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (10) egyenletet.

Így az 1.3.1. Tétel adja, hogy

$$\begin{aligned} g_1(1-x) &= l_1(1-x) + l_2(x) + a, \\ (50) \quad -g_2(1-x) &= l_1(1-x) + l_2(1-x) + l_3(x) - l_3(1-x) + c, \\ \alpha_1(x) &= l_1(1-x) + l_2(x) - l_3(1-x) + d, \\ -\alpha_2(x) &= l_1(1-x) + l_3(x) - l_3(1-x) + b \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in (0, 1)$ -re.

Az (50) egyenletből az $A = l_1$, $B = l_2$, $D = -l_3$ és $l_3 - l_1 - l_2 = C$ jelöléssel kapjuk (48)-at. Az $A, B, C, D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények teljesítik (11)-et.

Könnyen belátható, hogy a (48) által definiált $g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2$ függvények valóban kielégítik (9)-et ha $A + B + C + D = 0$. $\square$

1.3.2. Következmény. [Lajkó, Mészáros, [43]] $A, g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (9) egyenletet, ha

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \alpha \log x + \beta \log(1-x) + a, \\ g_2(x) &= \gamma \log x + \delta \log(1-x) - c, \\ \alpha_1(x) &= \beta \log x - (\beta + \gamma) \log(1-x) + d, \\ \alpha_2(x) &= (\beta + \gamma) \log(1-x) + \delta \log x - b, \end{aligned}$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok az $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ és az $a + b = c + d$ tulajdonsággal.

Bizonyítás. Az 1.3.7. Tétel alapján a $g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki (9)-et, ha a függvények (48) alakúak, ami könnyen adja, hogy

$$\begin{aligned} A(x) &= g_1(x) - \alpha_2(x) + g_2(1-x) - d \quad (x \in (0, 1)), \\ B(x) &= g_1(1-x) - A(1-x) - a \quad (x \in (0, 1)), \\ C(x) &= \alpha_2(1-x) - \alpha_1(x) + A(1-x) + b + d \quad (x \in (0, 1)), \\ D(x) &= -A(x) - B(x) - C(x) \quad (x \in (0, 1)). \end{aligned}$$

Ezen egyenletek mutatják, hogy a $g_1, g_2, \alpha_1, \alpha_2$ függvények mérhetősége $(0, 1)$ -en maga után vonja az A, B, C függvények majd végül a D függvény mérhetőségét $(0, 1)$ -en.

Mindezekén túl az $A, B, C, D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (11) logaritmikus egyenletet. Így

$$(51) \quad A(x) = \alpha \log x, \quad B(x) = \beta \log x, \quad C(x) = \gamma \log x, \quad D(x) = \delta \log x \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tetszőleges, az $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ azonosságot kielégítő konstansok. (51)-et (48)-ba helyettesítve azonnal kapjuk következményünk állítását. $\square$

1.4. A normális eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenlet

1.4.1. Bevezetés

Sokan vizsgálták (pl. Baker [9] és Lajkó [35]) az

$$(52) \quad f(x)g(y) = h(ax + by)k(cx + dy) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényegyenletet, ahol $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ függvények, a, b, c, d pedig rögzített nullától különböző valós számok a $\Delta := ad - bc \neq 0$ tulajdonsággal.

Baker meghatározta az összes mérhető és nem majdnem mindenütt nulla $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt, amely kielégíti az (52) egyenletet, Lajkó pedig megadta (52) összes olyan $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldását, amely nem majdnem mindenütt nulla.

Ezen fejezet célja az, hogy meghatározzuk a majdnem mindenütt teljesülő (52) egyenlet összes mérhető $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ megoldását, illetve a sűrűség-függvény megoldásokat is.

Felhasználjuk a következő eredményt

1.4.1. Tétel. [Baker, [9], Lajkó, [35]] *Tegyük fel, hogy az $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények kielégítik az (52) egyenletet, ekkor*

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 \exp[a_1 x + b_1 x^2] & (x \in \mathbb{R}), \\ g(x) &= \alpha_2 \exp\left[a_2 x - \frac{bd}{ac} b_1 x^2\right] & (x \in \mathbb{R}), \\ h(x) &= \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_1 d - a_2 c}{\Delta} x + \frac{d}{a} b_1 x^2\right] & (x \in \mathbb{R}), \\ k(x) &= \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_2 a - a_1 b}{\Delta} x - \frac{b}{c} b_1 x^2\right] & (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahol $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2$) tetszőleges, az $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = 1$ feltételt kielégítő konstansok.

A fejezet eredményei az [53] dolgozatban és az [55] előadásban találhatók meg.

1.4.2. A majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesülő (52) egyenlet mérhető megoldásai

Igaz az alábbi állítás.

1.4.1. Lemma. [Mészáros, [53]] Ha a mérhető $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények kielégítik az (52) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges a $\Delta = ad - bc \neq 0$ feltételt kielégítő konstansok, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{h} = h$ és $\tilde{k} = k$ teljesül majdnem mindenütt, és ha az f, g, h, k függvényeket az $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az (52) egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}^2$ -en.

Bizonyítás. Először lássuk be azt, hogy egyértelműen létezik $\tilde{h}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő h -val $\mathbb{R}$ -en és h -t $\tilde{h}$ -al helyettesítve, (52) majdnem mindenütt teljesül.

A $t = ax + by$ helyettesítéssel (52)-ből kapjuk, hogy

$$(53) \quad h(t) = \frac{f\left(\frac{t-by}{a}\right)g(y)}{k\left(\frac{c}{a}(t-by) + dy\right)}$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol $D = \mathbb{R}^2$. A Fubini tétel értelmében létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ esetén az (53) egyenlet majdnem minden $y \in D_t = \mathbb{R}$ esetén teljesül.

Definiáljuk a g_1, g_2, g_3, H függvényeket a következő módon

$$g_1(t, y) = \frac{t - by}{a}, \quad g_2(t, y) = y,$$

$$g_3(t, y) = \frac{c}{a}(t - by) + dy, \quad H(t, y, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 z_2}{z_3},$$

és alkalmazzuk most megfelelő választással az 1.1.1. Tételt a (53) egyenletre.

Az első feltétel az (53) egyenlettel teljesül az 1.1.1. Tételben. Rögzített y mellett a H függvény folytonos a többi változójában, ez adja a második feltételt.

Az (53) egyenletben szereplő függvények feltételeink szerint mérhetőek, ezért a harmadik feltétel triviálisan teljesül.

A g_i függvények és a

$$D_2 g_1(t, y) = -\frac{b}{a}, \quad D_2 g_2(t, y) = 1, \quad D_2 g_3(t, y) = \frac{\Delta}{a}$$

parciális deriváltak folytonosak, ebből következik a negyedik feltétel.

Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $y \in \mathbb{R}$, hogy $(t, y) \in D = \mathbb{R}^2$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el (t, y) -ban, azaz rangjuk 1. Így az utolsó feltétel is teljesül az 1.1.1. Tételben.

Következésképpen igaz, hogy egyértelműen létezik olyan folytonos $\tilde{h}$ függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő h -val $\mathbb{R}$ -en és $f, g, \tilde{h}, k$ majdnem mindenütt kielégíti az (52) egyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy

$$(54) \quad f(x) g(y) = \tilde{h}(ax + by) k(cx + dy)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Hasonló módon látható be k esetén. Az (54) egyenletből a $t = cx + dy$ helyettesítéssel kapjuk a

$$k(t) = \frac{f\left(\frac{t-dy}{c}\right) g(y)}{\tilde{h}\left(\frac{a}{c}(t-dy) + by\right)}$$

egyenletet, amely a

$$g_1(t, y) = \frac{t-dy}{c}, \quad g_2(t, y) = y,$$

$$g_3(t, y) = \frac{a}{c}(t-dy) + by, \quad H(t, y, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

választással, a Fubini tétellel, illetve azzal, hogy az 1.1.1. Tétel feltételei ismét mind teljesülnek, adja, hogy egyértelműen létezik olyan folytonos $\tilde{k}$ függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő k -val $\mathbb{R}$ -en és az $f, g, \tilde{h}, \tilde{k}$ függvények majdnem mindenütt teljesítik az (52) egyenletet, azaz

$$(55) \quad f(x) g(y) = \tilde{h}(ax + by) \tilde{k}(cx + dy)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Léteznek x_0 és y_0 elemek, hogy $f(x_0) \neq 0$ és $g(y_0) \neq 0$, így az $y = y_0$ illetve az $x = x_0$ helyettesítésekkel az (55) egyenletből kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{g(y_0)} \tilde{h}(ax + by_0) \tilde{k}(cx + dy_0)$$

teljesül majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és

$$g(y) = \frac{1}{f(x_0)} \tilde{h}(ax_0 + by) \tilde{k}(cx_0 + dy)$$

teljesül majdnem minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $\tilde{h}, \tilde{k}$ folytonos, ezért egyértelműen léteznek olyan, a fenti két egyenlet jobb oldala által definiált $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt egyenlőek f -el illetve g -vel $\mathbb{R}$ -en, és ha f -et $\tilde{f}$ -al, g -t $\tilde{g}$ -al helyettesítjük, akkor az

$$(56) \quad \tilde{f}(x) \tilde{g}(y) = \tilde{h}(ax + by) \tilde{k}(cx + dy)$$

függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül $\mathbb{R}^2$ -en.

(56) mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}^2$ -en, amelyek $\mathbb{R}^2$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért (56)-nak mindenütt teljesülnie kell $\mathbb{R}^2$ -en.

Továbbá $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$, $h = \tilde{h}$, $k = \tilde{k}$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}$ -en. $\square$

Most már megadhatjuk a majdnem mindenütt teljesülő (52) egyenlet pozitív mérhető megoldásait.

1.4.2. Tétel. [Mészáros, [53]] Tegyük fel, hogy az $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények majdnem mindenütt kielégítik az (52) egyenletet, ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 \exp[a_1 x + b_1 x^2] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}), \\ g(x) &= \alpha_2 \exp\left[a_2 x - \frac{bd}{ac} b_1 x^2\right] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}), \\ h(x) &= \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_1 d - a_2 c}{\Delta} x + \frac{d}{a} b_1 x^2\right] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}), \\ k(x) &= \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_2 a - a_1 b}{\Delta} x - \frac{b}{c} b_1 x^2\right] & (m.m. \ x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ahol $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ ($i = 1, 2$) tetszőleges, az $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 = 1$ feltételt kielégítő konstansok.

Bizonyítás. Az 1.4.1. Tétel és az előző Lemma azonnal adja állításunkat. $\square$

1.4.3. A majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesülő (52) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai

Az előző fejezetben megadtuk a majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesülő (52) egyenlet pozitív mérhető megoldásait.

Tételezzünk fel most csak annyit, hogy az (52)-ben szereplő $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvények valamilyen valószínűségi változó sűrűségfüggvényei (azaz nemnegatívak és Lebesgue integrálhatóak 1 integrállal). Következik-e ebből, hogy majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}$ -en?

Az 1.3.3. és 1.4.4. fejezetekhez hasonlóan, igenlő választ tudunk adni a fenti kérdésre. Most Baker [9]-beli módszerének kiterjesztését és a Steinhaus tétel 1.1.2 általánosítását fogjuk használni $U = \mathbb{R}^2$ mellett, hogy megmutassuk, a majdnem mindenütt teljesülő (52) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}$ -en.

1.4.3. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [55]] *Legyenek az $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sűrűségfüggvények, amelyek kielégítik a majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesülő (52) egyenletet, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges, az $ad - bc \neq 0$ feltételt kielégítő konstansok. Ekkor az $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények majdnem mindenütt pozitívak.*

Bizonyítás. Az $\{f \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ illetve az ezzel analóg $\{g \neq 0\}$, $\{h \neq 0\}$, $\{k \neq 0\}$ jelöléseket fogjuk használni.

Először lássuk azt be, hogy az $\{f \neq 0\}$, $\{g \neq 0\}$, $\{h \neq 0\}$, $\{k \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot. Mivel f, g, h, k nemnegatív és Lebesgue integráljuk 1, így valamilyen A, B, C, D pozitív Lebesgue mértékű halmazokon rendre pozitívak.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a $\{h \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, ellenőrizni kell, hogy az $F(x, y) = ax + by$ ($x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvény

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = a, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = b$$

parciális deriváltjai nem tűnnek el. Ez nyilvánvaló. Mivel f és g pozitívak az A és B Lebesgue mérhető, pozitív mértékű halmazokon, ezért az 1.1.2. Tétel miatt az $aA + bB$ halmaz tartalmaz egy L nemüres nyílt intervallumot, így (52) adja, hogy h nem egyenlő 0-val L majdnem minden pontjára, azaz $\{h \neq 0\}$ majdnem tartalmazza az L nemüres nyílt intervallumot.

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy $\{k \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot. Használjuk most az $F(x, y) = cx + dy$ ($x, y \in \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvényt, és azt, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = c \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = d \neq 0$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Az 1.1.2. Tétel miatt a $cA + dB$ halmaz tartalmaz egy M nemüres nyílt intervallumot, így (52) adja, hogy $k \neq 0$ az M nemüres nyílt intervallum majdnem minden pontjára, azaz a $\{k \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmazza az M nemüres nyílt intervallumot.

(52)-ből az

$$u = ax + by, \quad v = cx + dy \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

helyettesítéssel (ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges konstansok a $\Delta \doteq ad - bc \neq 0$ tulajdonsággal) kapjuk, hogy

$$(57) \quad f\left(\frac{du - bv}{ad - bc}\right) g\left(\frac{av - cu}{ad - bc}\right) = h(u) k(v) \quad (\text{m.m. } (u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

teljesül. Felhasználva ezt az egyenletet bizonyíthatjuk, hogy az $\{f \neq 0\}$ és $\{g \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmazznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot.

Az $F(u, v) = \frac{du - bv}{ad - bc}$ ($u, v \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ad - bc \neq 0$) függvényre a parciális deriváltak kielégítik a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{d}{ad - bc} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = -\frac{b}{ad - bc} \neq 0$$

feltételeket minden $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Mivel h és k pozitívak a C illetve D pozitív mértékű Lebesgue mérhető halmazokon, ezért az 1.1.2. Tétel miatt kapjuk, hogy a $\frac{dC - bD}{ad - bc}$ halmaz tartalmaz egy $I = (\alpha, \beta)$ nemüres nyílt intervallumot, így (57) adja, hogy f nem egyenlő 0-val az I nyílt intervallum majdnem minden pontjára, ezért a $\{f \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmazza az I nemüres nyílt intervallumot.

Végül az $F(u, v) = \frac{av - cu}{ad - bc}$ ($u, v \in \mathbb{R}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $ad - bc \neq 0$) függvényre kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = -\frac{c}{ad - bc} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{a}{ad - bc} \neq 0$$

minden $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Így az 1.1.2. Tétel alapján a $\frac{aD - cC}{ad - bc}$ halmaz tartalmaz egy $J = (\gamma, \delta)$ nemüres nyílt intervallumot, ezért $g \neq 0$ a J nemüres nyílt

intervallum majdnem minden pontjára, azaz $\{g \neq 0\}$ majdnem tartalmazza a J nemüres nyílt intervallumot.

Ekkor

$$f(x)g(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in I = (\alpha, \beta) \text{ és m.m. } y \in J = (\gamma, \delta).$$

Így (52) adja, hogy

$$h(u)k(v) \neq 0 \text{ m.m. } u \in aI + bJ \text{ és m.m. } v \in cI + dJ,$$

ebből, és az (57) egyenletből levezethető, hogy

$$f(x) \neq 0 \text{ m.m. } x \in \frac{d}{\Delta}(aI + bJ) - \frac{b}{\Delta}(cI + dJ) \supseteq I + \frac{bd}{\Delta}(J - J) = I'$$

és

$$g(y) \neq 0 \text{ m.m. } y \in -\frac{c}{\Delta}(aI + bJ) + \frac{a}{\Delta}(cI + dJ) \supseteq J + \frac{ac}{\Delta}(I - I) = J'.$$

Mivel $J - J$ egy 0 középpontú és $\delta - \gamma$ sugarú intervallum, ezért I' is intervallum ugyanazzal a középponttal mint I , de a hosszúsága

$$(\beta - \alpha) + 2 \left| \frac{bd}{\Delta} \right| (\delta - \gamma).$$

Hasonlóan J' is intervallum ugyanazzal a középponttal, mint J , de

$$(\delta - \gamma) + 2 \left| \frac{ac}{\Delta} \right| (\beta - \alpha)$$

hosszúsággal.

Ebből már indukcióval könnyen látható (lásd pl. [9]), hogy $f(x)g(y) \neq 0$ majdnem minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, és így $h(u)k(v) \neq 0$ majdnem minden $u, v \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel beláttuk állításunkat. $\square$

Megjegyzés. A tétel bizonyítása mutatja, hogy elegendő csak annyit feltenni, hogy az ismeretlen függvények nemnegatívak és léteznek $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ pozitív mértékű halmazok, hogy azokon pozitívak.

Egyszerűen belátható, hogy az előző fejezet 1.4.1. Lemmája érvényes marad sűrűségfüggvényekre is, azaz igaz az

1.4.2. Lemma. [Mészáros, Lajkó, [55]] Ha az ismeretlen $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények kielégítik az (52) függvényegyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges, az $ad - bc \neq 0$ feltételt kielégítő konstansok, akkor egyértelműen léteznek olyan $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{h} = h$ és $\tilde{k} = k$ majdnem mindenütt, és ha az f, g, h, k függvényeket az $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{k}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az (52) egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}^2$ -en.

Így a mindenütt teljesülő (52) egyenlet folytonos megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet sűrűségfüggvény megoldásait is.

1.4.4. Tétel. [Mészáros, Lajkó, [55]] Tegyük fel, hogy az $f, g, h, k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények kielégítik az (52) egyenletet majdnem mindenütt, ekkor

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 \exp[a_1 x + b_1 x^2] & (m.m. x \in \mathbb{R}), \\ g(x) &= \alpha_2 \exp\left[a_2 x - \frac{bd}{ac} b_1 x^2\right] & (m.m. x \in \mathbb{R}), \\ h(x) &= \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_1 d - a_2 c}{ad - bc} x + \frac{d}{a} b_1 x^2\right] & (m.m. x \in \mathbb{R}), \\ k(x) &= \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_2 a - a_1 b}{ad - bc} x - \frac{b}{c} b_1 x^2\right] & (m.m. x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

teljesül, ahol $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) tetszőleges, az $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 = 1$ feltételt kielégítő konstansok.

1.5. Pexider egyenletek

1.5.1. Bevezetés

Vizsgáljuk a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$(58) \quad f(u + v) = g(u) h(v)$$

exponenciális Pexider egyenletet az ismeretlen $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre, ahol g, h nem azonosan 0, illetve a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$(59) \quad f(uv) = g(u) + h(v)$$

logaritnikus Pexider egyenletet az ismeretlen $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre.

Ismeretes (lásd [4]), hogy a minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (58) egyenlet nemtriviális mérhető (folytonos) megoldásai

$$f(t) = abe^{ct}, \quad g(t) = ae^{ct}, \quad h(t) = be^{ct} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

alakúak, ahol $a, b \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}$.

A minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (59) egyenlet mérhető (folytonos) megoldásai

$$f(t) = c \ln t + a + b, \quad g(t) = c \ln t + a, \quad h(x) = c \ln t + b \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

alakúak, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

A majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén teljesülő (58) egyenlet általános megoldása is ismert (lásd [4]). Itt (58) csak majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesül és az eredményünket más módszerrel bizonyítjuk.

A fejezet eredményeit a [44] és [50] cikkekben közzétettük.

1.5.2. A majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (58) egyenlettel kapcsolatos eredmények

1.5.1. Lemma. [Maksa, Mészáros, [50]] Ha az $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények, ahol g, h nem azonosan 0, majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik az (58) egyenletet, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{h} = h$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on és ha az f, g, h függvényeket sorra az $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az (58) függvényegyenlet mindenütt teljesül az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy egyértelműen létezik $\tilde{f}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő f -el $\mathbb{R}_+$ -on, és ha f -et $\tilde{f}$ -al helyettesítjük, akkor az (58) egyenlet majdnem mindenütt teljesül. A $t = u + v$, $y = v$ helyettesítéssel kapjuk (58)-ból, hogy

$$(60) \quad f(t) = g(t - y) h(y)$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol $D = \{(t, y) \mid t, y \in \mathbb{R}_+\}$.

A Fubini Tételből következik, hogy létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}_+$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ -re a (60) egyenlet majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül, ahol

$$D_t = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid (t, y) \in D\}.$$

Definiáljuk a g_1 , g_2 , h függvényeket az alábbi módon:

$$g_1(t, y) = t - y, \quad g_2(t, y) = y,$$

$$h(t, y, z_1, z_2) = z_1 z_2,$$

és alkalmazzuk a 1.1.1. Tételt a (60) egyenletre az alábbi választással

$$g(t) = f_1(t), \quad h(t) = f_2(t),$$

$$Z = \mathbb{R}, \quad Z_i = \mathbb{R}, \quad T = \mathbb{R}_+, \quad Y = \mathbb{R}_+, \quad X_i = \mathbb{R}_+, (i = 1, 2).$$

Így az 1.1.1. Tételben szereplő első feltétel a (60) egyenlettel érvényes. Rögzített y esetén a h függvény folytonos a többi változójában, azaz a második feltétel is teljesül. Mivel a (60)-ban szereplő függvények mérhetőek, ezért a harmadik feltétel nyilvánvalóan igaz. A g_i függvény és a

$$\partial_2 g_1(t, y) = -1, \quad \partial_2 g_2(t, y) = 1$$

parciális deriváltak folytonosak, ez adja a negyedik feltételt.

Minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan $y \in \mathbb{R}_+$, hogy $(t, y) \in D$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el a (t, y) pontban, azaz rangjuk 1. Így az utolsó feltétel is teljesül az 1.1.1. Tételben, ezáltal kapjuk, hogy egyértelműen létezik $\tilde{f}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő f -el $\mathbb{R}_+$ -on és az $\tilde{f}$, g , h függvények majdnem mindenütt kielégítik a (60) egyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy

$$(61) \quad \tilde{f}(u + v) = g(u) h(v)$$

teljesül majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Létezik olyan u_0 és v_0 , hogy a (61) egyenletből a megfelelő helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$h(v) = \frac{\tilde{f}(u_0 + v)}{g(u_0)}$$

teljesül majdnem minden $v \in \mathbb{R}_+$ esetén, és

$$g(u) = \frac{\tilde{f}(u + v_0)}{h(v_0)}$$

teljesül majdnem minden $u \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Az $\tilde{f}$ függvény korábban megmutatott folytonossága miatt egyértelműen léteznek olyan az előbbi két egyenlőség jobb oldala által definiált $\tilde{h} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ és

$\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt egyenlőek a h és g függvényekkel $\mathbb{R}_+$ -on, és ha a h és g függvényeket sorra a $\tilde{h}$ és $\tilde{g}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az

$$(62) \quad \tilde{f}(u+v) = \tilde{g}(u)\tilde{h}(v)$$

egyenlet majdnem mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en. (62) mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}_+$ -on, amelyek $\mathbb{R}_+$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért kapjuk, hogy (62) mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en. $\square$

Ezután igaz a következő

1.5.1. Tétel. [Maksa, Mészáros, [50]] Tegyük fel, hogy az $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények, ahol g, h nem azonosan 0, majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén kielégítik az (58) egyenletet, akkor

$$f(t) = abe^{ct}, \quad g(t) = ae^{ct}, \quad h(x) = be^{ct} \quad (m.m. t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}$.

1.5.3. A majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (59) egyenlettel kapcsolatos eredmények

1.5.2. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [44]] Ha az $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik az (59) egyenletet, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények úgy, hogy $\tilde{f} = f, \tilde{g} = g, \tilde{h} = h$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on és ha az f, g, h függvényeket sorra az $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az (59) egyenlet mindenütt teljesül az $\mathbb{R}_+^2$ halmazon.

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy egyértelműen létezik $\tilde{f}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő f -el $\mathbb{R}_+$ -on, és ha f -et $\tilde{f}$ -al helyettesítjük, akkor az (59) egyenlet majdnem mindenütt teljesül. A

$$t = uv, \quad y = v$$

helyettesítéssel kapjuk (59)-ből, hogy

$$(63) \quad f(t) = g\left(\frac{t}{y}\right) + h(y)$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol

$$D = \{(t, y) \mid t, y \in \mathbb{R}_+\}.$$

A Fubini Tételből következik, hogy létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}_+$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ -re a (63) egyenlet majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül, ahol

$$D_t = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid (t, y) \in D\}.$$

Definiáljuk a g_1 , g_2 , h függvényeket az alábbi módon:

$$g_1(t, y) = \frac{t}{y}, \quad g_2(t, y) = y,$$

$$h(t, y, z_1, z_2) = z_1 + z_2,$$

és alkalmazzuk az 1.1.1. Tételt a (63) egyenletre az alábbi választással

$$f(t) = H(t), \quad g(t) = f_1(t), \quad h(t) = f_2(t),$$

$$Z = \mathbb{R}, \quad Z_i = \mathbb{R}, \quad T = \mathbb{R}_+, \quad Y = \mathbb{R}_+, \quad X_i = \mathbb{R}_+, (i = 1, 2).$$

Így a 1.1.1. Tételben szereplő első feltétel a (63) egyenlettel érvényes. Rögzített y esetén a h függvény folytonos a többi változójában, azaz a második feltétel is teljesül. Mivel a (63)-ban szereplő függvények mérhetőek, ezért a harmadik feltétel nyilvánvalóan igaz. A g_i függvény és a

$$\partial_2 g_1(t, y) = \frac{1}{y}, \quad \partial_2 g_2(t, y) = -\frac{t}{y^2}$$

parciális deriváltak folytonosak, ez adja a negyedik feltételt.

Minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan $y \in \mathbb{R}_+$, hogy $(t, y) \in D$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el a (t, y) pontban, azaz rangjuk 1. Így az utolsó feltétel is teljesül az 1.1.1. Tételben, ezáltal kapjuk, hogy egyértelműen létezik $\tilde{f}$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő f -el $\mathbb{R}_+$ -on és az $\tilde{f}$, g , h függvények majdnem mindenütt kielégítik a (63) egyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy

$$(64) \quad \tilde{f}(uv) = g(u) + h(v)$$

teljesül majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Létezik olyan u_0 és v_0 , hogy a (64) egyenletből a megfelelő helyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$h(v) = \tilde{f}(u_0 v) - g(u_0)$$

teljesül majdnem minden $v \in \mathbb{R}_+$ esetén, és

$$g(u) = \tilde{f}(uv_0) - h(v_0)$$

teljesül majdnem minden $u \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Az $\tilde{f}$ függvény korábban megmutatott folytonossága miatt egyértelműen léteznek olyan az előbbi két egyenlőség jobb oldala által definiált $\tilde{h} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ és $\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt egyenlőek a h és g függvényekkel $\mathbb{R}_+$ -on, és ha a h és g függvényeket sorra a $\tilde{h}$ és $\tilde{g}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az

$$(65) \quad \tilde{f}(uv) = \tilde{g}(u) + \tilde{h}(v)$$

egyenlet majdnem mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en. (65) mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}_+$ -on, amelyek $\mathbb{R}_+$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért kapjuk, hogy (65) mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en. $\square$

Ezután igaz a következő

1.5.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] *Tegyük fel, hogy az $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén kielégítik az (59) egyenletet, akkor*

$$f(t) = c \ln t + a + b, \quad g(t) = c \ln t + a, \quad h(t) = c \ln t + b \quad (m.m. \ t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek

2.1. A skálaparaméter jellegű feltétel esete

2.1.1. Bevezetés

A

$$(66) \quad h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

függvényegyenlet, ahol h_1, h_2, f_Y, f_X ismeretlen függvények, a c és d pozitív függvények speciális választásai esetén a feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzésében játszik szerepet és Arnold, Castillo és Sarabia [7] könyvében szerepel.

Arnold, Castillo és Sarabia az ismeretlen függvények kétszeri differenciálhatósága mellett vizsgálták az egyenletet, speciális esetekben, feltéve, hogy azok minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülnek.

Itt először a c és d függvények speciális választásai esetén, csak a pozitív ismeretlen h_1, h_2, f_Y, f_X függvények mérhetőségét tételezzük fel, illetve azt, hogy a kapott egyenletek majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülnek. Eredményeinket két különböző módon is megkaphatjuk, az alábbi fejezetekben szerepel mindkét módszer leírása.

Belátjuk, hogy a majdnem mindenütt teljesülő (66) egyenlet mérhető megoldásai – a különböző speciális esetekben – egyértelműen „kiterjeszthetők” folytonos függvényekké és ha a mérhető függvényeket a folytonosakkal helyettesítjük, akkor az egyenlet már mindenütt teljesülni fog $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Ezután vizsgáljuk a kapott speciális egyenletek sűrűségfüggvény megoldásait is.

Eredményeinket a [44] és [45] dolgozatokban, valamint a [41] és [42] előadások során közöltük.

2.1.2. Első probléma

Válasszuk a c, d függvényeket a következőképpen

$$c(y) = \frac{1}{\alpha + y}, \quad d(x) = \frac{1}{\beta + x} \quad (x, y > 0),$$

ahol α, β nemnegatív konstansok.

(66)-ból kapjuk, hogy

$$(67) \quad h_1((\alpha + y)x)(\alpha + y)f_Y(y) = h_2((\beta + x)y)(\beta + x)f_X(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Könnyen belátható az alábbi technikai Lemma.

2.1.1. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] *A h_1, h_2, f_X, f_Y pozitív mérhető függvények akkor és csakis akkor elégítik ki a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha a*

$$G_1(t) = \ln[h_1(t)], \quad G_2(t) = \ln[h_2(t)],$$

$$F_1(t) = \ln[(\alpha + t)f_Y(t)], \quad F_2(t) = \ln[(\beta + t)f_X(t)] \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények kielégítik a

$$(68) \quad G_1(x(\alpha + y)) + F_1(y) = G_2(y(\beta + x)) + F_2(x)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, ahol $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ahhoz, hogy megkapjuk a majdnem mindenütt teljesülő (68) (és így a (67)) egyenlet mérhető megoldásait, két esetet különböztetünk meg:

1. $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$;
2. $\alpha = \beta = 0$.

2.1.3. Az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ eset

2.1.1. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] *Ha a $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények kielégítik a (68) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\tilde{G}_1 = G_1, \tilde{G}_2 = G_2, \tilde{F}_1 = F_1$ és $\tilde{F}_2 = F_2$ majdnem mindenütt, és ha a G_1, G_2, F_1, F_2 függvényeket sorra a $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (68) egyenlet már mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.*

Bizonyítás. Először lássuk be azt, hogy egyértelműen létezik $\tilde{G}_1$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_1 -el $\mathbb{R}_+$ -on és G_1 -t $\tilde{G}_1$ -al helyettesítve, (68) majdnem mindenütt teljesül.

A $t = x(\alpha + y)$ helyettesítéssel (68)-ból kapjuk, hogy

$$(69) \quad G_1(t) = G_2\left(y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right)\right) + F_2\left(\frac{t}{\alpha + y}\right) - F_1(y)$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol $D = \mathbb{R}_+^2$. A Fubini tétel értelmében létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}_+$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ esetén a (69) egyenlet majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül, ahol

$$D_t = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid (t, y) \in \mathbb{R}_+^2\} = \mathbb{R}_+.$$

Definiáljuk a g_1, g_2, g_3, h függvényeket a következő módon

$$g_1(t, y) = y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right), \quad g_2(t, y) = \frac{t}{\alpha + y},$$

$$g_3(t, y) = y, \quad h(t, y, z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 - z_3,$$

és alkalmazzuk most az 1.1.1. Tételt a (69) egyenletre az alábbi választással: $G_1 = f, G_2 = f_1, F_2 = f_2, F_1 = f_3, Z = Z_i = \mathbb{R}, T = Y = X_i = \mathbb{R}_+, (i = 1, 2, 3)$.

Az első feltétel a (69) egyenletre nyilván teljesül az 1.1.1. Tételben. Rögzített y mellett a H függvény folytonos a többi változójában, ez adja a második feltételt. A (69) egyenletben szereplő függvények feltételeink szerint mérhetőek, ezért a harmadik feltétel triviálisan teljesül.

A g_i függvények és a

$$D_2 g_1(t, y) = \frac{t\alpha}{(y + \alpha)^2} + \beta, \quad D_2 g_2(t, y) = -\frac{t}{(y + \alpha)^2}, \quad D_2 g_3(t, y) = 1$$

parciális deriváltak folytonosak, ebből következik a negyedik feltétel.

Minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan $y \in \mathbb{R}_+$, hogy $(t, y) \in D = \mathbb{R}_+^2$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el (t, y) -ban, azaz rangjuk 1. Így az utolsó feltétel is teljesül az 1.1.1. Tételben.

Következésképpen igaz, hogy egyértelműen létezik $\tilde{G}_1$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_1 -el $\mathbb{R}_+$ -on és $\tilde{G}_1, G_2, F_1, F_2$ majdnem mindenütt kielégíti a (68) egyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy

$$(70) \quad \tilde{G}_1(x(\alpha + y)) + F_1(y) = G_2(y(\beta + x)) + F_2(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Hasonló módon látható be G_2 esetén. A (70) egyenletből a $t = y(\beta + x)$ helyettesítéssel kapjuk a

$$G_2(t) = \tilde{G}_1\left(\left(\frac{t}{y} - \beta\right)(\alpha + y)\right) + F_1(y) - F_2\left(\frac{t}{y} - \beta\right)$$

egyenletet, amely a függvények megfelelő választásával, a Fubini tétellel, illetve azzal, hogy az 1.1.1. Tétel feltételei ismét mind teljesülnek, adja, hogy egyértelműen létezik $\tilde{G}_2$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_2 -vel $\mathbb{R}_+$ -on és a $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, F_1 , F_2 függvények majdnem mindenütt teljesítik a (68) egyenletet, azaz

$$(71) \quad \tilde{G}_1(x(\alpha + y)) + F_1(y) = \tilde{G}_2(y(\beta + x)) + F_2(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Ekkor léteznek olyan x_0 és y_0 elemek, hogy az $x = x_0$ illetve az $y = y_0$ helyettesítésekkel a (71) egyenletből kapjuk, hogy

$$(72) \quad F_1(y) = \tilde{G}_2(y(\beta + x_0)) + F_2(x_0) - \tilde{G}_1(x_0(\alpha + y))$$

teljesül majdnem minden $y \in \mathbb{R}_+$ esetén, és

$$(73) \quad F_2(x) = \tilde{G}_1(x(\alpha + y_0)) + F_1(y_0) - \tilde{G}_2(y_0(\beta + x))$$

teljesül majdnem minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Mivel $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, ezért egyértelműen léteznek olyan, a fenti két egyenlet jobb oldala által definiált $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyek majdnem mindenütt egyenlőek F_1 -el illetve F_2 -vel $\mathbb{R}_+$ -on, és ha F_1 -et $\tilde{F}_1$ -al, F_2 -t $\tilde{F}_2$ -al helyettesítjük, akkor az

$$(74) \quad \tilde{G}_1(x(\alpha + y)) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2(y(\beta + x)) + \tilde{F}_2(x)$$

függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.

(74) mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}_+^2$ -en, amelyek $\mathbb{R}_+^2$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért (74)-nek mindenütt teljesülnie kell $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Továbbá $G_1 = \tilde{G}_1$, $G_2 = \tilde{G}_2$, $F_1 = \tilde{F}_1$ és $F_2 = \tilde{F}_2$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on. $\square$

Most már a minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (74) egyenlet folytonos $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásainak segítségével megadhatjuk a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető megoldásait.

(74) folytonos megoldásait kétféle módszerrel is meghatározhatjuk.

Első módszer

Először megmutatjuk, hogy a folytonos megoldások akárhányszor differenciálhatóak, majd a megoldást differenciálegyenletek megoldására vezetjük vissza.

2.1.2. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] *Ha a folytonos $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (74) függvényegyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor $\mathbb{R}_+$ -on akárhányszor differenciálhatóak.*

Bizonyítás. Írjuk a (74) egyenletet a

$$(75) \quad \tilde{G}_1(t) = \tilde{G}_2\left(y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right)\right) + \tilde{F}_2\left(\frac{t}{\alpha + y}\right) - \tilde{F}_1(y)$$

alakba és legyenek az $[a, b] \subset \mathbb{R}_+, [c, d] \subset \mathbb{R}_+$ intervallumok tetszőlegesen, akkor $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}_+^2$ teljesül.

Integráljuk (75)-öt az y változó szerint $[c, d]$ -n:

$$\begin{aligned} (d - c) \tilde{G}_1(t) &= \\ &= \int_c^d \tilde{G}_2\left(y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right)\right) dy + \int_c^d \tilde{F}_2\left(\frac{t}{\alpha + y}\right) dy - \int_c^d \tilde{F}_1(y) dy. \end{aligned}$$

Végezzük el a

$$g_1(t, y) = y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right) = u, \quad g_2(t, y) = \frac{t}{\alpha + y} = u$$

helyettesítéseket az első és a második integrálban.

Megmutatjuk, hogy a fenti egyenletek egyértelműen megoldhatóak y -ra, ha $t \in [a, b]$.

A $\frac{t}{\alpha + y} = u$ esetben ez nyilvánvaló. Az $y\left(\beta + \frac{t}{\alpha + y}\right) = u$ esetben az biztosítja az egyértelmű megoldhatóságot, hogy az $y \rightarrow g_1(t, y)$ függvény

$$D_2 g_1(t, y) = \beta + \frac{t\alpha}{(\alpha + y)^2}$$

deriváltja pozitív $[a, b] \times [c, d]$ -n (hiszen $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), így a függvény szigorúan monoton növekedő. A megoldások:

$$y = \frac{u - t - \alpha\beta + \sqrt{(t - u + \alpha\beta)^2 + 4\alpha\beta u}}{2\beta} \doteq \gamma_1(t, u),$$

$$y = \frac{t}{u} - \alpha \doteq \gamma_2(t, u)$$

akárhányszor differenciálható függvényei t -nek és u -nak. Elvégezve a helyettesítéseket

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= \\ &= \frac{1}{d-c} \left[\int_{\beta c + \frac{tc}{\alpha+c}}^{\beta d + \frac{td}{\alpha+d}} \tilde{G}_2(u) D_2 \gamma_1(t, u) du + \int_{\frac{t}{\alpha+c}}^{\frac{t}{\alpha+d}} \tilde{F}_2(u) D_2 \gamma_2(t, u) du - C \right], \end{aligned}$$

ahol

$$C = \int_c^d \tilde{F}_1(y) dy.$$

A $\tilde{G}_2, \tilde{F}_2$ függvények legalább folytonosak. Így a paraméteres integrálok differenciálásáról szóló tétel (lásd pl. [16]) ismételt alkalmazásával belátható, hogy a jobb oldal végtelen sokszor differenciálható $[a, b]$ -n. Mivel $[a, b]$ tetszőleges részintervalluma $\mathbb{R}_+$ -nak, ezért kapjuk, hogy $\tilde{G}_1$ végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}_+$ -on. $\tilde{G}_2$ differenciálhatósága hasonlóan kapható.

(72) és (73) segítségével megmutatható, hogy $\tilde{F}_1$ és $\tilde{F}_2$ szintén végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}_+$ -on. $\square$

2.1.3. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] *Ha az $\mathbb{R}_+$ -on kétszer differenciálható $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (74) függvényegyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal, hogy*

$$(76) \quad \tilde{G}_1(t) = c_1 \ln t + \gamma t + \delta_1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$(77) \quad \tilde{G}_2(t) = c_2 \ln t + \gamma t + \delta_2 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$(78) \quad \tilde{F}_1(t) = -c_1 \ln(t + \alpha) + c_2 \ln t + \gamma \beta t + \delta_3 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$(79) \quad \tilde{F}_2(t) = c_1 \ln t - c_2 \ln(t + \beta) + \gamma \alpha t + \delta_4 \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Bizonyítás. Deriváljuk (74)-et az x , majd a kapott egyenletet az y változója szerint, úgy

$$(\alpha + y) x \tilde{G}_1'' [(\alpha + y) x] + \tilde{G}_1' [(\alpha + y) x] = (\beta + x) y \tilde{G}_2'' [(\beta + x) y] + \tilde{G}_2' [(\beta + x) y]$$

következik, ahol $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Könnyen látható, hogy ez akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$t \tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) = \gamma = s \tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) \quad (t, s \in \mathbb{R}_+)$$

valamilyen γ konstanssal.

A

$$t \tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) = \gamma \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

és a

$$s \tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) = \gamma \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

differenciálegyenletek általános megoldásai a következő alakot öltik

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= c_1 \ln t + \gamma t + \delta_1 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{G}_2(s) &= c_2 \ln s + \gamma s + \delta_2 & (s \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, így kapjuk (76)-ot és (77)-et. Könnyű számítás adja az állításunkat (78)-ra és (79)-re.

Egyszerűen látható, hogy (76), (77), (78) és (79) kielégíti (74)-et ha $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$. $\square$

Így a 2.1.1. Lemma, a 2.1.1. Tétel, a 2.1.2. és 2.1.3. Lemmák azonnali következményeként kapjuk a (67) egyenlet mérhető megoldásait:

2.1.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [45]] A $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ esetben akkor és csakis akkor elégítik ki a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x^{c_1} \exp(\gamma x + \delta_1) & (m.m. x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= x^{c_2} \exp(\gamma x + \delta_2) & (m.m. x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \frac{y^{c_2}}{(y + \alpha)^{c_1+1}} \exp(\gamma \beta y + \delta_3) & (m.m. y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \frac{x^{c_1}}{(x + \beta)^{c_2+1}} \exp(\gamma \alpha x + \delta_4) & (m.m. x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonságot kielégítő konstansok.

Második módszer

A módszer lényege, hogy (74) folytonos megoldásait ismert egyenlet(ek) folytonos megoldásai segítségével adjuk meg.

Három esetet különböztetünk meg: (i) $\alpha > 0, \beta > 0$; (ii) $\alpha = 0, \beta > 0$; (iii) $\alpha > 0, \beta = 0$

(i) Az $\alpha > 0, \beta > 0$ eset

(74)-ből az $x \rightarrow \beta x, y \rightarrow \alpha y$ helyettesítésekkel és a

$$\overline{G}_1(t) = \tilde{G}_1(\alpha\beta t), \quad \overline{G}_2(t) = \tilde{G}_2(\alpha\beta t),$$

$$\overline{F}_1(t) = \tilde{F}_1(\alpha t), \quad \overline{F}_2(t) = \tilde{F}_2(\beta t)$$

jelölésekkel kapjuk, hogy a

$$(80) \quad \overline{G}_1(x(1+y)) + \overline{F}_1(y) = \overline{G}_2(y(1+x)) + \overline{F}_2(x)$$

függvényegyenlet teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

A (80) egyenletet [37]-ben Lajkó vizsgálta és megadta a mérhető (folytonos) megoldásokat és belátta az alábbi állítást.

2.1.3. Tétel. [Lajkó, [37]] *Ha a folytonos $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (80) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal, hogy*

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(x) &= c_1 \ln x + \gamma x + \delta_1, \\ \overline{G}_2(x) &= c_2 \ln x + \gamma x + \delta_2, \\ \overline{F}_1(x) &= c_2 \ln x - c_1 \ln(x+1) + \gamma x + \delta_3, \\ \overline{F}_2(x) &= c_1 \ln x - c_2 \ln(x+1) + \gamma x + \delta_4 \end{aligned}$$

minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Összefoglalva a 2.1.1. Lemma és a 2.1.1., 2.1.3. Tételek eredményeit, kapjuk a következő állítást.

2.1.4. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] *A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények az $\alpha > 0, \beta > 0$ esetben akkor és csakis akkor elégítik ki a (67)*

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \left(\frac{x}{\alpha\beta}\right)^{c_1} \exp\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}x + \delta_1\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= \left(\frac{x}{\alpha\beta}\right)^{c_2} \exp\left(\frac{\gamma}{\alpha\beta}x + \delta_2\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \alpha^{c_1-c_2} \frac{y^{c_2}}{(y+\alpha)^{c_1+1}} \exp\left(\frac{\gamma}{\alpha}y + \delta_3\right) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \beta^{c_2-c_1} \frac{x^{c_1}}{(x+\beta)^{c_2+1}} \exp\left(\frac{\gamma}{\beta}x + \delta_4\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ feltételt kielégítő konstansok.

Bizonyítás. A 2.1.1 és a 2.1.3. Tételekből ($\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ definícióját is használva) következik, hogy a $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ mérhető függvények sorra majdnem mindenütt megegyeznek a 2.1.3. Tételben megadott $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ függvényekkel. Így a 2.1.1. Lemmából már könnyedén kapjuk a h_1, h_2, f_X, f_Y függvényekre vonatkozó állításunkat.

Egyszerűen bizonyítható az is, hogy a tételben megadott h_1, h_2, f_X, f_Y függvények kielégítik a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ □

(ii) Az $\alpha = 0, \beta > 0$ eset
(74)-ből ekkor a

$$\tilde{G}_1(xy) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2(y(\beta+x)) + \tilde{F}_2(x)$$

egyenletet kapjuk, ami a

$$x \rightarrow \beta \frac{x}{y}, \quad y \rightarrow \frac{y}{\beta}$$

helyettesítésekkel adja, hogy a

$$\tilde{G}_1(x) + \tilde{F}_1\left(\frac{y}{\beta}\right) = \tilde{G}_2(x+y) + \tilde{F}_2\left(\beta \frac{x}{y}\right)$$

egyenlet teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

A

$$\bar{F}_1(y) = \tilde{F}_1\left(\frac{y}{\beta}\right), \quad \bar{F}_2(x) = \tilde{F}_2(\beta x)$$

definíciókkal kapjuk, hogy

$$(81) \quad \tilde{G}_1(x) + \bar{F}_1(y) = \tilde{G}_2(x+y) + \bar{F}_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

Így a [10], [34] cikkek fő eredményei alapján igaz a következő.

2.1.5. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] *A $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (81) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x) &= \gamma x + c_1 \ln x + \delta_1, \\ \tilde{G}_2(x) &= \gamma x + c_2 \ln x + \delta_2, \\ \bar{F}_1(x) &= \gamma x + (c_2 - c_1) \ln x + \delta_3, \\ \bar{F}_2(x) &= c_1 \ln x - c_2 \ln(x+1) + \delta_4 \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+$ -ra, ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ feltételt kielégítő konstansok.

Összefoglalva a 2.1.1. Lemma és a 2.1.1., 2.1.5. Tételek eredményeit, kapjuk, hogy teljesül az alábbi

2.1.6. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] *A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben akkor és csak akkor elégítik ki a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x^{c_1} \exp(\gamma x + \delta_1) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= x^{c_2} \exp(\gamma x + \delta_2) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \beta^{c_2 - c_1} y^{c_2 - c_1 - 1} \exp(\beta \gamma y + \delta_3) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \beta^{c_2 - c_1} x^{c_1} (x + \beta)^{-c_2 - 1} \exp(\delta_4) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

Bizonyítás. Hasonló a 2.1.4. Tétel bizonyításához. □

(iii) Az $\alpha > 0, \beta = 0$ eset

Ebben az esetben (74)-ből a

$$\tilde{G}_1(x(\alpha + y)) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2(xy) + \tilde{F}_2(x)$$

egyenlet következik, ami a

$$x \rightarrow \frac{y}{\alpha}, \quad y \rightarrow \alpha \frac{x}{y}$$

helyettesítésekkel adja, hogy

$$\tilde{G}_1(x + y) + \tilde{F}_1\left(\alpha \frac{x}{y}\right) = \tilde{G}_2(x) + \tilde{F}_2\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Az

$$\bar{F}_1(x) = \tilde{F}_1(\alpha x), \quad \bar{F}_2(y) = \tilde{F}_2\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

definíciókkal kapjuk, hogy

$$(82) \quad \tilde{G}_2(x) + \bar{F}_2(y) = \tilde{G}_1(x + y) + \bar{F}_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

fenn áll minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

A (82) egyenlet a (81) egyenlet duálisa, ha $(\tilde{G}_1, \bar{F}_1)$ -t felcseréljük $(\tilde{G}_2, \bar{F}_2)$ -vel, így a 2.1.5. Tétel segítségével a következőt állíthatjuk.

2.1.7. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] *A folytonos $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (82) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, ha*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x) &= \gamma x + c_2 \ln x + \delta_2, \\ \tilde{G}_2(x) &= \gamma x + c_1 \ln x + \delta_1, \\ \bar{F}_1(x) &= c_1 \ln x - c_2 \ln(x + 1) + \delta_4, \\ \bar{F}_2(x) &= \gamma x + (c_2 - c_1) \ln x + \delta_3 \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ feltételt kielégítő konstansok.

Összefoglalva a 2.1.1. Lemma és a 2.1.1., 2.1.7. Tételek eredményeit, következik a

2.1.8. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények az $\alpha > 0, \beta = 0$ esetben akkor és csakis akkor elégítik ki a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x^{c_2} \exp(\gamma x + \delta_2) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= x^{c_1} \exp(\gamma x + \delta_1) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \alpha^{c_2 - c_1} y^{c_1} (y + \alpha)^{-c_2 - 1} \exp(\delta_4) & (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \alpha^{c_2 - c_1} x^{c_2 - c_1 - 1} \exp(\alpha \gamma x + \delta_3) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

Bizonyítás. Hasonló a 2.1.4. Tétel bizonyításához. $\square$

Megjegyzés. Látható, hogy az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ esetben a (67) egyenletre a második módszerrel kapott 2.1.4., 2.1.6. és 2.1.8. Tételek együttesen adják az első módszerrel kapott 2.1.2. Tétel állítását, és fordítva.

2.1.4. Az $\alpha = \beta = 0$ eset

A (68) egyenletből következik a

$$G_1(xy) + F_1(y) = G_2(xy) + F_2(x)$$

egyenlet, és a

$$H(t) = G_1(t) - G_2(t), \quad F(t) = F_2(t), \quad G(t) = -F_1(t)$$

jelölésekkel a

$$(83) \quad H(xy) = F(x) + G(y)$$

logaritmikus Pexider egyenlet teljesülése majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $F, G, H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények.

Az 1.5.2. Tétel miatt

$$\begin{aligned} H(t) &= c \ln t + c_1 + c_2 & (m.m. \ t \in \mathbb{R}_+), \\ F(t) &= c \ln t + c_1, & (m.m. \ t \in \mathbb{R}_+), \\ G(t) &= c \ln t + c_2, & (m.m. \ t \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Ezen megoldások és a 2.1.1. Lemma segítségével a következőt állíthatjuk:

2.1.9. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények akkor és csakis akkor elégítik ki a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén az $\alpha = \beta = 0$ esetben, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= e^{c_1+c_2} \exp(G_2(x)) x^c & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= \exp(G_2(x)) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{c_1} x^{c-1} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{-c_2} x^{-c-1} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $G_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges mérhető függvény és $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

2.1.5. A majdnem mindenütt teljesülő (67) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai

Vizsgáljuk most a (67) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető ismeretlen függvények nemnegatívak és az A_1, A_2, A_3, A_4 pozitív mértékű Lebesgue mérhető halmazokon sorra pozitívak.

Megmutatjuk, hogy ekkor az f_X, f_Y, h_1, h_2 függvények pozitívak majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on.

3 esetet különböztetünk meg (eltekintve az $\alpha = \beta = 0$ triviális esettől):

- (i) $\alpha, \beta > 0$;
 - (ii) $\alpha = 0, \beta > 0$;
 - (iii) $\alpha > 0, \beta = 0$.
- (i) Az $\alpha, \beta > 0$ esetben (67)-ből az $x \rightarrow \beta x, y \rightarrow \alpha y$ helyettesítésekkel és a

$$H_1(t) = h_1(\alpha\beta t), \quad H_2(t) = h_2(\alpha\beta t),$$

$$F_1(y) = (\alpha + \alpha y) f_Y(\alpha y), \quad F_2(x) = (\beta + \beta x) f_X(\beta x)$$

jelöléssel kapjuk a

$$(84) \quad H_1(x(1+y)) F_1(y) = H_2(y(1+x)) F_2(x)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

(ii) Az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben (67)-ből kapjuk a

$$h_1(xy) y f_Y(y) = h_2((\beta + x)y) (\beta + x) f_X(x) \quad (m.m. \ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenletet. Ebből az $x \rightarrow \beta \frac{x}{y}$, $y \rightarrow \frac{y}{\beta}$ helyettesítésekkel és az

$$f_1(x) = h_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad g_1(y) = \frac{y}{\beta} f_Y\left(\frac{y}{\beta}\right) \quad (y \in \mathbb{R}_+),$$

$$p_1(t) = h_2(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad q_1(t) = \beta(1+t) f_X(\beta t) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

jelölésekkel adódik

$$(85) \quad f_1(x) g_1(y) = p_1(x+y) q_1\left(\frac{x}{y}\right) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2).$$

(iii) Az $\alpha > 0$, $\beta = 0$ esetben (67)-ből adódik a

$$h_1((\alpha+y)x)(\alpha+y) f_Y(y) = h_2(xy) x f_X(x) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenlet, majd ebből az $x \rightarrow \frac{x}{\alpha}$, $y \rightarrow \alpha \frac{y}{x}$ helyettesítésekkel és a

$$f_2(x) = \frac{x}{\alpha} f_X\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad g_2(y) = h_2(y) \quad (y \in \mathbb{R}_+),$$

$$p_2(t) = h_1(t) \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad q_2(t) = \alpha \left(1 + \frac{1}{t}\right) f_Y\left(\alpha \frac{1}{t}\right) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

jelölésekkel látszik, hogy

$$(86) \quad f_2(x) g_2(y) = p_2(x+y) q_2\left(\frac{x}{y}\right) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

teljesül.

Megjegyzés. Az F_i , H_i , f_i , g_i , p_i , q_i ($i = 1, 2$) függvények definíciója mutatja, hogy mérhetőek, nemnegatívak $\mathbb{R}_+$ -on és vannak olyan pozitív mértékű részhalmazai $\mathbb{R}_+$ -nak, melyeken pozitívak.

Megjegyzés. A (ii) és (iii) esetben szereplő (85) és (86) egyenletekre vonatkozó eredmények megtalálhatók a 2.2 fejezetben.

Megjegyzés. A (84), (85) és (86) egyenletek úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásaiból kapjuk a (67) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásait az (i), (ii) és (iii) esetekben.

A Steinhaus tétel 1.1.2. Tételben szereplő általánosítását fogjuk használni $U = \mathbb{R}_+^2$ mellett, hogy megmutassuk, a majdnem mindenütt teljesülő (84) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásai majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

2.1.10. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [41]] Legyenek a $H_1, H_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ olyan (84)-et majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén kielégítő nemnegatív függvények, hogy vannak olyan pozitív mértékű Lebesgue mérhető részhalmazai $\mathbb{R}_+$ -nak, melyeken pozitívak. Ekkor $H_1, H_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

Bizonyítás. A $\{H_1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}_+ | H_1(x) \neq 0\}$, illetve az ezzel analóg $\{H_2 \neq 0\}, \{F_1 \neq 0\}, \{F_2 \neq 0\}$ jelöléseket fogjuk használni.

Először lássuk be azt, hogy a $\{H_1 \neq 0\}, \{H_2 \neq 0\}, \{F_1 \neq 0\}, \{F_2 \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy nemüres nyílt intervallumot.

Alkalmazzuk az $x \rightarrow \frac{x}{1+y}$ helyettesítést, kapjuk (84)-ből a

$$(87) \quad H_1(x) F_1(y) = H_2\left(y \left(1 + \frac{x}{1+y}\right)\right) F_2\left(\frac{x}{1+y}\right) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenletet.

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a $\{H_2 \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, ellenőrizni kell, hogy az $G_1(x, y) = y \left(1 + \frac{x}{1+y}\right)$ ($x, y > 0$) függvény parciális deriváltjaira teljesül a következő:

$$(88) \quad \frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1+y} \neq 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) = 1 + \frac{x}{(1+y)^2} \neq 0.$$

Ez nyilván igaz. Mivel H_1 és F_1 pozitívak valamilyen A és B Lebesgue mérhető, pozitív mértékű halmazokon, ezért az 1.1.2. Tétel miatt az $\left(1 + \frac{A}{1+B}\right) B$ halmaz tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, így (87) miatt H_2 nem egyenlő 0-val majdnem minden pontjára a tartalmazott nemüres nyílt intervallumnak, így $\{H_2 \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy $\{F_2 \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot. Használjuk most az $G_2(x, y) = \frac{x}{1+y}$ ($x, y > 0$) függvényt, és azt, hogy

$$(89) \quad \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+y} \neq 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{(1+y)^2} \neq 0$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. Az 1.1.2. Tétel miatt az $\frac{A}{1+B}$ halmaz tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, így (87) miatt $F_2 \neq 0$ a tartalmazott nemüres nyílt intervallum majdnem minden pontjára, így a $\{F_2 \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

Használjuk az

$$(T) \quad u = G_1(x, y) = \left(1 + \frac{x}{1+y}\right)y, \quad v = G_2(x, y) = \frac{x}{1+y}, \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

transzformációt, akkor (87)-ből kapjuk, hogy

$$(90) \quad H_1\left(\left(\frac{u}{v+1} + 1\right)v\right) F_1\left(\frac{u}{v+1}\right) = H_2(u) F_2(v)$$

teljesül majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Felhasználva (90)-et és az 1.1.2. Tételt, pontosan ugyanazokkal a lépésekkel mint az előbb, bizonyíthatjuk, hogy a $\{H_1 \neq 0\}$ és $\{F_1 \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot, legyenek ezek $I = (a, b) \subset \mathbb{R}_+$ illetve $J = (c, d) \subset \mathbb{R}_+$.

Ekkor kapjuk, hogy

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \quad \text{m.m.} \quad x \in (a, b) \quad \text{és m.m.} \quad y \in (c, d).$$

Így (87) alapján

$$H_2(u) \neq 0 \quad \text{m.m.} \quad u \in \left\{\left(\frac{x}{y+1} + 1\right)y \mid x \in (a, b), y \in (c, d)\right\} = L_1$$

és

$$F_2(v) \neq 0 \quad \text{m.m.} \quad v \in \left\{\frac{x}{y+1} \mid x \in (a, b), y \in (c, d)\right\} = M_1.$$

Bebizonyítjuk, hogy

$$L_1 = \left(\left(\frac{a}{c+1} + 1\right)c, \left(\frac{b}{d+1} + 1\right)d\right) = (a', b'),$$

$$(91) \quad M_1 = \left(\frac{a}{d+1}, \frac{b}{c+1}\right) = (c', d').$$

Könnyen belátható, hogy a (T) transzformáció inverze az

$$(T^{-1}) \quad x = G_1(u, v) = \left(1 + \frac{u}{1+v}\right)v, \quad y = G_2(u, v) = \frac{u}{1+v} \quad ((u, v) \in \mathbb{R}_+^2)$$

transzformáció, azaz $T = T^{-1}$.

(88) és (89) segítségével kapjuk, hogy T Jacobi determinánsára

$$\begin{vmatrix} \frac{y}{1+y} & 1 + \frac{x}{(1+y)^2} \\ \frac{1}{1+y} & -\frac{x}{(1+y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{x+y+1}{(1+y)^2} < 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

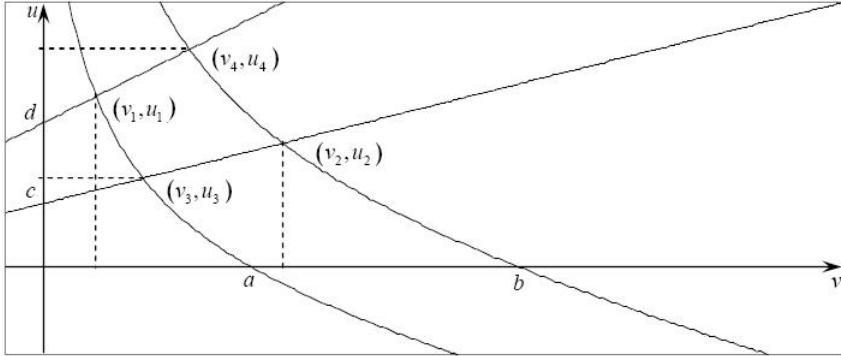
teljesül, azaz T reguláris.

Ismert, hogy reguláris transzformáció esetén egy nyílt összefüggő tartomány képe is összefüggő nyílt tartomány lesz (lásd [20]). Így a $(a, b) \times (c, d)$ nyílt téglalap képe is egy nyílt összefüggő halmaz. Továbbá az $[a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap képe pedig egy zárt tartomány és ezen tartomány határa a zárt téglalap határának a képe.

Könnyen látható, hogy az $x = a$, $x = b$, $y = c$ és $y = d$ egyenesek képei az

$$\left(\frac{u}{1+v} + 1\right)v = a, \quad \left(\frac{u}{1+v} + 1\right)v = b, \quad \frac{u}{1+v} = c \quad \text{és} \quad \frac{u}{1+v} = d$$

görbék (lásd 2. ábra).



2. ábra.

Egyszerű számolás adja, hogy

$$v_1 = \frac{a}{d+1}, \quad v_2 = \frac{b}{c+1}, \quad u_3 = \left(\frac{a}{c+1} + 1\right)c, \quad u_4 = \left(\frac{b}{d+1} + 1\right)d$$

teljesül, amiből pedig következik (91).

Ismét (90)-et használva

$$H_1(x) \neq 0 \text{ m.m. } x \in \left\{ \left(\frac{u}{v+1} + 1 \right) v \mid u \in (a', b'), v \in (c', d') \right\} = L_2$$

és

$$F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } y \in \left\{ \frac{u}{v+1} \mid u \in (a', b'), v \in (c', d') \right\} = M_2.$$

Mivel $T^{-1} = T$ reguláris, a fentihez hasonló módon kapjuk, hogy

$$L_2 = \left(\left(\frac{a'}{c'+1} + 1 \right) c', \left(\frac{b'}{d'+1} + 1 \right) d' \right), \quad M_2 = \left(\frac{a'}{d'+1}, \frac{b'}{c'+1} \right),$$

ami könnyen adja, hogy

$$\begin{aligned} L_2 &= \left(\left(\frac{(a+c+1)c}{(a+d+1)(c+1)} + \frac{1}{d+1} \right) a, \left(\frac{(b+d+1)d}{(b+c+1)(d+1)} + \frac{1}{c+1} \right) b \right) \\ &\supset \left(\frac{a+c+1}{a+d+1} a, \frac{b+d+1}{b+c+1} b \right) = (a_1, b_1) \end{aligned}$$

és

$$M_2 = \left(\frac{a+c+1}{b+c+1} c, \frac{b+d+1}{a+d+1} d \right) = (c_1, d_1).$$

Megmutattuk, hogy

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a, b), \text{ m.m. } y \in (c, d)$$

maga után vonja, hogy

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a_1, b_1), \text{ m.m. } y \in (c_1, d_1).$$

Az is igaz, hogy $a_1 < a$, $b < b_1$, $c_1 < c$ és $d < d_1$.

Definiáljuk most az $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$, $\langle c_k \rangle$ és $\langle d_k \rangle$ sorozatokat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + c_n + 1}{a_n + d_n + 1} a_n, & b_{n+1} &= \frac{b_n + d_n + 1}{b_n + c_n + 1} b_n, \\ c_{n+1} &= \frac{a_n + c_n + 1}{b_n + c_n + 1} c_n, & d_{n+1} &= \frac{b_n + d_n + 1}{a_n + d_n + 1} d_n \end{aligned}$$

minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Megismételve a fenti gondolatmenetet és indukciót használva kapjuk, hogy

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a_n, b_n), \text{ m.m. } y \in (c_n, d_n)$$

teljesül minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Baker ([10]) egy ötletét felhasználva megmutatjuk, hogy $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\bar{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$.

Egyszerűen látható, hogy $\langle a_k \rangle$ és $\langle c_k \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, míg $\langle b_k \rangle$, $\langle d_k \rangle$ szigorúan monoton növekvő. Ha $\bar{d} < +\infty$, akkor mivel $\bar{d} > d > 0$

$$\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + c_n + 1}{a_n + d_n + 1} a_n = \frac{\bar{a} + \bar{c} + 1}{\bar{a} + \bar{d} + 1} \bar{a},$$

ami adja, hogy $\bar{c} = \bar{d}$ vagy $\bar{a} = 0$ teljesül. De $\bar{c} < c < d < \bar{d}$, így $\bar{c} \neq \bar{d}$, ezért $\bar{a} = 0$ ha $\bar{d} < +\infty$.

Ha $\bar{d} = +\infty$, akkor

$$0 < a_{n+1} = \frac{a_n + c_n + 1}{a_n + d_n + 1} a_n < \frac{a + c + 1}{d_n + 1} a \rightarrow 0$$

azaz $\bar{a} = 0$ ebben az esetben is.

Így $\bar{a} = 0$. Hasonlóan kapható, hogy $\bar{c} = 0$.

Ha $\bar{b} < +\infty$, akkor mivel $\bar{c} = 0$,

$$\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + d_n + 1}{b_n + c_n + 1} b_n = \frac{\bar{b} + \bar{d} + 1}{\bar{b} + 1} \bar{b},$$

ami adja, hogy $\bar{d} = 0$, de ez lehetetlen, mivel $\bar{d} > d > 0$. Így $\bar{b} = +\infty$.

Ugyanígy látható, hogy $\bar{d} = +\infty$.

Ekkor kapjuk, hogy H_1 és F_1 különbözik nullától majdnem minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén. Ezért H_2 és F_2 is különbözik nullától majdnem minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén. $\square$

Ekkor igaz a következő.

2.1.11. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [41]] Legyenek a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív (67)-et majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re kielégítő olyan mérhető függvények, hogy vannak $\mathbb{R}_+$ -nak olyan Lebesgue mérhető és pozitív mértékű halmazai, amin a függvények pozitívak. Ekkor a h_1, h_2, f_X, f_Y függvények majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

Bizonyítás. Az (i) esetben kapjuk (84)-et az F_1, F_2, H_1, H_2 függvényekre és azt, hogy nemnegatívak és vannak $\mathbb{R}_+$ -nak olyan Lebesgue mérhető és pozitív mértékű halmazai, amin a függvények pozitívak. Ekkor a 2.1.10. Tételből következik, hogy F_1, F_2, H_1, H_2 pozitív majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on, így használva F_1, F_2, H_1, H_2 definícióját, kapjuk, hogy

$$h_1(t) = H_1\left(\frac{t}{\alpha\beta}\right) \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad h_2(t) = H_2\left(\frac{t}{\alpha\beta}\right) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta + x} F_2\left(\frac{x}{\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}_+), \quad f_Y(y) = \frac{1}{\alpha + y} F_1\left(\frac{y}{\alpha}\right) \quad (y \in \mathbb{R}_+),$$

ami adja, hogy f_X, f_Y, h_1, h_2 függvények pozitívak majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on.

Az (ii) és (iii) esetben az 1.2 fejezet eredményei adják állításunkat. $\square$

A 2.1.1. Tétel bizonyításának gondolatmenete ismételhető a (67) egyenlet esetében is, így igaz a következő

2.1.12. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [41]] Ha a nemnegatív $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on és majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a (67) függvényegyenletet, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{f}_X, \tilde{f}_Y$ folytonos (és pozitív) függvények, hogy $\tilde{h}_1 = h_1, \tilde{h}_2 = h_2, \tilde{f}_X = f_X, \tilde{f}_Y = f_Y$ majdnem mindenütt, és ha a h_1, h_2, f_X, f_Y függvényeket a $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{f}_X, \tilde{f}_Y$ függvényekkel helyettesítjük, akkor (67) már mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+$ -on.

Felhasználva a 2.1.11. és a 2.1.12 Tételeket kapjuk a következőt

2.1.13. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [41]] Ha az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ esetben a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív (67)-et majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re kielégítő mérhető függvények, hogy vannak $\mathbb{R}_+$ -nak olyan Lebesgue mérhető és pozitív mértékű halmazai, amin a függvények pozitívak, akkor

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x^{c_1} \exp(\gamma x + \delta_1) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= x^{c_2} \exp(\gamma x + \delta_2) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \frac{y^{c_2}}{(y + \alpha)^{c_1+1}} \exp(\gamma \beta y + \delta_3) & (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \frac{x^{c_1}}{(x + \beta)^{c_2+1}} \exp(\gamma \alpha x + \delta_4) & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonságot kielégítő konstansok.

2.1.6. Második probléma

A második vizsgált esetben legyenek a (66) egyenletben szereplő c és d függvények lineárisak, azaz

$$c(y) = \lambda_1(\alpha + y), \quad d(x) = \lambda_2(\beta + x) \quad (x, y > 0),$$

ahol λ_1, λ_2 pozitív, α és β nemnegatív konstansok.

Így (66)-ból a

$$(92) \quad h_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 (\alpha + y)} \right) \frac{1}{\lambda_1 (\alpha + y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{\lambda_2 (\beta + x)} \right) \frac{1}{\lambda_2 (\beta + x)} f_X(x)$$

egyenletet kapjuk majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, \alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Könnyű számolás adja a következő Lemma érvényességét.

2.1.4. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] *A h_1, h_2, f_X, f_Y pozitív mérhető függvények akkor és csakis akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha a*

$$G_1(t) = -\ln \left[h_2 \left(\frac{1}{\lambda_2 t} \right) \right], \quad G_2(t) = -\ln \left[h_1 \left(\frac{1}{\lambda_1 t} \right) \right],$$

$$F_1(t) = \ln \left[\frac{f_Y(t)}{\lambda_1 (\alpha + t)} \right], \quad F_2(t) = \ln \left[\frac{f_X(t)}{\lambda_2 (\beta + t)} \right] \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények kielégítik a

$$(93) \quad G_1 \left(\frac{x + \beta}{y} \right) + F_1(y) = G_2 \left(\frac{y + \alpha}{x} \right) + F_2(x)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ahhoz, hogy megkapjuk a majdnem mindenütt teljesülő (93) (és így a (92)) egyenlet mérhető megoldásait, két esetet különböztetünk meg:

1. $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$;
2. $\alpha = \beta = 0$.

2.1.7. Az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ eset

Most is, mint a 2.1.1. Tétel esetében, az 1.1.1. Tétel segítségével bizonyítható a következő.

2.1.14. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] Ha a $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények kielégítik a (93) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor egyértelműen léteznek olyan $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\tilde{G}_1 = G_1, \tilde{G}_2 = G_2, \tilde{F}_1 = F_1$ és $\tilde{F}_2 = F_2$ majdnem mindenütt, és ha a G_1, G_2, F_1, F_2 függvényeket sorra a $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ függvényekkel helyettesítjük, akkor a (93) egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Bizonyítás. Először lássuk be azt, hogy egyértelműen létezik $\tilde{G}_1$ folytonos függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_1 -el $\mathbb{R}_+$ -on és G_1 -et $\tilde{G}_1$ -al helyettesítve, (93) majdnem mindenütt teljesül.

A $t = \frac{x+\beta}{y}$ helyettesítéssel (93)-ból kapjuk, hogy

$$(94) \quad G_1(t) = G_2\left(\frac{y+\alpha}{ty-\beta}\right) + F_2(ty-\beta) - F_1(y)$$

teljesül majdnem minden $(t, y) \in D$ esetén, ahol $D = \mathbb{R}_+^2$. A Fubini tétel értelmében létezik olyan $T' \subseteq \mathbb{R}_+$ teljes mértékű halmaz, hogy minden $t \in T'$ esetén a (94) egyenlet majdnem minden $y \in D_t$ esetén teljesül, ahol

$$D_t = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid (t, y) \in \mathbb{R}_+^2\} = \mathbb{R}_+.$$

Definiáljuk a g_1, g_2, g_3, h függvényeket a következő módon

$$g_1(t, y) = \frac{y+\alpha}{ty-\beta}, \quad g_2(t, y) = ty - \beta,$$

$$g_3(t, y) = y, \quad h(t, y, z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 - z_3,$$

és alkalmazzuk most az alábbi választással az 1.1.1. Tételt a (94) egyenletre: $G_1 = f, G_2 = f_1, F_2 = f_2, F_1 = f_3, Z = Z_i = \mathbb{R}, T = Y = X_i = \mathbb{R}_+, (i = 1, 2, 3)$.

Az első feltétel a (94) egyenlettel teljesül az 1.1.1. Tételben. Rögzített y mellett a h függvény folytonos a többi változójában, ez adja a második feltételt. A (94) egyenletben szereplő függvények feltételeink szerint mérhetőek, ezért a harmadik feltétel triviálisan teljesül.

A g_i függvények és a

$$D_2 g_1(t, y) = -\frac{\beta + t\alpha}{(ty - \beta)^2}, \quad D_2 g_2(t, y) = t, \quad D_2 g_3(t, y) = 1$$

parciális deriváltak folytonosak, ebből következik a negyedik feltétel.

Minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén létezik olyan $y \in \mathbb{R}_+$, hogy $(t, y) \in D = \mathbb{R}_+^2$ és a parciális deriváltak nem tűnnek el (t, y) -ban, azaz rangjuk 1. Így az utolsó feltétel is teljesül az 1.1.1. Tételben.

Következésképpen igaz, hogy egyértelműen létezik olyan folytonos $\tilde{G}_1$ függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_1 -el $\mathbb{R}_+$ -on és $\tilde{G}_1, G_2, F_1, F_2$ majdnem mindenütt kielégíti a (93) egyenletet, amely ekvivalens azzal, hogy

$$(95) \quad \tilde{G}_1 \left(\frac{x + \beta}{y} \right) + F_1(y) = G_2 \left(\frac{y + \alpha}{x} \right) + F_2(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Hasonló módon látható be G_2 esetén. A (95) egyenletből a $t = \frac{y + \alpha}{x}$ helyettesítéssel kapjuk a

$$G_2(t) = \tilde{G}_1 \left(\frac{y + \alpha + \beta t}{ty} \right) + F_1(y) - F_2 \left(\frac{y + \alpha}{t} \right)$$

egyenletet, amely a függvények megfelelő választásával, a Fubini tétellel, illetve azzal, hogy az 1.1.1. Tétel feltételei ismét teljesülnek, adja, hogy egyértelműen létezik olyan folytonos $\tilde{G}_2$ függvény, amely majdnem mindenütt egyenlő G_2 -vel $\mathbb{R}_+$ -on és a $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, F_1, F_2$ függvények majdnem mindenütt teljesítik a (93) egyenletet, azaz

$$(96) \quad \tilde{G}_1 \left(\frac{x + \beta}{y} \right) + F_1(y) = \tilde{G}_2 \left(\frac{y + \alpha}{x} \right) + F_2(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Léteznek olyan x_0 és y_0 elemek, hogy az $x = x_0$ illetve az $y = y_0$ helyettesítésekkel a (96) egyenletből kapjuk, hogy

$$(97) \quad F_1(y) = \tilde{G}_2 \left(\frac{y + \alpha}{x_0} \right) + F_2(x_0) - \tilde{G}_1 \left(\frac{x_0 + \beta}{y} \right)$$

teljesül majdnem minden $y \in \mathbb{R}_+$ esetén, és

$$(98) \quad F_2(x) = \tilde{G}_1 \left(\frac{x + \beta}{y_0} \right) + F_1(y_0) - \tilde{G}_2 \left(\frac{y_0 + \alpha}{x} \right)$$

teljesül majdnem minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

Mivel $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, ezért egyértelműen léteznek olyan, a fenti két egyenlet jobb oldala által definiált $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények,

amelyek majdnem mindenütt egyenlőek F_1 -el illetve F_2 -vel $\mathbb{R}_+$ -on, és ha F_1 -et $\tilde{F}_1$ -al, F_2 -t $\tilde{F}_2$ -al helyettesítjük, akkor az

$$(99) \quad \tilde{G}_1 \left(\frac{x + \beta}{y} \right) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2 \left(\frac{y + \alpha}{x} \right) + \tilde{F}_2(x)$$

függvényegyenlet majdnem mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$ -en.

(99) mindkét oldala folytonos függvényeket definiál $\mathbb{R}_+^2$ -en, amelyek $\mathbb{R}_+^2$ egy sűrű részhalmazán egyenlőek egymással, ezért (99)-nek mindenütt teljesülnie kell $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Továbbá $G_1 = \tilde{G}_1$, $G_2 = \tilde{G}_2$, $F_1 = \tilde{F}_1$ és $F_2 = \tilde{F}_2$ majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on. $\square$

Így elegendő meghatározni a minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (99) függvényegyenlet $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos megoldásait.

Ezt két úton is megtehetjük.

Első módszer

A következő Lemma bizonyítása hasonló a 2.1.2. Lemmához.

2.1.5. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] Ha a $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények kielégítik a (99) függvényegyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor akárhányszor differenciálhatóak $\mathbb{R}_+$ -on.

Ebből azonnal kapjuk a következőt.

2.1.6. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] Ha a $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (99) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén és kétszer differenciálhatóak $\mathbb{R}_+$ -on, akkor $\tilde{G}_1$ és $\tilde{G}_2$ kielégítik a

$$(100) \quad t\tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) = \frac{\gamma}{(\alpha t + \beta)^2} \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

és

$$(101) \quad s\tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) = \frac{\gamma}{(\beta s + \alpha)^2} \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

differenciálegyenleteket egy tetszőleges γ konstanssal.

Bizonyítás. Deriváljuk a (99) egyenletet az x , majd a kapott egyenletet az y változó szerint, így teljesül a következő

$$\begin{aligned} & x^2 \left[\frac{x+\beta}{y} \tilde{G}_1'' \left(\frac{x+\beta}{y} \right) + \tilde{G}_1' \left(\frac{x+\beta}{y} \right) \right] = \\ & = y^2 \left[\frac{y+\alpha}{x} \tilde{G}_2'' \left(\frac{y+\alpha}{x} \right) + \tilde{G}_2' \left(\frac{y+\alpha}{x} \right) \right] \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2). \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ez akkor és csakis akkor teljesülhet, ha

$$(\alpha t + \beta)^2 \left[t \tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) \right] = \gamma = (\beta s + \alpha)^2 \left[s \tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) \right] \quad (t, s \in \mathbb{R}_+)$$

igaz valamilyen γ konstanssal, ami adja az állításunkat. $\square$

2.1.8. Az $\alpha > 0, \beta > 0$ eset

2.1.7. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] Ha a $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (99) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén és kétszer differenciálhatóak $\mathbb{R}_+$ -on, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= \left(c_1 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln t + \frac{\gamma}{\alpha\beta} \ln(\alpha t + \beta) + d_1 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{G}_2(t) &= \left(c_2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln t + \frac{\gamma}{\alpha\beta} \ln(\beta t + \alpha) + d_2 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_1(t) &= c_1 \ln t + \left(c_2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln(t + \alpha) + d_3 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_2(t) &= \left(c_1 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln(t + \beta) + c_2 \ln t + d_4 \quad (t \in \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A 2.1.6. Lemma értelmében a $\tilde{G}_1$ és a $\tilde{G}_2$ függvények kielégítik a (100) és a (101) differenciálegyenletet valamilyen γ konstanssal, így a következő alakúak

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= \left(c_1 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln t + \frac{\gamma}{\alpha\beta} \ln(\alpha t + \beta) + d_1 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{G}_2(t) &= \left(c_2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right) \ln t + \frac{\gamma}{\alpha\beta} \ln(\beta t + \alpha) + d_2 \quad (t \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, így $\tilde{G}_1(t)$ és $\tilde{G}_2(t)$ a megkövetelt alakkal bír. Egyszerű számolás adja a lemma állításának további részét. $\square$

A 2.1.4. és a 2.1.7. Lemmák következményeként a (92) egyenlet mérhető megoldásaira kapjuk a következőt:

2.1.15. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [45]] A $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények $\alpha > 0, \beta > 0$ esetén akkor és csak akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= e^{-d_2} (\lambda_1 x)^{c_2} (\beta + \lambda_1 \alpha x)^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= e^{-d_1} (\lambda_2 x)^{c_1} (\alpha + \lambda_2 \beta x)^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{d_4} \lambda_2 x^{c_2} (x + \beta)^{c_1 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + 1} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{d_3} \lambda_1 x^{c_1} (x + \alpha)^{c_2 - \frac{\gamma}{\alpha\beta} + 1} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonságot kielégítő konstansok.

2.1.9. Az $\alpha = 0, \beta > 0$ eset

2.1.8. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] Ha az $\mathbb{R}_+$ -on kétszer differenciálható $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (99) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal úgy, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= c_1 \ln t + \frac{\gamma}{\beta^2} t + d_1 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{G}_2(t) &= c_2 \ln t + \frac{\gamma}{\beta^2 t} + d_2 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_1(t) &= (c_1 + c_2) \ln t - \frac{\gamma}{\beta t} + d_3 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_2(t) &= c_1 \ln(t + \beta) + c_2 \ln t + d_4 & (t \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ebben az esetben a 2.1.6. Lemmából kapjuk, hogy (99) megoldása redukálható a

$$t\tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) = \frac{\gamma}{\beta^2} \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad s\tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) = \frac{\gamma}{(\beta s)^2} \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

differenciálegyenletek megoldására, és emiatt $\tilde{G}_1$ és $\tilde{G}_2$ a

$$\tilde{G}_1(t) = c_1 \ln t + \frac{\gamma}{\beta^2} t + d_1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$\tilde{G}_2(t) = c_2 \ln t + \frac{\gamma}{\beta^2 t} + d_2 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

alakot ölti, ahol $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, így $\tilde{G}_1(t)$ és $\tilde{G}_2(t)$ a kívánt alakú. Egyszerű számolás adja a lemma állításának további részét. $\square$

A (92) egyenlet mérhető megoldásaira a következőt kapjuk:

2.1.16. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [45]] *A $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben akkor és csak akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= e^{-d_2} (\lambda_1 x)^{c_2} e^{-\frac{\lambda_1 \gamma}{\beta^2} x} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= e^{-d_1} (\lambda_2 x)^{c_1} e^{-\frac{\gamma}{\beta^2 \lambda_2 x}} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{d_4} \lambda_2 (x + \beta)^{c_1+1} x^{c_2} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{d_3} \lambda_1 x^{c_1+c_2+1} e^{-\frac{\gamma}{\beta x}} & (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal bíró konstansok.

2.1.10. Az $\alpha > 0, \beta = 0$ eset

2.1.9. Lemma. [Lajkó, Mészáros, [45]] *Ha az $\mathbb{R}_+$ -on kétszer differenciálható $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények kielégítik a (99) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal úgy, hogy*

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(t) &= c_1 \ln t + \frac{\gamma}{\alpha^2 t} + d_1 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{G}_2(t) &= c_2 \ln t + \frac{\gamma}{\alpha^2} t + d_2 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_1(t) &= c_1 \ln t + c_2 \ln(t + \alpha) + d_3 & (t \in \mathbb{R}_+), \\ \tilde{F}_2(t) &= (c_1 + c_2) \ln t - \frac{\gamma}{\alpha t} + d_4 & (t \in \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Most a (99) egyenlet megoldása a

$$t \tilde{G}_1''(t) + \tilde{G}_1'(t) = \frac{\gamma}{(\alpha t)^2} \quad (t \in \mathbb{R}_+), \quad s \tilde{G}_2''(s) + \tilde{G}_2'(s) = \frac{\gamma}{\alpha^2} \quad (s \in \mathbb{R}_+)$$

differentiálegyenletek megoldására redukálható, így $\tilde{G}_1$ és $\tilde{G}_2$ a következő alakú

$$\tilde{G}_1(t) = c_1 \ln t + \frac{\gamma}{\alpha^2 t} + d_1 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$\tilde{G}_2(t) = c_2 \ln t + \frac{\gamma}{\alpha^2} t + d_2 \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, így $\tilde{G}_1(t)$ és $\tilde{G}_2(t)$ a kívánt alakú. Egyszerű számolás adja a lemma állításának további részét. $\square$

A (92) egyenlet mérhető megoldásaira a következőt kapjuk:

2.1.17. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [45]] A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények $\alpha > 0, \beta = 0$ esetén akkor és csakis akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$h_1(x) = e^{-d_2} (\lambda_1 x)^{c_2} e^{-\frac{\gamma}{\alpha^2 \lambda_1 x}} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

$$h_2(x) = e^{-d_1} (\lambda_2 x)^{c_1} e^{-\frac{\gamma \lambda_2}{\alpha^2} x} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

$$f_X(x) = e^{d_4} \lambda_2 x^{c_1 + c_2 + 1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha x}} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

$$f_Y(x) = e^{d_3} \lambda_1 (x + \alpha)^{c_2 + 1} x^{c_1} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $c_1, c_2, \gamma, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal.

Második módszer

2.1.11. Az $\alpha > 0, \beta > 0$ eset

(99)-ből az $x \rightarrow \beta x, y \rightarrow \alpha y$ helyettesítésekkel és a

$$\overline{G}_1(t) = \tilde{G}_1\left(\frac{\beta}{\alpha}t\right), \quad \overline{G}_2(t) = \tilde{G}_2\left(\frac{\alpha}{\beta}t\right),$$

$$\overline{F}_1(t) = \tilde{F}_1(\alpha t), \quad \overline{F}_2(t) = \tilde{F}_2(\beta t)$$

elnevezésekkel kapjuk, hogy

$$(102) \quad \overline{G}_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + \overline{F}_1(y) = \overline{G}_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + \overline{F}_2(x)$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

A (102) egyenletet Glavosits és Lajkó vizsgálták (lásd [23]) és megmutatták a következőt.

2.1.18. Tétel. [Glavosits, Lajkó, [23]] Ha a folytonos (mérhető) $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ kielégítik a (102) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor léteznek olyan $p_1, p_2, q, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal, hogy

$$\begin{aligned}\overline{G}_1(x) &= p_1 \ln x + q \ln(x+1) + d_1, \\ \overline{G}_2(x) &= p_2 \ln x + q \ln(x+1) + d_2, \\ \overline{F}_1(x) &= (p_1 + q) \ln x + p_2 \ln(x+1) + d_3, \\ \overline{F}_2(x) &= (p_2 + q) \ln x + p_1 \ln(x+1) + d_4\end{aligned}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

A 2.1.4. Lemma és a 2.1.14. és 2.1.18. Tételek azonnali következményeként kapjuk a következő eredményt.

2.1.19. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények $\alpha > 0, \beta > 0$ esetén akkor és csakis akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned}h_1(x) &= e^{-d_2} \left(\frac{\lambda_1 \alpha}{\beta} \right)^{p_2} x^{p_2+q} \left(x + \frac{\beta}{\lambda_1 \alpha} \right)^{-q} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= e^{-d_1} \left(\frac{\lambda_2 \beta}{\alpha} \right)^{p_1} x^{p_1+q} \left(x + \frac{\alpha}{\lambda_2 \beta} \right)^{-q} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{d_4} \frac{\lambda_2}{\beta^{p_1+p_2+q}} x^{p_2+q} (x + \beta)^{p_1+1} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{d_3} \frac{\lambda_1}{\alpha^{p_1+p_2+q}} x^{p_1+q} (x + \alpha)^{p_2+1} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),\end{aligned}$$

ahol $p_1, p_2, q, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal.

Bizonyítás. A 2.1.14. és 2.1.18 Tételek adják, hogy a G_1, G_2, F_1, F_2 mérhető függvények majdnem mindenütt egyenlőek a 2.1.18. Tételben adott $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2$ függvényekkel. Végül a 2.1.4. Lemma miatt kapjuk eredményünket a h_1, h_2, f_X, f_Y függvényekre.

Könnyen látható, hogy a tételben szereplő h_1, h_2, f_X, f_Y függvények valóban kielégítik a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$. $\square$

2.1.12. Az $\alpha = 0, \beta > 0$ eset

Ebben az esetben (99)-ből a

$$\tilde{G}_1\left(\frac{x+\beta}{y}\right) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2\left(\frac{y}{x}\right) + \tilde{F}_2(x)$$

egyenlet adódik, ami a

$$x \rightarrow \beta \frac{x}{y}, \quad y \rightarrow \frac{1}{y}$$

helyettesítésekkel adja

$$\tilde{G}_1(\beta(x+y)) + \tilde{F}_1\left(\frac{1}{y}\right) = \tilde{G}_2\left(\frac{1}{\beta x}\right) + \tilde{F}_2\left(\beta \frac{x}{y}\right)$$

egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

Ebből a

$$\overline{G}_1(x) = \tilde{G}_1(\beta x), \quad \overline{G}_2(x) = \tilde{G}_2\left(\frac{1}{\beta x}\right),$$

$$\overline{F}_1(y) = -\tilde{F}_1\left(\frac{1}{y}\right), \quad \overline{F}_2(x) = -\tilde{F}_2(\beta x)$$

definíciókkal kapjuk, hogy

$$(103) \quad \overline{G}_2(x) + \overline{F}_1(y) = \overline{G}_1(x+y) + \overline{F}_2\left(\frac{x}{y}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

A (103) egyenlet a (81) egyenlet duálisa, ha felcseréljük $(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$ -t $(\overline{G}_2, \overline{G}_1)$ -vel, és így már könnyen látható a 2.1.5. Tételből az alábbi.

2.1.20. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A folytonos $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csakis akkor elégítik ki a (103) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(x) &= \gamma x + c_2 \ln x + \delta_2, \\ \overline{G}_2(x) &= \gamma x + c_1 \ln x + \delta_1, \\ \overline{F}_1(x) &= \gamma x + (c_2 - c_1) \ln x + \delta_3, \\ \overline{F}_2(x) &= c_1 \ln x - c_2 \ln(x+1) + \delta_4 \end{aligned}$$

minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén, ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ feltételt kielégítő konstansok.

Összefoglalva a 2.1.4. Lemma és a 2.1.14., 2.1.20. Tételek eredményeit következik a

2.1.21. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények $\alpha = 0, \beta > 0$ esetén akkor és csakis akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \left(\frac{\beta}{\lambda_1}\right)^{c_1} x^{-c_1} \exp\left(-\frac{\gamma\lambda_1}{\beta}x - \delta_1\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= (\beta\lambda_2)^{c_2} x^{c_2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\beta\lambda_2}x - \delta_2\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 y^{c_2-c_1+1} \exp\left(-\frac{\gamma}{y} - \delta_3\right) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \lambda_2 \beta^{c_1-c_2} x^{-c_1} (x + \beta)^{c_2+1} \exp(-\delta_4) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

2.1.13. Az $\alpha > 0, \beta = 0$ eset

Ebben az esetben (99)-ből a

$$\tilde{G}_1\left(\frac{x}{y}\right) + \tilde{F}_1(y) = \tilde{G}_2\left(\frac{y+\alpha}{x}\right) + \tilde{F}_2(x)$$

egyenlet adódik, ami az

$$x \rightarrow \frac{1}{y}, \quad y \rightarrow \alpha \frac{x}{y}$$

helyettesítésekkel adja a

$$\tilde{G}_1\left(\frac{1}{\alpha x}\right) + \tilde{F}_1\left(\alpha \frac{x}{y}\right) = \tilde{G}_2(\alpha(x+y)) + \tilde{F}_2\left(\frac{1}{y}\right)$$

egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. A

$$\bar{G}_1(x) = \tilde{G}_1\left(\frac{1}{\alpha x}\right), \quad \bar{G}_2(x) = \tilde{G}_2(\alpha x),$$

$$\bar{F}_1(x) = -\tilde{F}_1(\alpha x), \quad \bar{F}_2(y) = -\tilde{F}_2\left(\frac{1}{y}\right)$$

definíciókkal kapjuk, hogy

$$(104) \quad \overline{G}_1(x) + \overline{F}_2(y) = \overline{G}_2(x+y) + \overline{F}_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

A (104) egyenlet a (81) egyenlet duálisa, ha $(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2)$ -t felcseréljük $(\overline{G}_1, \overline{G}_2)$ -vel, és $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ -t pedig $(\overline{F}_2, \overline{F}_1)$ -vel, így ismét a 2.1.5. Tételt alkalmazva kapjuk a következőt.

2.1.22. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A folytonos $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{F}_1, \overline{F}_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (104) egyenletet minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} \overline{G}_1(x) &= \gamma x + c_1 \ln x + \delta_1, \\ \overline{G}_2(x) &= \gamma x + c_2 \ln x + \delta_2, \\ \overline{F}_1(x) &= c_1 \ln x - c_2 \ln(x+1) + \delta_4, \\ \overline{F}_2(x) &= \gamma x + (c_2 - c_1) \ln x + \delta_3 \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+$ -ra, ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal bíró konstansok.

Összefoglalva a 2.1.4. Lemma és a 2.1.14., 2.1.22. Tételek eredményeit kapjuk, hogy teljesül a

2.1.23. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44]] A mérhető $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvények $\alpha > 0, \beta = 0$ esetén akkor és csak akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (\alpha \lambda_1)^{c_2} x^{c_2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\alpha \lambda_1 x} - \delta_2\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= \left(\frac{\alpha}{\lambda_2}\right)^{c_1} x^{-c_1} \exp\left(-\frac{\gamma \lambda_2}{\alpha} x - \delta_1\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 \alpha^{c_1 - c_2} (y + \alpha)^{c_2 + 1} y^{-c_1} \exp(-\delta_4) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \lambda_2 x^{c_2 - c_1 + 1} \exp\left(-\frac{\gamma}{x} - \delta_3\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

Megjegyzés. A két módszerrel kapott eredmények megegyeznek.

2.1.14. Az $\alpha = \beta = 0$ eset

A (93) egyenletből ebben az esetben a

$$G_1\left(\frac{x}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y}{x}\right) + F_2(x)$$

egyenletet kapjuk, ami a $x \rightarrow xy$ helyettesítéssel és a

$$H(t) = F_2(t), \quad F(t) = G_1(t) - G_2\left(\frac{1}{t}\right), \quad G(t) = F_1(t)$$

jelöléssel ismét adja a

$$H(xy) = F(x) + G(y)$$

Pexider egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $F, G, H : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvények.

Alkalmazzuk most az 1.5.2. Tétel eredményeit, úgy

$$\begin{aligned} H(t) &= c \ln t + c_1 + c_2 & (\text{m.m. } t \in \mathbb{R}_+), \\ F(t) &= c \ln t + c_1 & (\text{m.m. } t \in \mathbb{R}_+), \\ G(t) &= c \ln t + c_2 & (\text{m.m. } t \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Ezen megoldások és a 2.1.1. Lemma segítségével a következőt állíthatjuk.

2.1.24. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] A $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (92) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén az $\alpha = \beta = 0$ esetben, ha

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \exp\left(-G_2\left(\frac{1}{\lambda_1 x}\right)\right) & (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= e^{c_1} \exp(-G_2(\lambda_2 x)) (\lambda_2 x)^c & (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{c_1+c_2} \lambda_2 x^{c+1} & (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{c_2} \lambda_1 x^{c+1} & (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $G_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges mérhető függvény és $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

2.1.15. Sűrűségfüggvény megoldások a második problémára

Vizsgáljuk a

$$(105) \quad h_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 (\alpha + y)} \right) \frac{1}{\lambda_1 (\alpha + y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{\lambda_2 (\beta + x)} \right) \frac{1}{\lambda_2 (\beta + x)} f_X(x)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol az $f_X, f_Y, h_1, h_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvények nemnegatívak, és az $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazokon rendre pozitívak.

Megmutatjuk, hogy ekkor az f_X, f_Y, h_1, h_2 függvények majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

A második módszerhez hasonlóan 3 esetet különböztetünk meg:

(i) $\alpha > 0, \beta > 0$ (ii) $\alpha = 0, \beta > 0$ (iii) $\alpha > 0, \beta = 0$. Az $\alpha = 0, \beta = 0$ triviális esetet most nem vizsgáljuk.

(i) Az $\alpha > 0, \beta > 0$ esetben (105)-ből az $x \rightarrow \beta x, y \rightarrow \alpha y$ helyettesítéssel és a

$$H_1(t) = h_1 \left(\frac{\beta}{\lambda_1 \alpha} \frac{1}{t} \right), \quad H_2(t) = h_2 \left(\frac{\alpha}{\lambda_2 \beta} \frac{1}{t} \right) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$F_1(y) = \frac{1}{\lambda_1 \alpha (1 + y)} f_Y(\alpha y) \quad (y \in \mathbb{R}_+), \quad F_2(x) = \frac{1}{\lambda_2 \beta (1 + x)} f_X(\beta x) \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

jelölésekkel kapjuk a

$$(106) \quad H_1 \left(\frac{y+1}{x} \right) F_1(y) = H_2 \left(\frac{x+1}{y} \right) F_2(x)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

(ii) Az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben

Ebben az esetben (105) az $x \rightarrow \beta \frac{x}{y}, y \rightarrow \frac{1}{y}$ helyettesítéssel, a

$$H_1(t) = h_1 \left(\frac{\beta}{\lambda_1} t \right), \quad H_2(t) = h_2 \left(\frac{1}{\lambda_2 \beta \frac{1}{t}} \right) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$F_1(t) = \frac{t}{\lambda_1} f_Y \left(\frac{1}{t} \right), \quad F_2(t) = \frac{1}{\lambda_2 \beta (1 + t)} f_X(\beta t) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált H_1, H_2, F_1, F_2 függvényekkel adja a

$$(107) \quad H_1(x) F_1(y) = H_2(x+y) F_2 \left(\frac{x}{y} \right)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

(iii) Az $\alpha > 0$, $\beta = 0$ esetben (105) az $x \rightarrow \frac{1}{y}$, $y \rightarrow \alpha \frac{x}{y}$ helyettesítéssel, a

$$H_1(t) = h_1 \left(\frac{1}{\lambda_1 \alpha t} \right), \quad H_2(t) = h_2 \left(\frac{\alpha}{\lambda_2} t \right) \quad (t \in \mathbb{R}_+),$$

$$F_1(t) = \frac{1}{\lambda_1 \alpha (1+t)} f_Y(\alpha t), \quad F_2(t) = \frac{t}{\lambda_2} f_X \left(\frac{1}{t} \right) \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

szerint definiált H_1, H_2, F_1, F_2 függvényekkel adja, hogy

$$(108) \quad H_2(x) F_2(y) = H_1(x+y) F_1 \left(\frac{x}{y} \right)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Megjegyzés. Az F_i, H_i ($i = 1, 2$) függvények definíciója (mindhárom esetben) mutatja, hogy azok mérhetőek, nemnegatívak $\mathbb{R}_+$ -on és vannak olyan pozitív Lebesgue mértékű $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \mathbb{R}_+$ halmazok, melyeken pozitívak.

Megjegyzés. Az (ii) és (iii) esetben kapott (107) és (108) egyenletek a (H_1, F_1) és (H_2, F_2) felcserélésével átmennek egymásba és korábban (lásd 1.2. fejezet) már vizsgáltuk a sűrűségfüggvény megoldást.

Megjegyzés. (106), (107) és (108) sűrűségfüggvény megoldásaiból kapjuk (105) sűrűségfüggvény megoldásait az (i), (ii) és (iii) esetekben.

Annak belátásához, hogy a majdnem mindenütt teljesülő (106) egyenlet úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásai majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on most is a Steinhaus tétel 1.1.2. Tételben megfogalmazott általánosítását használjuk $U = \mathbb{R}_+^2$ mellett.

2.1.25. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [42]] Legyenek a $H_1, H_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, a (106) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítő nemnegatív függvények, hogy vannak $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak. Akkor $H_1, H_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

Bizonyítás. Használjuk most is a már bevezetett $\{H_1 \neq 0\}, \{H_2 \neq 0\}, \{F_1 \neq 0\}$ és $\{F_2 \neq 0\}$ jelöléseket.

Először megmutatjuk, hogy ezen halmazok rendre majdnem tartalmaznak nemüres nyílt intervallumokat.

(106)-ból az $x \rightarrow \frac{y+1}{x}$ helyettesítéssel a

$$(109) \quad H_1(x) F_1(y) = H_2\left(\frac{x+y+1}{xy}\right) F_2\left(\frac{y+1}{x}\right) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenletet kapjuk.

Belátjuk, hogy a $\{H_2 \neq 0\}$ halmaz majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

A $G_1(x, y) = \frac{x+y+1}{xy}$ függvény parciális deriváltjaira

$$\frac{\partial G_1}{\partial x}(x, y) = -\frac{y+1}{x^2 y} < 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{x+1}{xy^2} < 0$$

teljesül, másrészt H_1 és F_1 pozitívak a B_1 és B_3 pozitív Lebesgue mértékű halmazokon. Így az 1.1.2. Tétel miatt a $\frac{B_1+B_3+1}{B_1 B_3}$ halmaz tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot, ezért a (109) egyenlet adja, hogy $H_2 \neq 0$ ezen intervallum majdnem minden pontjára, azaz $\{H_2 \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot.

Annak belátásához, hogy az $\{F_2 \neq 0\}$ majdnem tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot a $G_2(x, y) = \frac{y+1}{x}$ parciális deriváltjainak

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) = -\frac{y+1}{x^2} < 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} > 0$$

tulajdonságát és ebből adódóan azt, hogy a $\frac{B_3+1}{B_1}$ halmaz is tartalmaz egy nemüres nyílt intervallumot és végül a (109) egyenletet használjuk az előbbieket szerint.

(109)-ből az

$$(T) \quad u = G_1(x, y) = \frac{x+y+1}{xy}, \quad v = G_2(x, y) = \frac{y+1}{x} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

transzformációval, melynek inverze az

$$(T^{-1}) \quad x = G_1(u, v) = \frac{u+v+1}{uv}, \quad y = G_2(u, v) = \frac{v+1}{u} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}_+^2)$$

transzformáció, kapjuk, hogy

$$(110) \quad H_1\left(\frac{u+v+1}{uv}\right) F_1\left(\frac{v+1}{u}\right) = H_2(u) F_2(v)$$

teljesül majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

(110) és (109) a (H_1, F_1) és (H_2, F_2) felcserélésével átmennek egymásba, így (110)-et használva, az előbbiekkal egyező lépésekkel beláthatjuk, hogy a $\{H_1 \neq 0\}$ és $\{F_1 \neq 0\}$ halmazok majdnem tartalmaznak egy-egy nemüres nyílt intervallumot, legyenek ezek $I = (a, b) \subset \mathbb{R}_+$ és $J = (c, d) \subset \mathbb{R}_+$.

Ekkor tehát

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a, b) \text{ és m.m. } y \in (c, d).$$

Így a (109) egyenlet adja, hogy

$$H_2(u) \neq 0 \text{ m.m. } u \in \left\{ \frac{x+y+1}{xy} \mid x \in (a, b), y \in (c, d) \right\} = L_1$$

és

$$F_2(v) \neq 0 \text{ m.m. } v \in \left\{ \frac{y+1}{x} \mid x \in (a, b), y \in (c, d) \right\} = M_1.$$

Bebizonyítjuk, hogy

$$L_1 = \left(\frac{b+d+1}{bd}, \frac{a+c+1}{ac} \right) = (a', b') \text{ és } M_1 = \left(\frac{c+1}{b}, \frac{d+1}{a} \right) = (c', d')$$

T Jacobi determinánsára

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{y+1}{x^2y} & -\frac{x+1}{xy^2} \\ -\frac{y+1}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{y+1}{x^3y} \left(1 + \frac{x+1}{y} \right) < 0$$

teljesül, így T reguláris.

Így (ahogy azt már korábban is láttuk) az $(a, b) \times (c, d)$ nyílt téglalap képe egy nyílt összefüggő halmaz lesz, melynek határa az $[a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap határának képe lesz.

Könnyen látható, hogy az $x = a$, $x = b$, $y = c$ és $y = d$ egyenesek képei az

$$\frac{u+v+1}{uv} = a, \quad \frac{u+v+1}{uv} = b \text{ hiperbolák}$$

illetve

$$\frac{v+1}{u} = c, \quad \frac{v+1}{u} = d \text{ egyenesek.}$$

Egyszerűen kapjuk ezután, hogy a kapott görbék metszéspontjainak megfelelő koordinátái adják az a' , b' , c' és d' értékeket a jelzett módon.

Most az (110) egyenletet használva és azt, hogy $H_2(u)F_2(v) \neq 0$ majdnem minden $u \in (a', b')$ és majdnem minden $v \in (c', d')$, illetve $T^{-1} = T$, a fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$H_1(x) \neq 0 \text{ m.m. } x \in \left(\frac{b' + d' + 1}{b'd'}, \frac{a' + c' + 1}{a'c'} \right) = (a_1, b_1)$$

$$F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } y \in \left(\frac{c' + 1}{b'}, \frac{d' + 1}{a'} \right) = (c_1, d_1).$$

Egyszerű számolás adja, hogy

$$(a_1, b_1) = \left(\frac{a + c + 1 + c(d + 1) + ac}{(a + c + 1)(d + 1)} a, \frac{b + d + 1 + d(c + 1) + bd}{(b + d + 1)(c + 1)} b \right),$$

$$(c_1, d_1) = \left(\frac{b + c + 1}{a + c + 1} \frac{a}{b} c, \frac{a + d + 1}{b + d + 1} \frac{b}{a} d \right).$$

Igaz továbbá, hogy $a_1 < a$, $b < b_1$, $c_1 < c$ és $d < d_1$ teljesül.

Beláttuk tehát, hogy

$$H_1(x)F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a, b), \text{ m.m. } y \in (c, d)$$

adja, hogy

$$H_1(x)F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a_1, b_1), \text{ m.m. } y \in (c_1, d_1).$$

Definiáljuk az $\langle a_k \rangle$, $\langle b_k \rangle$, $\langle c_k \rangle$ és $\langle d_k \rangle$ pozitív tagú sorozatokat az alábbiak szerint:

$$(a) \quad a_{n+1} = \frac{a_n + c_n + 1 + c_n(d_n + 1) + a_n c_n}{(a_n + c_n + 1)(d_n + 1)} a_n,$$

$$(b) \quad b_{n+1} = \frac{b_n + d_n + 1 + d_n(c_n + 1) + b_n d_n}{(b_n + d_n + 1)(c_n + 1)} b_n,$$

$$(c) \quad c_{n+1} = \frac{b_n + c_n + 1}{a_n + c_n + 1} \frac{a_n}{b_n} c_n,$$

$$(d) \quad d_{n+1} = \frac{a_n + d_n + 1}{b_n + d_n + 1} \frac{b_n}{a_n} d_n$$

minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

A fenti gondolatmenetet ismételve, teljes indukciót használva kapjuk, hogy

$$H_1(x) F_1(y) \neq 0 \text{ m.m. } x \in (a_n, b_n), \text{ m.m. } y \in (c_n, d_n)$$

teljesül minden $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

Megmutatjuk, hogy $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, $\bar{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, $\bar{d} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$.

Belátható, hogy $\langle a_k \rangle$ és $\langle c_k \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, míg $\langle b_k \rangle$, $\langle d_k \rangle$ szigorúan monoton növekvő sorozatok. $\bar{b} > 0$, $\bar{d} > 0$, $\bar{a} \geq 0$, $\bar{c} \geq 0$ nyilván igaz.

(b)-ből kapjuk, hogy

$$\bar{b} = \frac{\bar{b} + \bar{d} + 1 + \bar{d}(\bar{c} + 1) + \bar{b}\bar{d}}{(\bar{b} + \bar{d} + 1)(\bar{c} + 1)} \bar{b},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\bar{b} = +\infty$, vagy $0 < \bar{b} < +\infty$ esetén

$$\frac{\bar{b} + \bar{d} + 1 + \bar{d}(\bar{c} + 1) + \bar{b}\bar{d}}{(\bar{b} + \bar{d} + 1)(\bar{c} + 1)} = 1 \iff \bar{d}(\bar{b} + 1) = \bar{c}(\bar{b} + 1) \iff \bar{d} = \bar{c},$$

de ez lehetetlen, mert $c_1 < d_1$ és $\langle c_k \rangle$ csökkenő, $\langle d_k \rangle$ növekedő. Így $\bar{b} = +\infty$.

(c)-ből előbb

$$c_{n+1} = \frac{1 + \frac{c_n + 1}{b_n}}{a_n + c_n + 1} a_n c_n,$$

ebből pedig $\bar{b} = +\infty$ miatt

$$\bar{c} = \frac{1}{\bar{a} + \bar{c} + 1} \bar{a} \bar{c}$$

következik, ami adja, hogy $\bar{c} = 0$, vagy

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a} + \bar{c} + 1} = 1 \iff \bar{c} + 1 = 0,$$

ami lehetetlen, hisz $\bar{c} \geq 0$. Tehát $\bar{c} = 0$.

(a)-ból $\bar{c} = 0$ -t is használva

$$\bar{a} = \frac{\bar{a} + 1}{(\bar{a} + 1)(\bar{d} + 1)} \bar{a}$$

következik, ami adja, hogy $\bar{a} = 0$, vagy

$$\frac{\bar{a} + 1}{(\bar{a} + 1)(\bar{d} + 1)} = 1 \iff \bar{d} + 1 = 0,$$

ami $\bar{d} > 0$ miatt lehetetlen. Így $\bar{a} = 0$.

Végül (d)-ből

$$d_{n+1} = \frac{1 + \frac{d_{n+1}}{a_n}}{1 + \frac{d_{n+1}}{b_n}} d_n,$$

ebből pedig

$$\bar{d} = \frac{1 + \frac{\bar{d}+1}{\bar{a}} \bar{d}}{1 + \frac{\bar{d}+1}{\bar{b}} \bar{d}}$$

következik, ami csak úgy teljesül, ha $\bar{d} = +\infty$, vagy $\frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{\bar{b}}$, ami lehetetlen, hisz $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = +\infty$. Tehát $\bar{d} = +\infty$.

Ezek adják, hogy H_1 és F_1 majdnem mindenütt különböznek nullától $\mathbb{R}_+$ -on, így majdnem mindenütt pozitívak. Ezután az egyenlet adja, hogy H_2 és F_2 is majdnem mindenütt pozitív $\mathbb{R}_+$ -on. $\square$

2.1.1. Következmény. [Lajkó, Mészáros, [42]] H_1, H_2, F_1, F_2 definíciója az (i) esetben adja, hogy a h_1, h_2, f_X, f_Y függvények is majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

Megjegyzés. Ahogy ezt már láttuk az 1.2. fejezetben, (107) és (108) úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásai majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on, így a (ii) ill. (iii)-ben szereplő H_i, F_i ($i = 1, 2$) függvények definíciója adja, hogy a h_1, h_2, f_X, f_Y függvények az (ii) és (iii) esetben is majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$ -on.

Összefoglalva igaz a

2.1.26. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [42]] Ha a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re teljesítik a (105) egyenletet, nemnegatívak és az $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazokon rendre pozitívak, akkor $\mathbb{R}_+$ -on majdnem mindenütt pozitívak.

Ezután a 2.1.14. Tétel bizonyításának gondolatmenetét használva belátható, hogy a 2.1.12. Tétel teljesül a (67) egyenlet helyett a (92) egyenletre is. Ekkor a 2.1.15., 2.1.16. és 2.1.17. Tételeket is használva megfogalmazhatók a következő állítások.

2.1.27. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [42]] Ha a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, nemnegatív függvények az $\alpha > 0, \beta > 0$ esetben majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$

esetén teljesítik a (105) függvényegyenletet és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor

$$\begin{aligned} h_1(x) &= e^{-d_2} \left(\frac{\lambda_1 \alpha}{\beta} \right)^{p_2} x^{p_2+q} \left(x + \frac{\beta}{\lambda_1 \alpha} \right)^{-q} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= e^{-d_1} \left(\frac{\lambda_2 \beta}{\alpha} \right)^{p_1} x^{p_1+q} \left(x + \frac{\alpha}{\lambda_2 \beta} \right)^{-q} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= e^{d_4} \frac{\lambda_2}{\beta^{p_1+p_2+q}} x^{p_2+q} (x + \beta)^{p_1+1} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(x) &= e^{d_3} \frac{\lambda_1}{\alpha^{p_1+p_2+q}} x^{p_1+q} (x + \alpha)^{p_2+1} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $p_1, p_2, q, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal.

2.1.28. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [42]] Ha a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, nemnegatív függvények az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a (105) függvényegyenletet és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \left(\frac{\beta}{\lambda_1} \right)^{c_1} x^{-c_1} \exp \left(-\frac{\gamma \lambda_1}{\beta} x - \delta_1 \right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= (\beta \lambda_2)^{c_2} x^{c_2} \exp \left(-\frac{\gamma}{\beta \lambda_2 x} - \delta_2 \right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 y^{c_2-c_1+1} \exp \left(-\frac{\gamma}{y} - \delta_3 \right) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \lambda_2 \beta^{c_1-c_2} x^{-c_1} (x + \beta)^{c_2+1} \exp(-\delta_4) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

2.1.29. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [42]] Ha a $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető, nemnegatív függvények az $\alpha > 0, \beta = 0$ esetben majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a (105) függvényegyenletet és léteznek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset \mathbb{R}_+$

pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (\alpha\lambda_1)^{c_2} x^{c_2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\alpha\lambda_1 x} - \delta_2\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ h_2(x) &= \left(\frac{\alpha}{\lambda_2}\right)^{c_1} x^{-c_1} \exp\left(-\frac{\gamma\lambda_2}{\alpha} x - \delta_1\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 \alpha^{c_1-c_2} (y+\alpha)^{c_2+1} y^{-c_1} \exp(-\delta_4) \quad (m.m. \ y \in \mathbb{R}_+), \\ f_X(x) &= \lambda_2 x^{c_2-c_1+1} \exp\left(-\frac{\gamma}{x} - \delta_3\right) \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $\gamma, c_1, c_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonsággal.

2.2. Az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esete

2.2.1. Bevezetés

Vizsgáljuk a

$$(111) \quad g_1 \left[\frac{x - a(y)}{c(y)} \right] \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = g_2 \left[\frac{y - b(x)}{d(x)} \right] \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

egyenletet, ahol $a(y), b(x)$ adott, $c(y)$ és $d(x)$ adott pozitív függvények. Ebben a fejezetben ezen függvények speciális választásai mellett csak a g_1, g_2, f_Y, f_X ismeretlen pozitív függvények mérhetőségét tesszük fel, illetve azt, hogy az egyenlet majdnem minden (x, y) esetén teljesül $\mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmazán.

Ez az egyenlet is (ahogy azt később megmutatjuk) a feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzésében játszik szerepet és Arnold, Castillo és Sarabia [7] könyvében szerepel.

A fejezet eredményeit a [46] dolgozatban tervezzük megjelentetni.

2.2.2. Lineáris regresszió és feltételes szórás

Tekintsük azt az esetet, amikor a, b, c és d

$$a(y) = m_1 y + c_1, \quad b(x) = m_2 x + c_2,$$

és

$$c(y) = \lambda_1 (y + a_1), \quad d(x) = \lambda_2 (x + a_2)$$

alakú lineáris függvények (azaz a lineáris regresszió és feltételes szórás esete, lásd [7]). Legyen

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x + a_2 > 0\}, \quad E_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid y + a_1 > 0\},$$

$$D = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^2$$

és

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 x + m_1 > 0\}, \quad H_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid \lambda_2 y + m_2 > 0\}.$$

(111)-ből kapjuk, hogy

$$(112) \quad g_1 \left(\frac{x - m_1 y - c_1}{\lambda_1 (y + a_1)} \right) \frac{1}{\lambda_1 (y + a_1)} f_Y(y) = g_2 \left(\frac{y - m_2 x - c_2}{\lambda_2 (x + a_2)} \right) \frac{1}{\lambda_2 (x + a_2)} f_X(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ esetén, ahol $f_X : E_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_Y : E_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g_1 : H_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ és $g_2 : H_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $m_1, m_2, c_1, c_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, amelyekre teljesül a

$$K_1 = m_1 a_1 - c_1 - a_2 \geq 0, \quad K_2 = m_2 a_2 - c_2 - a_1 \geq 0$$

feltétel.

Egyszerű számolás mutatja az alábbi Lemma érvényességét.

2.2.1. Lemma. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] *A g_1, g_2, f_Y, f_X pozitív mérhető függvények akkor és csakis akkor teljesítik a (112) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén ha a*

$$G_1(t) = \log g_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} (t - m_1) \right), \quad G_2(t) = \log g_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} (t - m_2) \right)$$

és

$$F_1(t) = \log \frac{f_Y(t - a_1)}{\lambda_1 t}, \quad F_2(t) = \log \frac{f_X(t - a_2)}{\lambda_2 t}$$

módon definiált

$$G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

függvények majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a

$$(113) \quad G_1 \left(\frac{x + K_1}{y} \right) + F_1(y) = G_2 \left(\frac{y + K_2}{x} \right) + F_2(x)$$

függvényegyenletet.

Ez éppen a második probléma vizsgálatában szereplő (93) egyenlet $K_1 = \alpha$, $K_2 = \beta$ mellett, így a $K_1^2 + K_2^2 \neq 0$ és $K_1 = K_2 = 0$ eseteket vizsgáljuk.

2.2.3. A $K_1^2 + K_2^2 \neq 0$ eset

Ekkor igaz marad a 2.1.14. Tétel. Ezt követően mindkét módszerrel meghatározhatók a (99) egyenlet megoldásai a három eset vizsgálatával. A 2.1.15., 2.1.16., 2.1.17. Tételeket használva kapjuk a következő állításokat.

2.2.1. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] A (112) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén kielégítő g_1, g_2, f_X, f_Y mérhető függvények $K_1 > 0, K_2 > 0$ esetén majdnem mindenütt megegyeznek a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \exp(d_1) \left(\frac{K_2}{K_1} (\lambda_1 x + m_1) \right)^{p_1} \left(\frac{K_2}{K_1} (\lambda_1 x + m_1) + 1 \right)^q \quad (x \in H_1), \\ g_2(x) &= \exp(d_2) \left(\frac{K_1}{K_2} (\lambda_2 x + m_2) \right)^{p_2} \left(\frac{K_1}{K_2} (\lambda_2 x + m_2) + 1 \right)^q \quad (x \in H_2), \\ f_Y(y) &= \exp(d_3) \frac{\lambda_1}{K_2^{p_1+q}} (y + a_1)^{p_1+q+1} \left(\frac{y + a_1}{K_2} + 1 \right)^{p_2} \quad (y \in E_2), \\ f_X(x) &= \exp(d_4) \frac{\lambda_2}{K_1^{p_2+q}} (x + a_2)^{p_2+q+1} \left(\frac{x + a_2}{K_1} + 1 \right)^{p_1} \quad (x \in E_1) \end{aligned}$$

függvényekkel, ahol $p_i, q, d_j \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$) tetszőleges konstansok a $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ tulajdonsággal.

2.2.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Ha a g_1, g_2, f_X, f_Y mérhető függvények kielégítik a (112) egyenletet $K_1 = 0, K_2 > 0$ esetén majdnem minden $(x, y) \in D$ -re, akkor ezen függvények majdnem mindenütt megegyeznek a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= A_1 (\lambda_1 x + m_1)^{-b_1} \exp \left\{ \frac{a}{K_2 (\lambda_1 x + m_1)} \right\} \quad (x \in H_1), \\ g_2(x) &= A_2 (\lambda_2 x + m_2)^{b_2} \exp \left\{ \frac{a (\lambda_2 x + m_2)}{K_2} \right\} \quad (x \in H_2), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 A_3 (y + a_1)^{1-b_1} (y + a_1 + K_2)^{b_2} \quad (y \in E_2), \\ f_X(x) &= \lambda_2 A_4 (x + a_2)^{b_2-b_1+1} \exp \left\{ \frac{-a}{x + a_2} \right\} \quad (x \in E_1) \end{aligned}$$

függvényekkel, ahol $a, b_1, b_2, A_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ tetszőleges konstansok az $A_1 A_3 = A_2 A_4$ tulajdonsággal.

2.2.3. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Ha a g_1, g_2, f_X, f_Y mérhető függvények kielégítik a (112) egyenletet $K_1 > 0, K_2 = 0$ esetén majdnem minden

$(x, y) \in D$ -re, akkor ezen függvények majdnem mindenütt megegyeznek a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= A_1 (\lambda_1 x + m_1)^{b_2} \exp \left\{ \frac{a (\lambda_1 x + m_1)}{K_1} \right\} \quad (x \in H_1), \\ g_2(x) &= A_2 (\lambda_2 x + m_2)^{-b_1} \exp \left\{ \frac{a}{K_1 (\lambda_2 x + m_2)} \right\} \quad (x \in H_2), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 A_3 (y + a_1)^{b_2 - b_1 + 1} \exp \left\{ \frac{-a}{y + a_1} \right\} \quad (y \in E_2), \\ f_X(x) &= \lambda_2 A_4 (x + a_2)^{1 - b_1} (x + a_2 + K_1)^{b_2} \quad (x \in E_1) \end{aligned}$$

függvényekkel, ahol $a, b_1, b_2, A_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$ tetszőleges konstansok az $A_1 A_3 = A_2 A_4$ tulajdonsággal.

2.2.4. A $K_1 = K_2 = 0$ eset

A (113) egyenlet az $x \rightarrow xy$ helyettesítéssel és a

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1(t) &= G_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} (t - m_1) \right], \\ \widehat{G}_2(t) &= G_2 \left[\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{t} - m_2 \right) \right], \\ \widehat{F}_1(t) &= F_1(t - a_1), \\ \widehat{F}_2(t) &= F_2(t - a_2) \end{aligned}$$

definíciókkal a

$$(114) \quad \widehat{F}_2(xy) = (\widehat{G}_1 - \widehat{G}_2)(x) + \widehat{F}_1(y)$$

egyenletté alakul majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén. Ezt az egyenletet pedig már vizsgáltuk az 1.5. Fejezetben, így a 1.5.2. Tétel alapján a (114) egyenlet mérhető megoldásai

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1(x) &= \widehat{G}_2(x) + p_1 \log x + d_2 - d_1 \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ \widehat{G}_2(x) &= \text{tetszőleges folytonos függvény} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ \widehat{F}_1(x) &= p_1 \log x + d_1 \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \\ \widehat{F}_2(x) &= p_1 \log x + d_2 \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol p_1, d_1, d_2 tetszőleges konstansok, ebből pedig megkapjuk a (113) egyenlet általános folytonos megoldásait és ezek a függvények majdnem mindenütt megegyeznek a (113) egyenlet mérhető megoldásaival és így a 2.2.1. Lemma miatt kapjuk (112) mérhető megoldásait.

2.2.4. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Ha a g_1, g_2, f_X, f_Y mérhető függvények ($K_1 = K_2 = 0$ mellett) kielégítik a (112) egyenletet majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén, akkor ezek a függvények majdnem mindenütt megegyeznek a

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \exp\left(\widehat{G}_2(\lambda_1 x + m_1)\right) (\lambda_1 x + m_1)^{p_1} \exp(d_2 - d_1) \quad (x \in H_1), \\ g_2(x) &= \exp\left(\widehat{G}_2\left(\frac{1}{\lambda_2 x + m_2}\right)\right) \quad (x \in H_2), \\ f_Y(y) &= \lambda_1 (y + a_1)^{p_1+1} \exp(d_1) \quad (y \in E_2), \\ f_X(x) &= \lambda_2 (x + a_2)^{p_1+1} \exp(d_2) \quad (x \in E_1) \end{aligned}$$

függvényekkel, ahol $p_1, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\widehat{G}_2$ tetszőleges folytonos függvény.

3. Egyváltozós eloszlások karakterizációja

3.1. Bevezetés, felhasznált eredmények

Többször fogjuk használni az alábbi transzformációs tételt.

3.1.1. Tétel. [Giri, [22]] Legyen $X = (X_1, \dots, X_n)$ abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó az $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénnyel, mely az $\Omega_x \subset \mathbb{R}^N$ tartományon kívül zérus. Legyen $\psi : \Omega_x \rightarrow \Omega_y \subset \mathbb{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű leképezés Ω_y -ra és jelölje ψ^{-1} az inverzét.

Ha a $J(y) = \det \left(\frac{\partial \psi^{-1}(y)}{\partial y} \right)$ Jacobi determináns létezik, folytonos és nem vált előjelet Ω_y -ban, akkor az $Y = \psi(X)$ valószínűségi változó is abszolút folytonos a következő g sűrűségfüggvénnyel

$$g(y) = \begin{cases} f(\psi^{-1}(y)) |J(y)| & , \text{ ha } y \in \Omega_y \text{ m.m.} \\ 0 & , \text{ ha } y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_y. \end{cases}$$

Vizsgálataink során feltételezzük, hogy az eloszlások abszolút folytonosak, azaz léteznek a sűrűségfüggvények.

A karakterizációkat a [43], [50], [53] és [54] cikkekben és az [52], [55] és [56] előadások keretében közöltük.

3.2. A gamma eloszlás karakterizációi

Legyen X λ paraméterű, p -edrendű gamma eloszlású valószínűségi változó, ahol λ és p rögzített pozitív számok.

Ismert, hogy ekkor sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & , \text{ ha } x > 0 \\ 0 & , \text{ ha } x \leq 0, \end{cases}$$

ahol

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du$$

az úgynevezett gamma függvény.

3.2.1. Első jellemzés

A gamma eloszlás jól ismert Lukács-féle karakterizációja a következő:

Tétel. [Lukács, [48]] Az X és Y független valószínűségi változók akkor és csakis akkor gamma eloszlásúak (ugyanazzal a paraméterrel) ha $X+Y$ és $\frac{X}{Y}$ függetlenek.

A 3.1.1 transzformációs tételen alapuló módszerünk akkor alkalmazható, ha feltételezzük X és Y abszolút folytonosságát. Bebizonyítjuk az alábbi jellemzési tételt.

3.2.1. Tétel. [Mészáros, [54]] Az X, Y független és abszolút folytonos valószínűségi változók akkor és csakis akkor gamma eloszlásúak (ugyanazzal a paraméterrel) ha $X + Y$ és $\frac{X}{Y}$ függetlenek.

Bizonyítás. A

$$\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{y} \right)$$

transzformációt fogjuk használni. Ez a ψ függvény bijektív, a

$$\psi^{-1} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \psi^{-1}(u, v) = \left(\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1} \right)$$

inverzzel, és a ψ^{-1} Jacobi determinánsa

$$J(u, v) = \frac{-u}{(v+1)^2} \quad (u, v \in \mathbb{R}_+)$$

alakú. Így J folytonos és nem vált előjelet $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Legyenek X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók $\mathbb{R}_+$ -beli értékekkel. Jelöljük f_X -el és f_Y -al a sűrűségfüggvényeiket. Ekkor a 3.1.1. Tétel miatt a

$$(U, V) = \psi(X, Y) = \left(X + Y, \frac{X}{Y} \right)$$

valószínűségi változó is abszolút folytonos a

$$(115) \quad g(u, v) := \frac{u}{(v+1)^2} f_X\left(\frac{uv}{v+1}\right) f_Y\left(\frac{u}{v+1}\right)$$

sűrűségfüggvénnyel majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Könnyen látható, hogy ha az X és Y független valószínűségi változók gamma eloszlásúak, akkor U és V független.

Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek és $(U, V) = \psi(X, Y)$ szintén független tagokból áll. Igaz-e ekkor, hogy X és Y gamma eloszlású?

Ha U és V független az f_U, f_V sűrűségfüggvényekkel, akkor (115)-ből kapjuk a

$$(116) \quad f_U(u) f_V(v) = \frac{u}{(v+1)^2} f_X\left(\frac{uv}{v+1}\right) f_Y\left(\frac{u}{v+1}\right) \quad (\text{m.m. } (u, v) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenletet az ismeretlen $f_X, f_Y, f_U, f_V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényekre.

Az $x = \frac{uv}{v+1}, y = \frac{u}{v+1}$ helyettesítésekkel a (116) egyenletből következik a

$$\frac{y^2}{x+y} f_X(x) f_Y(y) = f_U(x+y) f_V\left(\frac{x}{y}\right)$$

egyenlet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, és a

$$f(t) = f_X(t), \quad g(t) = t^2 f_Y(t),$$

$$p(t) = t f_U(t), \quad q(t) = f_V(t)$$

jelölésekkel kapjuk az

$$f(x) g(y) = p(x+y) q\left(\frac{x}{y}\right)$$

Olkin-Baker egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re.

Itt f, g, p, q nyilván mérhetőek, nemnegatívak és pozitívak valamilyen pozitív Lebesgue mértékű A_1, A_2, A_3, A_4 halmazokon, így alkalmazhatók az 1.2. Fejezet eredményei.

A 1.2.4. Tételből kapjuk, hogy

$$f(x) = A \exp[ax + b \ln x] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+)$$

és

$$g(x) = B \exp[ax + (c-b) \ln x] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+).$$

Így

$$f_X(x) = Ax^b e^{ax} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+)$$

és

$$f_Y(x) = Bx^{c-b-2} e^{ax} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $-a, b+1, c \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $A = \frac{(-a)^{b+1}}{\Gamma(b+1)}$ és $B = \frac{(-a)^{c-b-1}}{\Gamma(c-b-1)}$. Azaz $X - a$ paraméterű és $b+1$ -ed rendű gamma eloszlású, Y pedig $-a$ paraméterű és $c-b-1$ -ed rendű gamma eloszlású valószínűségi változó. $\square$

Megjegyzés. Az 1.2.4. Tétel alapján kapjuk, hogy $U = X+Y$ sűrűségfüggvénye

$$f_U(x) = Cx^{c-1}e^{ax} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $-a, c \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $C = \frac{(-a)^c}{\Gamma(c)}$. Így $U = X + Y - a$ paraméterű, c -ed rendű gamma eloszlású valószínűségi változó. Ez adja azt az ismert tulajdonságot, hogy két gamma eloszlású független valószínűségi változó összege szintén gamma eloszlású.

Megjegyzés. $V = X/Y$ sűrűségfüggvénye:

$$f_V(x) = Dx^b(1+x)^{-c} \quad (m.m. \ x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $b+1, c \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $D = \frac{1}{B(b+1, c-b-1)}$. Így V $b+1$ és $c-b-1$ paraméterű másodrendű béta eloszlású. (Egy α és β paraméterű másodrendű béta eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)}x^{\alpha-1}(1+x)^{-\alpha-\beta}$, ahol α, β rögzített pozitív számok és B az úgynevezett béta függvény, lásd [27].)

Ez ismét adja a gamma eloszlású valószínűségi változók egy ismert tulajdonságát: Ha X és Y független gamma eloszlásúak α_1 illetve α_2 rendekkel, akkor $\frac{X}{Y}$ másodrendű béta eloszlású α_1 és α_2 paraméterekkel.

3.2.2. Második jellemzés

A gamma eloszlás egy másik jellemzése a következő:

Tétel. [Kotlarski, [29]] Az X és Y független valószínűségi változók akkor és csakis gamma eloszlásúak (ugyanazzal a paraméterrel), ha $X+Y$ és $\frac{X}{X+Y}$ függetlenek.

Mi, feltételezve X és Y abszolút folytonosságát, az alábbi tételt bizonyítjuk.

3.2.2. Tétel. [Mészáros, [54]] Az X, Y független és abszolút folytonos valószínűségi változók akkor és csakis gamma eloszlásúak (ugyanazzal a paraméterrel), ha $X+Y$ és $\frac{X}{X+Y}$ függetlenek.

Bizonyítás. Most a következő transzformációt használjuk:

$$\psi: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x + y}\right).$$

Ez a ψ függvény bijektív, a

$$\psi^{-1} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2, \quad \psi^{-1}(u, v) = (uv, u - uv)$$

inverzrel és ψ^{-1} Jacobi determinánsa

$$J(u, v) = -u \quad (u, v \in \mathbb{R}_+).$$

Így J folytonos és nem vált előjelet $\mathbb{R}_+^2$ -en.

Legyenek X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók $\mathbb{R}_+$ -beli értékekkel. Jelöljük f_X -el és f_Y -al a sűrűségfüggvényeiket. Ekkor a 3.1.1. Tétel miatt a

$$(U, V) = \psi(X, Y) = \left(X + Y, \frac{X}{X + Y} \right)$$

valószínűségi változó is abszolút folytonos a

$$(117) \quad g(u, v) := u f_X(uv) f_Y(u - uv)$$

sűrűségfüggvénnyel majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Könnyen látható, hogy ha az X és Y független valószínűségi változók gamma eloszlásúak, akkor U és V független.

Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek és $(U, V) = \psi(X, Y)$ szintén független tagokból áll. Igaz-e ekkor, hogy X és Y gamma eloszlású?

Ha U és V független az f_U, f_V sűrűségfüggvényekkel, akkor (117)-ből kapjuk az

$$(118) \quad f_U(u) f_V(v) = u f_X(uv) f_Y(u - uv) \quad (\text{m.m. } (u, v) \in \mathbb{R}_+^2)$$

egyenletet az ismeretlen $f_X, f_Y, f_U, f_V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sűrűségfüggvényekre.

Az $x = uv, y = u - uv$ helyettesítésekkel a (118) egyenletből következik az

$$f_U(x + y) f_V\left(\frac{x}{x + y}\right) = (x + y) f_X(x) f_Y(y)$$

egyenlet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, és az

$$f(t) = f_X(t), \quad g(t) = f_Y(t),$$

$$p(t) = \frac{1}{t} f_U(t), \quad q(t) = f_V\left(\frac{t}{t + 1}\right)$$

definíciókkal kapjuk, hogy teljesül az

$$f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right)$$

Olkin-Baker egyenlet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Az előző jellemzésnél mondottak szerint a 1.2.4. Tétel adja, hogy

$$f(x) = A \exp[ax + b \ln x] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+)$$

és

$$g(x) = B \exp[ax + (c-b) \ln x] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+).$$

Így

$$f_X(x) = Ax^b e^{ax} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+)$$

és

$$f_Y(x) = Bx^{c-b} e^{ax} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $-a, b+1, c+2 \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $A = \frac{(-a)^{b+1}}{\Gamma(b+1)}$ és $B = \frac{(-a)^{c-b+1}}{\Gamma(c-b+1)}$. Azaz X $-a$ paraméterű, $b+1$ -ed rendű gamma eloszlású, Y pedig $-a$ paraméterű, $c-b+1$ -ed rendű gamma eloszlású valószínűségi változó. $\square$

Megjegyzés. Az 1.2.4. Tétel következményeként kapjuk, hogy $U = X + Y$ sűrűségfüggvénye

$$f_U(x) = Cx^{c+1} e^{ax} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $-a, c+2 \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $C = \frac{(-a)^{c+2}}{\Gamma(c+2)}$. Így $U = X + Y$ $-a$ paraméterű, $c+2$ -ed rendű gamma eloszlású valószínűségi változó.

Megjegyzés. $V = \frac{X}{X+Y}$ sűrűségfüggvénye:

$$f_V(x) = Dx^b (1-x)^{c-b} \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $b+1, c+2 \in \mathbb{R}_+$ tetszőleges konstansok, ahol $D = \frac{1}{B(b+1, c-b+1)}$. Azaz V $b+1$ és $c-b+1$ paraméterű beta eloszlású valószínűségi változó, ez ismét adja a gamma eloszlású valószínűségi változók egy ismert tulajdonságát: Ha X és Y független gamma eloszlásúak α_1 illetve α_2 rendekkel, akkor $\frac{X}{X+Y}$ béta eloszlású α_1 és α_2 paraméterekkel.

3.3. A béta eloszlás egy karakterizációja

Legyen X p és q paraméterű béta eloszlású valószínűségi változó, ahol p és q rögzített pozitív számok.

Ismert, hogy ennek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \beta_{p,q}(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & , \text{ ha } x \in (0,1) \\ 0 & , \text{ ha } x \notin (0,1), \end{cases}$$

ahol

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

a béta függvény.

J. Wesolowski ([63]) vizsgálta a béta eloszlás egy új karakterizációját a

$$\psi : (0,1)^2 \rightarrow (0,1)^2, \quad \psi(x, y) = \left(\frac{1-y}{1-xy}, 1-xy \right)$$

transzformáció segítségével.

A fent definiált ψ függvény bijektív, $\psi^{-1} = \psi$ és ψ^{-1} Jacobi determinánsa

$$J(u, v) = \frac{-v}{1-uv} \quad (u, v \in (0,1))$$

alakú. Könnyen látható, hogy J folytonos és nem vált előjelet $(0,1)^2$ -en.

Legyenek X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók $(0,1)$ -beli értékekkel. Jelöljük f_X , f_Y -al a sűrűségfüggvényeket. Ekkor a 3.1.1. Tétel alapján az

$$(U, V) = \psi(X, Y) = \left(\frac{1-Y}{1-XY}, 1-XY \right)$$

valószínűségi változó is abszolút folytonos a

$$(119) \quad g(u, v) := f_X \left(\frac{1-v}{1-uv} \right) f_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

sűrűségfüggvénnyel, majdnem minden $(u, v) \in (0,1)^2$ esetén.

Wesolowski jelzi, hogy ha X és Y béta eloszlású valószínűségi változók az

$$f_X(x) = \beta_{p,q}(x) \quad \text{és} \quad f_Y(x) = \beta_{p+q,r}(x) \quad (x \in (0,1))$$

sűrűségfüggvényekkel, akkor behelyettesítve ezeket a (119) egyenlet jobb oldalába, egyszerűen látható, hogy (119) bal oldala u illetve v függvényének szorzataként áll elő, ahol mindkét függvény béta eloszlás sűrűségfüggvénye r, q illetve $r + q, p$ paraméterekkel.

Wesolowski feltette a következő kérdést: Tegyük fel, hogy X és Y független valószínűségi változók és $(U, V) = \psi(X, Y)$ független komponensekből áll. Igaz-e ekkor, hogy X, Y, U és V béta eloszlású?

Maga Wesolowski megadta a pozitív választ erre a kérdésre, feltételezve, hogy X, Y, U és V sűrűségfüggvényei szigorúan pozitívak és lokálisan integrálhatóak $(0, 1)$ -en.

Ha U és V függetlenek az f_U, f_V sűrűségfüggvényekkel, akkor (119)-ből kapjuk a már korábban az 1.3. fejezetben vizsgált

$$(B) \quad f_U(u) f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv}$$

függvényegyenletet az ismeretlen $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényekkel.

Wesolowski vizsgálataiban feltételezte azt is, hogy (B) minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül.

Itt, összhangban a 3.1.1. Tétellel csak azt tesszük fel, hogy a (B) egyenlet majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül és f_X, f_Y, f_U, f_V olyan (sűrűség)függvények, hogy nemnegatívak, mérhetőek és Lebesgue integráljuk 1.

Az 1.3.5. Tétel adja, hogy ekkor

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \varepsilon_1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad (\text{m.m. } x \in (0, 1)), \\ f_Y(y) &= \varepsilon_2 y^{p+q-1} (1-y)^{r-1} \quad (\text{m.m. } y \in (0, 1)), \\ f_U(u) &= \varepsilon_3 u^{r-1} (1-u)^{q-1} \quad (\text{m.m. } u \in (0, 1)), \\ f_V(v) &= \varepsilon_4 v^{q+r-1} (1-v)^{p-1} \quad (\text{m.m. } v \in (0, 1)), \end{aligned}$$

ahol p, q, r, ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) pozitív konstansok az $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4$ tulajdonsággal.

Azaz f_X, f_Y, f_U, f_V a béta eloszlás sűrűségfüggvényei.

Igaz tehát a következő jellemzés

3.3.1. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [43]] Ha X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók (ahol X és Y tartója a $(0, 1)$ intervallum) úgy, hogy az

$$U = \frac{1-Y}{1-XY}, \quad V = 1-XY$$

szerint definiált valószínűségi változók szintén függetlenek, akkor X, Y, U és V a béta eloszláscsaládba tartoznak. Azaz X, Y, U és V béta eloszlásúak sorra a $p, q; p + q, r; r, q$ és $q + r, p$ paraméterekkel.

3.4. A normális eloszlás karakterizációja

A normális eloszlás egy jól ismert jellemzése a Lukács-féle karakterizáció:

Tétel. [Lukács, [47]] Az X és Y független valószínűségi változók pontosan akkor normális eloszlásúak, ha $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek.

Itt is feltételezzük, hogy X és Y abszolút folytonosak, így az alábbi tételt bizonyítjuk.

3.4.1. Tétel. [Mészáros, [53]] Az X és Y független és abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor normális eloszlásúak, ha $X + Y$ és $X - Y$ függetlenek.

Bizonyítás. Használjuk a

$$\psi(x, y) = (x + y, x - y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

transzformációt. A ψ függvény bijektív, $\psi^{-1}(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$, és ψ^{-1} Jacobi determinánsa

$$J(u, v) = -\frac{1}{2} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

alakú. Nyilvánvaló, hogy J folytonos és nem vált előjelet $\mathbb{R}^2$ -en.

Legyenek X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók $\mathbb{R}$ -beli értékekkel. Jelöljük f_X, f_Y -al a sűrűségfüggvényeket.

Ekkor a 3.1.1. Tétel alapján az

$$(U, V) = \psi(X, Y) = (X + Y, X - Y)$$

valószínűségi változó is abszolút folytonos a

$$(120) \quad g(u, v) := \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

sűrűségfüggvénnyel majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Könnyű belátni, hogy ha az X és Y független valószínűségi változók normális eloszlásúak, akkor U és V függetlenek.

A fordított kérdés a következőképpen fogalmazható meg: Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek és az $(U, V) = \psi(X, Y)$ vektor független komponensekből áll. Igaz-e ekkor, hogy X, Y normális eloszlású?

Ha U és V függetlenek az f_U, f_V sűrűségfüggvényekkel, akkor (120)-ból kapjuk, hogy

$$(121) \quad f_U(u) f_V(v) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \quad (\text{m.m. } (u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

teljesül az ismeretlen $f_X, f_Y, f_U, f_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényekre, azaz a (121) egyenletből az

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}$$

helyettesítéssel kapjuk az

$$f_X(x) f_Y(y) = 2 f_U(x+y) f_V(x-y)$$

egyenletet majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, az

$$f(t) = f_X(t), \quad g(t) = f_Y(t),$$

$$h(t) = 2f_U(t), \quad k(t) = f_V(t)$$

definíciókkal pedig az

$$f(x) g(y) = h(x+y) k(x-y)$$

egyenlet teljesülését majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, amely az (52) egyenlet speciális esete az $a = b = c = 1$ és $d = -1$ konstansválasztással.

Igaz továbbá, hogy f, g, h, k mérhetőek, nemnegatívak és rendre pozitívak valamilyen pozitív Lebesgue mértékű A, B, C, D halmazon.

Így használhatóak az 1.4.3. Fejezet eredményei, ezért az 1.4.4. Tétel segítségével kapjuk, hogy

$$f_X(x) = \alpha_1 \exp[a_1 x + b_1 x^2] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R})$$

és

$$f_Y(x) = \alpha_2 \exp[a_2 x + b_1 x^2] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Az 1.4.4. Tételből az is következik, hogy

$$f_U(x) = \frac{1}{2} \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{1}{2} (a_1 + a_2) x - b_1 x^2\right] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R})$$

és

$$f_V(x) = \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[\frac{1}{2} (a_1 - a_2) x - b_1 x^2 \right] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) tetszőleges a $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 = 1$ feltételt kielégítő konstansok, melyekből a normálási tulajdonsággal következik, hogy majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma^2}} \quad (i = X, Y, U, V).$$

Így ha $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ és $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ független normális eloszlású valószínűségi változók, akkor összegükre igaz, hogy $U = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$; különbségükre pedig, hogy $V = X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$. $\square$

3.5. Az exponenciális eloszlás egy karakterizációja

Néhány évvel ezelőtt Marshall (University of British Columbia) és Olkin (Stanford University) az alábbi problémát vetette fel személyes kommunikáció során: Keressük meg az összes f sűrűségfüggvényt, ami kielégíti az alábbi két feltételt (lásd Maksa és Mészáros [50])

1. Tulajdonság. $f(u) = 0$ majdnem minden $u \in (-\infty, 0)$ esetén (a Lebesgue mérték szerint) és

2. Tulajdonság. Létezik olyan $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ (az egész számok halmaza) és $-1 < \beta \in \mathbb{R}$, hogy az $\mathbb{R}^2$ -en az alábbi módon definiált p függvény:

$$p(u, v) = 0 \text{ ha } u < 0 \text{ vagy } v < 0 \text{ és} \quad (122)$$

$$p(u, v) = \int_0^{+\infty} f(u) (F(u) - F(s+u))^n f(s+u) f(s+u+v) F(s+u+v)^\beta ds$$

ha $u, v \in [0, +\infty)$, ahol $F(u) = \int_u^{+\infty} f$, $u \geq 0$ az ún. túlélő függvény, az együttes sűrűségfüggvénye két független valószínűségi változónak.

Annyi volt ismert, hogy ha $f(u) = 0$ $u < 0$ esetén és $f(u) = e^{-u}$ $u \geq 0$ esetén, akkor $p(u, v) = g(u) h(v)$ ($u \geq 0, v \geq 0$) valamilyen $g, h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre. Hasonló problémák megtalálhatók az Azlarov-Volodin [8] könyvben.

Ebben a fejezetben megadjuk a probléma megoldását azzal, hogy belátjuk, hogy minden f sűrűségfüggvény, ami pozitív $[0, +\infty)$ -en és rendelkezik az 1–2 tulajdonságokkal, az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Továbbá, adunk egy szükséges és elégséges feltételt a (122)-ben szereplő n és β paraméterekre, hogy a 2-ben definiált p függvény, egy f exponenciális sűrűségfüggvénnyel, maga is sűrűségfüggvény legyen.

A fő eredmény az alábbi.

3.5.1. Tétel. [Maksa, Mészáros, [50]] *Ha az f sűrűségfüggvény rendelkezik a 1. és 2. Tulajdonsággal, és*

$$(123) \quad f(u) > 0 \quad \text{ha} \quad u \geq 0$$

teljesül, akkor létezik olyan $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$(124) \quad f(u) = \alpha e^{-\alpha u} \quad (m.m. \ u \in [0, +\infty)),$$

azaz, f exponenciális eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény α^{-1} várható értékkel.

Bizonyítás. Mivel f sűrűségfüggvény, ezért a $[0, +\infty)$ -en az

$$F(u) = \int_u^{+\infty} f$$

módon definiált F függvény abszolút folytonos, és $F' = -f$ majdnem mindenütt $[0, +\infty)$ -en. Másrészt a $t = s + u$ helyettesítéssel a (122) egyenlet az alábbi alakba írható

$$(125) \quad p(u, v) = \int_u^{+\infty} f(u) (F(u) - F(t))^n f(t) f(t+v) F(t+v)^\beta dt$$

minden $u, v \in [0, +\infty)$. Mindkét oldalt $-f(u)$ -val osztva és a binomiális tételt alkalmazva, a (125) egyenlet adja, hogy

$$\frac{p(u, v)}{-f(u)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k F(u)^{n-k} R_k(u, v) \quad (u, v \in [0, +\infty))$$

teljesül, ahol

$$R_k(u, v) = - \int_u^{+\infty} F(t)^k f(t) f(t+v) F(t+v)^\beta dt$$

$(u, v \in [0, +\infty), 0 \leq k \in \mathbb{Z}, k \leq n)$. Ezért a

$$u \mapsto \frac{p(u, v)}{-f(u)} \quad (u \geq 0)$$

függvény majdnem mindenütt differenciálható $[0, +\infty)$ -en, és az ismert $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ azonosság miatt, némi számolás után, kapjuk, hogy

$$(126) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p(u, v)}{-f(u)} \right) = -f(u) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) F(u)^{n-k-1} R_k(u, v)$$

teljesül majdnem mindenütt $[0, +\infty)^2$ -en. Bevezetve a

$$Dq(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{q(u, v)}{-f(u)} \right)$$

differenciáloperátort, a (126) egyenlet a

$$Dp(u, v) = -f(u) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) F(u)^{n-k-1} R_k(u, v)$$

alakba írható át. Ez azt mutatja, hogy az előbbi gondolatmenet megismételhető p helyett Dp -re is, és a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) = 0$ azonosság miatt kapjuk, hogy

$$D^2p(u, v) = -f(u) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)(n-k-1) F(u)^{n-k-2} R_k(u, v)$$

teljesül majdnem mindenütt $[0, +\infty)^2$ -en. Végül a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) \dots (n-k-\ell) = 0 \quad (0 \leq \ell < n)$$

azonosság alapján következik, hogy

$$\begin{aligned} D^n p(u, v) &= -f(u) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n-k) \dots (-k+1) F(u)^{-k} R_k(u, v) = \\ &= -f(u) n! R_0(u, v) \end{aligned}$$

teljesül, ahonnan

$$(127) \quad D^{n+1}p(u, v) = n! f(u) f(u+v) F(u+v)^\beta$$

következik majdnem minden $u, v \in [0, +\infty)$ esetén.

Másrészt a 2. Tulajdonság adja, hogy $p(u, v) = g(u) h(v)$ majdnem mindenütt $[0, +\infty)^2$ -en a g és h sűrűségfüggvényekkel. Így

$$D^{n+1}p(u, v) = g_n(u) h(v) \quad (\text{m.m. } [0, +\infty)^2\text{-en})$$

a $g_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénnyel. Ezért, a (127) egyenletből kapjuk az

$$f(u+v) F(u+v)^\beta = \frac{g_n(u)}{n! f(u)} h(v)$$

exponenciális Pexider egyenletet, amely majdnem minden $u, v \in [0, +\infty)$ esetén teljesül. Ez a

$$B(t) = f(t) F(t)^\beta \quad \text{és} \quad G_n(t) = \frac{g_n(t)}{n! f(t)}$$

jelölésekkel adja, hogy a

$$(128) \quad B(u+v) = G_n(u) h(v)$$

alakú Pexider egyenlet teljesül majdnem mindenütt az $\mathbb{R}_+^2$ nyílt halmazon.

Az 1.3.3. és az 1.5.1. Tétel miatt

$$B(t) = ae^{bt}$$

majdnem mindenütt $\mathbb{R}_+$ -on, ahol $0 < a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Másrészt $B(0) = G_n(0) h(0) = a$, és így

$$f(t) F(t)^\beta = ae^{bt}$$

majdnem mindenütt $[0, +\infty)$ -en, ahol $0 < a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Mivel f sűrűségfüggvény és $F' = -f$ majdnem mindenütt $[0, +\infty)$ -en, kapjuk, hogy (124) teljesül, ahol $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

3.5.2. Tétel. [Maksa, Mészáros, [50]] Legyen f az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye α^{-1} várható értékkel. Ekkor a 2. Tulajdonsággal definiált p függvény maga is pontosan akkor sűrűségfüggvény, ha

$$(129) \quad (1 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) = n!.$$

Továbbá, ha (129) teljesül, akkor

$$p(u, v) = \alpha(n+3+\beta) e^{-\alpha(n+3+\beta)u} \alpha(1+\beta) e^{-\alpha(1+\beta)v}$$

(majdnem mindenütt $[0, +\infty)^2$ -en), azaz, p két, $(\alpha(n+3+\beta))^{-1}$ és $(\alpha(1+\beta))^{-1}$ várható értékű exponenciális sűrűségfüggvény szorzata.

Bizonyítás. Először n -re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$(130) \quad (2+\beta) \cdots (n+2+\beta) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k+2+\beta} = n!$$

teljesül minden $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ és $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-(n+2), \dots, -2\}$ esetén. A (130) egyenlőség nyilvánvalóan igaz $n=0$ esetén. Tegyük fel, hogy $n > 0$ és (130) teljesül, legyen $\beta = -1$. Kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1},$$

illetve ezzel ekvivalensen (itt k -t $n-k$ -val helyettesítve)

$$(131) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{n+1-k} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
& (2 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \frac{1}{k + 2 + \beta} = \\
& = (2 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) \left[\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^k \frac{1}{k + 2 + \beta} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n + 3 + \beta} \right] = \\
& = (-1)^{n+1} (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) + (2 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) \times \\
& \quad \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n+1}{(n+1-k)(k+2+\beta)} = \\
& = (-1)^{n+1} (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) + (2 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) \times \\
& \quad \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{n+1}{n+3+\beta} \left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k+2+\beta} \right) = \\
& = (-1)^{n+1} (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) + (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) (n+1) \times \\
& \quad \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k+2+\beta} \right)
\end{aligned}$$

ahonnan, (131)-ből és az indukciós feltételből

$$\begin{aligned}
& (2 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta) \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \frac{1}{k + 2 + \beta} = \\
& = (-1)^{n+1} (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) + (-1)^n (2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta) + (n+1) (n!) = \\
& = (n+1)!
\end{aligned}$$

következik. Ezzel beláttuk, hogy (130) teljesül.

Az egyetlen további bizonyítanivaló, hogy $\int_{\mathbb{R}} p = 1$ pontosan akkor, ha (129) teljesül. Mivel $F(u) = e^{-\alpha u}$ minden $u \geq 0$ -ra, némi számolás után (125) adja, hogy

$$p(u, v) = \alpha^2 e^{-\alpha(u+v+\beta)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{k+2+\beta} e^{-\alpha(n+2+\beta)u}$$

$(u \geq 0, v \geq 0)$ teljesül. Így (130)-ból kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} p(u, v) &= \alpha^2 \frac{n!}{(2 + \beta) \cdots (n + 2 + \beta)} e^{-\alpha(n+3+\beta)u} e^{-\alpha(\beta+1)v} = \\ &= \frac{n!}{(1 + \beta) \cdots (n + 3 + \beta)} \alpha(n + 3 + \beta) e^{-\alpha(n+3+\beta)u} \alpha(\beta + 1) e^{-\alpha(\beta+1)v} \end{aligned}$$

$(u \geq 0, v \geq 0)$. Most már könnyű belátni, hogy $\int_{\mathbb{R}^2} p = 1$ akkor és csakis akkor, ha (129) teljesül és ebben az esetben

$$p(u, v) = \alpha(n + 3 + \beta) e^{-\alpha(n+3+\beta)u} \alpha(\beta + 1) e^{-\alpha(\beta+1)v}$$

$(u \geq 0, v \geq 0)$, ami pont a bizonyítandó állítás. □

Megjegyzés. Mivel a $(-1, +\infty)$ -en

$$\varphi(t) = (1 + t) \cdots (n + 3 + t) - n!$$

szerint definiált φ függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő, továbbá $\lim_{t \rightarrow -1} \varphi(t) = -n! < 0$, $\varphi(1) = (n + 4)! - n! > 0$ ezért minden $0 \leq n \in \mathbb{Z}$ esetén létezik pontosan egy $-1 < \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy (129) teljesül.

4. Feltételesen meghatározott kétdimenziós abszolút folytonos eloszlások karakterizációja

4.1. Bevezetés

Legyen (X, Y) egy abszolút folytonos kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó. Jelölje $f_{(X,Y)}$, f_X , f_Y , $f_{X|Y}$ és $f_{Y|X}$ az együttes, a marginális és a feltételes sűrűségfüggvényeket. Ismeretes, hogy

$$(132) \quad f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) = f_{Y|X}(x, y) f_X(x)$$

majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (vagy pozitív tartójú vektorváltozó esetén majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$) esetén.

Ez egy általános függvényegyenlet a sűrűségfüggvényekre, ami így nem kezelhető, de az lesz, ha a feltételes sűrűségfüggvényeket valamilyen (pl. gyakorlati vagy valószínűségelméleti szempontból érdekes) speciális alakú függvények között definiáljuk.

Elsőként Narumi ([57]), majd Arnold, Castillo és Sarabia ([7]) alkalmazott függvényegyenleteket feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások karakterizációja során.

Az eredmények a [45] és [44] dolgozatokban szerepelnek, illetve [46]-ban kívánjuk megjelentetni.

4.2. Az eltolásparaméter jellegű feltétel esete

Narumi vizsgálatait továbbgondolva Arnold, Castillo és Sarabia többek közt tekintette az összes lehetséges eloszlást adott $E(X|Y=y) = a(y)$ és $E(Y|X=x) = b(x)$ regressziós függvénnyel, eltolásparaméter jellegű feltétellel.

Ekkor a feltételes sűrűségfüggvényeknek a

$$(133) \quad f_{X|Y}(x, y) = g_1(x - a(y))$$

és

$$(134) \quad f_{Y|X}(x, y) = g_2(y - b(x))$$

alakot kell öltenie (feltételezve, hogy a feltételes varianciák konstansok).

Az $a(y)$ és $b(x)$ függvények bizonyos választása esetén meg tudjuk határozni a (133)-hoz és (134)-hez kapcsolódó együttes eloszlás természetét.

Nyilvánvalóan vizsgálandó az az eset, amikor $a(y)$ és $b(x)$ lineárisak (lásd a 7.4. Fejezetet [7]-ben). Ebben az esetben kapjuk az

$$(135) \quad f_Y(y) g_1(x - a_1 y - a_2) = f_X(x) g_2(y - b_1 x - b_2)$$

egyenletet. Narumi megoldotta (135)-öt, de erős regularitási feltételek mellett.

Tételezzünk fel csak annyit, amennyi természetes. Az ismeretlen függvények legyenek sűrűségfüggvények (nemnegatívak, mérhetőek 1 Lebesgue integrállal), és a (135) egyenlet teljesüljön majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

A (135) egyenletet a

$$\bar{g}_1(t) = g_1(t - a_2), \quad \bar{g}_2(t) = g_2(t - b_2)$$

definíciókkal a

$$(136) \quad f_Y(y) \bar{g}_1(x - a_1 y) = f_X(x) \bar{g}_2(y - b_1 x)$$

alakba írhatjuk majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. Írjunk y -t $y - b_1 x$ helyére és kapjuk, hogy

$$(137) \quad f_X(x) \bar{g}_2(y) = f_Y(y + b_1 x) \bar{g}_1((1 - a_1 b_1)x - a_1 y)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. A (137) egyenlet az

$$\begin{aligned} f(t) &= f_X(t), & g(t) &= \bar{g}_2(t), \\ h(t) &= f_Y(t), & k(t) &= \bar{g}_1(t) \end{aligned}$$

jelöléssel, a konstansok

$$a = b_1, \quad b = 1, \quad c = 1 - a_1 b_1, \quad d = -a_1$$

definíciója mellett, adja az 1.4. fejezetben szereplő

$$f(x) g(y) = h(ax + by) k(cx + dy) \quad (\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenletet. Ekkor $\Delta = -1$.

A 1.4.4. Tétel segítségével máris kapjuk (137) megoldásait és ezáltal (136) és (135) megoldásait, azaz

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \alpha_1 \exp[A_1 x + B_1 x^2] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}), \\ \bar{g}_2(x) &= \alpha_2 \exp\left[A_2 x + \frac{a_1 B_1}{b_1(1 - a_1 b_1)} x^2\right] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}), \\ f_Y(x) &= \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[(A_1 a_1 + A_2(1 - a_1 b_1))x - \frac{a_1 B_1}{b_1} x^2\right] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}), \\ \bar{g}_1(x) &= \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[(A_1 - A_2 b_1)x - \frac{B_1}{1 - a_1 b_1} x^2\right] \quad (\text{m.m. } x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

továbbá, majdnem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[(A_1 - A_2 b_1)(x + a_2) - \frac{B_1}{1 - a_1 b_1} (x + a_2)^2 \right], \\ g_2(x) &= \alpha_2 \exp \left[A_2(x + b_2) + \frac{a_1 B_1}{b_1(1 - a_1 b_2)} (x + b_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

A megfelelő függvényeket az

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_Y(y) \bar{g}_1(x - a_1 y) = f_X(x) \bar{g}_2(y - b_1 x)$$

formulába helyettesítve kiszámolhatjuk az

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x, y) &= \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[(A_1 - A_2 b_1)x + A_2 y - \frac{a_1 B_1}{1 - a_1 b_1} \left(\frac{x^2}{a_1} - 2xy + \frac{y^2}{b_1} \right) \right] \end{aligned}$$

együttes sűrűségfüggvényt majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Így ugyanarra a következtetésre juthatunk, amire [7]-ben is, hogy X és Y vagy függetlenek vagy (X, Y) kétváltozós normális eloszlású.

4.3. A skálaparaméter jellegű feltétel esete

Arnold, Castillo és Sarabia [7] tekintette azt az esetet is, amikor a feltételes sűrűségfüggvények

$$(138) \quad f_{X|Y}(x, y) = h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)}$$

és

$$(139) \quad f_{Y|X}(x, y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)}$$

alakúak, adott pozitív c és d függvényekkel, ahol h_1 , h_2 ismeretlen pozitív függvények.

Ekkor (132)-ből kapjuk a

$$(140) \quad h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

függvényegyenletet, amit a 2.1. fejezetben vizsgáltunk.

Az ismert függvények speciális választásai esetén Arnold, Castillo és Sarabia megoldotta (140)-et, de feltételezték az ismeretlen h_1, h_2, f_Y, f_X függvények kétszeri differenciálhatóságát. A vizsgálatot pozitív tartójú (X, Y) valószínűségi változókra szűkítették le és így határozták meg az együttes eloszlásokat.

Ebben a fejezetben az ismert függvények speciális választásai mellett csak annyit tételezünk fel, hogy a h_1, h_2, f_Y, f_X ismeretlen függvények mérhetőek és pozitívak, az egyenlet pedig majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesül.

4.3.1. Első probléma

Válasszuk a c, d függvényeket a következőképpen

$$c(y) = \frac{1}{\alpha + y}, \quad d(x) = \frac{1}{\beta + x} \quad (x, y > 0),$$

ahol α, β nemnegatív konstansok.

(140)-ből kapjuk, hogy

$$(141) \quad h_1((\alpha + y)x)(\alpha + y)f_Y(y) = h_2((\beta + x)y)(\beta + x)f_X(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ekkor a 2.1. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk az alábbi eredményt.

4.3.1. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] *Az adott speciális esetben, ha $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ a h_1 és h_2 függvények a gamma eloszlás sűrűségfüggvényei (rendre $-\gamma, c_1 + 1$ és $-\gamma, c_2 + 1$ paraméterekkel), azaz (X, Y) gamma feltételes eloszlásokkal rendelkezik. Továbbá az együttes sűrűségfüggvény*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(\delta_1 + \delta_3) x^{c_1} y^{c_2} \exp(\gamma(\alpha x + xy + \beta y))$$

alakú majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, azaz a (138) és (139) szerint adott feltételes sűrűségfüggvényekhez tartozó megoldások osztálya (ha $c(y) = \frac{1}{\alpha + y}$, $d(x) = \frac{1}{\beta + x}$) egybeesik a MODEL II gamma feltételes osztállyal (lásd [7]).

4.3.2. Második probléma

A második vizsgált esetben legyenek a (140) egyenletben szereplő c és d függvények lineárisak, azaz

$$c(y) = \lambda_1(\alpha + y), \quad d(x) = \lambda_2(\beta + x) \quad (x, y > 0),$$

ahol λ_1, λ_2 pozitív, α és β nemnegatív konstansok.

Így (140)-ből a

$$(142) \quad h_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 (\alpha + y)} \right) \frac{1}{\lambda_1 (\alpha + y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{\lambda_2 (\beta + x)} \right) \frac{1}{\lambda_2 (\beta + x)} f_X(x),$$

a 2.1.6 fejezetben szereplő egyenletet kapjuk majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ekkor kapjuk az alábbi eredményeket.

4.3.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, [44], [45]] Az $\alpha > 0, \beta > 0$ esetben a h_1 és h_2 függvények (rendre $c_2 + 1, \frac{\gamma}{\alpha\beta} - c_2 - 1$ és $c_1 + 1, \frac{\gamma}{\alpha\beta} - c_1 - 1$ paraméterű) Pearson típusú VI eloszlással rendelkeznek, amit másodrendű béta eloszlásnak is neveznek (lásd [7]). Ebben az esetben az f_X és f_Y marginális sűrűségfüggvények is ugyanolyan eloszlásúak. Továbbá az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(d_3 - d_2) x^{c_2} y^{c_1} (\alpha x + \beta y + \alpha\beta)^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}}$$

alakú majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, azaz a (138) és (139) szerint adott feltételes sűrűségfüggvényekhez tartozó megoldások osztálya egybeesik a Mardia által bevezetett kétváltozós Pareto eloszlás egy kiterjesztésével (lásd [7], [51]).

Az $\alpha = 0, \beta > 0$ esetben az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(d_3 - d_2) x^{c_2} y^{c_1} e^{-\frac{\gamma}{\beta^2} \frac{\beta+x}{y}}$$

alakú majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Míg az $\alpha > 0, \beta = 0$ esetben az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(d_3 - d_2) x^{c_2} y^{c_1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha^2} \frac{\alpha+y}{x}}$$

alakú majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

4.4. Az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esete

Legyenek most a feltételes sűrűségfüggvények

$$f_{X|Y}(x, y) = g_1 \left[\frac{x - a(y)}{c(y)} \right] \frac{1}{c(y)},$$

$$f_{Y|X}(x, y) = g_2 \left[\frac{y - b(x)}{d(x)} \right] \frac{1}{d(x)}$$

alakúak az adott a, b és adott pozitív c, d függvényekkel, ahol g_1, g_2 ismeretlen függvények.

Kapjuk ekkor (132)-ből a

$$(143) \quad g_1 \left[\frac{x - a(y)}{c(y)} \right] \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = g_2 \left[\frac{y - b(x)}{d(x)} \right] \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

egyenletet. Tételezzünk most is csak annyit fel, amennyit természetes. Az ismert függvények speciális választása mellett, a g_1, g_2, f_Y, f_X ismeretlen függvények legyenek sűrűségfüggvények (mérhetőek 1 Lebesgue integrállal), és a (143) egyenlet teljesüljön majdnem minden (x, y) esetén $\mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmazából.

4.4.1. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Az (X, Y) abszolút folytonos valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye, ha az a, b, c és d függvények lineárisak és $K_1, K_2 > 0$, majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén megegyezik az

$$(144) \quad f_{(X,Y)}(x, y) = K(x + a_2 + K_1)^{p_1} (y + a_1 + K_2)^{p_2} [K_2(x + a_2) + K_1(y + a_1) + K_1 K_2]^q$$

függvénnyel, ahol $K = K_1^{-p_1-q} \cdot K_2^{-p_2-q} \cdot \exp(d_1 + d_3)$.

Megjegyzés. Egy (143)-hoz hasonló egyenletet Narumi is vizsgált a g_1, g_2, f_X, f_Y függvények kétszeri differenciálhatósága mellett. Ő is a (144)-ben szereplő eredményt kapta (X, Y) együttes sűrűségére, ha $K_1, K_2 > 0$ (lásd [57])

Megjegyzés. Egy eltolástól eltekintve (144) megfeleltethető a Beta-2 feltételes sűrűségnek (lásd [7], 5.3. Fejezet) a $\lambda_3 = 0$ feltétellel.

4.4.2. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Az (X, Y) abszolút folytonos valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye, ha az a, b, c és d függvények lineárisak és $K_1 = 0, K_2 > 0$, majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén megegyezik az

$$(145) \quad f_{(X,Y)}(x, y) = A_1 A_3 \exp \left\{ \frac{a}{K_2} \frac{y + a_1}{x + a_2} \right\} (x + a_2)^{-b_1} (y + a_1 + K_2)^{b_2}$$

függvénnyel, ahol, $a, b_1, b_2, A_1, A_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Megjegyzés. A $K_1 = 0, K_2 > 0$ esetben tehát Pearson-típusú III eloszlásunk van.

4.4.3. Tétel. [Lajkó, Mészáros, Pap, [46]] Az (X, Y) abszolút folytonos valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye, ha az a , b , c és d függvények lineárisak és $K_1 > 0$, $K_2 = 0$, majdnem minden $(x, y) \in D$ esetén megegyezik az

$$(146) \quad f_{(X,Y)}(x, y) = A_1 A_3 \exp \left\{ \frac{a}{K_1} \frac{x + a_2}{y + a_1} \right\} (x + a_2 + K_1)^{b_2} (y + a_1)^{-b_1}$$

függvénnyel, ahol a , b_1 , b_2 , A_1 , $A_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

Megjegyzés. A $K_1 > 0$, $K_2 = 0$ esetben is Pearson-típusú VI. eloszlásunk van.

Összefoglaló

Az értekezés négy fejezetből áll. Az első kettőben függvényegyenleteket vizsgálunk, a második kettőben pedig ezeket alkalmazzuk a valószínűségelmélet különböző karakterizációs problémái során.

Az *első fejezetben* egyváltozós eloszlások jellemzése során használt függvényegyenleteket vizsgálunk.

Először a gamma eloszlás jellemzéséhez használt

$$f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right)$$

Olkin-Baker egyenletet tekintjük. A mindenütt teljesülő egyenlet mérhető (folytonos) megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő egyenlet mérhető megoldásait. Majd csak annyit tételezzünk fel, hogy az Olkin-Baker egyenletet majdnem mindenütt teljesítő $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvények nemnegatívak és léteznek pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak. Megmutatjuk, hogy ekkor majdnem mindenütt pozitívak. Ekkor már a mindenütt teljesülő Olkin-Baker egyenlet folytonos megoldásainak segítségével meg tudjuk adni a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásait.

A béta eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó

$$f_U(u)f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right)f_Y(1-uv)\frac{v}{1-uv}$$

függvényegyenlet vizsgálata során megadtuk mindenféle regularitási feltétel nélkül a minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesülő egyenlet általános megoldását az $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvényekkel, majd vizsgáltuk a megoldást, ha az ismeretlen függvények mérhetőek, pozitívak illetve ha az ismeretlen mérhető függvények nemnegatívak 1 Lebesgue integrállal, és az egyenlet pedig majdnem minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesül. Megadjuk, mindenféle regularitási feltétel nélkül, a minden $(u, v) \in (0, 1)^2$ esetén teljesülő egyenlet általános megoldását olyan $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvényekre, hogy léteznek pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon a függvények rendre pozitívak.

Meghatározzuk a majdnem mindenütt teljesülő és a normális eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó

$$f(x)g(y) = h(ax+by)k(cx+dy)$$

függvényegyenlet pozitív mérhető illetve sűrűségfüggvény megoldásait is, ahol a, b, c, d rögzített nullától különböző valós számok az $ad - bc \neq 0$ tulajdonsággal.

Vizsgáljuk a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$f(u + v) = g(u) h(v)$$

exponenciális Pexider egyenletet az ismeretlen $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre, ahol g, h nem azonosan 0, illetve a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$f(uv) = g(u) + h(v)$$

logaritmikus Pexider egyenletet az ismeretlen $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényekre.

A második fejezetben feltételeken meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzése során használt függvényegyenleteket vizsgálunk.

Tekintjük a

$$h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

függvényegyenlet, ahol h_1, h_2, f_Y, f_X ismeretlen függvények. Itt a c és d függvények speciális választásai esetén, csak a pozitív ismeretlen h_1, h_2, f_Y, f_X függvények mérhetőségét tételezzük fel, illetve azt, hogy a kapott egyenletek majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülnek.

Először legyen $c(y) = \frac{1}{\alpha + y}$, $d(x) = \frac{1}{\beta + x}$ ($x, y > 0$), ahol α, β nemnegatív konstansok. Ekkor kapjuk, hogy

$$h_1((\alpha + y)x) (\alpha + y) f_Y(y) = h_2((\beta + x)y) (\beta + x) f_X(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

A második vizsgált esetben legyenek az egyenletben szereplő c és d függvények lineárisak, azaz $c(y) = \lambda_1(\alpha + y)$, $d(x) = \lambda_2(\beta + x)$, ($x, y > 0$), ahol λ_1, λ_2 pozitív, α és β nemnegatív konstansok. Ekkor kapjuk, hogy

$$h_1 \left(\frac{x}{\lambda_1(\alpha + y)} \right) \frac{1}{\lambda_1(\alpha + y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{\lambda_2(\beta + x)} \right) \frac{1}{\lambda_2(\beta + x)} f_X(x)$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ -re, ahol $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Eredményeinket két különböző módon is megkapjuk: először megmutatjuk, hogy a folytonos megoldások akárhányszor differenciálhatóak, majd a megoldást differenciálegyenletek megoldására vezetjük vissza. A másik módszer lényege, hogy egyenleteink folytonos megoldásait ismert egyenlet(ek) folytonos megoldásai segítségével adjuk meg. Ezután vizsgáljuk a kapott speciális egyenletek sűrűségfüggvény megoldásait is.

Eztán vizsgáljuk a

$$g_1 \left[\frac{x - a(y)}{c(y)} \right] \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = g_2 \left[\frac{y - b(x)}{d(x)} \right] \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

egyenletet, ahol $a(y)$, $b(x)$ adott, $c(y)$ és $d(x)$ adott pozitív függvények. Ebben a fejezetben ezen függvények speciális $a(y) = m_1 y + c_1$, $b(x) = m_2 x + c_2$, $c(y) = \lambda_1 (y + a_1)$ és $d(x) = \lambda_2 (x + a_2)$ választásai mellett csak a g_1 , g_2 , f_Y , f_X ismeretlen pozitív függvények mérhetőségét tesszük fel, illetve azt, hogy az egyenlet majdnem minden (x, y) esetén teljesül $\mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmazán.

A harmadik fejezetben különböző egyváltozós eloszlások karakterizációja szerepel. Mindegyik esetben feltesszük, hogy a valószínűségi változók abszolút folytonosak, azaz létezik sűrűségfüggvényük, s akkor használhatjuk a valószínűségi változók jól ismert transzformációs tételét.

Először a gamma eloszlás Lukács féle jellemzése, ahol a $\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, $\psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x+y}\right)$ transzformációt használjuk, illetve egy másik jellemzés található a $\psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x+y}\right)$ transzformáció segítségével.

Megadjuk a béta eloszlás egy karakterizációját a $\psi : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)^2$, $\psi(x, y) = \left(\frac{1-y}{1-xy}, 1-xy\right)$ transzformáció segítségével.

Majd vizsgáljuk a normális eloszlás Lukács féle karakterizációját a $\psi(x, y) = (x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ transzformáció segítségével.

Végül az exponenciális eloszlás egy karakterizációját mutatjuk be.

A negyedik fejezetben feltételesen meghatározott kétdimenziós abszolút folytonos eloszlások karakterizációja szerepel. Legyen (X, Y) egy abszolút folytonos kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó. Jelölje $f_{(X,Y)}$, f_X , f_Y , $f_{X|Y}$ és $f_{Y|X}$ az együttes, a marginális és a feltételes sűrűségfüggvényeket. Ismeretes, hogy

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) = f_{Y|X}(x, y) f_X(x)$$

majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (vagy pozitív tartójú vektorváltozó esetén majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$) esetén.

Ez egy általános függvényegyenlet a sűrűségfüggvényekre, ami így nem kezelhető, de az lesz, ha a feltételes sűrűségfüggvényeket valamilyen (pl. gyakorlati vagy valószínűségelméleti szempontból érdekes) speciális alakú függvények között definiáljuk.

Ezt vizsgáljuk az eltolásparaméter jellegű feltétel esetén, amikor a feltételes sűrűségfüggvények az

$$f_{X|Y}(x, y) = g_1(x - a(y)) \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(x, y) = g_2(y - b(x))$$

alakot öltik, továbbá feltételezzük, hogy a és b lineárisak.

A skálaparaméter jellegű feltétel esetén, amikor a feltételes sűrűségfüggvények

$$f_{X|Y}(x, y) = h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right) \frac{1}{c(y)} \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(x, y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right) \frac{1}{d(x)}$$

alakúak, adott pozitív c és d függvényekkel, két speciális esetben szintén keressük az együttes sűrűségfüggvényt.

Vizsgáljuk az egyenletet az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltétel esetén is, amikor a feltételes sűrűségfüggvények

$$f_{X|Y}(x, y) = g_1\left[\frac{x - a(y)}{c(y)}\right] \frac{1}{c(y)} \quad \text{és} \quad f_{Y|X}(x, y) = g_2\left[\frac{y - b(x)}{d(x)}\right] \frac{1}{d(x)}$$

alakúak, adott a , b és adott pozitív c , d függvényekkel.

Summary

This PhD dissertation consists of four parts. In the first two sections functional equations are investigated, in the latter two we deal with characterization problems of probability theory by the help of our functional equations.

In the first section, we study functional equations connected to characterization problems of univariate distributions.

First we see the Olkin-Baker equation

$$f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right)$$

related to the characterization of gamma distribution. By the help of the continuous solutions of the everywhere satisfied equation we can give the measurable solutions of the equation satisfied for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Furthermore we work on the case when the functions $f, g, p, q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, satisfying the Olkin-Baker equation almost everywhere, are nonnegative and there exist sets of positive Lebesgue measure such that the functions are positive on these sets. First we show that these functions are positive almost everywhere, and then we can give the so-called density function solutions of the almost everywhere satisfied functional equation.

The functional equation

$$f_U(u)f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right)f_Y(1-uv)\frac{v}{1-uv}$$

is connected to the characterization of the beta distribution. First we give the general solution $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$ (without any regularity assumption) of the above equation for all $(u, v) \in (0, 1)^2$, and then we study the cases, when the unknown functions are measurable and positive, or measurable and nonnegative with Lebesgue integral 1 and the equation is satisfied for almost all $(u, v) \in (0, 1)^2$. The general solution of this equation satisfied for all $(u, v) \in (0, 1)^2$ is given as well, with nonnegative functions $f_X, f_Y, f_U, f_V : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, when there exist sets of positive Lebesgue measure, on which these functions are positive.

In this section we also give the positive, measurable and the density function solutions of the equation

$$f(x)g(y) = h(ax+by)k(cx+dy)$$

satisfied almost everywhere, where a, b, c, d are fixed non-zero reals with the property $ad - bc \neq 0$. It is connected to the characterization of the normal distribution.

We also examine the exponential Pexider equation

$$f(u+v) = g(u)h(v)$$

supposing to hold for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ with the unknown measurable functions $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, where g, h is not identically equal to 0, and the logarithmic Pexider equation

$$f(uv) = g(u) + h(v)$$

for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ with the unknown measurable functions $f, g, h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

In the second section we study functional equations connected to characterization problems of conditionally specified bivariate distributions.

We consider the functional equation

$$h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right) \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right) \frac{1}{d(x)} f_X(x),$$

where h_1, h_2, f_Y, f_X are unknown functions. With a special choice of the functions c and d , we assume only the measurability of the positive unknown functions h_1, h_2, f_Y, f_X , and that, the resulted equations are satisfied for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

First we investigate the case, when $c(y) = \frac{1}{\alpha+y}, d(x) = \frac{1}{\beta+x}$ ($x, y > 0$), where α, β are nonnegative constants. Then we get the equation

$$h_1((\alpha+y)x)(\alpha+y)f_Y(y) = h_2((\beta+x)y)(\beta+x)f_X(x)$$

for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, where $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ are measurable unknown functions and $\alpha, \beta \geq 0$ are arbitrary constants.

Then we investigate the case, when $c(y) = \lambda_1(\alpha+y), d(x) = \lambda_2(\beta+x)$, ($x, y > 0$), where λ_1, λ_2 are positive, α and β are nonnegative constants. Hence we get the equation

$$h_1\left(\frac{x}{\lambda_1(\alpha+y)}\right) \frac{1}{\lambda_1(\alpha+y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{\lambda_2(\beta+x)}\right) \frac{1}{\lambda_2(\beta+x)} f_X(x)$$

for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, where $h_1, h_2, f_X, f_Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ are measurable unknown functions and $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, \alpha, \beta \geq 0$ are arbitrary constants.

We get our results in two different ways: First we show, that the continuous solutions are differentiable infinitely many times, then we solve differential equations. On the other hand we give the continuous solutions of our equations by the help of the known continuous solutions of these equations. Then we also investigate the density function solutions of the special equations.

Then equation

$$g_1 \left[\frac{x - a(y)}{c(y)} \right] \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = g_2 \left[\frac{y - b(x)}{d(x)} \right] \frac{1}{d(x)} f_X(x)$$

is examined as well, where a , b are given, c and d are given positive functions. With the special choices $a(y) = m_1 y + c_1$, $b(x) = m_2 x + c_2$, $c(y) = \lambda_1 (y + a_1)$ and $d(x) = \lambda_2 (x + a_2)$, we assume only the measurability of the unknown positive functions g_1 , g_2 , f_Y , f_X and that the equation is satisfied for almost all (x, y) from an open subset of $\mathbb{R}^2$.

In the third section, characterizations of several univariate distributions are given. In all cases we suppose that the probability distributions are absolutely continuous, that is, there exists density function, and so we can use the well-known transformation theorem of probability theory.

First we consider the Lukács characterization of the gamma distribution, where we use the transformation $\psi : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, $\psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{y}\right)$, and an other characterization is investigated as well, by the help of the transformation $\psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{x+y}\right)$.

Then we give a characterization of the beta distribution by means of the transformation $\psi : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)^2$, $\psi(x, y) = \left(\frac{1-y}{1-xy}, 1-xy\right)$.

Later we consider the Lukács characterization of the normal distribution, where we use the transformation $\psi(x, y) = (x + y, x - y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

At the end of the third section, we show a characterization of the exponential distribution.

In the fourth section one can find some characterizations of conditionally specified absolutely continuous bivariate distributions. Let (X, Y) be an absolutely continuous bivariate random variable, whose joint, marginal and conditional density functions are denoted by $f_{(X,Y)}$, f_X , f_Y , $f_{X|Y}$ and $f_{Y|X}$ respectively. One can write $f_{(X,Y)}$ in two different ways and obtain the functional equation

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) = f_{Y|X}(x, y) f_X(x)$$

for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (respectively, for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ if we restrict our investigations to the random variable (X, Y) with support in the positive quadrant).

This is a general functional equation for the density functions, which can not be handled in this form, but we can handle it if the conditional densities are defined among important special functions.

We consider the case of linear regressions with conditionals in location families, when the conditional densities have the form

$$f_{X|Y}(x, y) = g_1(x - a(y)) \quad \text{and} \quad f_{Y|X}(x, y) = g_2(y - b(x)),$$

where a and b are linear.

The case of specified regression with conditionals in scale families is also investigated, when the conditional densities have the form

$$f_{X|Y}(x, y) = h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right) \frac{1}{c(y)} \quad \text{and} \quad f_{Y|X}(x, y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right) \frac{1}{d(x)},$$

where c and d are given positive functions.

We consider the case of conditionals in location-scale families with specified moments, when the conditional densities have the form

$$f_{X|Y}(x, y) = g_1\left[\frac{x - a(y)}{c(y)}\right] \frac{1}{c(y)} \quad \text{and} \quad f_{Y|X}(x, y) = g_2\left[\frac{y - b(x)}{d(x)}\right] \frac{1}{d(x)},$$

where a, b are given and c, d are given positive functions.

Irodalomjegyzék

- [1] Aczél, J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1961.
- [2] Aczél, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, 1966.
- [3] Aczél J. and Daróczy, Z., On measures of information and their characterizations, Academic Press, New York, 1975.
- [4] Aczél, J. and Dhombres, J., Functional Equations in Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [5] Aczél, J. and Erdős, P., *The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for non-negative numbers*, Publ. Math. Debrecen **12** (1965), 259–263.
- [6] Arnold, B. C., Castillo, E. and Sarabia, J. M., Conditionally specified distributions, Lecture Notes in Statistics 73, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Hong Kong - Budapest, 1992.
- [7] Arnold, B. C., Castillo, E. and Sarabia, J. M., Conditional Specification of Statistical Models, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [8] Azlarov, T. A. and Volodin, N. A., Characterization Problems Associated with the Exponential Distribution, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg - Tokyo, 1986.
- [9] Baker, J. A., *On the functional equation $f(x)g(y) = \prod_{i=1}^n h_i(a_i x + b_i y)$* , Aequationes Math. **11** (1974), 154–162.
- [10] Baker, J. A., *On the functional equation $f(x)g(y) = p(x+y)q\left(\frac{x}{y}\right)$* , Aequationes Math. **14** (1976), 493–506.
- [11] Castillo, E. and Ruiz-Cobo, R., Functional equations in science and engineering, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 161., Marcel Dekker, New York, 1992.
- [12] Daróczy, Z., Losonczi, L., *Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen*, Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 239–245.
- [13] De Bruijn, N. G., *On almost additive functions*, Colloq. Math. **15** (1966), 59–63.
- [14] Denny, J. L., *Sufficient conditions for a family of probabilities to be exponential*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **57** (1967), 1184–1187.
- [15] Dhombres, J. G., Ger, R., *Conditional Cauchy equations*, Glas. Mat. Ser. III **13(33)** (1978), no. 1, 39–62.
- [16] Dieudonné, J., Grundzüge der modernen Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.

-
- [17] Eichhorn, W., *Functional equations in economics*, Addison-Wesley, London, 1978.
 - [18] Erdős, P., *P 310*, Colloq. Math. 7 (1960), 311.
 - [19] Erdős, P., Oxtoby, J. C., *Partitions of the plane into sets having positive measure in every non-null measurable product set*, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), 91–102.
 - [20] Fleming, W. H., *Functions of Several Variables*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
 - [21] Ger, R., *On some functional equations with a restricted domain I.; II.*, Fund. Math. 89 (1975), 131–149.; 98 (1978), no. 3, 250–272.
 - [22] Giri, N. C., *Introduction to probability and statistics*, Marcel Dekker, New York, 1974.
 - [23] Glavosits, T. and Lajkó, K., *The general solution of a functional equation related to the characterizations of bivariate distributions*, Aequationes Math. 70 (2005), 88–100.
 - [24] Járαι, A., *On measurable solutions of functional equations*, Publ. Math. Debrecen 26 (1979), 17–35.
 - [25] Járαι, A., *Measurable solutions of functional equations satisfied almost everywhere*, Mathematica Pannonica 10/1 (1999), 103–110.
 - [26] Járαι, A., *Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables*, Springer, Adv. Math. Dordrecht, Vol. 8, 2005.
 - [27] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N., *Continuous univariate distributions*, Vol. 2, 2nd Edition., John Wiley, New York, 1994.
 - [28] Jurkat, W. B., *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 683–686.
 - [29] Kotlarski, I. I., *Una caratterizzazione della distribuzione gamma per mezzo di statistiche indipendenti*, Rendiconti di Matematica 3–4/2 (1969), 671–675.
 - [30] Kuczma, M., *Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.
 - [31] Lajkó, K., *Applications of extensions of additive functions*, Aequationes Math. 11 (1974), 68–76.
 - [32] Lajkó, K., *Differencia-tulajdonságok, függvényegyenletek és karakterizációs problémák*, Kandidátusi Értekezés Tézisei, Debrecen, 1978.
 - [33] Lajkó, K., *A characterization of generalized normal and gamma distributions*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 21. Analytic Function Methods in Prob. Theory (1979), 199–225.

- [34] Lajkó, K., *Remark to a paper by J. A. Baker*, Aequationes Math. **19** (1979), 227–231.
- [35] Lajkó, K., *On the functional equation $f(x)g(y) = h(ax + by)k(cx + dy)$* , Periodica Mathematica Hungarica, **11/3** (1980), 187–195.
- [36] Lajkó, K., *Nevezetes problémák függvényegyenletei és azok általánosításai*, Habilitációs Tézisek, Debrecen, 2000.
- [37] Lajkó, K., *Functional equations in the theory of conditionally specified distributions*, Publ. Math. Debrecen **58/1-2** (2001), 241–248.
- [38] Lajkó, K., *The general solution of a functional equation related to the characterizations of bivariate distributions*, (joint work with T. Glavosits), Report of Meeting, Aequationes Math. **69** (2005), 173.
- [39] Lajkó, K., *Remarks to a paper by S. Narumi*, (joint work with F. Mészáros), Report of Meeting, Annales Mathematicae Silesianae **19** (2005), 70–71.
- [40] Lajkó, K., *The general solution of two functional equations*, Report of Meeting, Aequationes Math., **75** (2008), 175.
- [41] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Density function solutions of a functional equation*, (presented by K. Lajkó), 47th ISFE, Gargnano, 2009.
- [42] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Applications of a generalized Steinhause-type theorem in solving functional equations*, (presented by K. Lajkó), 23rd Summer Conference on Real Functions Theory, 2009.
- [43] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Functional equations arisen from the characterization of beta distributions*, Aequationes Math., **78** (2009), 87–99.
- [44] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Some new functional equations connected with characterization problems*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, **25** (2009), 221–239.
- [45] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Functional equations stemming from probability theory*, Tatra Mountains Mat. Journal, in print.
- [46] Lajkó, K., Mészáros, F. and Pap, Gy., *Functional equations satisfied almost everywhere connected with characterization problems*, manuscript.
- [47] Lukács, E., *A characterization of the normal distribution*, Ann. Math. Statist., **13** (1942), 91–93.
- [48] Lukács, E., *A characterization of the gamma distribution*, Ann. Math. Statist., **26** (1955), 319–324.
- [49] Maksa, Gy., *Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions*, Utilitas Math. **21** (1982), 267–282.

-
- [50] Maksa, Gy. and Mészáros, F., *A characterization of the exponential distribution through functional equations*, Inequalities and Applications '07, International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland, 157 (2008), 291-298.
 - [51] Mardia, K. V., *Multivariate Pareto Distributions*, Annals of Mathematical Statistics **33** (1962), 1008–1015.
 - [52] Mészáros, F., *A functional equation arisen from the characterization of beta distributions*, Report of Meeting, Aequationes Math., **75** (2008), 174.
 - [53] Mészáros, F., *A functional equation related to characterization problems*, Mathematica Pannonica, **20/1** (2009), 129–138.
 - [54] Mészáros, F., *A functional equation and its application to the characterization of gamma distributions*, Aequationes Math., in print.
 - [55] Mészáros, F. and Lajkó, K., *Density function solutions of functional equations satisfied almost everywhere*, (presented by F. Mészáros), 47th ISFE, Gargnano, 2009.
 - [56] Mészáros, F. and Lajkó, K., *Density function solutions of a functional equation*, (presented by F. Mészáros), 13th ICFEI, Male Ciche, 2009.
 - [57] Narumi, S., *On the General Form of Bivariate Frequency Distributions which are Mathematically Possible when Regression and Variation are Subjected to Limiting Conditions I,II*, Biometrika **15** (1923), 77–88, 209–221.
 - [58] Olkin, I., *Problem (P128)*, Aequationes Math. **12** (1975), 290–292.
 - [59] Páles, Zs., *Extension theorem for functional equations with bisymmetric operations*, Aequationes Math., **63** (2002), 266–291.
 - [60] Radó, F., and Baker, J. A., *Pexider equation and aggregation of allocations*, Aequationes Math. **32** (1987), 227–239.
 - [61] Ramachandran, B. and Lau K-S., *Functional equations in probability theory*, Academic Press, New York, 1991.
 - [62] Székelyhidi, L., *The general representation of an additive function on an open point set*, (in Hungarian), Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **21** (1972), 503–509.
 - [63] Wesolowski, J., *On a functional equation related to an independence property for beta distributions*, Aequationes Math., **66** (2003), 156–163.
 - [64] Yadrenko, M. I., *Spectral Theory of Random Fields*, Optimization software, INC. Publications Division, New York, 1983.