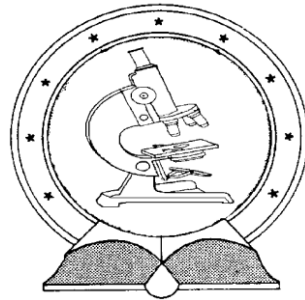


DE TTK



1949

A VALÓSZÍNŰSÉGI GONDOLKODÁS SAJÁTOSSÁGAI

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Szabóné Szitányi Judit

Témavezető: Dr. Szendrei Julianna

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola matematika didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. november 20.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Szabóné Szitányi Judit doktorjelölt 2006 – 2012 között a fent megnevezett Doktori Iskola matematika didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2012. november 20.

a témavezető aláírása

A VALÓSZÍNŰSÉGI GONDOLKODÁS SAJÁTOSSÁGAI

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében a matematika –
didaktika tudományágban

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori
iskolája (matematika didaktika programja) keretében

Írta: Szabóné Sztányi Judit

Témavezető: Dr. Szendrei Julianna

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja:

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... .

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom a munkámhoz nyújtott sok segítségért, építő beszélgetésekért és az együtt töltött tartalmas órákért témavezetőmnek, Dr. Szendrei Juliannának.

Köszönöm kollégáimnak C. Neményi Eszternek, Dancs Gábornak és Zsinkó Erzsébetnek a mérésben, tanórák tartásában és jegyzőkönyvezésében és a közös gondolkodásban nyújtott segítségüket. Ugyancsak hálás vagyok tanítványainknak a kurzusok során közösen átélt szép percekért és értékes gondolatokért.

Köszönet illeti az ELTE Gyakorló Általános Iskola és Középiskola, a Lauder Javne Általános Iskola és a Felsőtárkányi ÁMK Általános Iskola tanító kollégáit és diákjait: Czékmányné Farkas Erikát, Csahóczi Erzsébetet, Konrád Ágnes, Kókúti Ágnes és tanítványaikat.

Köszönöm Dr. Vásárhelyi Évának és az ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központ munkatársainak és hallgatóinak a mérés szervezésében és lebonyolításában nyújtott segítségüket. Köszönet illeti Bakosné Sági Gabriellát és a Bajza Utcai Általános Iskola tanárait és diákjait a mérésben nyújtott segítségért.

Hálás vagyok Schőnek Anna hallgatónak az adatok rögzítésében nyújtott segítségéért, valamint Ketskemény Lászlónak az adatok statisztikai értelmezésében nyújtott segítségéért.

Köszönet illeti családtagjaimat, akik szeretettel támogattak és türelemmel kivárták, hogy elkészüljön a dolgozat.

TARTALOM

1.	BEVEZETÉS	1
1.1.	A témaválasztás indoklása	1
1.2.	Kutatási célok	3
1.3.	Kutatási kérdések	3
1.4.	Kutatási módszerek	3
1.5.	Hipotézisek	3
2.	ELMÉLETI HÁTTÉR	5
2.1.	Tanuláspszichológiai háttér	5
2.2.	Didaktikai alapok	13
2.3.	A valószínűség fogalmának értelmezése	21
2.4.	Az axiomatikus és a statisztikai felépítés a közoktatásban	23
2.5.	A valószínűségszámítás magyarországi tanításának rövid történeti áttekintése	25
3.	DOKUMENTUMELEMZÉS	29
3.1.	A Nemzeti Alaptanterv	29
3.2.	Tantervek vizsgálata	30
3.3.	A tankönyvek vizsgálata	34
3.4.	A dokumentumelemzés összegzése	41
4.	A VIZSGÁLAT BEMUTATÁSA	43
4.1.	A vizsgálat előzményei	43
4.2.	A saját vizsgálat	45
4.3.	A vizsgálati módszerek részletes bemutatása	46
4.4.	A vizsgálat részletes elemzése	49
4.5.	A vizsgálat összegzése	103
5.	ÖSSZEFOGLALÁS	104
6.	SUMMARY	107
	IRODALOM	110
	MELLÉKLETEK	113

1. BEVEZETÉS

1.1. A témaválasztás indoklása

Tanítványaim gyakran teszik fel azt a kérdést, hogy mi a gyakorlati haszna annak, amit a matematika órán tanulnak. A valószínűesszámitás éppen egy olyan területe a matematikának, amelynek gyakorlati haszna a kézenfekvő, hiszen valószínűséggel kapcsolatos döntéseket hozni – sokszor észrevétlenül is – átszövi hétköznapijainkat. Sőt, a nem determinisztikus eseményekkel kapcsolatos döntések előkészítése a természettudomány, a társadalomtudomány területein is jelentős súlyt kap. Úgy érzem azonban, hogy ez a fajta tudás nehezebben közvetíthető, mint a matematika egyéb területeinek feldolgozása.

Korábban általános és középiskolai tanárként, a pedagógiai és didaktikai célokon túl, mindig törekedtem arra, hogy tanítványaimnak megmutassam a matematika szépségeit, megszerettessem az ezzel való foglalatosságot. A valószínűség témája jónak tűnt e célok megvalósításához, hiszen a valószínűségi játékok, kísérletek és egyéb tevékenységek alkalmasak arra, hogy az érdeklődést felkeltsék. Emellett úgy tűnt, jól elő is készítik a terepet a valószínűesszámitás tanításához. Azt tapasztaltam viszont, hogy tanítványaim számára a téma feldolgozása ellentmondásos érzelmeket vált ki. Az előkészítő szakaszban többnyire valóban örömteli foglalatosság a sok, játékkal fűszerezett tevékenység. Egy bizonyos idő eltelte után azonban, amikor a feladatmegoldást kezdem forszírozni, az egész nehezen emészthetővé, csaknem érthetlenné válik, már egyáltalán nem örömteli dolog. A feladatmegoldásokat sokan kudarcként élik meg, amivel természetesen a téma iránti érdeklődésük is sokat romlik. Kezdtől erősödni bennem az a sejtés, hogy a valószínűség fogalmának bevezetésekor végzett tevékenységek nem pontosan azt és úgy készítik elő, mint amire a későbbiekben a valószínűség elméleti modellekkel történő kiszámításának időszakában támaszkodhatnánk.

Azt is éreztem, hogy az elméleti számítások gyakran élesen elválnak a kísérletek során szerzett tapasztalatoktól. Amíg a tanítás során a szemléletfejlesztésen van a hangsúly, addig a tanulók szívesen foglalkoznak a témakörrel. Az egyes problémákhoz illő elméleti modellek megtalálása és segítségükkel a keresett valószínűségek kiszámítása viszont már sok diákomnak nehézséget jelent. Az is sejthetővé vált, hogy a valószínűségi problémák megoldása során sokkal nagyobb szerepet kapnak a szubjektív elemek, mint a matematika egyéb területein.

Most az ELTE Tanító és Óvóképző Karán tanítok matematikát. Hallgatóim az általános iskola első négy évfolyamán fognak tanítani, a matematika műveltségi területen tanulók pedig az első hat évfolyam matematika tanítására kapnak képzést. Amikor elkezdtem a közös munkát velük, abból indultam ki, hogy érettségizett hallgatókról lévén szó, a valószínűség témaköréhez tartozó alapvető fogalmakat értik, némi jártasságot szereztek a feladatmegoldásokban is. Hamar tapasztaltam azonban, hogy a valószínűséghez kapcsolódó fogalmaik hiányosak vagy tévesek. A feladatmegoldások nehézséget jelentenek számukra egyrészt a bizonytalan

fogalmak miatt, másrészt azért, mert nincs megfelelő gyakorlatuk abban, hogy a problémához illeszkedő modellt megkeressék.

A tanítóképzés célja kettős: egyrészt a hallgatók matematikai kompetenciájának erősítése, másrészt felkészítésük a tanítói szerepkörre. Hallgatóim pedagógiai pályára való felkészítése miatt fontos számomra az, hogy a szemléletfejlesztés és a konkrét valószínűségek kiszámítását szorgalmazó tanítási fázis között tapasztalt szakadék okait megértsem, a valószínűségi gondolkodás sajátosságainak feltérképezése.

Hogyan alkotunk valószínűségi döntést? Amikor egy eseményhez tartozó valószínűséget próbálunk megadni, akkor az többféleképpen történhet:

- Intuitív módon, érzéseinkre hagyatkozva.
- A valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítésével.
- A valószínűség elméleti modell segítségével történő kiszámításával.

Hogy mikor melyik eljárást alkalmazzuk, az függ a szituációtól, a kérdésfeltevéstől, a válaszadásra szánt időtől, a meglévő matematikai tudástól és egyéb tényezők függvénye is lehet. A hétköznapi tapasztalatok és az iskolai tanulás hatására a valószínűség fogalma e három megközelítés mindegyike során formálódik.

A dolgozat e háromféle megközelítés előfordulását, kapcsolataikat kívánja vizsgálni.

1.2. Kutatási célok

A kutatás alapvetően azt vizsgálja, hogy a közoktatásban alkalmazott gyakorlat milyen minőségben segíti a valószínűség fogalmának előkészítését és kialakítását. Ennek érdekében a vizsgálódás a következő célokat tűzte ki:

- Feltárni a valószínűség különböző értelmezéseinek sajátos elemeit és ezek eltérését;
- Vizsgálni a valószínűségfogalom fejlődési fázisait;
- Vizsgálni a jelenlegi közoktatási gyakorlat szokásait a valószínűségszámítás tanítása során;
- Képet kapni a valószínűségszámítás tanulásának a valószínűségfogalom értelmezésére gyakorolt hatásáról;
- Bemutatni, hogy a valószínűség fogalma a hétköznapi tapasztalatból eredeztethető és a matematika más területeivel összekapcsolható.

1.3. Kutatási kérdések

1. Tapasztalhatók-e eltérések a különböző matematikai előképzettséggel rendelkező csoportok valószínűségi ítéletalkotásában?
2. Aktivizálódnak-e a valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek valószínűségi ítéletalkotás során?
3. Hat-e a valószínűséggel kapcsolatos elsődleges megérzés matematikai problémamegoldás közben?
4. Hol a helye ennek a témakörnek a magyar matematikatanítási gyakorlatban?

1.4. Kutatási módszerek

A kutatási célok elérése érdekében a következő módszereket alkalmaztuk:

- Tanulmányoztuk a valószínűségi gondolkodást érintő pszichológiai és didaktikai elméleteket.
- Áttekintettük és elemeztük a jelenleg érvényben lévő hazai tanterveknek, tankönyveknek, és szakmódszertani anyagoknak a valószínűségszámítás tanítására vonatkozó álláspontját és szemléletét.
- Kérdőíves kikérdezéssel összehasonlító vizsgálatot végeztünk három különböző matematikai előképzettséggel rendelkező csoportban.
- Tanítási órákon megfigyeltük az alkalmazott gondolkodási stratégiák módosulását a valószínűségszámítás tanulásának hatására.

1.5. Hipotézisek

1. A magasabb matematikai előképzettségű csoportok átlagosan jobban teljesítenek a valószínűségi problémák megoldása során.
2. A valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek a valószínűségi ítéletalkotás során nehezen aktivizálódnak. A valószínűség fogalmánk különböző értelmezései között fellelhető eltérések az ítéletalkotást nagymértékben befolyásolják.
3. Egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is.

4. a) A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik. A valószínűség kiszámításának időszakában végzett feladatok a valószínűség kombinatorikus módon való számítását erősítik.
- b) A valószínűség témaköre a matematika más témaköreivel összekapcsolható.

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az első rész a kutatás elméleti háttérét mutatja be a vonatkozó szakirodalom alapján. A tanuláspszichológiai és a matematika-didaktikai kutatások ismertetése a valószínűségfogalom értelmezésére és fejlesztési folyamatára fókuszál. A matematikai áttekintés a valószínűségszámítás axiomatikus illetve statisztikai megközelítését mutatja be röviden a közoktatásban tárgyalt fogalomkörben. A fejezetet a valószínűségszámítás tanításának rövid történeti bemutatásával zárjuk. A harmadik fejezet a valószínűségszámítás témakörének jelenlegi magyarországi helyzetét mutatja be a tantervek és a tankönyvek tükrében. A negyedik fejezet a kutatás során alkalmazott mérés és megfigyelés részletes bemutatását, elemzését és eredményeit tartalmazza. Az ötödik fejezetben az eredmények összefoglalása történik összevetve a kiindulási hipotézisekkel.

2. ELMÉLETI HÁTTÉR

2.1. Tanuláspszichológiai háttér

2.1.1. A fogalomalkotás folyamata

Kutatásunk a matematikai fogalomalkotással kapcsolatban Skemp¹ elméletét fogadja el. A matematikai fogalomalkotás Skemp elméletében az absztrahálás folyamatát, a gondolati absztrakciót jelenti. A fogalomalkotás kiinduló pontja az azonos tulajdonságokkal rendelkező dolgok osztályba sorolása. Az osztályozás folyamatának nem szükséges feltétele a nyelv használata, de a nyelv segítségével mélyíthető a fogalomalkotás.

Kiemelt jelentősége van az elsődleges fogalmaknak, melyeket közvetlenül az érzékszervi tapasztalatok segítségével nyerünk. Az elsődleges fogalmak osztályai elemei lehetnek újabb osztálynak, melyből másodlagos fogalom származik, és így tovább. Ebből következően fogalmaink hierarchiába szervezettek, ahol A fogalom magasabb rendű, mint B fogalom, amennyiben a B az A fogalom egy példája. Például a „zöld” elsődleges fogalom, amely példák és ellenpéldák segítségével alakul ki. A „szín” fogalma másodlagos, melynek egyik példája a zöld. (Skemp, 1975)

Maga az osztályozás folyamata alapvetően kétféle módon történhet:

- Példák, és ellenpéldák segítségével. Az elsődleges fogalmak esetében csak ezen a módon közvetíthetők.
- Az osztály tulajdonságának megadásával, azaz definícióval. Skemp hangsúlyozza, hogy annál magasabb rendű fogalmat, mint amilyennel az egyén rendelkezik, nem közvetíthetünk definíció segítségével. A definíció viszont segít a már kialakult fogalom határainak pontosításában.

A példák között különösen fontos megjegyezni a fogalom úgynevezett „generikus példáját” ami reprezentálja egy egész fogalmi osztály kapcsolódó szituációit és könnyedén segít adaptálni ezt egy új szituációba. (Fischbein, 1975. 110.o)

Egy fogalom terjedelmének (extenciójának) nevezzük azon dolgok összességét, melyek a fogalom alá tartoznak. Egy hétköznapi fogalom tartalma sok esetben elmosódott határral rendelkezik, azaz nem minden objektumról dönthető el egyértelműen, hogy beletartozik a fogalom osztályába vagy sem, míg a matematikai fogalmak többsége határozott határral rendelkezik. Egy fogalom tartalmának (intenciójának) nevezzük a fogalmat alkotó részfogalmak (ismérvek összességét). A fogalom tartalma és terjedelme fordított kapcsolatban állnak egymással, azaz minél nagyobb a terjedelme (minél több elem tartozik alá), annál kevesebb ismervre van szükség a meghatározásához.

A valószínűségfogalom nem tartozik az elsődleges fogalmak közé.

¹ R. R. Skemp (1919 – 1995) matematikus és pszichológus szakember. Ő volt az első, aki a matematikai megértés és fogalomalkotás természetét alapos vizsgálat tárgyává tette. (<http://www.skemp.org.uk/> 2012. 11.03.)

2.1.2. A matematikai fogalomalkotás

A fogalmak a fejlődés során egyre bonyolultabb rendszerbe szerveződnek. Két fogalom viszonya lehet alá és fölérendelt, mellérendelt, esetleg egymást átfedő, vagy az is fontos ismerv, ha nem állnak relációban. Az ilyen módon kialakult szellemi struktúrát Skemp szkémának nevezi. A szkémának két fontos szerepe van:

- Integrálja a már meglévő tudást
- Szellemi eszköz az új tudás elsajátításához

Egy új fogalom asszimilációja Skemp értelmezésében a fogalom beágyazását jelenti a már meglévő szkémába. Az új fogalom kialakulása során azt sok szállal kapcsoljuk meglévő szellemi struktúráinkba. A megértés éppen a fogalom elhelyezését jelenti a struktúrában, ezért a szkémák kidolgozása az értő tanulás feltétele.

Előfordul, hogy az új fogalom megszületése a meglévő szellemi struktúra átrendezését igényli. Ezt a jelenséget Skemp akkomodációnak nevezi. „Egy állandó, növekvő szkéma helyett, melynek segítségével az egyén megszervezi múltbeli tapasztalatait és asszimilálja az új adatokat, a szkémának akkomodálódni kell az új helyzethez.” (Skemp, 1975, 55.o) Ugyanakkor azt is megjegyzi, hogy az akkomodáció nehéz folyamat, hiszen a „szkémákban igen erős az önfenntartási tendencia”.

A fogalmak nem mindegyike olyan, hogy tárgyakkal vagy meglévő fogalmakkal maradéktalanul reprezentálható. Vannak olyan fogalmak is, melyek egyszerre jelentenek objektumot és eljárást is. (Például a $\frac{3}{5}$ szám, de egyúttal a 3 : 5 osztási folyamat eredménye is.) Az ilyen jellegű fogalmakat Gray és Tall² – terminológiája alapján proceptnek nevezzük. (Gray – Tall, 1994) A procept szó két angol szó összetételéből született: a process (eljárás) és a concept (fogalom) összegyúrásával. Egy elemi procept három összetevőből áll: Egy eljárásból (process), egy objektumból és egy szimbólumból. Gray és Tall elsősorban az algebrai műveletek megérésének vizsgálatához alkotta meg a procept fogalmát. Azóta kiderült, hogy a matematikai fogalmak jelentős része procept, például az analízis, geometria területén. (Ambrus, 1995)

Megjegyzés:

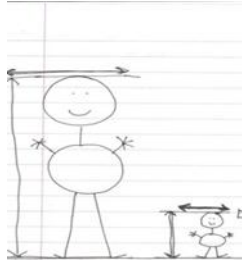
A fogalmak – különösképpen a valószínűség témaköréhez tartozó fogalmak – kiépítésének nehézségére oktató munkám során nekem is volt módom tapasztalatokat szerezni. Szeretnék erre egy illusztrációt bemutatni.

Főiskolai hallgatóim tantárgypedagógia tanulmányait a matematikai fogalomalkotás körüljárásával kezdjük. Ilyenkor mindig egy rajzos játékkal indulunk. A játék szabálya, hogy a véletlenszerűen húzott fogalmat egy hallgatónak le kell rajzolni, a csoport többi tagjának pedig ki kell találni. Tilos beszélni, mutogatni, betűket, számokat vagy matematikai szimbólumokat használni.

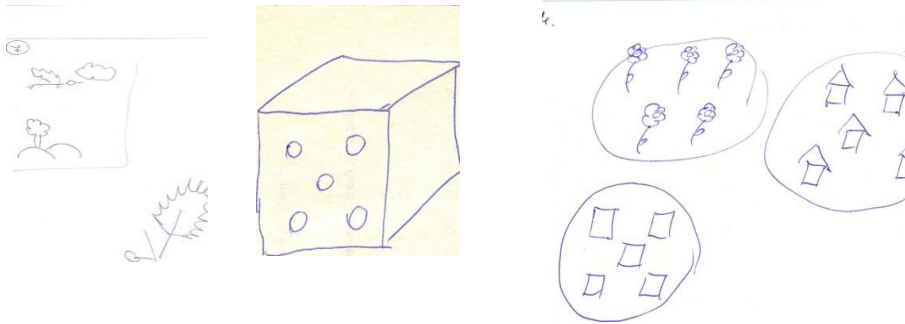
² David Orme Tall (1941 -) a matematikai gondolkodással foglalkozó elméleti tudós.
<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/procepts.html> (2012.11.12.)

Példák:

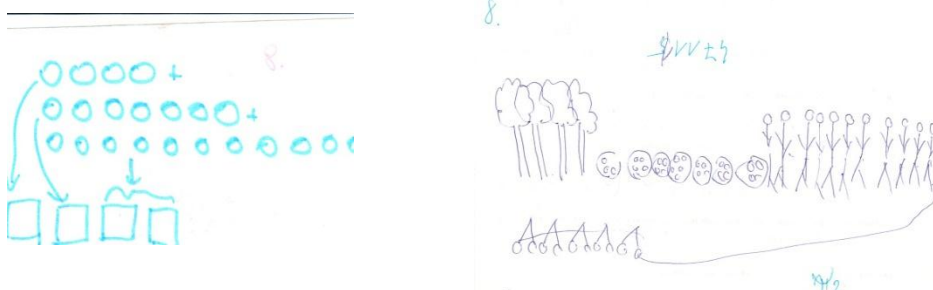
- a) Viszonylag egyszerűen, rövid idő alatt sikerül kitalálniuk olyan fogalmakat, melyekhez a példa vagy példák mellé sikerül jó ellenpéldát találni. Ilyen a „nagy” fogalma. A rajzolók általában választanak egy alakzatot, majd lerajzolják kicsiben és nagyban.



- b) Szintén nem okoz nehézséget az olyan fogalmak kitalálása, melyhez sikerül olyan példát mutatni, amiből könnyen asszociálnak. Ilyen például a „zöld” fogalma, melyet kivétel nélkül növények rajzolásával mutatnak be. Ide sorolom még az „öt” fogalmát, melynél sok esetben látható az öt klasszikus dominó-elrendezése. Megjegyzendő, hogy mindkét fogalom elsődleges, tehát a példák alkalmazása jó stratégia.



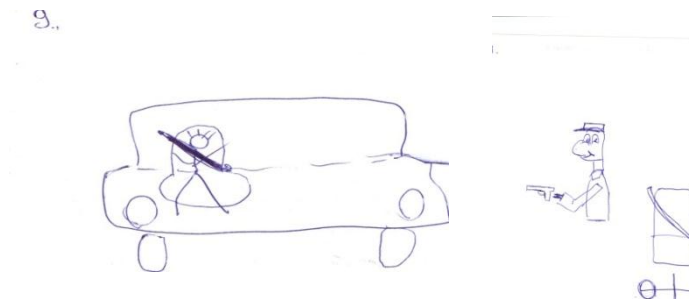
- c) Kicsivel több időt vesz igénybe például a „4711” fogalmának bemutatása, de előbb-utóbb mindenütt megszületik a helyiérték-rendszer. (Vagy legalábbis egy majdnem helyiérték-rendszer)



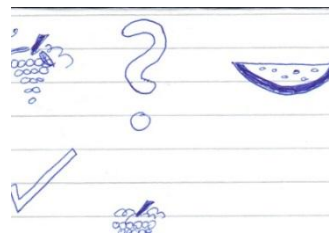
- d) Jóval nehezebben megy például az „összeadás” fogalmának megfejtése, hiszen ebben az esetben egy tevékenységet kell lerajzolniuk. A megoldások itt általában nagyon különbözőek, egyediek. (Bár a szimbólum használata nem engedélyezett, a játék hevében erről sokszor megfeledkeznek.) Úgy tűnik, az

összeadás fogalma nagyon szorosan kapcsolódik az öt kifejező szimbólumhoz. Mivel a játék résztvevői leendő tanítók, ezért számukra fontos ennek a fogalomnak is az újraépítése.

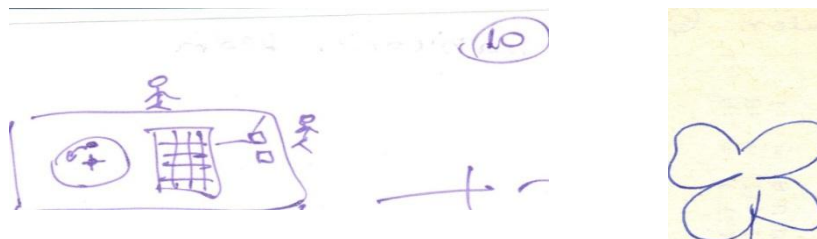
- e) A legnagyobb problémát a valószínűség témaköréhez tartozó fogalmak okozzák. A „biztos” fogalmát a legtöbben úgy próbálják megközelíteni, hogy egyszerűen lerajzolnak egy rendőrt, egy autóban ülő embert biztonsági övvel, vagy egy biztosítótűt. A nyelvben fellelhető hasonlósággal vagy egyezőséggel próbálnak operálni.



Csak kevesen próbálkoznak azzal, hogy egy biztos eseményt lerajzoljanak. Ebben a megjelenítésben általában a csoport többi tagja nem is tudja megfejteni a rajzot. (Az ábrán látható rajzban a rajzoló azt akarja kifejezni, hogy a szóltó *biztosan* nem dinnye.)



Az „esély”, „valószínűség” fogalmainak rajzolását nagyon sokan feladják. A fogalomhoz nem sikerül sem példát, sem ellenpéldát, sem nyelvi egyezést találni, amit képileg meg tud jeleníteni.



A rajzoló játék számomra évről évre megmutatja, hogy a valószínűséggel kapcsolatos legegyszerűbb fogalmak is nehezek. Kipróbáltam a biztos, lehetetlen, esély, valószínű, szerencse szavakra. Ezek egyike sem tartozik az elsődleges fogalmak közé.

2.1.3. A nyelv szerepe a fogalomalkotásban

Vigotszkij³ értelmezésében a nyelv teszi lehetővé a gondolkodás számára, hogy az egyéni és társas is legyen. A nyelven keresztül képes az egyén gondolatait kommunikálni, ugyanakkor a nyelv teszi lehetővé, hogy a társas valóság az egyén saját gondolatává váljon. A gondolkodási folyamatok részben a szó jelentése, részben a beszéd kulturális szokásai alapján formálódnak.

A pszichológia egyik érdekes kérdése, hogy a nyelv velünk született-e vagy tanulás útján sajátítjuk el. Steven Pinkler⁴ a „Nyelvi ösztön” című könyvében a nyelvet alapvető pszichológiai képességként, egyfajta ösztönként értelmezi.

Piaget⁵ fejlődéslélektani munkájában azt állítja, hogy a fogalomhoz tartozó képzet (concept image) és a fogalom nyelvi fejlődése párhuzamosan megy végbe. Vigotszkij „Gondolkodás és beszéd” című könyvében leszögezi, hogy a gondolkodás és a beszéd egymás közti viszonya nem állandó, a fogalom fejlődése közben minőségi és mennyiségi változások történnek. A két álláspont abban tér el egymástól, hogy Vigotszkij feltevése szerint a nyelv és a gondolkodás egymástól függetlenül fejlődik, míg fejlődik a köztük lévő kapcsolat is. Arra alapozza ezt, hogy szerinte a nyelv fejlődésének és a gondolat fejlődésének más gyökerei vannak. Nézetei szerint a gondolkodás és a beszéd más úton fejlődött ki. A nyelv és a beszéd fejlődése viszont egy bizonyos ponton találkozott és együtt fejlődött tovább.

2.1.4. Hétköznapi és tudományos fogalmak fejlődése

Vigotszkij munkájában éles különbséget tesz tudományos és hétköznapi fogalmak között. A hétköznapi fogalmak legfontosabb jellemzője, hogy nem az iskolai tanulás hatására alakulnak ki, hanem gyakorlati tevékenységgel szorosan összekapcsolva. A tudományos fogalmak épülése során az iskoláé a vezető szerep, de „... a tudományos fogalmakat a gyermek nem sajátítja el és tanulja meg, nem az emlékezet raktározza el, hanem a gyerek saját gondolkodása egész aktivitásának legnagyobb erőfeszítése segítségével keletkeznek és alakulnak ki.” (Vigotszkij, 1966, 220.o)

Ugyanakkor a hétköznapi fogalmak képezik az alapot, amire a tudományos fogalmak lépésenként épülnek fel. A spontán és tudományos fogalmakat elválasztó határ nagymértékben változó, mely függ a fogalmat használó egyéntől és a fogalom jellegétől. A két fogalomtípus fejlődése Vigotszkij elméletében egymással kölcsönösen összefüggő folyamat.

A tudományos fogalmak fejlődése más úton halad, mint a hétköznapi fogalmak fejlődése. A gyermek hétköznapi fogalma alulról felfelé, az elemibb és alacsonyabb sajátosságoktól a magasabbak felé haladva fejlődik, a tudományos

³ Lev Szenjonovics Vigotszkij (1896-1934) orosz-szovjet pszichológus, munkásságának középpontjában a gondolkodás és a beszéd kapcsolata áll

⁴ Steven Arthur Pinker (1954 -) kanadai pszichológus. Fő kutatási területe a pszicholingvisztika és a tudat.

⁵ Jean Piaget (1896-1980) svájci pszichológus és ismeretelmélet-teoretikus. Fejlődés-lélektani elmélete a kora huszadik századi pszichológia és annak alkalmazásai egyik meghatározó elmélete. (http://hu.wikipedia.org/wiki/Jean_Piaget)

fogalmak pedig felülről lefelé, a bonyolultabb és magasabb rendű sajátosságoktól az elemibb és alacsonyabb sajátosságok felé haladva. Bizonyította, hogy a tudományos fogalom fejlődésének üteme gyorsabb, mint a hétköznapi fogalmaké. „A tudományos fogalom képzése nem zárul le, hanem csak elkezdődik abban a pillanatban, amikor a gyermek először sajátítja el a számára új jelentést.” (Vigotszkij, 1966, 223. o) A jó szituációhoz kötődő nyelvhasználat segíti a fogalom épülését.

A hétköznapi fogalmak a köznyelvi szóhasználatban jelennek meg. Különbség érzékelhető a valószínűséggel kapcsolatos fogalmak hétköznapi és tudományos értelmezése között. A valószínűség matematikai fogalmának alakításakor olyan tudományos fogalommal állunk szemben, melyet a köznyelvi használat sok esetben módosított tartalommal ruház fel.

A valószínűséggel kapcsolatos fogalmakat hétköznapi szituációkban sokszor azért használják tévesen, mert egy szimplifikált elmélet áll mögötte. Például, ha valaki azt állítja, hogy bármely esemény bekövetkezésének valószínűsége $1/2$, mert két eset van: bekövetkezik vagy sem. (Pl. Ez a fajta hiedelem egy rosszul felállított elméleti modelltől következik.) Előfordul, hogy valaki azt állítja, hogy az a szám, amit régen húztak ki a lottón, legközelebb nagyobb valószínűséggel szerepel a kihúzott számok között. (Ez a fajta tévedés a nagy számok törvényének félreértésén alapul.)

A fent leírtak miatt az az álláspontunk, hogy az oktatásban a valószínűség hétköznapi fogalma nem lehet megfelelő kiindulópont a valószínűségszámítás tanításában.

2.1.5. Az intuíció szerepe a fogalomalkotásban

Számos kutató kísérelte meg az intuíció fogalmát definiálni. Az intuíció felfogása filozófiai és pszichológiai probléma. Henri Bergson filozófus szerint az élet csak egy magasabb rendű képességgel, az intuícióval fogható fel. Bergson az intuíciót az „ösztön megnyújtásaként” értelmezi.

Bruner⁶ szerint az intuíció olyan intellektuális technika, melynek segítségével valószínű eredményhez jutunk anélkül, hogy a következtetési láncon végigmentünk volna. (Ambrus, 1975. 36.o)

Fischbein kapcsolódva Bruner felfogásához, az intuíciót azonnali tudásként értelmezi. „The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children” című könyvében határozottan leszögezi, hogy nem akar az intuíció filozófiai és pszichológiai vonatkozásaival foglalkozni, hanem a tanuláselméletre fókuszál. Könyvének későbbi fejezetében viszont arról ír, hogy nem lehet teljesen elszakadni a pszichológiai tényezőktől, hiszen az egyén habitusa is befolyásolja az intuíciókat. Az intuíción alapuló tudás eltér a megértő tudástól. Az intuíció többféleképpen befolyásolja a tudást. Fischbein erre három matematikai szituációt mutat be példaképpen:

⁶ Jerome Bruner (1915 -) amerikai pszichológus, a kognitív pszichológia jelentős alakja. Érdeklődésének középpontjában a megismerés folyamata áll.

- Az új információ kompatibilis az intuícióval: Például az, hogy „két pont között a legrövidebb út az egyenes.” Ez teljes mértékig megfelel az ezzel kapcsolatos érzésnek.
- Az intuíció és az új információ ellentétes, tehát ellentmondás van az első megérzés és az igazság között: Például az a tény, hogy ugyanannyi racionális szám van, mint amennyi természetes szám meglepő, az első megérzés nem ezt sugallja.
- Az elsődleges intuíció hiánya nem befolyásolja az új információ tanulását. Például nemigen van előzetes elképzelés arról, hogy a háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.

Az intuíciónak két fajtáját különíti el, elsődleges és másodlagos intuíciót.

- Az elsődleges intuíció kifejezést arra a tudásra használja, ami megelőzi a szisztematikus tanulást és független attól.
- A másodlagos intuíció az a tudás, amely a tudományos tanulás során szisztematikusan épül. Ez még nem automatizált, a hiedelmek és a megállapodások befolyásolják.

Nagyon nehéz a kétfajta intuíció között különbséget tenni. Fischbein és munkatársai hosszú időt szenteltek arra, hogy kétfajta intuíció közötti eltéréseket tanulmányozzák. Azt a hipotézist kívánták bizonyítani, hogy létezik egy természetes, vagy elsődleges intuíció az esélyről és a valószínűségről. Ezt az álláspontot Fischbeint megelőzően mások erősen vitatták. A. Engel matematikus például a következőképpen fogalmaz: „Vannak természetes geometriai intuíciók, de nincsenek valószínűségi intuíciók.” (Greer, 2001)

Egy Fischbein, Pampu és Minzat által hitelesített bukaresti oktatási kísérlet (Fischbein et al, 1970) egyik legfontosabb eredménye az volt, hogy bebizonyította, hogy a másodlagos intuíciók létrehozhatók tanári instrukciók által.

A valószínűségszámítással kapcsolatban azt a következtetést vonja le, hogy az elsődleges intuíciók felépítésének lehetősége, és a másodlagos intuíciókat létrehozásának szükségessége hosszú tevékenységet és elmélkedést igényel. Ugyanígy vélekedik Hans Freudenthal is (Freudenthal, 1991, p. 53.), aki a valószínűség témakört hosszú tanulási folyamatú témakörök közé sorolja be.

2.1.6. Reprezentációk szerepe a fogalomalkotásban

A tanítás során különös gondot fordítunk arra, hogy a fogalmakat szemléltessük, reprezentáljuk. A szemléltetés mellett érdemes nagy hangsúlyt helyezni a szemléletes fogalomalkotásra. Ennek tükrében beszélhetünk külső és belső reprezentációról. A külső reprezentációk közvetlenül megfigyelhetők, míg a belsők nem, így azok minőségére csak a külső reprezentációkból következtethetünk. (Vásárhelyi, 2007)

Az egyén a fogalmakat különbözőképpen tárolja. Bruner reprezentációs elmélete szerint a tudásnak három különböző reprezentációs módja létezik:

- **Materiális (enaktív sík):** Konkrét tárgyi tevékenységek, cselekedetek révén megy végbe az ismeretszerzés.
- **Ikonikus sík:** Az ismeretszerzés szemléletes képek segítségével történik.

- Szimbolikus sík: Az ismeretszerzés szimbólumok, illetve a nyelv segítségével történik, ahol a szimbólum és a tartalom elválík.

Az aktuális reprezentációs sík kiválasztása a tanítás és a problémamegoldás sarkalatos kérdése. Egy reprezentációs síkról egy másikra áttérni tudás fejleszti a problémamegoldást. Bruner álláspontja szerint a matematika tanításának olyan alapelvekre kell épülnie, ami feltárja a valóság és a matematika kapcsolatát.

Más kutatók tovább finomítják Bruner felosztását, abból kiindulva, hogy a nyelvi szimbolika eltér a matematikában alkalmazott szimbólumok rendszerétől. Paivio duál kód elmélete szerint a megismerés verbális és vizuális síkja külön utakon járnak. Ennek oka a két agyfélteke működése közötti különbséggel magyarázható. A képi feldolgozás a jobb oldali agyféltekében, míg a verbális feldolgozás a bal oldali agyféltekében történik. Az egymástól eltérő képi és verbális fogalomképzetek fogalomalakítás folyamata során potenciális konfliktusfaktort jelentenek.

Ilyen konfliktusok keletkezhetnek a valószínűséggel kapcsolatos fogalmak alakulásakor is.

2.1.7. Az analógiák szerepe

Kutatások során igazolódott az a hipotézis, hogy az analógiás gondolkodás fontos szerepet játszik a tudás elsajátításában. Az analógiákat általában az induktív gondolkodás fejlesztési eszközeiként tartják számon. Mindenekelőtt a tanulók különböző tudáselemeinek összekapcsolásában, eltérő forrásokból származó tapasztalataik egységes értelmezésében van nagy szerepük. (Nagy Lászlóné, 2000)

„Analógia útján tanulni azt jelenti, hogy egy új szituációban egy ismert, sikeresen megoldott rokon szituációt próbálunk felidézni, hogy az eredményes megoldási stratégiát rekonstruáljuk, és a jelen helyzetre alkalmazzuk.” (Vásárhelyi, 2007)

Az analógiás gondolkodás fejlesztése kiemelt területe a matematika tanításának. Tanári tapasztalataink mutatják, és sok szakcikkekben olvashatunk azonban arról is, hogy vannak olyan esetek, amikor ezek az analógiák hamisak, a hasonlóságok alapján történő túl gyors és néha meggondolatlan általánosítás hibás megoldásokhoz vezethet. A valószínűség témaköre is rengeteg olyan csapdát rejt, melyben látszólag csupán analógiák alapján kell okoskodni. A véletlen matematikájában előforduló fallaciák és paradoxonok többsége ilyen. A valószínűség témakörében igen nehéz észrevenni, ha egy probléma rokonságban áll egy már megoldottal, esetleg más köntösbe bújtatva, így sokszor ütközünk nehézségbe azokban az esetekben, amikor viszont tudatosan szeretnénk analógiát építeni egyes feladatok között.

2.2. Didaktikai alapok

2.2.1. Fischbein kutatási eredményei a valószínűségi szemlélet alapozásáról

A valószínűségi gondolkodás fejlődésével és fejlesztésével számos matematika didaktikával foglalkozó kutató foglalkozott. A legjelentősebbeket említve a teljesség igénye nélkül: Batanero, Benz, Henry, Borovcnik, Brousseau, Engel, Hawkins, Kapadia, Nemetz, Parzys, Shaughnessy, Warfield, Varga. A közös vonás az, hogy Piaget és Inhelder valamint Fischbein munkásságát közvetlenül fontos forrásként jelölik. Fischbein munkásságának jelentős részében célzottan a valószínűségi gondolkodást próbálta feltérképezni.

Ebben a témában Fischbein legfontosabb publikációja az 1975-ös „The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children” című könyv, melyben összefoglalja mások és saját évtizedes kutatásainak eredményét. Ezen eredmények a későbbi kutatásokhoz útmutatást adtak, megállapításai helytállónak bizonyultak. Joggal tekinthető Fischbein munkássága e témában alapvetőnek.

Érdeklődésének középpontjában az emberi gondolkodás tanulmányozása és elemzése, különösen a gyermeki valószínűségi gondolkodás fejlődésének vizsgálata állt. A valószínűségi gondolkodásról alkotott teóriájának középpontjában pedig az intuíció és a logikai gondolkodás kölcsönhatása áll a tanulás során.

A következő kérdésekkel igen részletesen foglalkozott:

- a) Mi az intuíció szerepe a matematikai és a tudományos gondolkodásban?
- b) Hogyan fejlődik a gyermek valószínűségi gondolkodása?
- c) Hogyan hat az oktatás erre a fejlődésre? Mit tehetünk a valószínűség iskolai tanításának jobbításáért?

Ezek a kérdések jelen dolgozat szempontjából is igen fontosak.

Fischbein kutatásainak kiindulópontja Piaget és Inhelder 1975-ben publikált elmélete volt. A két szóban forgó elmélet nagyos sok pontban egyezik. Mindkettő hangsúlyozza a valószínűségi fogalmak fejlődésének komplexitását és szoros kapcsolatát a gyakorlattal. Piaget és Inhelder fejlődési szakaszokat határoz meg a valószínűségi gondolkodás során, ami illeszkedik az általános fejlődéslélektani munkájukhoz. Elméletük szerint az esély felfedezése a formális műveletek szakaszáig, körülbelül 7 éves korig nem alakulhat ki. (Piaget – Inhelder, 1975). Abból indulnak ki, hogy az esélyt logikai műveletként értelmezik, mert a legtöbb véletlenszerűnek mondott eseménynek van magyarázata, azaz minden jelenség oksági összefüggések sorozatának egy állomása. Azonban, ha ezek az oksági lépcsők túl összetettek, akkor az emberi gondolkodás leegyszerűsíti a jelenségeket, és véletlenszerűnek tekinti őket. A véletlenszerűség felismeréséhez két tényező kell: a dolgok kölcsönhatásának vagy függetlenségének ismerete. A gyermekek Piaget megfigyelései szerint nem rendelkeznek ezekkel a képességekkel. (másodhivatkozás: Bán, 1998, 223.o) Piaget és Inhelder ezen álláspontját Fischbein élesen bírálta. Azt állítja, hogy az esély fogalma már a korai években is megjelenik a „biztos” komplementereként. Más kutatók is osztják e nézetét, például Hawkins és Kapadia, Children’s conceptions of probability (1984) című cikkében egyértelműen ezt az álláspontot követi.

Fischbein a maga elméletét az elsődleges intuíciók meglétének igazolásával támasztotta alá. Hangsúlyozza, hogy a valószínűségi gondolkodás fejlődésének kutatásához és megértéséhez esetleírásokra van szükség, és arra, hogy egy-egy tanulói csoport, vagy egyes gyerekek gondolatait és fejlődését tanulmányozzuk. Azt javasolja a kutatók részére, hogy ezt hosszú ideig tegyék, legalább 3-4 éven keresztül.

Fischbein igazolta, hogy az oktatásban alkalmazott jó eljárások segítenek megértetni a sztochasztikus folyamatok dinamizmusát. Azt a következtetést vonja le, hogy szükség van a tapasztalatszerző tevékenységekre. Fischbein, Pampu és Minzat (1970) oktatási kísérlete például azt mutatja be, hogy a fa diagram technikájának megismerése erősíti a valószínűségi gondolkodást. Felvázol egy utat a tudományos fogalmak építéséhez: sejtés, kísérlet, bizonyítás, indukciós tudás.

Fischbein egy fontos alapelve a „struktúrák előképének” létrehozása, az ábrázolás kihasználása, melyek segítik az absztrakt struktúra létrejöttét. Kiemeli a generikus példa fontosságát, amelyik reprezentálja egy egész fogalmi osztály kapcsolódó szituációit és segít adaptálni ezt egy új szituációba.

Bemutatja, hogy a valószínűségi tevékenységek szoros kapcsolatot mutatnak a természettudományos gondolkodás fejlődésével, valamint a matematika más területeit is érintik. Igazolja a valószínűségi tevékenységek komplex voltát, és javaslatot tesz arra, hogy ezek a tantervekben is megjelenjenek.

2.2.2. A valószínűség intuitív megközelítése

A valószínűség tudományos fogalmának alakítása az oktatás során nem pusztán matematikai probléma.

A bevezetésben már szó volt a fogalom háromféle megközelítéséről:

- Intuitív módon, érzéseinkre hagyatkozva.
- A valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítésével.
- A valószínűség elméleti modell alapján történő kiszámításával.

Fontos tényező a valószínűséggel kapcsolatos szubjektív érzés, melyet szubjektív valószínűségnek, valószínűség-érzetnek stb. nevezhetünk. E kérdéskör körüljárása elengedhetetlen a valószínűségi gondolkodás sajátosságainak vizsgálatához és a valószínűségi szemléletfejlesztés céljainak meghatározásához.

A szubjektív valószínűség fogalmával számos döntéseméleti kutatás foglalkozott. Tversky és Kahneman (2002) elmélete alapján a szubjektív valószínűség annak a belső magabiztosságnak a mértéke, amely egy jövőbeli esemény bekövetkezéséhez kapcsolódik. Általában érzéseink alapján döntünk, amikor arról kell gondolkodnunk, hogy egy októberi napon vigyünk-e ernaőt magunkkal. E mögött a döntés mögött azonban sok-sok tapasztalat és személyes érdek áll. Megbecsüljük, hogy az adott évszak általában mennyire esős, átgondoljuk, hogy milyen nehéz lesz az ernaőtől a táskánk, esetleg tekintetbe vesszük, hogy milyen hosszú utat kell gyalog megtennünk. Mindezeket egybevetve döntünk. Ha nagyon nem szeretnénk nehéz táskát cipelni, hajlamosak vagyunk az eső bekövetkezésének kisebb esélyt jósolni.

Az intuitív valószínűségi döntés megfigyelésére több lehetőség kínálkozik. Lehetséges, hogy a személyeket kikérdezzük például egy kérdőíven, és a válaszokból próbálunk következtetéseket levonni. Másik lehetőség, hogy megfigyeljük, miként viselkedik döntési helyzetben. Főleg ez utóbbit alkalmazták olyan kutatók, mint Piaget, Tversky, Kahneman, Fischbein a valószínűségi gondolkodás kutatásai során. Tversky és Kahneman a felnőttek, míg Piaget és Fischbein a gyermekek gondolkodását figyelte. A döntésemélettel foglalkozó kutatások Az intuitív valószínűségi döntésről való információt még nehezíti, hogy a döntésemélettel foglalkozó kutatások sok esetben megmutatták, hogy nem azonosan ítélik meg egy esemény bekövetkezésének valószínűségét például kérdőíven adott válaszokban és a gyakorlatban, vagyis konkrét döntéshelyzetben.

Úgy érezzük, éppen abban rejlik a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének egyik sajátossága, hogy nehéz a valószínűség matematikai fogalma és az intuitív elemek szétválasztása.

Az irodalomban rengeteg olyan dokumentált szituáció olvasható, melyben a valószínűség intuitív becslése eltér a tényleges valószínűségtől. A valószínűségi paradoxonoknak⁷ nevezett problémák és megoldásuk esetén (Székely, 1982) az eltérő eredménynek többféle oka lehet. A leggyakoribbak ezek közül:

- A mintavétel figyelmen kívül hagyása.
- A szorzatesemény rossz becslése
- Események összegének rossz becslése
- Az alapgyakoriság figyelmen kívül hagyása
- A feltételes valószínűség rossz becslése

Az, hogy egy tanuló egy esemény valószínűségét intuitív módon is képes megadni, az oktatásban könnyebbséget és nehézséget egyaránt jelent. A nehézség abban rejlik, hogy a szubjektív elemek a matematikai tartalom egyszerre vannak jelen. A tanárnak az egyik legnehezebb feladata, hogy megbirkózzon ezzel a tényezővel. A könnyebbséget egyrészt talán a feladatvállalási kedv jelenti. A valószínűség intuitív érzése miatt a tanulók készségesen válaszolnak olyan kérdésekre is, melyek mögül esetleg hiányzik a matematikai apparátus. A későbbiekben, a vizsgálati részben látható lesz, hogy 10-12 éves gyerekek is szakértőnek érzik magukat olyan kérdések megválaszolására is, melyeket nyilvánvalóan nem tanultak még matematikából.

2.2.3. A valószínűség becslése, mérése és elméleti értékének kiszámítása

A dokumentumelemzés során azt találtuk, hogy a témakör magyarországi felépítésében a valószínűség fogalmának mindhárom megközelítése egyszerre szerepel a közoktatásban, azonban ezek nem válnak el élesen egymástól.

A kezdő szakaszban valószínűségi játékokat játszanak, melyek erősíthetik a valószínűség intuitív megközelítését és előkészítik a relatív gyakoriságokkal történő megközelítést. "A játék elengedhetetlen része a valószínűség tanításának,

⁷ A paradoxon kifejezés olyan kijelentés, mely ellentmond az elgondolhatónak és az elképzelhetőnek. A szó logikai értelme szerint a paradoxon olyan kijelentés, mely egyszerre igaz és hamis.

talán nyilvánvalóbban és szembetűnőbben, mint más témákban” (Fischbein, 1975, p. 5)

Abban az időszakban, amikor kísérleteket végeznek, a valószínűség fogalmának relatív gyakorisággal történő megközelítését erősítik. Persze csak abban az esetben, ha a relatív gyakoriságról már van elképzelése a tanulónak. Vagyis amennyiben elfogadják azt a tapasztalatot, hogy ami a kísérlet során többször előfordult, az valószínűbb.

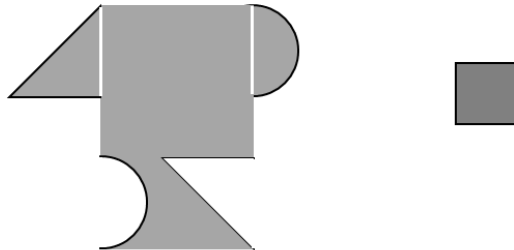
A későbbiekben – 12-13 éves kortól kezdve – természetesen szép számmal akadnak olyan feladatok is, amelyekben egy adott esemény valószínűségét kell meghatározni számítás útján, tevékenység nélkül. Tekintettel arra, hogy ezek többnyire kombinatorikai megoldások, kialakulhat az a téves képzet, hogy a valószínűségszámítás a kombinatorika alkalmazása.

„A matematikai elmélet alkalmazása céltudatos eljárás, mely tapasztalatokon alapszik, a tapasztalatokkal változik, és nem függ az előítéletektől.” (Feller, 1978, 18.o) A következőben két olyan iskolai problémát, tevékenységet mutatunk be, amely megoldása során mindhárom megközelítés alkalmazható. Látni fogjuk, hogy a hármas megközelítés lehetősége nem a valószínűségszámítás sajátossága. Például abból adódhat, hogy a valószínűség egy mérték. Éppen ezért a másik probléma területméréssel kapcsolatos.

Az iskolai matematika tanítása során már korábban is sok olyan feladat szerepelt, melyben a tanulónak valamilyen mennyiség nagyságát kell meghatározniuk.

Például: Mérjük meg

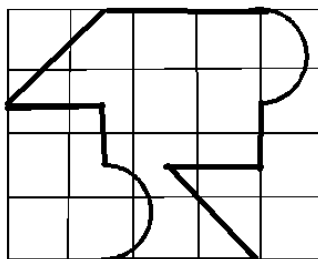
ennek a síkidomnak a területét ezzel az egységgel!



Ilyen típusú feladatra abban az időszakban kerülhet sor, amikor a terület fogalom tartalmának szélesítésével foglalkoznak.

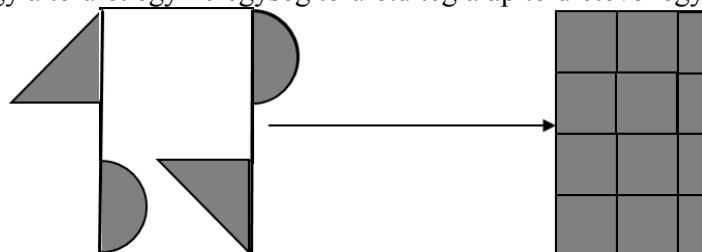
A tanár kérésére legelső lépésként a gyerekek megpróbálják *megbecsülni* a területet, vagyis mindenféle számolás nélkül próbálják meghatározni, hogy körülbelül hány kis négyzetlapocskára lenne szükség az alakzat lefedéséhez. Mondjuk 6-nál több, de 20-nál kevesebb darabra. (Ezt a választ a korábbi mérési tapasztalatok alapján adhatják meg)

A következő lépés az egységgel való *mérés* lehet, amikor megfigyelik, hogy legfeljebb hány négyzetlapocskára fér bele teljesen, és legalább hány négyzetlap fed le a síkidomot. A mérés során szerzett tapasztalatok arra ösztönzik a tanulókat, hogy esetleg módosítsák becslésüket. A válasz ilyen lesz: $8 < \text{síkido terület} < 18$



Amennyiben a válasz pontossága nem elegendő, akkor tovább mérhetünk az egység tötrésével. Az eljárást addig folytathatjuk, ameddig a kívánt pontosságot elérjük.

Ez a síkidom azonban az ábrából látható módon speciális, tehát a területét egy gondolkodási trükk segítségével – elméleti módon – is meghatározhatjuk. Az alkalmazott módszer a síkidom átdarabolása lesz, amely segítségével azt tudjuk igazolni, hogy a terület egy 10 egység területű téglalap területével egyenlő.



(Ez az okoskodás sem egyszerű, mert mögötte két fontos állítás, melyek a probléma felvetésekor még szintén nem tisztáztak, de a szemlélet alapján elfogadottak:

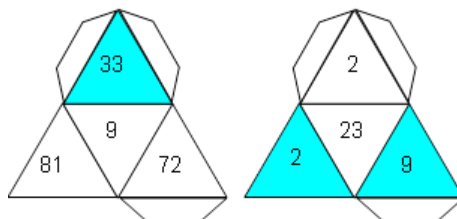
1. Egybevágó síkidomok területe egyenlő
2. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, a kettő területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.

Ez utóbbi a terület additív tulajdonságának valamilyen szintű értését jelenti (Hajós, 1971)

Ezeknek a különféle megoldásoknak az esetében nehéz azt láttatni, hogy amennyiben elérjük a válaszban megkívánt mérési pontosságot, akkor nincs értelme arról beszélni, hogy az egyik megoldás jobb (elegánsabb, stb.), mint a másik.

Sok olyan valószínűségi probléma van, amelynek megoldása során analóg módon megkísérélhetünk a megoldáshoz becsléssel, „méréssel” vagy elméleti meggondolással eljutni.

Az ábra két tetraéder testhálóját mutatja. Készítsünk dobótestet a testhálóból, dobjuk fel egyszerre! Dobáskor az lesz a dobott szám, amelyen a tetraéder áll.



Minnek nagyobb a valószínűsége? Annak-e, hogy a dobott számok szorzata páros lesz vagy annak, hogy páratlan.

A feladat megoldásának intuitív megközelítése (itt becslés) azt sugallhatja, hogy páratlan szorzat a valószínűbb. Az első benyomások alapján, mivel az egyik tetraéderen két páros és két páratlan szám áll, a másikon pedig 3 páratlan áll egy páros ellenében, úgy érzik, a szorzat is talán inkább lehet páratlan, mint páros. Amikor az első benyomásokat firtatjuk, a tanulók valószínűség-érzetére vagyunk kíváncsiak, vagyis intuitív valószínűségi ítéletalkotás történik. (Tanítóképzős hallgatóimmal elvégeztem ezt a tevékenységet: Azt tapasztaltam, hogy a páros dobás esélyeit a legtöbbször $1/2$ -nél kevesebbre *becslik*)

Ábrázoljuk egy skálán a páros szorzat esélyét:



A feladat megoldásának egy második módszere az, hogy kézbe adjuk az elkészített dobótesteket és néhány kísérletet, „*mérést*” végeznek a tanulók (mondjuk tízet), melynek tapasztalatai mutatják, hogy többször lesz páros a szorzat, mint páratlan. Annak alapján becsülik meg a valószínűséget, hogy az összes dobás mekkora része lett páros. Ebben a fázisban a relatív gyakoriságok megfigyelése történik. Elégedetlenek lehetnek azzal, hogy 10 dobásból mondjunk becslést, felmerül bennük az igény a mérés *finomítására*, megegyezhetnek abban, hogy ez a kísérletek számának növelésétől várható. 100 dobás után érezhetnek valamiféle tendenciát abban, hogy sokkal több lett a páros szorzat, mint a páratlan.

A mérés eredményét rögzítik a skálán, majd összehasonlítják a becsült értékekkel. Például:



Mivel a becsült érték és a relatív gyakoriság között eltérés mutatkozik, felvetődhet az igény az okok felderítésére. Ok lehet, hogy az intuitív válasz túl kevés információt vett figyelembe. Szerencsére ez a probléma lehetőséget ad *elméleti érték* kiszámolására, melyet a „páros szorzat dobása” *valószínűségének* nevezhetünk.

Ha a tetraédereket szabályosak, homogénnek tekintjük, azaz feltételezzük bármelyik lapjukra, azonos valószínűséggel esnek, továbbá a két tetraéderrel

történő dobás egymástól független, akkor fennállnak a klasszikus valószínűségi modell alkalmazásának feltételei.

A dobási lehetőségeket egy táblázatba gyűjtve:⁸

Másik tetraéderrel	Egyik tetraéderrel				
		23	2	2	9
	33		X	X	
	9		X	X	
	81		X	X	
	72	X	X	X	X

16 egyformán esélyes lehetőséget különböztetünk meg, melyből 10 páros szorzatot valósít meg. Tehát a páros szorzat dobásának valószínűsége 10/16.

Ennek a megoldási módszernek az a nehézsége, hogy felhasználjuk benne a valószínűségi axiómákat, csak nem jelentjük ki. Miért is nem? Mert úgy gondolják, hogy ez a tanulók számára gondolatilag nehéz. Sok tanuló számára viszont annak az elfogadása lehet nehéz, hogy miért is adjuk össze a táblázatban szereplő X-ek számát. Az axiómák bevezetése után már az alábbi megoldás adható:

$$P(\text{páros dobás}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}.$$



Ez a valószínűségi probléma példázta azt, hogy gondolatilag mennyire messze van egymástól a második és a harmadik módszerrel kapott eredmény helyességének összevetése. Míg a területre vonatkozó feladatnál a mérés módszere képileg segítette az átdarabolás módszerének megértését, a valószínűségi probléma esetében az a nehéz, hogy egy jól meghatározható eseményt (a szorzat páros) események összegeként akarunk megragadni. A megoldási módszer értésének alapfeltétele az, hogy a tanuló képes-e erre az absztrakcióra. Ez a fogalmi akadály azért olyan jelentős, mert a legtöbb tankönyv, jegyzet a valószínűség számítás matematikai modelljének kialakításához a relatív gyakoriság tapasztalati tulajdonságaiból kiindulva fekteti le a valószínűség axiómáit. (Fazekas, 1996)

A tanítás során érdemes lehet ezt az aspektust is szem előtt tartani. Néhány tanítási programban fellelhető az erre való törekvés. Például az Educatio

⁸ A táblázat soraiban az egyik tetraéderrel dobható számok, oszlopaiban a másik tetraéderrel dobható számok jelennek meg. A X-tel jelölt részek a kedvező eseteket mutatják.

kompetencia alapú oktatási programcsomagja a valószínűséget a becslés-mérés témaköréhez kapcsolja. (Vancsó – Sztányi, 2005)

A két feladat megoldásában csak látszólag analóg a második módszer szerepe. Míg a terület esetében meggyőző az, hogy a mérés finomításával nagyobb pontosságú eredményhez jutunk, a valószínűségi probléma esetében a nagyobb számú kísérlet a válasz helyességének plauzibilitását növeli. (Pólya, 1989)

A hazai matematikatanítási gyakorlat vizsgálata során fontos tényező, hogy vajon mennyire hangsúlyos, és mennyire válik el az oktatás során a mérhető valószínűség fogalma az elméleti valószínűségétől. Illetve érdemes azt is átgondolni, hogy a valószínűség intuitív megítélése milyen szerepet kap a tananyag feldolgozása során.

2.3. A valószínűség fogalmának értelmezése

A tanulók valószínűségi fogalmának fejlődésére a matematika tanulása és a hétköznapi problémák egyaránt hatnak. Az iskolai tanulás a valószínűség tudományos fogalmát hivatott megalapozni. A valószínűség mint tudományos fogalom fejlesztése és az események valószínűségének kiszámítása alapvetően kétféle módon történhet az oktatásban. Az egyik mód a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítése, mely a közoktatásban igen gyakran alkalmazott, mert alkalmas a fogalom szemléletes bevezetésére. A másik mód a valószínűség axiomatikus felépítésével való megismertetés, melyben az axiómák és az ezekből levezethető tételek segítségével és a probléma feltételeinek figyelembe vételével történik egy-egy esemény valószínűségének meghatározása. Az iskolai tanulás optimális esetben módosítja a valószínűség hétköznapi fogalmáról alkotott elképzelést.

2.3.1. A valószínűség fogalmának statisztikus (relatív gyakoriságokkal történő) megközelítése

A valószínűség fogalmának relatív gyakoriságokkal történő definiálására a matematika fejlődése során többen tettek kísérletet. A fogalom megszületése statisztikus megfigyelésekkel kezdődik a hétköznapi életben és az oktatásban egyaránt. „A matematika történetében már többször előfordult, hogy olyan matematikailag nem szabatos eljárásokat, melyek a gyakorlatban eredményesnek bizonyultak, az elmélet továbbfejlesztésével sikerült kifogástalanná tenni.” (Rényi, 1981, 71.o)

A fogalomépítés időszakában szükség van néhány kiinduló fogalom definiálására.

Egy olyan jelenséget, melynek kimenetelét nem lehet pontosan tudni a jelenség lezajlása előtt véletlen jelenségnek neveznek. (Magát a „jelenséget” és a „kimenetelt” alapfogalomként kezeljük.)

Véletlen jelenségekkel kapcsolatban megfogalmazhatunk állításokat, melyek vagy igazak lesznek a jelenség során (az esemény bekövetkezik), vagy nem (az esemény nem következik be). Minden olyan kijelentést, állítást, ami a vizsgált véletlen jelenség lezajlása során vagy igaz, vagy hamis, eseménynek neveznek.

Két eseményt akkor tekintenek egyenlőnek, ha pontosan egyszerre következnek be.

Tekintsünk egy véletlen jelenséget és vele kapcsolatban egy A eseményt. Végezzünk a véletlen jelenséggel kapcsolatban n darab kísérletet. Ezen kísérletsorozat során az A esemény valahányszor bekövetkezik. Ezt a számot jelöljük n_A -val.

Azt a $\frac{n_A}{n}$ hányadost, mely azt mutatja, hogy a kísérletek hányad részében következett be az A esemény, az esemény relatív gyakoriságának nevezik. n_A véletlentől függ, így a relatív gyakoriság is véletlentől függ.

A valószínűség a statisztikus tárgyalásmódban a relatív gyakoriság absztrakciójaként kialakított számérték.

2.3.2. 2.1.2. A valószínűség axiomatikus bevezetése

Az iskolában tárgyalt problémák egy része az úgynevezett „klasszikus valószínűségi modellel” tárgyalható. Ebben a tárgyalásmódban nem foglalkoznak a valószínűség fogalmának a meghatározásával.

Számos olyan véletlen kísérlet van, ahol a lehetséges kimenetek száma véges, és a kimenetek egyforma esélyűek. Tegyük fel, hogy a kísérlet kimeneteleinek (elemi események) száma N . (A biztos eseményt véges sok egyforma valószínűségű egymást kizáró esemény összegére lehet bontani.) Ekkor az elemi események valószínűségeire $p_i = \frac{1}{N}$, $i = 1, 2, \dots, N$ teljesül.

Jelölje k az A eseményben levő elemi események számát (kedvező kimenetek). Ekkor

$$P(A) = \frac{k}{N} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

Ezt a modellt klasszikus valószínűségi mezőnek nevezik.

A tömegjelenségek kvantitatív tárgyalása véletlen ingadozásokat mutató számadatokkal történik. Ezek „megragadása” történik a valószínűségi változó fogalmával.

Tekintsünk egy A eseményt, valószínűségét jelöljük $P(A)$ -val. Képzeljük el, hogy az A eseményre vonatkozólag független kísérletsorozatot végzünk.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i - \text{ik kísérletnél bekövetkezik az } A \text{ esemény} \\ 0, & \text{ha az } i - \text{ik kísérletnél nem következik be az } A \text{ esemény} \end{cases}$$

($i = 1, 2, \dots$) valószínűségi változó.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók.

Az előző fejezet jelölésével $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = n_A$

A nagy számok erős törvénye szerint:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} = p\right) = 1$$

A nagy számok erős törvénye szerint majdnem biztos, hogy egy A eseményre független kísérletsorozatot végezve a relatív gyakoriságok sorozata az esemény valószínűségéhez tart. Ez az a tétel, ami alátámasztja azt a statisztikus tárgyalásmódot, amely a valószínűséget mint a relatív gyakoriság absztrakcióját tekinti.

„A napjainkban általánosan elfogadott (Kolmogorov-féle) elmélet a relatív gyakoriságokra vonatkozó heurisztikus gondolatmenetből csupán a valószínűségre vonatkozó néhány egyszerű következményt tart meg, ezeket axiómaként tekinti és ezekre épít fel egy konzekvens matematikai elméletet.” (Fazekas, 2009, 16. o.)

Az Ω eseményteret, az események $\mathcal{F}$ halmazát, és a P valószínűséget együttesen valószínűségi mezőnek nevezik.

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ egy valószínűségi mező. A $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést valószínűségi változónak nevezzük, ha bármely rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

A fenti feltétel azt jelenti, hogy azon ω elemi események halmaza, melyekre $\xi(\omega) < x$ legyen esemény (azaz beszélhessünk a valószínűségéről).

Az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ hármast Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek nevezzük, ha Ω egy nem üres halmaz (eseménytér), $\mathcal{F}$ az Ω részhalmazainak egy σ -algebrája (az események halmaza), P pedig egy $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ halmazfüggvény (valószínűség) a következő tulajdonságokkal:

$$P(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F} \quad (1)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (2)$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (3)$$

ha $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$ és $A_i A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$

A (3) tulajdonság a valószínűség σ -additivitása.

Az iskolai tanítás során szinte ez az egyetlen témakör, ahol kimondottan felvetődhet az axiómák segítségével történő fogalomalkítás.

A valószínűség geometriai kiszámítási módja:

Legyen G az $\mathbb{R}^n$ $n = (1, 2, 3)$ egy részhalmaza, és dobjunk egy pontot véletlenszerűen G -re. Legyen $A \subseteq G$. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a pont A -ba esik

$$P(A) = \lambda(A)/\lambda(G)$$

ahol λ a hossz, a terület, ill. a térfogat attól függően, hogy az egyenesen, a síkon, ill. a térben vagyunk (nyilván a $0 < \lambda(G) < \infty$ esetre szorítkozunk). A képlet a valószínűség geometriai kiszámítási módja. (Fazekas, 2009, 26.o)

2.4. Az axiomatikus és a statisztikai felépítés a közoktatásban

Magyarországon az iskolai feldolgozás során a valószínűség fogalma és a relatív gyakoriság fogalma szorosan összekapcsolódik. A bevezető, kezdő és alapozó szakasz⁹ tevékenységei, a játékok, a kísérletek egyik célja, hogy tapasztalatot nyújtson egy esemény bekövetkezésének relatív gyakoriságáról, és ezáltal szemléletes képet adjon az esélyéről.

Ezután a valószínűséget később megkísérlik definiálni, a relatív gyakoriság fogalmának segítségével. Például egy hetedik osztályos tankönyvi meghatározás: „Adott A esemény valószínűségének azt a számot tekintjük, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik. Az A esemény valószínűségének jele: $P(A)$ ” (Csordás et al., 2011) Megjegyzés: Ebben a definícióban az „ingadozik” szó jelentése alapfogalomként szerepel. Ennek értése is külön szemléletes bevezetést kíván.

Nehéz tehát elválasztani az elméleti értéket a méréstől. Tulajdonképpen a valószínűség ezen definíciói a nagy számok leegyszerűsített törvényéről szólnak, ami a valószínűségszámítás axiomatikus felépítésének egy későbbi fejezete. A

⁹ A közoktatásról szóló 2010. évi LXXI. törvény elnevezései: az 1-2. évfolyamon bevezető, a 3-4. évfolyamon kezdő és az 5-6. évfolyamon alapozó szakasz.

tanítás módszerei itt nem matematikai módszerek, hanem inkább a természettudományban alkalmazott módszerekhez hasonlatosak. Számos matematikus, aki tankönyvírásra vállalkozott, csak nehezen birkózik meg ezzel a kompromisszummal. Azt, hogy a relatív gyakoriság valóban egy bizonyos érték körül ingadozik, ebben a szakaszban csak a tapasztalat alapján fogadjuk el. Ezen definíciók viszont a tanulók aktuális tudásához nagyon jól igazodnak és a valószínűség fogalmának megértéséhez közelebb visznek, de egy szigorú axiomatikus matematikai felépítésben nem szerepelhetnének. „Az elméleti tudás bővülésével és mélyülésével ez a szemléletes kép egyre konkrétabbá fog válni.” (Feller, 1978, 20.o.)

“A relatív gyakoriságot úgy foghatjuk fel, mint a valószínűség megmérését olyan mérési eljárással, mely természeténél fogva nem pontos, de annál pontosabb, minél nagyobb számú megfigyelést végzünk. Ezúton persze egy esemény valószínűségét tökéletesen pontosan sohasem állapíthatjuk meg” (Rényi: Pascal 2. levele Fermathoz) Éppen ez a gondolat a természettudományos megközelítése a valószínűségnek, mint mértéknek.

Rényi és Feller valószínűségszámítási tankönyveikben fontosnak érezték, hogy éles különbséget tegyenek relatív gyakoriság és valószínűség fogalmai között. Míg a valószínűség egy rögzített szám, a relatív gyakoriság a véletlentől függ. Azt gondoljuk, hogy a téma tanításának is ez az éles különbség lehet az egyik fontos kérdése.

2.5. A valószínűesszámítás magyarországi tanításának rövid történeti áttekintése

A tanítás során a fogalmak és gondolkodási stratégiák kialakítása hosszú folyamat eredménye. Ezen folyamat idején a fogalom és a gondolkodásmód folyamatosan változik, formálódik. A valószínűesszámítás tanításának magyarországi történeti leírásához sok segítséget nyújtott a Pálmay Lóránt¹⁰ tanár úrral készített interjú.

A valószínűesszámítás mint a matematika egy ága csak igen későn került a közoktatás tananyagrendszerébe. Magyarországon a téma tanításával kapcsolatos kérdésekről az 1950-es években kezdtek komolyan gondolkodni didaktikával foglalkozó szakemberek.

A XX. század II. világháború előtti időszakában csekély mértékben és csak néhány középiskolában tanultak a valószínűesszámítás témaköréből. Ez természetesen nem volt egységesnek mondható. Az érettségi követelményeket tekintve sem tudunk következtetni, hiszen az akkori gyakorlat szerint minden középiskola maga állította össze az érettségi feladatsorait. Felterjesztett három változatot, majd a minisztérium választott ebből egyet. Ezáltal ma nehéz nyomon követni, hogy hol tanítottak, illetve tanítottak-e egyáltalán valószínűesszámítást. A háborút követő években, egészen 1966-ig biztosan nem szerepelt ez a témakör a középiskolákban.¹¹

Az általános iskolákban 1963-ban megkezdődött a komplex matematikatanítási kísérlet, melyet Varga Tamás irányított. Ő, és munkatársai kiemelt jelentőséget tulajdonítottak ennek a témakörnek. A komplex matematikatanítási kísérlet alapgondolata, hogy „kisgyerekkortól kezdve is lehet igazi matematikát tanítani. Sőt: kisgyerekkortól kezdve érdemes igazi matematikát tanítani. (Kapcsolat, 1971. július)” A komplex kísérlet szerves részét képezték a valószínűségi játékok, és kísérletek az általános iskolákban. Az ott felsorolt témakörök között már szerepel a valószínűesszámítás (kombinatorika, valószínűesszámítás, statisztika). A kísérleti osztályokban, az általános iskolákban tehát ekkor már megjelent a valószínűség. A témakör tanításának célja egyrészt a valószínűségi gondolkodás fejlesztése volt, másrészt a törtfogalom építésében töltött be szerepet

1964-ben a gimnáziumban is megkezdődött egy matematikatanítási kísérlet, mely tartalmazta a kombinatorika, valószínűesszámítás, statisztika témaköröket. Tudjuk, hogy például Ács Pál a Veres Pálné Gimnázium tanára tanította a

¹⁰ Pálmay Lóránt (1929 -) Matematika tanár. Nagy megbecsülésnek örvend az ország matematikatanárai körében. Oktatott az ELTE TTK Geometria Tanszékén, majd az FPI az vezető szaktanácsadója volt, emellett tanított a budapesti László Gimnáziumban. Írt egyetemi jegyzeteket, középiskolai matematika tankönyvsorozatot és számos cikket, továbbképzési anyagot. Tagja számos versenybizottságnak, irányította a NAT 95 matematika műveltségterületének munkálatait, majd vezette a kerettanterv matematika részének kidolgozását. Az egész országban számos helyen tartott továbbképző előadásokat, vezetett vitákat, szemináriumokat. (<http://www.ratztanarudij.hu/dijazottak>)

¹¹ Pálmay Lóránt tanár úr személyes közlése alapján.

témakört, de elég kevés információ van ebből az időből más tanárok gyakorlatáról. Az 1966 és 1972 közötti időszak kérdéses a valószínűségszámítás tanításának szempontjából. A követelményeket tekintve azt tudjuk, hogy érettségi feladatsorokban ebben az időszakban sem jelent meg a téma.

Az 1971-ben született ifjúsági törvény, majd az 1972-es közoktatási párthatározat értelmében minden tantárgy érettségi anyagát 20%-kal csökkenteni kellett. Valamelyik témáról tehát le kellett mondani. Tekintettel arra, hogy a fizikát is tanító tanárok többsége ragaszkodott a differenciálszámítás és integrálszámítás alapjainak tanításához, a valószínűségszámítás esett ki. Ennek eredményeképpen 1972-ben hivatalosan is törölték a valószínűségszámítás témáját a középiskolai érettségiből.

Varga Tamás a Bolyai Társulat 1972. évi Rátz László Vándorgyűlésén, Debrecenben a valószínűségszámítás tanításáról tartott előadást. Addigra láthatóvá vált, hogy a fogalmi alapok nélküli valószínűségszámítás tanításának gyakorlata a középiskola IV. évfolyamán nehézkes. Ennek oka az volt, hogy a tanulók azt megelőzően nem szereztek tapasztalatot játékokban és a kísérletezéssel. Az alsóbb évfolyamok tevékenységeit pedig a tanárok és a diákok egyaránt vonakodtak elvégezni a középiskola negyedik évfolyamán. Varga Tamás egyértelműen állást foglalt amellett, hogy a valószínűségszámítás tanítását az általános iskola alsó tagozatán kell megkezdeni: „Legfeljebb a témakör címét mondanám másképp: valószínűségszámítás helyett egyszerűen valószínűségről beszélnék. Ez a kis módosítás azt fejezi ki, hogy eleinte nem a számítás van a hangsúly (még kevésbé az elméleten, hanem a valószínűség fogalmának, és más ehhez kapcsolódó fogalmaknak a kialakításán. Még a „kialakítás” szó sem egészen pontos. Úgy tűnik belőle, mintha az iskolától függene, hogy kialakul-e a gyerekekben a valószínűség fogalma. Pedig valamilyen fogalom mindenképpen kialakul bennük. A kérdés csak az, mennyire tiszta ez a fogalom és mennyiben keverednek esetleg hozzá különféle téves elképzelések, téveszmék.” (Varga, 1973)

1973-ban az MTA Elnökségi Közoktatási Bizottságának Matematikai Albizottsága javasolta, hogy az új tantervet az OPI (Varga Tamás) irányításával folyó komplex kísérletre kell alapozni. Ennek eredményeképpen, az 1978-ban bevezetésre került új általános iskolai tanterv lényeges elemei megegyeznek a komplex anyagával. A tananyag a komplexben kialakított öt témakörben jelenik meg, tehát része a valószínűségszámítás is (Pálfalvi, 2000).

A fent leírtakból következik, hogy Magyarországon egységesen az általános iskolákban és az érettségit adó középiskolákban 1978 óta része a matematika tananyagának a valószínűségszámítás. Az ezt követő időszak azonban továbbra is ellentmondásos maradt a valószínűségszámítás tanításának szempontjából. A tantervi változások és kísérleti eredmények ellenére a tanári szemlélet sok szempontból nehezen változott. A valószínűségszámítás és a statisztika tanítása a perifériára szorult, a tanárok többsége igyekezett elkerülni vagy minimálisra szorítani ezeket a részeket a tanításban (Pálfalvi, 2000). Az érettségi feladatokat 1985 és 2005 között az úgynevezett „zöld könyvből” tűzték ki. Bár volt a könyvnek valószínűség-statisztika fejezete, 2005-ig mégsem tűzték ki valószínűségszámítási feladatot. A kimeneti követelmények pedig erősen

befolyásolják a tanári gyakorlatot is. Mindezek mellett ebben az időszakban voltak erős törekvések is a téma tanításának hangsúlyozására. Többek között Nemetz Tibor, Tusnádi Gábor, Bognár Jánosné gazdag és változatos irodalommal, kísérletek tervezésével és vezetésével vagy Vancsó Ödön, Szászné Simon Judit középiskolai kísérletező munkával és tanártovábbképzések szervezésével járult hozzá a valószínűségi számítás tanításának jobbításához.

Az alsóbb évfolyamokban tanítók sokszor a téma mellőzése mellett döntöttek. Ezt a témakör tanításával kapcsolatos számos sajátosság magyarázza:

- Alsóbb osztályokban a valószínűségi kísérletek legtöbbször játékok keretén belül valósulhatnak meg. A játék során nincs mérhető produktum, nehéz nyomon követni az egyes gyerekek fejében alakuló fogalmakat, ezért sokan időpocsékolásnak tekintik, ráadásul attól tartanak, hogy a „fegyelem” fellazul az órán.
- Nem kapcsolódik ehhez a témakörhöz olyan részletes értékelési rendszer, mint például az alpműveletek tanításához. Mivel az értékelés alapja ebben az időszakban és témakörben ezért csak a tanulók megfigyelése, sok pedagógus számára jó ürügyet jelent a téma mellőzésére. (Nem, vagy nehezen mérhető a haladás üteme, tehát nem annyira fontos a fejlesztés – gondolhatják egyesek.)
- A valószínűséggel kapcsolatos játékok, kísérletek sokszor időigényes tevékenységek, melyek a gondolkodásra gyakorolt közvetlen hatását nem látják előre a tanítók, tanárok. Az idő hiányával való érvelés igen gyakori a játékok mellőzésére.
- Nem értették, hogy a témakör milyen fontos szerepe van azoknak a feladatoknak, melyek megoldásához nem tudunk elméleti modellt állítani. Tehát kimaradtak olyanok, mint rajzszögek dobálása, hamis kocka készítése, stb.
- A valószínűségi játékokban és kísérletekben rejlő bizonytalanság sok esetben elrettenti a pedagógusokat attól, hogy előre nem látható, legfeljebb csak elég jól megsejthető kimenetelű kísérletekbe bonyolódjanak. Pedig ha egy kísérlet nem a várt eredményt hozza, az is szerves része a matematikai tapasztalásnak. Például két kockával dobunk, és a dobott számok összegére kell tippelni. Ekkor a tanár már előre tudja, hogy a legvalószínűbb összeg ez esetben a 7 lesz. De mi történik, ha néhány kísérlet után mégsem kapják meg ezt az eredményt? Ez is egy hasznos tapasztalat, hiszen e valószínűségi kísérletről – és a kísérletek többségéről – pusztán csak azt állíthatjuk, hogy ha elég sokat végzünk belőle, akkor *elég nagy* valószínűséggel megkapjuk a várt eredményt, de semmi nem *biztos*. (Szendrei – Sztányi 2007)

Az érettségi rendszer megváltoztatására, majd a kétszintű érettségi vizsgák bevezetésére 2005-ben került sor. Ettől a tanévtől kezdve közép és emelt szinten egyaránt megjelent a valószínűségi számítás az érettségi feladatsorokban is. A következő táblázat mutatja, hogy az egyes években szerezhető pontok hány százalékat teszi ki a valószínűség, statisztika témakör¹².

¹² <http://www.oh.gov.hu>

Év	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Emelt szint	9,2%	14,5%	13,9%	16,8%	11,5%	17,6%	12,2%	18,2%
Közép szint	12,8%	12,8%	12,8%	13,7%	14,5%	17,9%	10%	17%

Az átlag heti óraszámokhoz képest igen magas hányadot tesznek ki a témával kapcsolatos kérdések az érettségien. A változtatások miatt sok helyen szerveztek tanártovábbképzéseket a középiskolai tanárok részére azért, hogy felfrissítsék tudásukat.

Ehhez igazodva a középiskola mára az alsóbb évfolyamok sokkal körültekintőbb előkészítő munkáját igényli a témában. Át kell gondolni a valószínűséggel kapcsolatos fogalmakat és fejlesztési feladatokat. Itt azonban van még pótolnivaló, hiszen az előkészítéssel kapcsolatos teendők nem jelennek meg olyan hangsúllyal a tantervekben, mint amit a középiskolás folytatás igényel.

A valószínűségszámítás történetét tekintve fontos, hogy ez a tudomány hosszú ideig a klasszikus valószínűségi modellben fellelhető kérdésekre kereste a választ. Ha az iskolai matematikatanítást történetét tekintjük, hasonló képet kapunk. A középiskolai tananyagok, főleg a kombinatorikai megfontolásokkal megoldható feladatokat részesítették előnyben. Gyapjas Ferenc tankönyvében egyetlen olyan példa van, ami nem klasszikus valószínűségi modellben, kombinatorikus megfontolásokkal oldható meg, geometriai valószínűség kiszámítását kéri. A tanári segédkönyv ajánlása szerint ez főként a tagozatos osztályok feladata, bár Gyapjas Ferenc több fórumon megfogalmazta, hogy a „valószínűségszámítás ne alkalmazott kombinatorika legyen”.¹³ A dolgozat későbbi fejezetében látható lesz, hogy az azt követő, sőt a mai iskolai gyakorlatban is a klasszikus valószínűségi modellel megoldandó problémák feldolgozása dominál, és csak szórványosan jelennek meg más típusú problémák. Ez is egy olyan terület, melyben Varga Tamás elképzelései nem valósultak meg. „A valószínűségi gondolkodásuk helyes fejlődése érdekében jó, ha az a bizonyos speciális eset, amikor egyenlő kiinduló valószínűségeket tételezünk fel, élményanyagukban is úgy jelenik meg, mint érdekes, de nagyon szűk speciális eset.” (Varga, 1973)

¹³ Pálmai Loránt tanár úr személyes közlése alapján.

3. DOKUMENTUMELEMZÉS

A valószínűséggel kapcsolatos fogalmak alakítása és a valószínűség számítása a magyar matematikaoktatás részét képezi. Ahhoz, hogy képet kapjunk a valószínűségi gondolkodás sajátos elemeiről, érdemes megvizsgálni, hogy milyen fogalmakat közvetít az iskola, és milyen módszerekkel segíti a fogalmak fejlődését.

A valószínűségszámítás tanításának jelenlegi magyarországi helyzetét az érvényben levő dokumentumok elemzésével tekintettük át. A dokumentumok közül a Nemzeti Alaptanterv, a leggyakrabban használt kerettantervek és az ezekhez kapcsolódó tankönyvcsaládok kerülnek bemutatásra.

3.1. A Nemzeti Alaptanterv

Magyarországon a tantervi szabályozás háromszintű. A NAT a közoktatás tartalmát műveltségi területek szerint határozza meg. A NAT jelenlegi változata 2007-ben lépett hatályba. Ez a tanterv nem az ismeretek és követelmények rendszerét adja meg, hanem a fejlesztendő képességeket.

A matematika tanításának alapelvei között hangsúlyozza, hogy a matematika különböző témaköreinek szerves összeépülésével kívánja feltárni a matematika és a matematikai gondolkodás világát. (NAT 2007)

A NAT bevezetőjében felsorolt célok, értékek és kompetenciák a matematika műveltségterületen a következő formában jelennek meg:

1. Tájékozódás
 - 1.1 Tájékozódás a térben
 - 1.2 Tájékozódás az időben
 - 1.3 Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban
2. Megismerés
 - 2.1 Tapasztalatszerzés
 - 2.2 Képzelet
 - 2.3 Emlékezés
 - 2.4 Gondolkodás
 - 2.5 Ismeretek rendszerezése
 - 2.6 Ismerethordozók használata
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés és megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotások adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek és együttéléssel kapcsolatos értékek
 - 6.1 Kommunikáció
 - 6.2 Együttműködés
 - 6.3 Motiváltság
 - 6.4 Önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás
7. A matematika épülésének elveiben való tájékozottság¹⁴

¹⁴ A 2013-ban bevezetésre kerülő NAT nem változtat ezen.

A valószínűség témaköre a hét fejlesztési feladat mindegyikének teljesítéséhez hozzájárulhat. (Például cselekvő tapasztalatszerzés történik valószínűségi játékok keretén belül.) A NAT részletes fejlesztési feladatokat tartalmazó részében a példák között összesen a gondolkodás és az ismeretek alkalmazásának területén nevezi meg kifejezetten a valószínűség témakörét:

	1-4. évfolyam	5-6. évfolyam	7-8. évfolyam	9-12. évf.
Gondolkodás	A valószínűségi gondolkodás fejlesztése. A statisztikai gondolkodás fejlesztése.			
Ismeretek alkalmazása		Ismeretek alkalmazása a gyakorlati életben és más tantárgyak keretében (pl. százalék, kamatos kamat, terület-, felszín-, térfogatszámítás, relatív gyakoriság, valószínűség, logaritmus függvény).		

A valószínűség témaköre a felsoroltakon kívül eső fejlesztési területeken nem jelentkezik direkt módon.

3.2. Tantervek vizsgálata

A kerettantervek meghatározzák a tantárgyak rendszerét, az egyes tantárgyak időkeretét (óraszámát), a tananyag felépítését és felosztását az egyes évfolyamok között, továbbá az adott szakasz befejező évfolyamának kimeneti követelményeit. A kerettanterveket a megadott keretek között a saját viszonyaikra adaptálják az iskolák.¹⁵

Ahhoz, hogy képet kapjunk a valószínűség témakörének magyarországi tanításáról, elsősorban a kerettantervek és a tankönyvek vizsgálata szükséges. Ennek érdekében összevetettük a jelenleg leggyakrabban használatos kerettanterveket és a hozzájuk tartozó tankönyvcsaládokat.¹⁶

A NAT-ra épülő tantervek közül:

- Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettanterv, Magyar Közlöny, 2004 (Óraszámcsökkentésből származó átdolgozott változat.)
- Mozaik Kerettantervrendszer, Mozaik Kiadó, Szeged, 2004
- Apáczai Kerettantervcsalád, Eger, 2007
- A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének kerettanterve, Budapest, 2008
- Műszaki Könyvkiadó, Matematika 1 – 8. Mintatanterv, Budapest

Elsőként a kerettantervek javasolt óraszámait néztük meg az egyes évfolyamokon. Megpróbáltuk feltérképezni, hogy a kerettantervek az éves óraszám hány százalékát fordítják a valószínűség-statisztika témájára. Ezeket a következő táblázat foglalja össze:

¹⁵ A 2013-ban bevezetésre kerülő NAT alapján készülő tantervek még nem ismertek.

¹⁶ A választás azért esett ezekre, mert tudomásunk szerint a legtöbb helyen ezeket használják, vagy az iskolák ezek alapján készítik el helyi tantervüket. Arra vonatkozóan sincs központi kimutatás, hogy az iskolák milyen arányban választják az egyes tankönyvcsaládokat.

A valószínűség, statisztika témakör százalékos aránya az adott tantervben:												
KIADÓ	ÉVFOLYAM											
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Apáczai	11,8	10,8	11,5	10,1	0* ¹⁷	0*	0*	9	5,4	10,8	8,1	4,1
Mozaik	2,4	1,8	3,3	4	5,4	4,6	7,2	6,4	4,5	7,2	9	9
Műszaki	** ¹⁸	**	**	**	2,7	**	**	5				
Nemzeti	2,7	2,7	5,4	6,7	8,6	7,4	6,7	8,1	5,4	6,3	6,3	9,3
OM	Nem tartalmaz javaslatot az óraszámokra											

A tantervek együtt tárgyalják a statisztika és a valószínűség témakörét, ezért a fenti táblázatban olvasható számok a valószínűség és statisztika együttes megjelenését mutatják. A részletes tananyagrendszer vizsgálata szükséges ahhoz, hogy megtudjuk, ebből ki mennyit szán a statisztika alapfogalmainak tanítására, és mennyit a valószínűségre. Jelen vizsgálat a valószínűség fogalmának épülésére fókuszál.

Az óraszámok tanulmányozása során két dolog tűnik szembe. Először is, hogy a matematika tanítása során az óraszámokat tekintve ez a témakör a legkevésbé hangsúlyos¹⁹. A másik, talán nem ennyire nyilvánvaló észrevétel az, hogy a témakör tanítására szánt óraszámok igen eltérőek a különböző évfolyamokban és a különböző programokban.

A tantervek bevezetőjében, az általános fejlesztési célok között is több helyen olvashatunk utalást arra, hogy a valószínűség-számítással kapcsolatos tevékenységek hozzácsonthozhatók a matematika más témaköreire, a tanulók valószínűségi szemléletének fejlesztése pedig a tanév során folyamatos. Így tehát igen nagymértékben a pedagógus felelőssége a valószínűségi szemlélet fejlesztésének szem előtt tartása.

Arra is találhatunk utalást a tantervekben, hogy a valószínűségi szemlélet fejlesztése nem csak a matematika órákon valósulhat meg, szükség van a természettudományos tárgyak szoros tantárgyi koncentrációjára. Ennek gyakorlati megvalósítása azonban kérdéses, erősen függ az iskolától és az ott tanító kollégák együttműködési szokásaitól.

¹⁷ „Folyamatosan fejlesztendő”

¹⁸ „A számtan, algebra, a geometria, mérés, illetve az összefüggések, függvények, sorozatok témakörökkel kapcsolatosan foglalkozunk e témakörhöz tartozó feladatokkal is. A témakörre fordított összóraszám nem határozható meg.”

¹⁹ Összevetve a gondolkodási módszerek, számtan-algebra, geometria, kombinatorika, függvények témakörökkel.

A fentiekből következik, hogy pusztán az óraszámok alapján nem lehet következtetéseket levonni a téma fontosságára vonatkozóan. Elengedhetetlenül szükséges annak vizsgálata, hogy milyen konkrét utalást találhatunk a tantervekben részletesen kidolgozott tananyag, fejlesztési feladatok és követelmények rendszerében. Az 1. számú melléklet tartalmazza a vizsgált kerettantervekből kigyűjtött útmutatásokat.

A kezdő és az alapozó szakaszok (1 – 8. évfolyam) tantervei között a legkevesebb eltérést a tananyag épülésében látjuk. Mindegyik kerettanterv a valószínűségi fogalmak alapozását 1. és 2. évfolyamon játéktevékenységbe ágyazva kezdi. Az is közös jellemző, hogy ez a játékos szemlélet azután végigkíséri mind a 8 évfolyam tevékenységét.

Kevés eltérés van abban, hogy melyik tanterv mikor kezd a tudatos kísérletezésbe. Az Apáczai és a Mozaik tantervek már első osztálytól használják a kísérlet kifejezést, bár a tömör tantervi leírásból nem derülhet ki, hogy milyen jellegű kísérletről van szó. Ugyanezt az OM tanterve a következőképpen fogalmazza: „Események, ismétlődések játékos tevékenység során.” A többitől kissé eltérő megfogalmazás a Műszaki Kiadó tantervében szerepel: „Valószínűségi játékok, például kockadobások kimeneteleinek megfigyelése.” Ez az árnyalatnyi szóhasználati eltérés az események kimeneteleinek megfigyelését helyezi előtérbe és nem a játék egészének megtapasztalását. Azt gondoljuk, hogy az eltérő megfogalmazások ellenére mégis mindenütt arról van szó, hogy a gyerekek játszanak, közben megfigyelik, hogy vannak események, amik gyakran előfordulnak, vannak, amik ritkán, vannak, amik sohasem és vannak, amik mindig. 3.-tól 6. osztályig mindegyik tanterv a relatív gyakoriságok megfigyelésére, majd értelmezésére helyezi a hangsúlyt. Tehát kivétel nélkül mindenütt egyértelműen a statisztikai valószínűségfogalom erősödik ebben az időszakban. Kiemelt cél a biztos, lehetetlen, lehetséges fogalmak elkülönítése. Továbbá a tantervi fejlesztési célok között mindenütt jelentőséget kap az adatok lejegyzésének, megfigyelésének illetve feldolgozásának egyre tudatosabb volta. Ez lehetővé teszi a gyakoriságok megfigyelését.

7. és 8. osztályban megfigyelhető némi eltérés a tantervekben megfogalmazott tananyagok között. Az Apáczai, Mozaik, Nemzeti és OM kerettantervek egyaránt tananyagként jelölik a következőt: „A valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma.” Nehéz eldönteni azonban, hogy mit takar a „szemléletes valószínűségfogalom” meghatározás. Számomra leginkább a statisztikai valószínűséget jelenti, de ez szubjektív megítélés kérdése. A didaktikában ugyanis nincs egységes terminológia erre nézve. Jelentheti azt is, hogy a tanuló *szemléletes* képet kap arról, hogy a valószínűség egy számérték, melyet a problémától függően határozhat meg. Például megközelítheti relatív gyakorisággal, vagy bizonyos esetekben kiszámolhatja kombinatorikus úton. Mivel a középiskolai tantervekben ugyanez a kifejezés ismétlődik a számítással összekapcsolva, az gyanítható, hogy a tantervekben az utóbbi értelmezésről van szó. A Műszaki tanterv igen egyértelműen fogalmaz: „A relatív gyakoriság meghatározása. A valószínűség kiszámítása kombinatorikus gondolatmenettel. A kiszámított valószínűség és a relatív gyakoriság összehasonlítása.”

A középiskolai folytatás tantervi szinten egyértelműen a valószínűség klasszikus modellben történő kiszámítására helyezi a hangsúlyt. A klasszikus modellben történő számítások mellett a geometriai modell szerepel még a Mozaik tantervben. A valószínűség fogalmának építése a 9. évfolyamban kimarad, egyik tanterv sem foglalkozik ezzel ebben az évben. Tanterveink egységesek abból a szempontból is, hogy a 10. évfolyamon kísérlik meg a számítható valószínűséget definiálni, és vizsgálni a relatív gyakoriságokkal való kapcsolatát. Mivel a középiskolai tantervek a tananyag és a követelmények szintjén igen egységesek, a tankönyvek vizsgálata után derülhet csak ki, hogy felépítésben és hangsúlyokban milyen eltérések vannak.

Nagy különbség van a tantervek között a fejlesztési feladatok értelmezésében és megfogalmazásában. Az 1. számú melléklet táblázata azt mutatja, hogy az egyes tantervek a valószínűség, statisztika témák kifejtése során milyen képességek fejlesztését említik, és azt hány évfolyamban teszik.

A leggyakrabban alkalmazott kifejezés a „valószínűségi szemlélet alapozása” volt, mely minden tantervben jelentős hangsúlyt kap. Ez az általános megfogalmazás természetes, hiszen a valószínűség témájában mozgunk és illeszkedik a NAT-ban megfogalmazott fejlesztési feladathoz. A NTK tantervének első négy osztályában következetesen történik utalás arra is, hogy ez miben nyilvánul meg. A többi tantervben ilyen jellegű kifejtés nem jelenik meg, vagy csak esetlegesen. Úgy gondoljuk, hogy ennek a kifejezésnek a pontosításában a magyar matematika didaktikának még van pótolnivalója.

A következő leggyakrabban használt fejlesztési feladat a megfigyelőképességre utalt. Ez a relatív gyakoriságok megfigyeléséből adódik. A rendszerező-képesség fejlesztése négy tantervben jelenik meg, ami valószínűségi kísérletek adatainak feldolgozására utal. A logikai gondolkodás fejlesztését szintén négy tanterv említi, mely a determinisztikus és véletlen események elkülönítésére utal.

A többi fejlesztési cél megemlítése igen esetleges. Úgy gondoljuk, hogy a valószínűségi gondolkodás sokkal több általános fejlesztési területet magában foglal, mint ami a tantervekben direkt módon megjelenik. Például a kombinatorikus gondolkodást összesen két tanterv említi, pedig nyilvánvaló, hogy a kísérlet kimenetelinek számba vételekor ez a terület érintett. A valószínűségi tevékenységeknek más területre is kiterjedő fejlesztő hatása van. Ennek tudatosabb átgondolása és hangsúlyozása arra ösztönözheti a tanárokat és a tankönyvírókat, hogy az ilyen jellegű tevékenységeket ne csak a valószínűség-statisztika téma feldolgozásának idején alkalmazzák. Így érhető el az, hogy a valószínűségi gondolkodás fejlesztése valóban folyamatosan megjelenjen a tanév során.

Érdemes áttekinteni azt is, hogy a tantervek más témák kidolgozásakor hol tartják fontosnak a valószínűségi szemlélet fejlesztését. A gondolkodási módszerek alapozása során a NTK, az Apáczai, az OM és a Mozaik Kiadó említi a valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztését, de mindegyik csak 5. és 6. osztályban, valamint az Apáczai kiadó 11. osztályban is. A Műszaki Kiadó tantervében 1. osztályban megemlíti a valószínűségi kísérleteket a számtan algebra

témakörében, 3. és 4. osztályban a függvények témakörében, valamint a mérések témakörben.

A fentiek alapján úgy tűnik, a kerettantervekben leírt fejlesztési célok megvalósítására vonatkozó információk sem bizonyulnak elégségesnek a téma feltérképezésére. Ezért szükség van a tankönyvek feladatainak és tevékenységeinek felkutatására, hiszen a pedagógus számára is fontos támpont tanterve mellett a tanulók számára választott tankönyv feladatanyaga.

3.3. A tankönyvek vizsgálata

A magyarországi oktatás gyakorlatában a pedagógusok és a diákok számára egyaránt meghatározó tényező a tankönyv a tanulás és tanítás folyamatában. A tankönyvet a pedagógus vagy az iskola választja az iskola pedagógiai programjához igazodva. Ezután az az óravezetés fontos eszköze lesz. A tankönyv mintapéldái, ajánlott tevékenységei, a fogalmak meghatározása és a gyakorlásra kitézített feladatai vezetnek sok tanárt és diákot egyaránt a tanulás folyamatában. Sok esetben a pedagógus a tankönyv használatát úgy értelmezi, hogy lépésről lépésre végigmegy a feladatok és definíciók láncolatán. „...úgy érzi, nem térhet el a javasolt sorrendtől, mert hátha a tanulóknak kára lesz belőle. Vagy ha túl soknak találja is a gyakorló feladatokat, nem mer kihagyni belőlük, mert hátha a kimaradóra lesz szükség valamikor. Inkább feladja valamennyit házi feladatnak.” (Szendrei, 2005. 298.o)

Ebből következően gondoljuk úgy, hogy a tankönyvek tevékenységeinek, feladatainak, meghatározásainak vizsgálata nagyjából tükrözi a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének helyzetét Magyarországon.

Az áttekintett tankönyvek a fent felsorolt tantervek valamelyikének alapján készültek. A tankönyvek listáját a 2. melléklet tartalmazza. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a pedagógusok körében elterjedt és használatos módon hivatkozunk ezekre:

- „Hajdu” tankönyvcsalád, Műszaki Kiadó (melléklet: 1–2.)
- „C. Neményi” tankönyvek, 1 – 4. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó (melléklet: 21 – 24.)
- „Török Tamás” tankönyvek, 1 – 4. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó (melléklet: 17–20.)
- „Sokszínű” tankönyvek, 1 – 8. osztály, Mozaik Kiadó (melléklet: 32–39.)
- „NTK” tankönyvek, 5 – 11. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó (melléklet: 25–31.)
- „Apáczai” tankönyvek, 5 – 11. osztály, Apáczai Kiadó (melléklet: 40–46.)
- „Vancsó” tankönyvek, 9 – 12. osztály, Műszaki Kiadó (melléklet: 13–16.)

3.3.1. A valószínűség fogalmának alapozása az alsó tagozatos tankönyvekben

Ha az alsó tagozatos tankönyvek szerkezeti felépítését vizsgáljuk, azonnal az tűnik fel, hogy a valószínűség témaköre mindig tankönyv végére kerül. (Egyetlen kivétel ez alól a 4. osztályos Sokszínű tankönyv, amelyben a témát az első félév végére tervezték.) A gyakorlatban ennek a ténynek fontos vonzata lehet. A tanító

sok esetben nem tudja tartani az előírt tanmenetet, előfordulhat, hogy erre a témára egyszerűen nem marad idő.

A fejezetcímek megfogalmazásában a legtöbb esetben szerepel a „játék” szó, ami megnyugtathatja a tanítót abban a hitében, hogy nem tragédia, ha esetleg kimarad. Ráadásul ehhez a témakörhöz alsó tagozaton nem kapcsolódik olyan erős követelményrendszer, mint például az alapműveletek tanításához, ami szintén erősítheti ezt a hitet.

Az alsó tagozatos tankönyvekben olvasható valószínűségi tevékenységeket alapvetően négy csoportba soroltuk: játék, feladat, kísérlet és mintapélda. A 2. számú melléklet táblázatában látható, hogy a különböző tevékenységtípusból hány darab jelenik meg a tankönyvekben.²⁰

Szóhasználatban célszerű különbséget tenni játék, és játékos tevékenység között. A játék rendelkezik azzal az ismervvel, hogy a játékosnak van valamilyen nagyságú szabadsága. Szabad például tévedni. Egy valószínűségi játék során egyáltalán nincs garancia arra, hogy aki „okosan” játszik, az nyer. Éppen ez a fajta bizonytalanság képezi egyik sajátosságát valószínűségi szemléletünknek. Egy játék lejátszása során didaktikai megfontolás miatt nem tehetjük fel a kérdést, hogy „mi a valószínűbb?”. Ki kell várni, míg a gyerekek elég tapasztalathoz jutnak ahhoz, hogy észrevegyenek bizonyos tendenciákat, összefüggéseket.

Megjegyzés: Játéknak tekintjük például a következőt: *Válassz egyet a következő állításkártyák közül! Két kockával dobj! A játéktáblán léphetsz egyet a bábuddal, ha a dobott számokra igaz az állításod. Az nyer, aki először ér célba.*

A: Mindkét kocka ugyanazt a számot mutatja
--

B: A dobott számok szorzata páros

C: A dobott számok összege páros

Ebben a megfogalmazásban ez a típusú tevékenység játéknak nevezhető, hiszen a gyerek választása befolyásolja a nyerést vagy veszítést. A tapasztalatok összegzését jelenti, ha a lejátszás után a gyerekek megfogalmaznak bizonyos észrevételeket. Például, hogy valamelyik kártyával könnyebb volt nyerni. (Nem jelent gondot az sem, ha a játék menete nem a tanító által várt eredményt hozza, és mondjuk a C kártyával érnek először célba. Ez is véletlen egy „arcát” mutatja.)

Ugyanez a tevékenység nem nevezhető játéknak, ha előre megkérdezzük, hogy szerinted kinek van nagyobb nyerési esélye, és miért. Ebben az esetben a tevékenység célja, hogy a gyakorisággal igazoljuk gondolatmenetünket, hiszen előre megbeszéltük, hogy kit várunk győztesként. Ráadásul egy konkrét lejátszás után a tanítónak magyarázkodni kell, ha az aktuális játék menete nem úgy alakul, ahogyan vártuk. Ez utóbbi tevékenységtípus ezért inkább a kísérletek közé tartozik.

²⁰ A vizsgálat csak az alaptankönyvekre terjedt ki, a feladatgyűjtemények, munkafüzetek, tankönyvhöz ajánlott képességfejlesztő füzetek itt nem szerepelnek.

(Például Hajdu tankönyv 4. osztály 151.o. 5. feladat; Sokszínű tankönyv, 4. osztály 1. félév 82.o.)

Ha egy pillantást vetünk a 4. melléklet táblázatára, egyértelműen látható, hogy a tankönyvek útmutatása alapján milyen keveset játszanak a szó igazi értelmében a gyerekek a matematika órán. Továbbra is a tanító feladata, hogy kitalálja és megszervezze a gyerekek játéktevékenységét. Kivételt képeznek a C. Neményi tankönyvek, melyek az átlagosnál kicsivel több játéktevékenységet ajánlanak.

A valószínűségi kísérletek célja az alsó tagozaton a gyakoriság fogalmának előkészítése (a szakszó használata nélkül). Későbbi években a gyakoriságok megfigyelésével eljutnak majd a relatív gyakoriság fogalmáig. A tankönyvek vizsgálata során azt tapasztaltuk, hogy a kísérletezés az alsó tagozaton mindenütt fontos alapját képezi a valószínűség fogalmának fejlesztésének. Sok szép és érdekes problémafelvetést találhatunk tankönyveinkben.

Megállapítható, hogy a feladatokhoz sorolt valószínűségi tevékenységek minden esetben a „biztos”, „lehetetlen” és „lehetséges, de nem biztos” fogalmak elkülönítésére irányul.

Például: Egészítsd ki a mondatokat a lehetséges, biztos, vagy lehetetlen szavakkal!

- a) *Délután sakkozni fogok a barátommal., hogy nyerek majd.*
 - b) *Ha elvégeztem a 3. osztályt, jövőre, hogy negyedikes leszek.*
 - c) *Az osztálylétszám 25, ezért, hogy mindenkinek legyen padtársa.*
-(Sokszínű tankönyv, 3. osztály 2. félév 69. oldal)

Ezen típusfeladatok mellett a C. Neményi, a Hajdu és a Török tankönyvekben megjelennek olyan feladatok is, amelyek nem kizárólag ezeket a fogalmakat erősítik. Például:

Öt piros, négy zöld és két sárga golyó van a zsákban. Legalább hány golyót kell kivenned a zsákból, hogy

- a) *biztosan legyen köztük zöld?.....*
- b) *biztosan legyen köztük piros is és sárga is?.....*
- c) *biztosan legyen köztük piros, zöld és sárga is?.....* (Török tankönyv 4. osztály 2. félév 77. oldal)

Ebben a feladattípusban az alapprobléma messze túlmutat a biztos fogalmán, inkább a skatulya elv használatának bevezetését szolgálja. A tanulónak már fogalma kell, hogy legyen a „biztosról”, ha egy ilyen típusú feladatot meg akar oldani. Ez a feladattípus szerkezetét tekintve olyan logikai feladvány, melyet a valószínűség témakörének tárgyalásakor célszerű elővenni. Nagyon jól fejleszti a logikus gondolkodást. A valószínűségi gondolkodást abban az esetben tudja fejleszteni, ha azt is megtapasztalják, hogy mi történik, ha például 5 golyót vesznek ki a zsákból.

A mintapéldák kidolgozásának lehetőségével kevés tankönyv él, tekintettel arra, hogy ebben az életkorban a cselekvő tapasztalatszerzésnek van meghatározó szerepe. A Hajdu tankönyvek mintapéldái a lehetetlen, biztos, lehetséges fogalmak elkülönítését foglalják össze, illetve 3. osztályban egy esetben az összes eset kombinatorikus elrendezését mutatja be. Következtetése csak az adott feladatra

vonatkozik. Mögöttese annak megfigyeltetése, hogy ami (az adott feladatban) többféleképpen előfordult, az valószínűbb.

Meghatározásra alsó tagozaton egyedül a Török tankönyv vállalkozik: „Egy valószínűségi játékhoz tartozó két esemény közül az a valószínűbb, amelyik többféleképpen következhet be. A kísérletek során nem mindig a valószínűbb esemény következik be többször. Az előrejelzést nem mindig igazolja a tapasztalat.” (4. osztály) A matematika tanításának és a tankönyvíróknak egyaránt alapvető dilemmája, hogy meghatározásainak mennyire kell pontosnak lenni a fogalom alakulásának időszakában. Ha ebben az időszakban túl nagy precizításra törekcsenek, a gyerekek nem fogják megérteni a tartalmakat. Amennyiben megelégszünk egy kevésbé korrekt meghatározással, az esetleg matematikailag helytelen. A fenti definíciót a szerző nyilvánvalóan nem akarta bonyolítani még azzal is, hogy megvizsgálja annak érvényességi körét. Ebben a fogalmazásban a „valószínűségi játék” fogalma klasszikus valószínűségi modellben történő játékokra szűkül.

A 4. melléklet táblázatából az is látható, hogy az alsó tagozaton felvetett valószínűségi problémák elsöprö többsége a klasszikus valószínűségi modellben vizsgálódik. Dobókockával, pénzérmével doznak, színes golyókat húznak egy zsákból stb. Minden esetben véges sok elemi esemény szerepel, melyek egyenlő valószínűséggel következnek be. Ily módon ez a tevékenységtípus jól előkészíti a valószínűség klasszikus kiszámításának módját. A gyerekek megtapasztalják, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az általában többször elő is fordul egy kísérletben. A szakirodalomban több helyen olvashatunk arról, hogy a fogalomalkotáshoz a példák mellett elengedhetetlenül szükség van az ellenpéldákra is. (Skemp, 1975. 28.o) Amennyiben a gyerekek csupán a klasszikus valószínűségi modell segítségével megoldható problémákat kapnak, nem találkoznak olyan ellenpéldával, melyben nem annak van nagyobb esélye, ami többféleképpen előfordulhat. (Pl. 7. melléklet 17. feladat)

A tankönyvek nem valószínűségi fejezeteiben olyan tevékenység, melyben a véletlennek is szerepe van mindössze a C. Neményi alsó tagozatos tankönyveiben található.

3.3.2. A valószínűség fogalmának épülése a felső tagozatos tankönyvekben

Az 5-8. évfolyam számára kidolgozott tankönyvek szerkezeti felépítése igen eltérő. Az egyes évfolyamokon feldolgozott tananyagok, tevékenységformák és azok időzítése változatos képet mutat. A legtöbb esetben a valószínűség önálló fejezetben szerepel, és nem feltétlenül az év végén. Kivétel ez alól a 6. és 7. osztályos Apáczai tankönyv. Ez utóbbiban nincs önálló fejezet a témára, az arányos következtetések illetve a számelmélet témájának feldolgozásakor találhatunk néhány valószínűségi feladatot.

A Hajdu tankönyvek 5. és 6. osztályban a törtek, illetve a százalékszámítás tanításának idején iktatják be a valószínűség témakörét önálló fejezetben. A többi tankönyvben a valószínűség témaköre önálló egység még akkor is, amikor a fejezetcím a statisztikával közös. Például a Sokszínű 5. osztályos tankönyv a statisztika mérés című fejezetének *valószínűségi játékok* című alfejezete.

Az 5. számú mellékletben látható, hogy a különböző tevékenységtípusokból hány darab jelenik meg a tankönyvekben.²¹

Továbbra is igaz az a megállapítás, hogy a játék elenyésző részét teszi ki a tevékenységeknek. Még abban az esetben is, amikor a fejezetcímekben a „játék” szó megjelenik. Kivételt képez ez alól a NTK 5. osztályos tankönyve. Az itt található játékok eljátszása után a tanár döntése, hogy az osztályban milyen következtetéseket vonnak le, maga a tankönyv ezt nem sürgeti. A tankönyv szemléletében ezen az évfolyamon az alsó tagozat szerves folytatását képezi.

„... az egzaktásnak nincs határa, nincs olyan precíz módon megfogalmazott definíció vagy tétel, amibe még precízebb álláspontról bele ne lehetne könni.” írja Kalmár László Integrállevél c. könyvében. A tankönyvekben látható, hogy a szerzők töreksenek a valószínűség fogalmának definiálására. A felső tagozatos tankönyvek a relatív gyakorisággal kísérlik meg meghatározni a fogalmat. Ezen meghatározások egy szigorú matematikus számára biztosan pontatlanok, de a fogalomalkotás ezen fázisában elfogadhatók. A valószínűség fogalmának meghatározása mindegyik tankönyvben a relatív gyakoriság fogalmának segítségével történik.

- Hajdu tankönyv, 7. osztály: „A nagy számok törvénye azt fejezi ki, hogy nagy számú kísérlet esetén nagy a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság jól megközelíti a valószínűséget.” Megjegyzés: A nagy számok tapasztalati törvényét valójában axiómának fogadja el. A „jól megközelíti” kifejezés ebben a meghatározásban inkább hétköznapi, mint tudományos értelemben szerepel a gyerekek számára.
- Apáczai tankönyv, 8. osztály: „Az a p szám, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az esemény valószínűsége. Az A esemény bekövetkezésének valószínűségét $P(A) = p$ ($0 \leq p \leq 1$) valós szám jelöli. (P betű a latin *probabilis*: valószínű szó kezdőbetűje.)”
- Sokszínű tankönyv, 7. osztály: „Adott A esemény valószínűségének azt a számot tekintjük, ami körül a relatív gyakoriság ingadozik. Az A esemény valószínűségének jele: $P(A)$ ” Megjegyzés: Itt az „ingadozik” tulajdonság szintén alapfogalomként szerepel.
- NTK, 7. osztály: „A vizsgált tetszőleges események valószínűsége tehát az a szám, amely körül az esemény relatív gyakorisági értékek ingadoznak, ha elegendően sok kísérletet végzünk.” 8. osztály: „Megfigyelhetjük, hogy egy-egy esemény relatív gyakorisága nagyon sok kísérlet esetén mindig körülbelül ugyanannyinak adódik. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. $P(A)$ az A esemény valószínűsége, ahol $0 \leq P(A) \leq 1$.”

A meghatározások mindegyike a nagy számok törvényét axiómának fogadja el, akár megnevezi, akár nem. Közös jellemző továbbá, hogy alapfogalomnak tekinti az ingadozik, a körülbelül ugyanannyinak adódik, illetve a jól megközelít

²¹ A tankönyvek mellett a tanárok használnak feladatgyűjteményeket vagy egyéb oktatást segítő anyagokat is. Ezért a táblázat tanulmányozása csak az egyes tevékenységtípusok hangsúlyának megállapítására alkalmas.

kifejezéseket. A felső tagozatos tankönyvek meghatározásai a valószínűség fogalmának statisztikus megközelítésére irányulnak.

A tankönyvek 7. vagy 8. osztályban fontosnak tartják, hogy egy módszer közöljenek a valószínűség klasszikus valószínűségi mezőben történő kiszámítására. Például Hajdu tankönyv 8. osztály: „Ha véges sok elemi esemény van, és az elemi események bekövetkezésének egyenlő a valószínűsége, akkor egy

$$\text{esemény valószínűsége} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}.$$

Ezek a szabályok példát adnak a valószínűség kiszámításának egy módjára. Már a szabály kimondása előtt is rendelkeznek tapasztalatokkal a valószínűség kiszámításának ezen lehetőségéről, és a feladatok többsége is ezt kéri. A szabályok megadásakor a szerzők minden esetben kijelölik annak érvényességi körét is. Ennek ellenére továbbra is igaz az a megállapítás, hogy tankönyveinkben kevés ellenpélda szerepel olyan problémák bemutatására, amikor ez a szabály nem alkalmazható. (4. melléklet táblázata)

A kísérletek és feladatok számának aránya ezekben az években megváltozik. Egyre több időt töltenek feladatmegoldással, és kevesebbet kísérletezéssel vagy játékkal. Az alsó tagozatos tapasztalatokra építve, a valószínűség kombinatorikus úton való kiszámítására helyeződik a hangsúly.

A kísérletek végzése esetében nem tisztázott, hogy mi a kísérlet végzésének célkitűzése. Hiányolható, hogy nincsenek a valószínűségre vonatkozó lehetséges hipotézisek egymás mellé állítva, melyek közül néhányat a kísérlet eredményének hatására elvethetnének. Ennek hiányában az a képzet alakulhat ki a tanulóban, hogy a kísérlet szerepe valamilyen elméleti érték meghatározása, vagy bizonyítása.

Továbbra is igaz az az állítás, hogy a feladatok egy része nem elsősorban a valószínűségi szemlélet fejlődésére van hatással, hanem más gondolkodási módszerek fejlesztését segíti. Például a Sokszínű 5. osztályos tankönyv hat feladata közül öt a skatulya elvre épül. A klasszikus valószínűségi modellben megfogalmazott, „mi a valószínűsége, hogy...” típusú feladatok nehézsége pedig a legtöbbször az esetek összeszámlálásában rejlik, amivel a kombinatorikus gondolkodás fejlesztése történik. A 4. melléklet táblázatából kiolvasható, hogy a feladatok többsége kombinatorikus úton oldható meg.

A fent leírtak alapján kijelenthető, hogy a valószínűség egy számmal történő kifejezése a felső tagozaton minden esetben megtörténik. Mindegyik könyvben szerepel, hogy egy esemény valószínűségéhez rendelhető szám 0 és 1 közötti értékeket vehet fel. A kombinatorikus kiszámítási módból és a relatív gyakoriságokból egyaránt adódik, hogy ez a szám közönséges tört formájában jelenik meg. Ha relatív gyakoriságokkal közelítenek, a kísérletek száma változó, csak kevés esetben 100. Két tankönyvben (Apáczai és Hajdu) történik utalás arra, hogy a valószínűséget százalékban is ki lehet fejezni.

A tankönyvek nem valószínűségi fejezeteiben olyan tevékenység, vagy feladat, melyben a véletlennek is szerepe van nem található. Kivételt képez a 6. és 7. osztályos Apáczai tankönyv, melyekben viszont nincs valószínűségi fejezet.

3.3.3. A valószínűség fogalmának továbbépítése a középiskolai tankönyvekben

A középiskolai folytatásban a valószínűség témakörének feldolgozása a 10. és 11. évfolyamra koncentrálódik. A 9. osztály tananyagából kimarad a téma, a 12. évfolyam pedig az összefoglalás, az érettségire való készülés jegyében zajlik.

Tekintettel arra, hogy a játék és a kísérlet itt már nagyon csekély mértékben jelenik meg, nincs értelme tovább a tevékenységeket ilyen szempontból kategorizálni. A kísérletezés néhány esetben számítógépes szimulációval történik, mely lehetővé teszi nagy mintán a relatív gyakoriságok értelmezését.

A valószínűség fogalmának meghatározása során az Apáczai és a Hajdu tankönyvek továbbra is a relatív gyakoriságokból indulnak ki:

- Apáczai tankönyv, 10. osztály: „Azt a számot, amely körül az A esemény relatív gyakorisága viszonylagos stabilitást mutat, az A esemény valószínűségének nevezzük. Jele: $P(A)$.”
- Hajdu tankönyv 10. osztály: „A valószínűség-számítás abból a feltevésből indul ki, hogy minden véletlen A eseményhez hozzárendelhető egy 0 és 1 közé eső szám, az esemény valószínűsége, amely megmutatja, hogy sok kísérlet után az eseteknek körülbelül mekkora hányadában következik be az esemény. Az A esemény valószínűségét a következőképpen szokás jelölni: $P(A)$ A lehetetlen esemény valószínűsége $P(O) = 0$. A biztos esemény valószínűsége $P(H) = 1$ ”

A Vancsó tankönyvben a valószínűség meghatározása nem a relatív gyakoriságokkal kapcsolatos. Állítások következő láncával:

- Az elemi eseményekhez tartozó valószínűségek összege 1 .
- A lehetetlen esemény valószínűsége 0 .
- A biztos esemény valószínűsége 1 .
- Egy esemény valószínűsége nulla és egy közötti szám (beleértve a 0 -t és az 1 -et): $0 \leq P \leq 1$

A középiskolai tankönyvek mindegyike külön fejezetet szán a valószínűség klasszikus kiszámításának módjára, és annak gyakorlására. Ha megvizsgáljuk az érettségi feladatsorokat,²² azt tapasztaljuk, hogy a középszintű érettségien a valószínűség klasszikus kiszámítására vonatkozó példa az utóbbi 7 év mindegyikében szerepelt. Emelt szinten is kevés olyan feladatot találunk, amely nem a kombinatorikus modellt követi. (2011. májusi érettségi feladatsorban található egy geometriai modell segítségével megoldható feladat.) Ebből következik, hogy az érettségire való készülés során is a kombinatorikai modell lesz hangsúlyos.

A tankönyvekben döntő többséggel a „Mi a valószínűsége, hogy...?” típusú kérdések jelennek meg. Ha egy eseménynek van valószínűsége, abból nem következik, hogy azt elméleti modell segítségével ki is tudjuk számolni. A „Mi a valószínűsége, hogy...” típusú kérdésfeltevés a egy elmélet segítségével történő megoldást kér. Ezáltal kimondatlanul magasabbra értékelődnek az elméleti modellel megoldható problémák.

²² http://www.oh.gov.hu/3_1_6_korabbi_erettsegi/korabbi-erettsegi-100830 (2012.10.05.)

Az elméleti modell modellek megszületése után nagyon kevés esetben kerül sor az eredmények statisztika útján történő tesztelésére. Ezért például elenyésző számú ilyen feladattal találkozunk: „Vegyél egy tízforintost. és 50, 100, 10000 vagy 10000 dobás segítségével, dönts el, hogy hamis vagy sem.” A Vancsó tankönyv 10. osztályos 116. o. 267. és 271. feladatai sorolhatók ebbe a kategóriába.

A tankönyvek között eltérés figyelhető meg abban, hogy a modellválasztás kérdését mennyire hangsúlyozzák. Erre a Vancsó tankönyv a többinél nagyobb hangsúlyt fektet. Ez az egyetlen tankönyv, mely a valószínűség különböző megközelítéseit taglalja.

Áttekintettük, hogy a tankönyvek a valószínűséget milyen típusú számmal fejezik ki. Azt tapasztaltuk, hogy a tankönyvek valószínűség-számítási fejezeteiben közönséges törttel történik. Nagyon kevés olyan feladat található, mely a valószínűség értékének meghatározását kifejezetten százalék alakban kéri. Például Apáczai tankönyv 9. osztály százalékszámítás témakörében:

Hány százalék az alábbi események valószínűsége?

- a) Egy szabályos érmét feldobva fejet dobunk.
- b) Két szabályos érmét feldobva két fejet dobunk.
- c) Egy szabályos dobókockát feldobva 6-ost dobunk.
- d) Egy szabályos dobókockát feldobva prímszámot dobunk.
- e) Két szabályos dobókockát feldobva a dobott számok összege 9 lesz.

3.4. A dokumentumelemzés összegzése

A valószínűség témaköre a NAT-ban felsorolt fejlesztési feladatok mindegyikében megtalálható. A NAT részletes fejlesztési feladatokat tartalmazó részében a gondolkodás és az ismeretek alkalmazásának területén nevezi meg a valószínűség témakörét, a többi fejlesztési feladatban a témakör indirekt módon jelentkezik.

A kerettantervek nem egyformák a valószínűség-statisztika témaköréhez tartozó fejlesztési feladatok megfogalmazásában, és a valószínűség-statisztika témaköréhez ajánlott óraszámok meghatározásában.

A kerettantervek az általános célok meghatározásakor minden esetben említést tesznek a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének lehetőségéről a matematika más területein, ez viszont a részletes kidolgozás során csak kevés esetben jelenik meg.

Az alsó tagozatos tankönyvekben valószínűség témaköre az év végére marad. Az alsó tagozatos tevékenységek alapvetően játékok és kísérletek, de már ebben a szakaszban megjelennek feladatok. A tevékenységek többsége klasszikus valószínűségi modellben vizsgálódik.

A felső tagozatban a valószínűség relatív gyakoriságokkal való értelmezése hangsúlyos. Ezzel párhuzamosan megjelennek a valószínűség kombinatorikus módon való számolására szolgáló feladatok.

A középiskolai tankönyvek a valószínűség fogalmának értelmezését eltérő módon járják körül. Az érettségi követelmények tükrében egyértelmű, hogy a feladatok többsége továbbra is a klasszikus kiszámítási módot gyakoroltatja.

A tankönyvekben nem, vagy csak elenyésző mértékben jelennek meg valószínűségi problémák a matematika más témaköreiben.

A valószínűség számítási feladatok a valószínűség meghatározását nem százalék alakban kérik.

4. A VIZSGÁLAT BEMUTATÁSA

4.1. A vizsgálat előzményei

4.1.1. Green vizsgálata

Az 1970-es évek végén és 80-as évek elején Angliában az akkor aktuális érettségi reformjának előkészítéseként sor került az angol gyerekek matematika tudásának vizsgálatára. A matematikai gondolkodás szintjeit kívánták megállapítani. Ezen belül David Green 1978 és 1981 között a 11-16 éves gyerekek valószínűségi gondolkodását vizsgálta. Céljai következők voltak:

- Az érettségi követelmények és a tantervi revízió előkészítése;
- A valószínűség témakörében tudásszintek felállítása (Az angol értékelési rendszerben minden területen megállapítottak tudásszinteket. Ennek részeként került sor a valószínűségi gondolkodás szintjeinek megállapítására.);
- Vizsgálni az esély intuitív és tudományos fogalmának meglétét.

Ebben a vizsgálatban 2930 gyerek vett részt. A gyerekeknek 26 kérdésből álló teszt feladatsort kellett megoldaniuk. Green 1982-ben adta közre kutatásának eredményeit „Probability concept in 11-16 year old pupils” c. kutatási jelentésében. A kérdések közül 18 közvetlenül a valószínűségi ítéletalkotásra irányult, 3 a kombinatorikus gondolkodást vizsgálta, 5 pedig a valószínűség verbális kifejezését. A valószínűségi gondolkodás négy szintjét állapította meg. Green maga nem fogalmazta meg a szintekhez tartozó feltételeket, egyszerűen megadta azoknak a feladatoknak a sorszámát, amelyek az egyes szintekhez tartoznak. A kérdések tartalmát és nehézségét figyelembe véve az egyes szintek tartalmát a következő módon becsülhetjük meg:

0. szint: Nem felel meg az 1. szint követelményeinek
1. szint: Felismeri, ha egy esemény valószínűbb egy másiknál, vagy két esemény egyformán esélyes. Egyszerű kombinatorikai feladatot megold.
2. szint: Rendelkezik az esély fogalmával, jól értelmezi a „biztos”, a „lehetetlen” és a „lehetséges, de nem biztos” kifejezéseket.
3. szint: Indoklásai adekvátak, helyesek

A tanulók Green tesztben elért eredményeit a 6. melléklet tartalmazza.

Következtetései közül a jelen kutatás szempontjából a legfontosabbak a következők:

- A fiúk jobban teljesítettek a matematikai feladatok megoldásában, mint a lányok. Ez a valószínűségre vonatkozó tesztre is igaz volt, de a fiúk és lányok teljesítménye közötti különbség kisebb.
- A valószínűségi tesztben ugyan egyre jobban teljesítettek az életkor növekedésével, de a fejlődés üteme nagyon lassú. A valószínűség fogalma csak lassan alakul.

- Bár a kombinatorikus kérdések megoldásában a diákok jól teljesítettek, kombinatorikai tudásukat nem alkalmazták a valószínűségi kérdések megválaszolásakor.
- A verbális kifejezőképességet vizsgáló (indoklásos) feladatokban gyakran inadekvát válaszokat adtak minden életkorban.

4.1.2. A SIMULO kutatás

Az 1989/90-es tanévben három ország tanulói vettek részt a SIMULO vizsgálatban: Brazília, Magyarország és Kanada (Quebec). Ebben 10-14 éves gyerekek valószínűségi gondolkodását vizsgálták. A kutatás Claude Gaulin a kanadai Laval egyetem professzora és Szendrei Julianna az Országos Pedagógiai Intézet főmunkatársa vezetésével zajlott. A projekt kapcsolódott David Green méréséhez. A Green-tesztből 19 kérdést vettek át, kihagyva azokat a kérdéseket, melyek a Green-tesztben nem bizonyultak hatékonyak, illetve nagyon ország-specifikusak voltak. 426 diákot teszteltek. A Quebecben ezen túlmenően minden egyes gyerekkel interjút készítettek a kérdőív feladatairól.

A kutatás mindegyik ország esetében úgynevezett elérhetőségi mintával történt.

Elsődleges céljuk az országok teljesítményének összehasonlítása volt. Kanadában akkor még nem szerepelt a tantervben a valószínűség-számítás témaköre, így érdekes kérdés volt az is, hogy a valószínűség-számítás fogalmai tanulás nélkül hogyan alakulnak. Jobban teljesítenek-e azok a diákok, akik a témával célzottan foglalkoznak a matematika órákon.

Az összehasonlítást nem pusztán a tesztek és az interjúk alapján végezték, megvizsgálták az országok tanterveit is.

A 7. melléklet tartalmazza, hogy a tanulók milyen Green-szinten teljesítettek a SIMULO kutatásban.²³

Jelen kutatás szempontjából is fontos megállapítások:

- A valószínűségi gondolkodás ugyan nagyon lassan, de összességében fejlődik az életkor előrehaladtával. Ennek ellenére minden életkorban vegyesen állnak a gyerekek a különböző Green-szinten.
- A legmagasabb Green szintet a magyar gyerekek érték el. Ennek oka lehet, hogy itt korán kezdődtek el a valószínűséggel kapcsolatos tevékenységek. Ebből következően azt a megállapítást tették, hogy a valószínűség-számítás iskolai tanítása hat a valószínűségi gondolkodás fejlődésére.
- Általában itt is megerősítést nyert, hogy a fiúk átlaga magasabb, valószínűségi gondolkodásuk jobb. Quebecben viszont nem találtak eltérést a fiúk és a lányok teljesítménye között.²⁴
- Néhány kérdés Green tesztből való átvétele során nyelvi nehézségekbe ütköztek. Világossá vált, hogy a kérdések lefordítása során bizonyos szavak jelentése a különböző nyelveken árnyalatnyi különbséggel bír. Nagyon igaz

²³ A kutatásról részletes tanulmányt készített John Izard 1991-ben. (Izard, 1991)

²⁴ Quebecben abban az időszakban még nem szerepelt a tananyagban a valószínűség-számítás.

ez azokra a szavakra, melyek a valószínűségszámítás területét érintik. Például: „esély”, „valószínű”, „esélytelen”... Ezért a kutatás vezetői fokozott óvatosságra hívtak fel a nemzetközi összehasonlításokkal kapcsolatban.

- A kutatás tapasztalatai azt mutatták, hogy a valószínűségi gondolkodás feltérképezéséhez nem elegendő a kérdőíves módszer. Ezért további kutatásokban javasolják a gyerekek megfigyelését tevékenység közben.
- A tanárok számára azt ajánlják, hogy a valószínűség témakörében ne a definíciókon alapuló rutin feladok megoldását szorgalmazzák, hanem a tevékenységekre, játékokra helyezték a hangsúlyt.

4.2. A saját vizsgálat

A 2008-tól 2011-ig tartó időszakban mi is vizsgálatot végeztünk a valószínűségi gondolkodás megfigyelésére.

4.2.1. A vizsgálat első szakasza

Az első vizsgálatot az ELTE Tanító és Óvóképző Főiskolai Karán végeztük a Matematika Tanszéken oktató kollégáim segítségével. A vizsgálat alapvető motivációja az volt, hogy információt nyerjünk a tanítójelöltek valószínűségi gondolkodásáról abból a célból, hogy ennek eredményeit a képzés minőségének javítása érdekében hasznosíthassuk. 2008-ban és 2009-ben az ELTE-TÓK 178 harmadéves hallgatója vett részt a mérésben. (2008-ban az akkori 3. évfolyam összes hallgatója.)

A mérést megelőzően a hallgatók részt vettek öt matematikai szemeszteren, melyek során tanulták a számelmélet, halmazok, logika, függvények, geometria témaköreit és ezek tantárgypedagógiáját, de valószínűségszámítást nem. Abból a feltevésből indultunk ki, hogy hallgatóink számára nem idegen a valószínűség témaköre sem. Mivel az egyetemi felvételi feltétele az érettségi vizsga, a téma alapvető fogalmaival megismerkedtek a középiskolában. Ismerik a gyakoriság, a relatív gyakoriság fogalmát. Megtanulták egyszerű problémák megoldását, események valószínűségének kiszámítását a klasszikus valószínűségi modell alapján. Tanulták, hogy egy eseményhez kapcsolható esélyt kifejezhetnek egyetlen számmal.

Ezek alapján elmondható, hogy tanítójelölt hallgatóink reprezentálják a valószínűségszámítást már tanult, de nem feltétlenül matematikai érdeklődésű populációt.

4.2.2. A vizsgálat második szakasza

A vizsgálat kérdőíves részének eredményeit 2009-ben bemutattam Debrecenben a Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások c. konferencián. Az eredmények értelmezése, a megoldásokban mutatott bizonytalanság megosztotta a hallgatóságot azzal kapcsolatban, hogy a tapasztalt valószínűségi gondolkodásra jellemző sajátosságok, vagy pedig a tanítóképzős hallgatók tudásbeli hiányosságai. Lehetőségünk nyílt közelebb jutni ennek a dilemmának a

feloldásához. 2010-ben az ELTE Természettudományi karának oktatói segítségével sor kerülhetett a kérdőíves vizsgálat megismétlésére. Ebben a mintában magasabb matematikai előképzettséget, vagy legalábbis természettudományos érdeklődést feltételezhetünk. Így került sor a kérdőíves vizsgálat megismétlésére az ott tanító oktatók segítségével. A 139 megkérdezett elsőéves hallgató közül 35-en matematika szakosak, 104-en pedig egyéb (fizika, földrajz és biológia) szakosak voltak.

Előállt annak a lehetősége is, hogy a vizsgálatot egy általános iskola 5. és 6. osztályában is lefolytassuk. A gyerekek a valószínűségszámítást még nem tanult populációt reprezentálják. Az eredeti tervek szerint az összehasonlításra felhasználtuk volna a Simulo projekt dokumentumait. Ezt azonban a fent felsorolt okok miatt elvetettük, és a kérdőíves vizsgálatot megismételtük általános iskolai tanulók körében is. A 2011-ben megkérdezett 66 diák a budapesti Bajza Utcai Általános Iskola 5. és 6. osztályos tanulója. Az ő számukra a valószínűség fogalmának szemléletes bevezetése már megtörtént, tapasztalatot szereztek a gyakoriság, a relatív gyakoriság fogalmairól, de nem tanulták még a valószínűség klasszikus valószínűségi modellel történő kiszámításának módját.

A három populáció eredményeinek összehasonlításától azt vártuk, hogy meg tudjuk ismerni a valószínűségi gondolkodás olyan vonásait, amelyek a matematikai képzettség emelkedésével járnak együtt.

4.3. A vizsgálati módszerek részletes bemutatása

A vizsgálat során a következő módszereket használtuk:

- Kérdőíves felmérés és a kérdőívek elemzése
- Tanítási órák tartása illetve megfigyelése az ELTE Tanítóképző Karán
- Tanítási órák megfigyelése az általános iskola 2., 3., 4., 5. osztályában²⁵

4.3.1. A kérdőív bemutatása

A kérdőív összeállításának két fontos szempontja volt:

- Ne akadályozza a megoldást az, ha a valószínűség témakörben nincs elég tanultság. Ezt azzal biztosítottuk, hogy kérdéseink egy része a köznyelv alkalmazásával megválaszolható volt, nem igényelt semmiféle előképzettséget. A láthatóan matematikai tartalmú problémák pedig általános iskolai tanulók számára is megoldhatóak voltak.
- Általában törekedtünk arra, hogy a megoldó ne érezze, hogy konkrét tananyagra lenne szükség a kérdések megválaszolásához. Ugyanakkor a kutatás egyik kérdése éppen az, hogy szövegkörnyezettől függően van-e iskolai és köznapi tudás. Ezért néhány kérdés kétféleképpen is megjelent. Feltettük köznapi értelemben úgy, hogy matematikai tartalma rejtve maradt. Illetve ugyanazt megkérdeztük úgy is, hogy valamilyen matematikai tananyagot, már megoldott feladatot idézett. (Pl. 19. és 22. feladatok)

²⁵ A kitöltött feladatlapok, a tanításról készült jegyzőkönyvek, videofelvételek és a hangfelvételek megtalálhatóak az ELTE-TÓK Matematika Tanszékének archívumában.

A kérdőív 23 feladatból állt, melyek közül 12 azonos a SIMULO kutatás magyar kérdéseivel.²⁶ A feladatok egy része több alkérdést is tartalmazott, ezért a megkérdezetteknek összesen 44 alkérdésre kellett válaszolniuk a kérdőív kitöltése során.

Az átvett feladatok sorszáma a következő: 1. 2. 3. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17.

A mi vizsgálatunkban két okból tűnt célszerűnek a Green-teszt és a SIMULO projekt közös kérdéseinek átvétele:

- Ezen kérdések megválaszolása általában nem igényel előképzettséget. Így alkalmasak arra, hogy különböző életkorú és tanultságú személyek (gyerekek és felnőttek, matematikai és nem matematikai érdeklődésű egyének) gondolkodását feltérképezzük.
- Az átvett kérdéseket a nagy mintán történő tesztelés során már jól bemérték. Így lehetséges volt csökkenteni annak valószínűségét, hogy semmitmondó kérdések kerüljenek a tesztbe.

Bár kézenfekvőnek tűnik az akkori eredmények összehasonlítása a mi mérésünkkel, ezt nem tettük meg. Ennek okai a következők:

- Nem állnak rendelkezésünkre az eredeti feladatlapok minősítésének szempontjai, így nem tudjuk pontosan, hogy az értékelők milyen válaszokra milyen pontszámot adtak. Bizonyos feladatok – főleg a nyelvhasználatra vonatkozóak – esetében csak az eredményeket ismerjük, de azt nem, hogy ezek hogyan születtek. Az összehasonlítás alapja pedig az azonos szempont alapján történő értékelés.
- Az eltelt évek során megváltozott a magyar matematika oktatás tanterve, és változtak a tanítási szokások is. Ezért egy ilyenfajta összehasonlítás esetleg torz képet mutatna.
- A mi elsődleges célunk a valószínűségi gondolkodás sajátosságainak feltérképezése, míg a Green-teszt elsődleges célja a követelményrendszer bemérése volt. Vagyis Green inkább arra volt kíváncsi, hogy mi az, amit tudnak, és mi az, amit nem tudnak a gyerekek. A mi kutatásunk arra fókuszál, hogy hogyan gondolkodnak a megkérdezettek.
- Mindkét vizsgálat egyértelműen igazolta, hogy a valószínűségi gondolkodás kutatásához a kérdőíves módszer nem elégséges. Ezt más kutatók ajánlása (Fischbein, Kapadia) is alátámasztja.
- Tesztünkben szerepelnek olyan kérdések is, melyek sem a Green-tesztben, sem a SIMULO projektben nem szerepeltek

4.3.2. A megfigyelt tanítási órák szervezése

Abból a – más kutatók által megfogalmazott – feltevésből kiindulva, hogy a valószínűségi gondolkodás vizsgálatához nem elég a kérdőíves módszer, szükségesnek tartottuk különböző tevékenységek megfigyelését.

Az ELTE-TÓK „Kombinatorika valószínűség és statisztika” című féléves kurzusa során a teszt megírása után 84-hallgatónak vizsgáltuk a valószínűségi

²⁶A teljes kérdőívet a 7. számú melléklet tartalmazza.

fogalmait órai tevékenység közben. Mivel az alapozó szakasz leendő pedagógusairól van szó, a képzés során a hangsúlyt általában a valószínűségi szemlélet fejlesztésére és annak tantárgypedagógiai vonatkozására helyezzük, és kevésbé a valószínűség számítására. A megfigyelés módszerét alkalmazva 3 szemináriumi csoportban követtük valószínűségi szemléletük alakulását. A szemináriumi órák 90 percesek voltak. Ezeken az órákon a tanáron és a hallgatókon kívül részt vett egy személy, aki jegyzőkönyvezte azt. Egy csoportban pedig hangfelvételen is rögzítettük az órán elhangzottakat. Mindegyik esetben ugyanazokat a problémákat vetettük fel, azonos óravázlat alapján dolgoztunk. A szemináriumok tematikáját a 8. melléklet tartalmazza.

Az általános iskolás tanulók gondolkodásának megfigyelésére óralátogatásokon vettünk részt. Ezek az órák a tanítókkal előre megbeszélt forgatókönyv szerint zajlottak. A látogatott iskolák a következők voltak:

- Az ELTE Gyakorló Általános Iskola és Középiskola (Budapest): 4. osztályban 2 óra és 5. osztályban 5 óra
- Lauder Javne Általános Iskola (Budapest): 2. osztályban 2 óra és 3. osztályba 2 óra
- Felsőtárkányi ÁMK Általános Iskolája: 2. és 3. osztályában 1-1 óra

A Lauder iskolában az órákról videofelvétel készült, a Felsőtárkányi iskolában hangfelvétel, a Gyakorló iskolában jegyzőkönyvezett megfigyelés és egy esetben videofelvétel. Több esetben ugyanazokat a problémákat vetettünk fel a gyerekeknek, mint a hallgatóknak.

4.4. A vizsgálat részletes elemzése

A kutatási kérdések megválaszolásához a kérdőívek adatának feldolgozását és tanórákon szerzett tapasztalatokat egyaránt felhasználtuk.²⁷

- a) Az elemzés első részében a kérdőív kvantitatív eredményeit mutatjuk be az egyes vizsgálati csoportok összehasonlításában.
- b) A kutatás eredményeinek részletes bemutatása a kérdőív feladatainak és az órai megfigyelések párhuzamos elemzésével történik. Ezt az alábbi résztémakörök köré csoportosítva végeztük:
- A nyelvhasználat szerepe (A kérdőív 4. 5. 6. 7. 8. 9. feladatai)
 - A valószínűség becslése és számítása (A kérdőív 1. 2. 10. 11. 12. 13. 16. 17. feladatai)
 - A kérdésfeltevés módjának jelentősége (A kérdőív 19. 20. 21. 22. 23. feladatai + órai megfigyelések)
 - Érzelmi tényezők (A kérdőív 3. 18. feladatai + órai megfigyelések)
 - A tudás aktivizálhatósága (A kérdőív 14. 15. 23. feladatai)
- c) A kutatást olyan tevékenységek bemutatásával egészítjük ki, melyek megmutatják a valószínűségszámítás kapcsolatát a matematika egyéb területeivel. (órai megfigyelések alapján)

Az ismertetés ugyanebben a sorrendben történik.

4.4.1. A vizsgálati csoportok teljesítményének összehasonlítása a kérdőív alapján

A teljes kérdőív 44 alkérdést tartalmazott. Kitöltöttsége 87,55%-os volt. Azt mutatja, hogy a megkérdezettek minden kérdésre megpróbáltak választ adni mindhárom vizsgálati csoportban. A kitöltöttség tekintetében az egyes vizsgálati csoportok között nem mutatkozott szignifikáns eltérés ($p < 0,05$). A legalacsonyabb kitöltöttsége a 12. (20%) és 13. (22%) feladatok indoklásának volt, ezt követte a 23. feladat indoklása (58%), majd a 12. és 13. feladat megoldása (76%, illetve 66%). Az összes többi feladat kitöltöttsége 80% feletti volt.

A kérdőív 44 alkérdése közül 26 esetben egyértelműen eldönthető volt, hogy a kapott válasz jó vagy sem.²⁸ Ezek a kérdések alkalmasak arra, hogy a megkérdezett három vizsgálati csoport tudását összehasonlítsuk. A többi alkérdésekre adott válaszokat a kvalitatív elemzésben használtuk fel. A 26 kérdés leírja a válaszolók meglevő tudását, a többi alkérdés a gondolkodásmódok esetleges elkülönítésére alkalmasak.

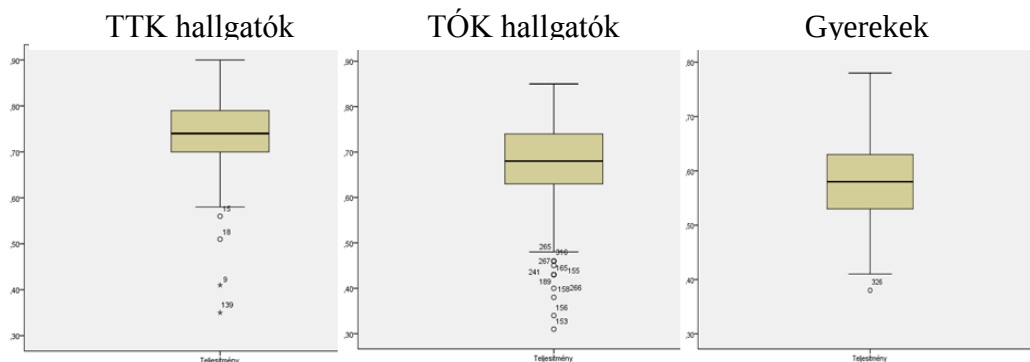
Az összehasonlításba bevont 26 alkérdésre adott válaszokat pontoztuk a probléma megértése, illetve a megfelelő matematikai modell választása és alkalmazása alapján. Az egyes kérdések 2, 3, vagy 4 pontosak voltak, attól függően, hogy milyen mélységben volt lehetséges a tudásszintet árnyalni. A teljes

²⁷ A kérdőív kiértékelése során az adott válaszok arányát százalékban adtuk meg.

²⁸ Az összehasonlításba bevont alkérdések: 1. 2. 3. 3. indoklás 4.b 4.e 6. 7. 8. 10. indoklás 11. 11. indoklás 12.13. 14. 15. 16. 17. 17. indoklás 18. 18. indoklás 22. 23. 23. indoklás

mintán a Cronbach- α reliabilitás-mutató 0,756 volt, ami azt mutatja, hogy a kérdőív összpontszáma jól korrelál az egyes feladatok részpontszámával. A lépésenkénti regresszió-analízis eredménye, hogy a legnagyobb magyarázó ereje a 23. kérdés indoklásának volt, mely az összpontszám 36%-át magyarázza, ezt követi a 17. kérdésre adott válasz, majd a 11. kérdés indoklása, és a 4.e kérdésre adott válasz. E négy kérdés együttes magyarázó ereje 74% volt.

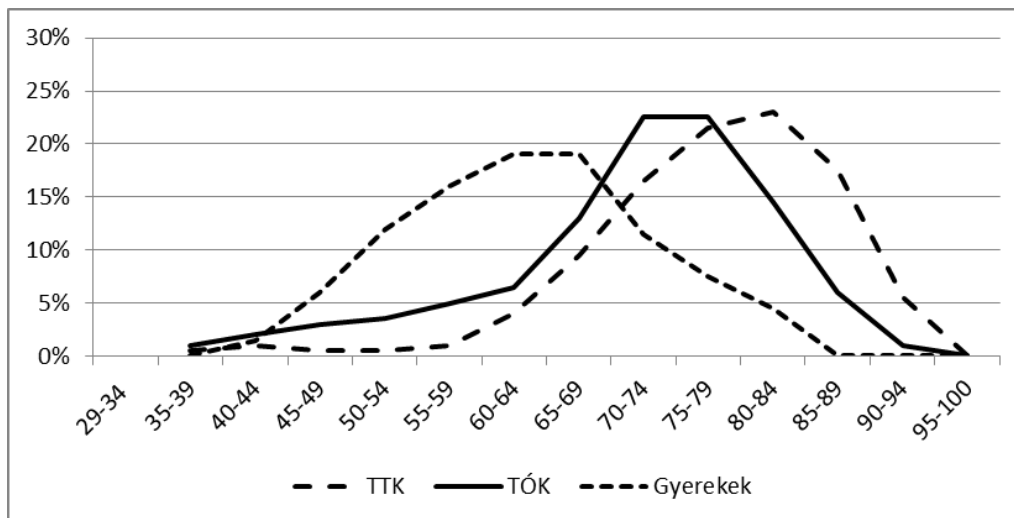
Az alábbi dobozdiagramok az összpontszám alapján nyújtott teljesítményt szemléltetik a 30 – 90% tartományban.



1. diagram

Ahogy az várható volt, a TTK hallgatók nyújtották a legmagasabb átlagos teljesítményt (77%). Ők azok az érettségi vizsgát tett személyek, akiknél magasabb matematikai tudást feltételeztünk. Ezt követték a TÓK hallgatók eredményei (átlag 66%), az érettségi vizsgát tett, de nem feltétlen matematikai érdeklődésű személyek csoportja. Végül a valószínűségi számítást még nem tanultak csoportja, a gyerekeké (átlag 58%). A TTK hallgatók teljesítménye volt a leginkább egyenletes, itt volt a legkisebb a szórás (0,087). Ugyanez a TÓK hallgatók esetében 0,1, a gyerekek esetében 0,097. Néhány válaszoló (4 TTK hallgató, 11 TÓK hallgató és egy gyerek) eredménye az átlagos terjedelmen kívül esett.

A következő diagram a válaszolók összteljesítményének gyakorisági eloszlását mutatja:



2. diagram

A TTK hallgatók esetében a görbe erősen jobbra tolódik, ami azt mutatja, hogy lényegesen kevesebb az alacsonyan teljesítők száma, mint a másik két csoportban. A TTK hallgatók 80%-a legalább 60%-os teljesítményt nyújtott. A TÓK hallgatók esetén a görbe kissé balra tolódik, legtöbbjük (80%-uk) teljesítménye 60-85%-os tartományba esett. A gyerekek teljesítményének gyakorisága volt a leginkább egyenletes, itt a görbe kissé nyújtottabb, és laposabb, mint a másik két esetben. Ez azt jelenti, hogy jóval többen vannak az alacsony pontszámot elérők, emellett 55%-uk legalább 60%-os összteljesítményt nyújtott.

Variancia-analízist hajtottunk végre annak vizsgálatára, hogy van-e a vizsgálati csoportok összteljesítménye között szignifikáns különbség. Ennek eredményét a következő táblázatban olvashatjuk:

A csoportok összehasonlítása					
Csoportok		Átlagos eltérés	Standard hiba	95% konfidencia-intervallum	
				legkisebb eltérés	legnagyobb eltérés
TTK	-	0,07208*	0,01034	0,0473	0,069
TÓK					
TTK	-	0,15454*	0,01329	0,1224	0,1867
Gyerekek					
TÓK	-	0,08246*	0,01347	0,0499	0,1150
Gyerekek					
*Szignifikáns eltérés (p < 0.05)					

Ennek alapján megállapítható, hogy az összteljesítmény tekintetében az egyes vizsgálati csoportok összpontszáma között páronként szignifikáns eltérés mutatható ki.

A feladatonkénti variancia-analízist elvégezve viszont már csak 6 alkérdés esetében (1; 10. indoklás; 11.; 11. indoklás 18. és 23.indoklás) volt mindhárom

csoportot tekintve páronként szignifikáns az eltérés. Az eltérés nem volt szignifikáns a következő kérdésekben az egyes vizsgálati csoportok között:

Vizsgálati csoportok:	Azon kérdések sorszáma, melyekben nem mutatható ki szignifikáns eltérés:
TTK -TÓK	2.; 4.b; 14.; 15.; 17.; 17. indoklás; 18. indoklás;
TTK-Gyerekek	3.; 3. indoklás; 6.; 8.; 15.
TÓK-Gyerekek	2.; 3.; 3. indoklás; 4.e; 6.; 7.; 10.; 13.; 15.; 16.; 17.; 17. indoklás; 19.; 22.; 23.

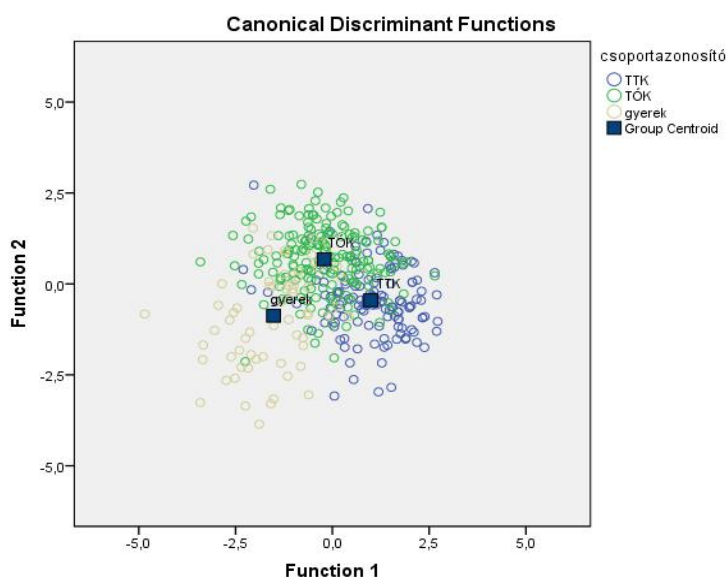
A TÓK hallgatók és a gyerekek esetében 15 alkérdést tekintve nem volt jelentős az eltérés, mely azt sejteti, hogy ez a két csoport közelebb áll egymáshoz.

Megvizsgáltuk, hogy a kérdőívre adott válaszok alapján milyen mértékben lehet felismerni a válaszolók vizsgálati csoportját azaz, hogy a válaszoló TTK hallgató, TÓK hallgató vagy gyerek volt. Ennek érdekében diszkriminancia-analízist és klaszteranalízist végeztünk.

A diszkriminancia-analízist stepwise módszerrel indítottuk el, amikor is az algoritmus a kérdések közül azokat válogatja be, amelyek fontosak a jó szétválogatáshoz. 17 lépés után 15 változóval oldotta meg az algoritmus a szétválasztást. A Wilk's Lambda statisztika ekkor csökkent le olyan mértékűre már, ami elfogadható volt. Az osztályozás pontossága az alábbi táblázatból olvasható ki:

		Besorolás		
		TTK	TÓK	Gyerek
Eredeti csoport:	TTK	75,5%	20,9%	3,6%
	TÓK	16,9%	78,7%	4,5%
	Gyerek	4,5%	42,4%	53%

Összességében a válaszolók 73,1%-át sikerült jól osztályozni, (azaz abba a csoportba került, ahová eredetileg is tartozik). Ezen belül legjobban a TÓK hallgatókat (78,7%), legrosszabbul a gyerekeket (53%). Figyelemreméltó, hogy a gyerekek 42,4%-a a TÓK hallgatók csoportjához áll közelebb, valamint, hogy a TTK hallgatók 20,9%-ára a TÓK hallgatók válaszai voltak jellemzőek. A két diszkrimináló változó segítségével szemléltetni lehet a síkbeli szóródás ábrán a válaszadókat:



A kérdésenkénti variancia-analízis és a diszkriminancia-analízis eredményei alapján úgy sejtjük, hogy az egyes vizsgálati csoportok (TTK hallgatók, TÓK hallgatók és gyerekek) nem különülnek el élesen egymástól.

Hogy sejtésünket megerősítsük, az összes kérdés bevonásával kétlépéses klaszteranalízist hajtottunk végre. A cél annak megfigyelése volt, hogy a program magától hogyan osztja csoportokba (klaszterekbe) az összes személyt, valamint az egyes klaszterekben milyen mértékben jelenik meg a három különböző vizsgálati csoport. A klaszterszámot ezért 3-ra állítottuk be.

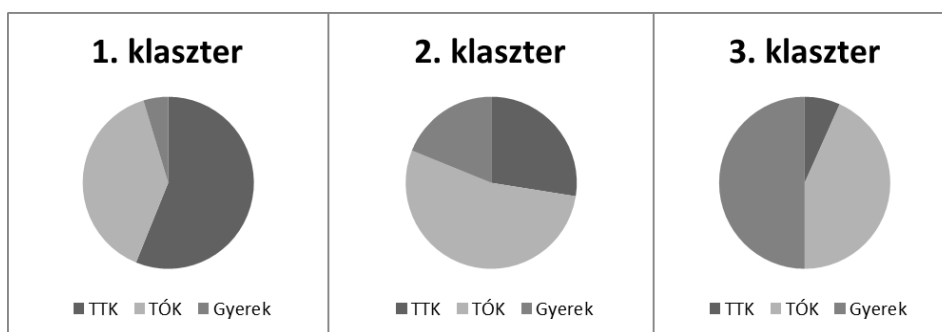
A klaszteranalízis eredményét az alábbi kereszt-tábla mutatja:

		1. klaszter	2.klaszter	3.klaszter
TTK	a csoport ennyi %-ában került az egyes klaszterekbe	69,1%	27,3%	3,6%
	az összes válaszoló közül:	25,1%	9,9%	1,3%
TÓK	a csoport ennyi %-ában került az egyes klaszterekbe	37,6%	41,6%	20,8%
	az összes válaszoló közül:	17,5%	19,3%	9,7%
Gyerekek	a csoport ennyi %-ában került az egyes klaszterekbe	44,6%	36,0%	19,3%
	az összes válaszoló közül:	2,1%	6,8%	8,4%
Összes		44,6%	36,0%	19,3%

Az összes válaszolót sikerült a három klaszter valamelyikébe besorolni. Megfigyelhető, hogy az összes klaszter tartalmaz TÓK hallgatót, TTK hallgatót és gyereket egyaránt. Az összes válaszolót tekintve, a legnépesebb az 1. klaszter (44,6%), a legkevésbé a 3. klaszterbe kerültek (19,3%).

A TTK hallgatók jelentős többsége az 1. klaszterbe került. A TÓK hallgatók viszonylag egyenletesen oszlottak el az egyes klaszterek között, de többségük a 2. klaszterbe került. A gyerekek eloszlása is egyenletesnek tekinthető, többségük az 1. klaszterbe került.

Az egyes klaszterek összetételét az alábbi kördiagramok szemléltetik:



3. diagram

Az egyes klaszterek teljesítménye a következőképpen alakult: A legmagasabb összteljesítményt a 2. számú klaszter tagjai adták (81%). Ezt követte a 3. klaszter (73,9%). A legalacsonyabban pedig az 1. klaszter tagjai teljesítettek (61%). A szórás értéke az 1. klaszterben volt a legmagasabb (0,91), a legalacsonyabb pedig a 3. klaszterben (0,68).

Elmondható továbbá, hogy a 2. klaszter tagjai a feladatonkénti bontásban is a legtöbb helyen a legjobb teljesítményt nyújtották. Kivételt képeznek a következő feladatok: 6.; 7.; 10.; 14.; 15.; és a 17. indoklás. Ezekben a 3. klaszter tagjai nyújtották a legjobb teljesítményt. A klaszterek között a legerősebb elválasztó ereje a következő kérdéseknek volt: 4b; 4.e, 10.; 11.; 11. indoklás.; 23.; és 23. indoklás. A kérdések részletes elemzését a dolgozat következő fejezetei tartalmazzák.

A vizsgálati csoportok teljesítményének összehasonlításában elmondható, hogy az összteljesítmény tekintetében jól elkülönül a TTK hallgatók, a TÓK hallgatók és a gyerekek csoportja. Ugyanakkor az egyes kérdésekre adott válaszok nem minden esetben különítik el a három vizsgálati csoportot. Ezt tártuk fel a variancia-analízis, a diszkriminancia-analízis és a klaszteranalízis segítségével.

4.4.2. Részletes elemzés

4.4.2.1. A nyelvhasználat szerepe

A nyelvhasználat szerepét illetően alapvetően két kutatási alkérdésre kerestük a választ.

- a. A megkérdezettek milyen módon fejezik ki egy esemény valószínűségére vonatkozó becslését?
- b. Milyen eltérések vannak a valószínűség témakörében fellelhető hétköznapi és tudományos fogalmak használatában? (esélyes, esélytelen, lehetetlen, biztos, valószínű)

Mindkét kérdés esetében egyaránt felhasználtuk a kérdőív tapasztalatait és a tanórákon szerzett tapasztalatokat.

- a. A kérdőív 4. számú kérdésével azt szerettük volna megtudni, hogy a valószínűséget milyen szavakkal, kifejezésekkel, számokkal fejezik ki.

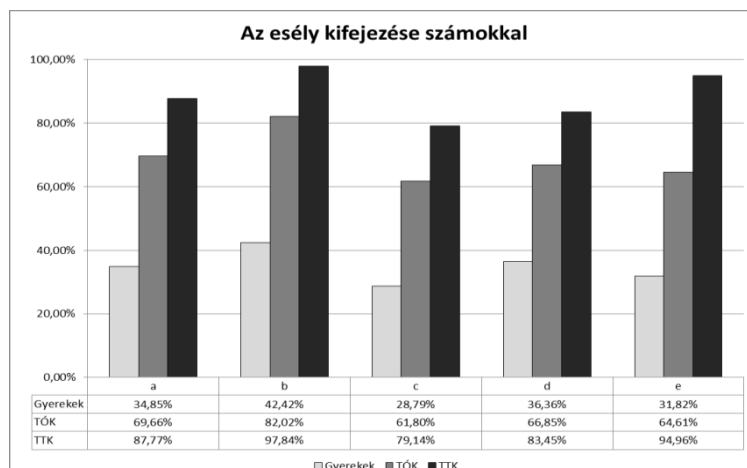
4. Érzése szerint mekkora eséllyel következnek be az alábbi események?
- a) Holnap Budapesten esni fog az eső. _____
 - b) Egy pénzérmével fej dobást kapunk. _____
 - c) Egy véletlenszerűen kiválasztott budapesti ember ismeri a japán nyelvet. _____
 - d) Egy véletlenszerűen kiválasztott negyedikes gyerek szereti a csokoládét. _____
 - e) Egy dobókockával 3-ast dobunk. _____

A vizsgálódás arra irányult, hogy a valószínűséget számokkal ($1/6$, 70%, 4 az 5-höz, stb.), vagy szavakkal (majdnem biztos, előfordul, nem valószínű, stb.) fejezik ki szívesebben. Úgy gondoljuk, hogy az esély kifejezésének ez egy fontos jellemzője. Ha valaki számokkal fejezi ki az esélyt, akkor tudja, hogy egy eseményhez számot rendelhetünk. Egy a matematikából a 2000-es évek elején érettségi vizsgát tett személy már tanulta, hogy az valószínűség kifejezésére szolgáló szám 0 és 1 között van, a vizsgált gyerekek pedig még nem tanulták. Felvetődik a kérdés, hogy használják-e számokkal való egyértelmű kommunikációt, a kevesebb információt hordozó nyelvi kifejezés helyett. Például a „nem túl valószínű, hogy...” kifejezés nem biztos, hogy a partner számára is ugyanazt jelenti.

A magyar köznyelv a meteorológiai jelentésekhez kapcsolódóan kezdte el használni a valószínűség kifejezésére a %-os formát. A dokumentumelemzések során viszont egyértelműen kiderült, hogy a közoktatás valószínűségszámítási feladataiban inkább a tört alakot használják. Sőt a százalékszámítás tanítása során kevés tankönyv él azzal a lehetőséggel, hogy a valószínűségszámítás témakörét hozzákapcsolja. Emiatt – bár tudni illik, hogy a százalékban kifejezett érték közönséges tört alakban is felírható – nem feltétlenül ugyanaz a képzet társul

például az 50% és az 1/2 számokhoz.²⁹ Ezért érdekes kérdést vet fel, hogy amennyiben valaki a számokkal való kifejezést használja, az % alakban, vagy közönséges törttel történik. (Bryant – Nunes 2012, p.11)

Az 4. diagram azt mutatja, hogy az egyes populáció hány százaléka válaszolt az esély kifejezésére számmal az a – e kérdésekre.



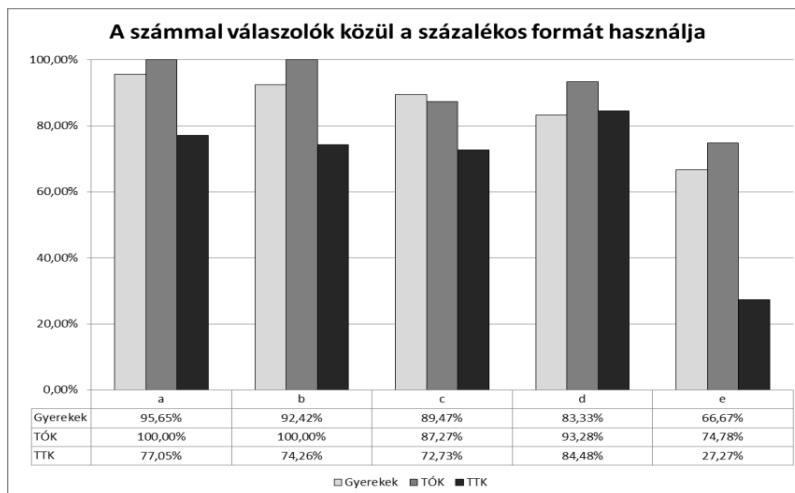
4. diagram

A diagram azt mutatja, hogy a valószínűségszámítást már tanult egyének esetén erősen jelen van az esély számmal történő kifejezése. A gyerekek pedig szívesebben fejezik ki az esélyt szavakkal. Az is látható, hogy a magasabb matematikai tudás esetén inkább használják a valószínűség jóslására a számokat.

Az a. c. és d. kérdések hétköznapi események jóslását, intuitív ítéletalkotást kértek. Ezeknél a kérdéseknél a TTK és TÓK hallhatók esetében – ahogyan az várható volt – egy kicsivel csökkent a számmal történő kifejezés aránya, de itt is az volt jellemző. A b. (fej-írás) és e. (dobókocka) kérdések olyan problémát vetettek fel, mellyel a középiskolát végzettek minden bizonnyal találkoztak már. Mivel a gyerekek még nem találkoztak a valószínűség kiszámításának módjaival, ezekre a kérdésekre is sok esetben intuitív módon reagáltak. De 35%-ban ők is használtak számokat, ami azt mutatja, hogy az esély számokkal való kifejezése megjelenik már a valószínűségszámítás iskolai tanulása előtt is.

Az 5. diagram azt mutatja, hogy a számmal válaszolók milyen arányban használnak százalékos alakot illetve tört alakot.

²⁹ Ezen megállapítás igazsága a jegyzőkönyvezett órák során egyértelműen kiderült, de részletes igazolása további vizsgálatot igényelne.



5. diagram

A diagramon jól látható, hogy az esélyt számokkal kifejezők előszeretettel használják a százalékos formát. Ez az intuitív ítéletalkotások során nem is meglepő. Sőt, nem meglepő a b. kérdésre adott válaszban sem. Hogy egy pénzérmével milyen eséllyel lehet fejet dobni, talán a legtipikusabb és leginkább elcsépett valószínűségi kérdés. Annyira, hogy itt óhatatlanul előkerül a köznyelvi kifejezés: 50-50, fifty-fifty.

Érdekes a TTK és TÓK hallgatók populációjának eltérése 4.e kérdésre adott válaszokban. Úgy tűnik, hogy a TTK hallgatók jobban átvették a tanult tankönyvi formákat. Annak ellenére, hogy a tanítóképzős hallgatóknak van már matematikai előismeretük a témában, mégis leginkább a köznyelvi formát választják. Még abban az esetben is, amikor a közönséges tört pontosabban fejezi ki az esélyt. Ez kiderül az „e” kérdésre adott válaszaikból. Miközben jól tudták, hogy a kockával $1/6$ valószínűséggel lehet hármast dobni, mégis inkább 16,66% alakban válaszoltak. Külön ki kell emelni azt, hogy ennek az alkérdésnek nagy magyarázó ereje volt. Szignifikáns eltérés mutatható ki a TTK hallgatók és TÓK hallgatók, valamint TTK hallgatók és gyerekek között. A TÓK hallgatók és a gyerekek összehasonlítása nem mutatott szignifikáns eltérést a variancia-analízis során (ebben a kérdésben).

A mérést követő féléves TÓK kurzuson a feladatmegoldások során is nagyon sokszor felvetődött az a kérdés, hogy a kiszámított valószínűséget százalékban kell-e megadniuk. (Annak ellenére, hogy addigra már a valószínűség fogalmánk újbóli bevezetésre megtörtént.) Számunkra ez azt jelenti, hogy nagyon nehéz a valószínűség fogalmának matematikai értelmezését elválasztani a valószínűség köznyelvi értelmezésétől. A TTK hallgatók többsége ugyan a valószínűséget pontosabban leíró számot használt, de 27%-uk mégis inkább a százalékos kifejezőmódot használta, ami azt mutatja, hogy a tanultság ellenére van kötődés a százalékos kifejezőmóddhoz. (Olyannyira, hogy két TTK hallgató is írt „ $1/6\%$ ”-ot. Biztos, ami biztos.)

A tanítóképzős hallgatók közel 10%-a, (17 fő), és a TTK hallgatók közül egyetlen ember minden esemény bekövetkezését $1/2$ eséllyel jósolta és ezt fejezte ki számokkal vagy szavakkal. Ez rejtetten mutatja gondolkodásukat, mely a problémafeltevéstől függetlenül mindig a „kedvező per összes” modell felületesen megjegyzett alkalmazásából eredhet. (Két esetet lehetséges, bekövetkezik vagy sem, és nem törődik azzal a feltétellel, hogy az elemi események nem egyformán valószínűek. Amikor az órán visszatértünk a kérdésre ilyen érveket szerepeltettek: „Szerintem 50%, hogy egy budapesti ember tud japánul: Két eset van: vagy tud, vagy nem.” Látható, hogy ők valamiféle tudás birtokában vannak, jól ismernek egyetlen modellt, melyet a probléma megoldásához igyekeznek felhasználni. A valószínűségszámítás nehézsége azonban éppen az adott problémát jól leíró modell megtalálásában rejlik. Az TTK hallgatók közül további 9 olyan volt (kb. 7%), aki az e. esemény kivételével minden mást 50%-ra jósolt. A kockadobásnál viszont azt válaszolták, hogy az esély $1/6$. Feltételezhető, hogy ezt a választ rögzített ismeretként adták, sokszor hallottak a kockadobásról mint iskolapéldáról.

A kérdőív 5 – 9. számú kérdések célja a valószínűséggel kapcsolatos hétköznapi fogalmak aktív használatának megismerése.

Véletlen? Valószínű? Nem valószínű? Kis eséllyel következik be? Esélytelen? Ezek a mindennapi élet kérdései, melyekre nincs jó, vagy rossz válasz. Hogy egy adott eseményt mennyire ítélünk valószínűnek, az szubjektív tényezőktől függ. A matematikában nem szakszó az, hogy „valószínű”. Ugyanakkor az „esemény valószínűsége” szakkifejezés: egy 0-nál nem kisebb és 1-nél nem nagyobb számot jelöl. Egy számról pedig önmagában nem állíthatjuk, hogy elég nagy vagy kicsi. Pusztán annyit, hogy esetleg nagyobb-e egy másiknál.

A kérdésfeltevéssel kapcsolatos meggondolásokból, ha ezeknél a kérdéseknél elsősorban a tudás felmérése lett volna a szempont, akkor az csak úgy történhetett volna, hogy egy adott esemény egy másiknál valószínűbb vagy sem. A biztos eseményre és a lehetetlenre van a matematikában jól meghatározott érték. Ezek valószínűsége nem szubjektív tényezők függvénye. A lehetetlen eseményé 0, a biztosé 1. De vajon mit takar például a „nem valószínű” kifejezés? Az esemény nem valószínű, ha valószínűsége 0-hoz elég közel van? Vagy lehet akár 0 is? Ezen kérdéskörrel szoltak a kérdőív 5-9. kérdései. Az 5-8. kérdésekben a válaszolóknak kellett szubjektív valószínűséget előhívó szavakhoz eseményeket kitalálni, a 9.-ben pedig a szavak értelmét meghatározni konkrét események nélkül.

5. Írjon egy olyan mondatot, melynek az utolsó szavai ezek: „.....véletlenszerűen következik be.”

_____ véletlenszerűen következik be.

6. Írjon egy olyan mondatot, melynek az utolsó szavai ezek: „.....kis eséllyel következik be.

_____ kis eséllyel következik be.

7. Fejezze be a következő mondatot tetszés szerint!

Nem valószínű, hogy Budapest _____

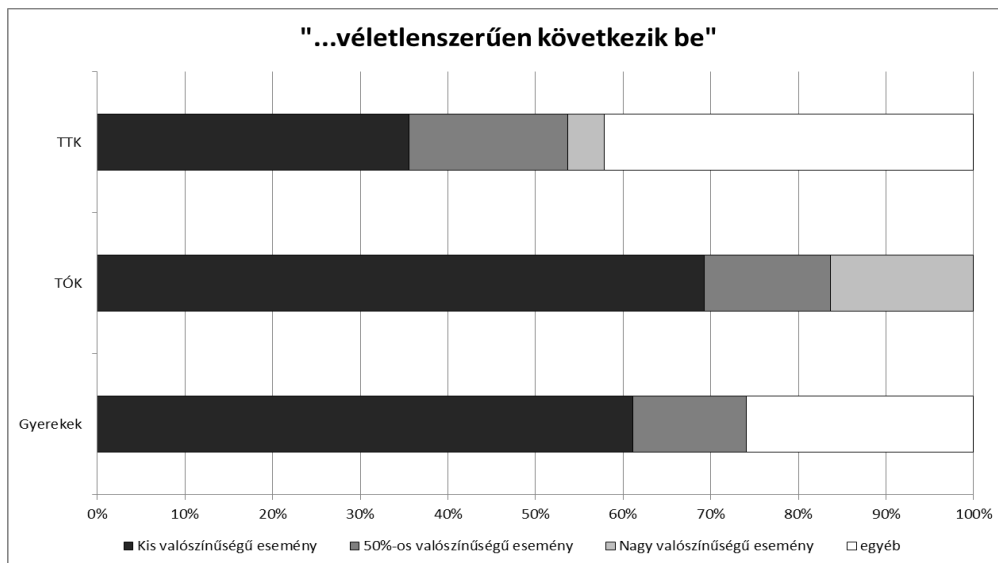
8. Fejezze be a következő mondatot tetszés szerint!

Nagyon valószínű, hogy Sidney _____

Az 5 – 8. kérdésre adott válaszok alapvetően háromfélék voltak:

- A válaszadó egyetlen konkrét eseményt írt le, melyhez valószínűségként számot rendelhetünk, és ezt a számot a feladat értékelése során jól meg lehetett becsülni. Például: „Egy 10 forintossal fejet dobni véletlenszerűen következik be.” Ebben az esetben először megpróbáltuk a leírt események valószínűségét megtippelni, majd ezeket kategorizálni.
- A válaszadó egyetlen konkrét eseményt írt le, melyhez ugyan hozzárendelhetünk egy számot, de az értékeléskor az ismeretek nem voltak elegendőek ahhoz, hogy a szám nagyságrendjét megbecsüljük. Például: „A történelem dolgozat véletlenszerűen következik be.” Ennek becsléséhez ismerni kellett volna a történelemtanár szokásait. Az ilyen jellegű válaszokat, az értékelésből kihagytuk. Ezért itt elég alacsony volt az értékelhető válaszok aránya. (A TTK válaszok 18%-át, a TÓK válaszok 11%-át, a gyerekek válaszaiknak 16%-át el kellett vetni.)
- A válaszadó nem konkrét eseményt írt, hanem általánosságot fogalmazott meg. „Én nem hiszem, hogy bármi is véletlenszerűen következik be”; „Minden mondat, ami "ha"-val kezdődik, véletlenszerűen következik be.”; „A részecskék mozgása véletlenszerűen következik be.” Az ilyen jellegű válaszokat az „egyéb kategóriába soroltuk.

Megfigyelhető volt az a törekvés, hogy a mondatokat úgy egészítették ki, hogy az állítások igazak legyenek.



6. diagram

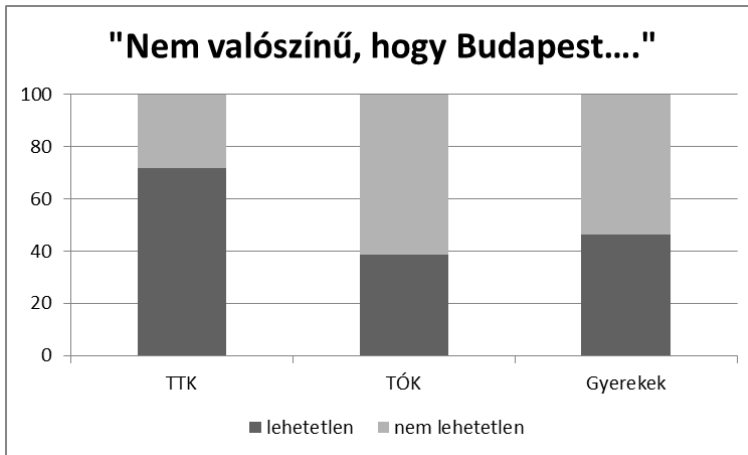
A „véletlenszerűen következik be...” kérdésben a tanítóképzős hallgatók és a gyerekek nagy számban olyan eseményt írtak le, ami 1/2-nél jóval kisebb valószínűséggel következik be. (Nyerek a lottón, az utcán a fejemre esik egy tégl, stb.) Ebből arra következtethetünk, hogy a „véletlenszerű”, és a „kis eséllyel következik be” fogalmak a hétköznapi szóhasználatban nem válnak szét élesen. A véletlen a matematikából kevésbé képzettek egy részének egyet jelent azzal, hogy kis eséllyel következik be. A magyar nyelvben valóban van a „véletlen” szónak egy ilyen értelmezése is. Például: „Micsoda véletlen, hogy találkoztunk!” A matematikában viszont véletlen jelenség az, aminek a kimenetelét a rendelkezésre álló feltételek nem határozzák meg egyértelműen. Így egy véletlen esemény valószínűsége nem feltétlen kicsi. Arra következtetünk, hogy a kis valószínűségű eseményt írók a véletlent, mint hétköznapi fogalmat használták, és nem a véletlen esemény tudományos fogalmát. Ez a TTK hallgatók válaszaiban is számottevő (35%).

Mindhárom vizsgált csoportban közel egyező, de nem túl nagy arányban voltak azok, akik 50%-os, vagy a körüli eseményt írtak. Ezek jellemzően a pénzdobást taglalták. Úgy gondolom, hogy az 50%-os eseményt választók a véletlenről szerzett tudásukat akarták kifejezni. Így hangsúlyozták, hogy a véletlent nem azonosítják sem a kis eséllyel, sem a valószínűvel.

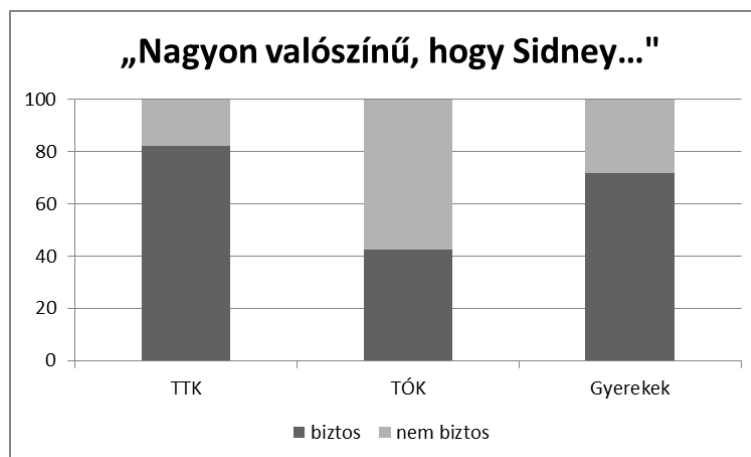
A TTK hallgatók viszonylag nagy számban (42%) az egyéb kategóriába voltak sorolhatóak. Ez azt jelenti, hogy ők általánosan fogalmaztak, ha úgy tetszik a fogalmat egy magasabb nézőpontból vizsgálták.

Ígazán meglepőek voltak a 7. és 8. kérdésre adott válaszok, melyekben azt vizsgáltuk, hogy a „nem valószínű”, illetve a „nagyon valószínű” kifejezésekhez milyen hétköznapi életből vett példákat választanak. Elsősorban arra voltunk kíváncsiak, hogy a „nem valószínű” kifejezéshez társítanak-e lehetetlen eseményt,

illetve a „nagyon valószínű” kifejezéshez biztos eseményt. A következő két diagram az ezekre adott válaszokat mutatja.



7. diagram

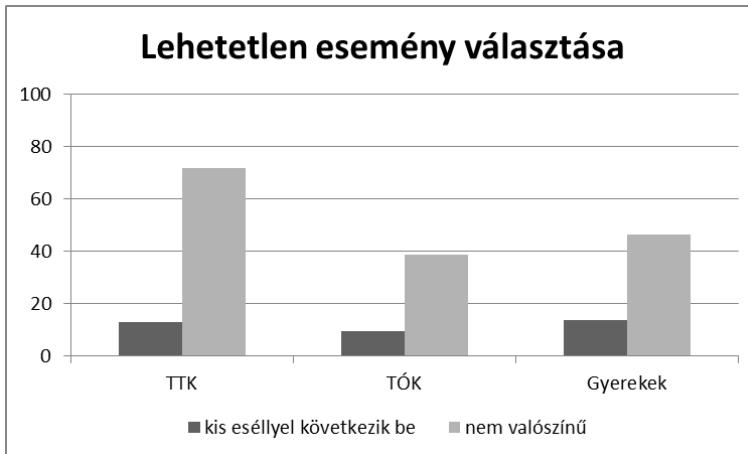


8. diagram

Előzetesen azt feltételeztük, hogy mind a „nem valószínű”, mind a „nagyon valószínű” eseményekre kevesen találnak ki lehetetlen, illetve biztos eseményt. Ennek ellenére különösen magas volt a TTK hallgatóknál és a gyerekeknél a biztos illetve lehetetlen eseményt kiötlők száma. Ezt kétféleképpen is lehet értelmezni. Lehet úgy, hogy a „nagyon valószínű” kifejezés a hétköznapi értelemben összemosódik a biztossal. A válaszolók nem tudhatták azt, hogy mi az, ami már eléggé valószínű ahhoz, hogy nagy valószínűségűnek minősítsük. Ezért azt gondolhatták, hogy ami biztos, az eléggé valószínű. Aki tudja, hogy egy esemény esélye $0 \leq p \leq 1$, annak számára az 1 valószínűségű esemény nagyon valószínű.

A „kis eséllyel következik be” és a „nem valószínű” kérdések összehasonlítása során azt várhatnánk, hogy hasonló valószínűségű eseményeket

választottak példaként, hiszen a kifejezések ekvivalensként is értelmezhetők. Mégis jelentős eltérés mutatkozott a lehetetlen esemény választásában. A „kis eséllyel következik be” kifejezéshez nem társul olyan mértékben a lehetetlen esemény, mint a „nem valószínű” kifejezéshez egyik csoportban sem.



9. diagram

Mindhárom vizsgálati csoportban, de különösen a TTK hallgatók esetében jelentős ez az eltérés. (A „nem valószínű” kifejezéshez 71,9%-uk, míg a „kis eséllyel következik be” kifejezéshez 12,95%-uk választott lehetetlen eseményt.)

A 4 – 8. kérdésekben az események kiválasztása a hétköznapi életből vett példa. Ugyanerre a szóhasználatra utalt a 9. feladat kérdése is, de most konkrétan, hétköznapi példaválasztás nélkül kellett a kifejezések értelmezéséről nyilatkozni. A figyelmet jobban a kifejezésre irányítottuk, nem terelődött el a példakeresés irányába. Itt a kérdésfeltevés a „tudományosabb” választ sugallta:

9. Öt kifejezést megszámoztunk:

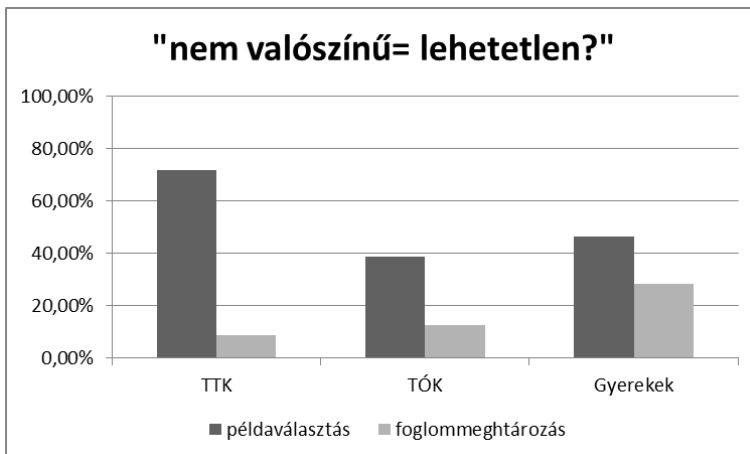
1. Nem következhet be....
2. Nem következik be nagyon gyakran...
3. Elég gyakran bekövetkezik....
4. Majdnem minden esetben bekövetkezik...
5. Mindig bekövetkezik....

Írja a következő kifejezések mindegyikéhez annak a kifejezésének a sorszámát, amit leginkább azonos értelműnek érez vele! (Ugyanazt a számot többször is használhatja)

- a) „Majdnem biztos, hogy...”
- b) „Nem valószínű, hogy...”
- c) „Nagyon valószínű, hogy...”
- d) „Valószínű, de csak kicsit, hogy...”
- e) „Kicsi az esélye, hogy...”

Ez a fajta kérdésfeltevés elvontságában jobban idézett egy matematika feladatot. Akár egy tankönyvben is találkozhatunk ehhez hasonlóval.

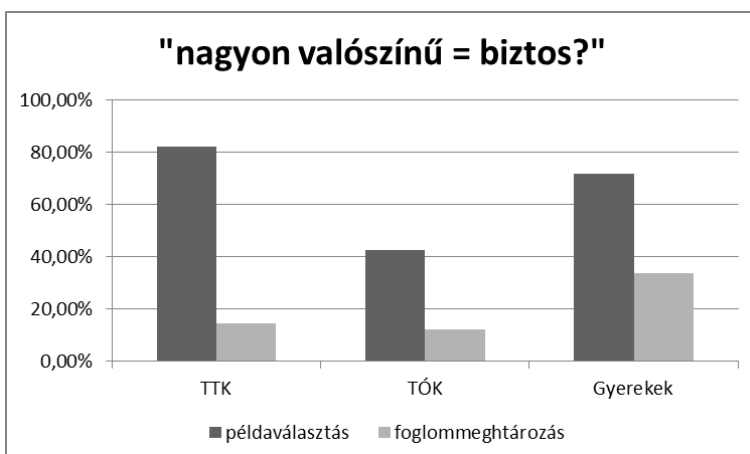
Ebben a kérdésben – konkrét esemény megfogalmazása nélkül – viszont már jóval kevesebben társították a „nem valószínű” kifejezéshez a „nem következhet be” kifejezést, azaz a lehetetlen eseményt.



10. diagram

A 10. diagram mutatja a jól látható a különbséget mindhárom vizsgálati csoportban. A „nem valószínű” kifejezéshez a TTK hallgatók 72,9%-a választott lehetetlen eseményt akkor, amikor konkrét példát kellett adni, de csak 8,6% a fogalom meghatározása során. Kisebb az eltérés a TÓK hallgatók csoportjában, ők 38,78%-ban választottak lehetetlen eseményt a példaválasztásos feladatban, és 12,58%-ban a fogalom meghatározása során. A legkisebb eltérés a gyerekeknél mutatkozott 46,55% és 28,42%.

Hasonló megfigyelést tehetünk, ha a „nagyon valószínű” kifejezés használatát vizsgáljuk. Jóval kevesebben társították ehhez a „mindig bekövetkezik”, azaz a biztos kifejezését.



11. diagram

A legnagyobb eltérés most is a TTK hallgatók körében tapasztalható (82,14% példaválasztás esetén, és 14,29% a fogalom meghatározás során) Kisebb, de jelentős eltérés mutatkozik a TÓK hallgatók és a gyerekek csoportjában is.

A fentiek alapján megállapítható, hogy mindhárom vizsgált csoport másképp használja a „nem valószínű” és a „nagyon valószínű” kifejezéseket akkor, amikor hétköznapi szöveggörnyezetbe ágyazottak, és másképp akkor, amikor egy kifejezés jelentését kell meghatározni egy iskolai tanpéldát idéző feladatban. Úgy tűnik, hogy ezen kifejezésnek a tartalma erősen függ a szituációtól.

A válaszokból kiderül, hogy gazdagon használják a hétköznapi életben olyan valószínűséggel kapcsolatos kifejezéseit, melyeknek nincs matematikai megfelelője. Ez mutatja a témakör tanításának egy nehézségét, hogy minden problémát ugyanannak a néhány szakszónak a segítségével kell matematikai modellre fordítani.

Összegzés:

Egy esemény valószínűségének kifejezése történhet számokkal vagy szavakkal. Az esély számokkal történő kifejezésre való hajlandóság függ az előképzettségtől. Minél képzetesebb valaki matematikából, annál inkább fejezi ki jóslását számokkal.

Az esély kifejezése alapvetően százalékos formában történik. Különösen igaz akkor, amikor szubjektív módon kell ítéletet alkotni. Tekintettel arra, hogy ez a jelenség igen erősen megfigyelhető, érdemes lehet a közoktatásban kihasználni. A százalékszámítás, illetve az arány témakörének feldolgozása idején a valószínűség egy részének tárgyalása aktuális lehet.

A matematika tanulása során rengeteg olyan kifejezést használunk, amely mást jelent a hétköznapi szóhasználatban, mint a szaknyelvben. (Szendrei, 2005) Ez a probléma a valószínűség témakörében másképp van jelen. Az 5 – 9. kérdésekre adott válaszok sokszínűségében és rendszertelenségében megfigyelhető, hogy a válaszolók nem egyformán gondolkodnak a valószínű, esélytelen, kis eséllyel következik be, stb. fogalmakról, amelyeknek nincs matematikai megfelelője. Sőt a biztos és a lehetetlen megítélése is szöveggörnyezettől függően változik. Az eltérések nem annyira a teszten elért eredménnyel, hanem az adott problémahelyzettel állnak kapcsolatban.

4.4.2.2. *A valószínűség becslése és számítása*

A következő kérdéscsoportban azt próbáltuk megtudni, hogy milyen az egyes vizsgálati csoportok tudása a valószínűség számítás területén. A tesztkérdések közös jellemzője, hogy mindegyik olyan problémát vet fel, amelyik alkalmasan választott valószínűségi modell segítségével megoldható. A képzett matematikus számára egyetlen jó válasz van rájuk. A válaszokból – különösen ott, ahol indoklást is kértünk – következtetni lehet a válaszolók gondolkodásmódjára. Nevezetesen arra, hogy a valószínűség megítéléséhez alkalmaztak-e valamilyen matematikai modellt (és ha igen, akkor melyet), vagy pedig intuitív ítéletalkotás született.

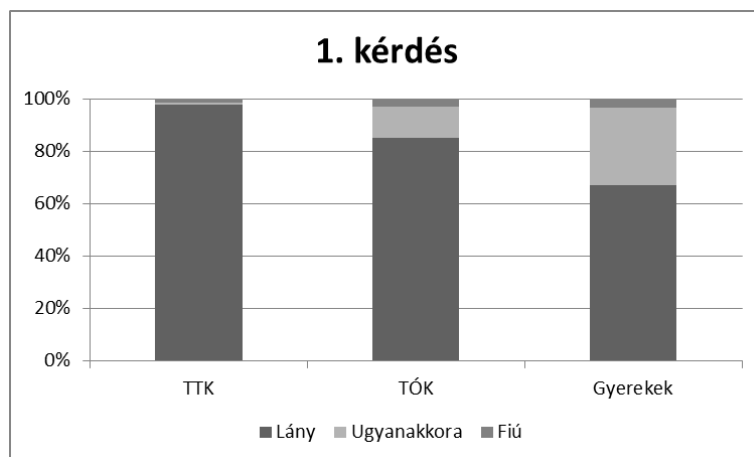
Az első kérdés a legegyszerűbbek közül való:

1. Egy osztályba 13 fiú és 16 lány jár. Mindegyik gyerek nevét felírjuk egy cédulára. Ezeket betesszük egy sapkába. A tanár összekeveri a cédulákat, és becsukott szemmel kihúz egyet közülük. Akiét kihúzza, nyereményhez jut.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) Nagyobb az esélye annak, hogy fiú nevét húzza ki, mint annak, hogy lányét.
- b) Nagyobb az esélye annak, hogy lány nevét húzza ki, mint annak, hogy fiút.
- c) Ugyanakkora az esélye annak, hogy fiú nevét húzza ki, mint annak, hogy lányét.

Ennek a kérdésnek a megválaszolásához a klasszikus valószínűségi modellt is alkalmazhatjuk, akár képletet alkalmazva ki is számolhatnánk, hogy melyik esemény mekkora valószínűséggel következik be. Elegendő azonban csak annyit sejtetni, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb. A 12. diagram mutatja a vizsgálati csoportok választását.



12. diagram

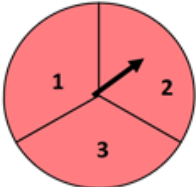
Egy 5. osztályos óralátogatás során a tanár felvetette ugyanezt a problémát szóban is. A gyerekek különböző érveket hangoztattak, de egy gyerek indoklása figyelemreméltó volt: „a fiúk a mázlistábbak”. Tudjuk, hogy a nemi identitás ebben az életkorban fontos szerepet kap. Aki tehát nem matematikai, hanem szubjektív ítélet alkotott, hajlamos lehetett a vele ellentétes, vagy éppen azonos neműre tippelni.

Az adatok azt mutatják, hogy a felnőttek és a gyerekek egyaránt jól érzik ezt az összefüggést. Ugyanakkor az is látható, hogy különösen a gyerekek és a TÓK hallgatók elég nagy számban tippeltek „ugyanakkora” esélyt (TÓK: 11,8%, gyerekek 28,79%). Mivel ennél a feladtnál nem kértünk indoklást, csak következtetni lehet az ő gondolkodásmódjukra. Az egyik lehetőség, hogy valaki a 13 fiú és 16 lány közötti eltérést olyan kicsinek érzi, ami nem számottevő az esély becslésekor. A másik lehetőség, hogy hibás klasszikus valószínűségi modellt

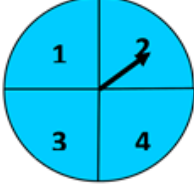
alkalmazza: „Két lehetőség van, vagy fiút vagy lányt húzunk. Ezért a valószínűség mindkét esetben 1/2.”

A második feladatnál konkrétan rákérdeztünk a modellválasztásra:

2. Két korongot készítettünk: egy pirosat és egy kék. A megpörgetett mutató véletlenszerűen áll meg valamelyik számon. Melyik korong esetében lesz nagyobb az esélye a 3-as számnak?



piros

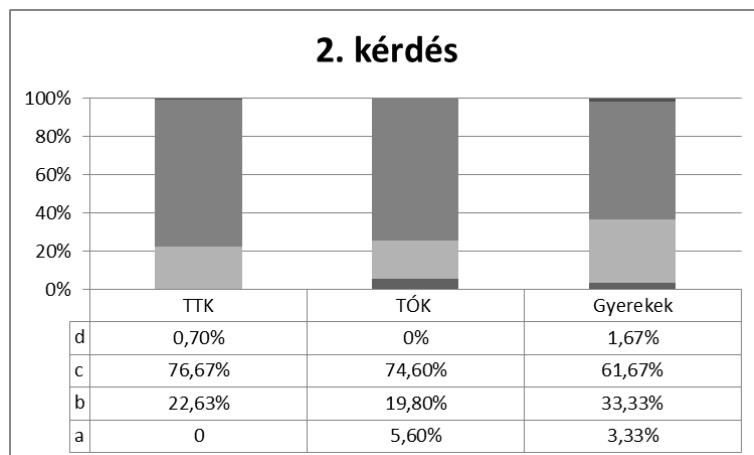


kék

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A piros koronggal nagyobb esélye van annak, hogy 3-ast kapunk, mert kevesebb számból választunk egyet.
- b) A kék koronggal nagyobb az esélye annak, hogy 3-ast kapunk, mert több számból választunk egyet.
- c) A piros koronggal nagyobb az esélye annak, hogy 3-ast kapunk, mert a piros korongon nagyobb területet foglal el a 3-as mező, mint a kéken.
- d) Egyforma az esély a két korong esetén.

A megoldók számára ez egyértelműen matematika feladatnak tűnik, ezért azt gondoljuk, hogy szubjektív tényezők nem befolyásolják a döntést. Matematikailag nem a klasszikus valószínűségi modell alkalmazása helyes, hiszen a kérdéses események nem egyformán valószínűek. Az ugyan igaz, hogy ha csak a számok darabszámára gondolnak – hogy ha kevesebb számból kell választani, akkor azért nagyobb a valószínűsége a kívántos szám kihúzásának, de ez a feladat nem erről szól. Ezért csak a „c” választ fogadhatjuk el helyesnek.



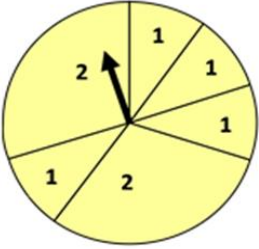
13. diagram

A diagramról leolvasható, hogy mindhárom vizsgált csoport elég jól érzi azt, hogy a számmal lefedett területek nagyságait érdemes összehasonlítani. A b. és d. (végeképp rossz) választ adók száma elenyésző. Az gyanítható, hogy az a. választ adók gondolkodásában a probléma onnan gyökerezik, hogy a feladathoz rossz

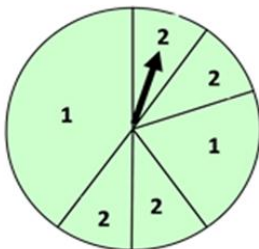
modellt illesztett, a szövegből nem látta át azt, hogy a körcikkek területének nagyságát kell összevetni. A gyerekek ezzel a fajta kérdésfeltevéssel valószínűleg még egyáltalán nem találkoztak.

Ugyancsak terület modellt lehetett alkalmazni a 17. kérdés megoldásában is. (Az eredeti feladatlapon a körök nem torzultak el)

17. Két – csak színében különböző - korongot készítettünk, egy sárgát és egy zöldet. Számokat írtunk rájuk. A megpörgetett mutató véletlenszerűen áll meg valamelyik számon.



sárga



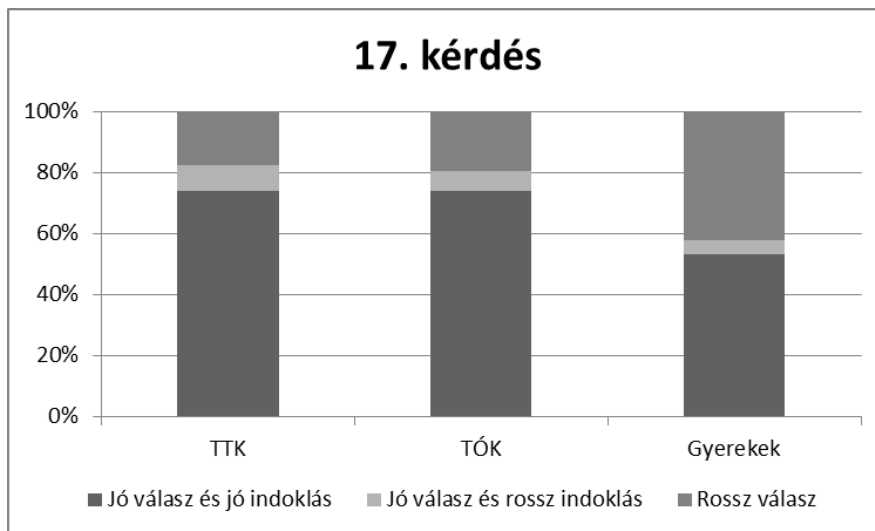
zöld

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A sárga koronggal könnyebb 1-et kapni.
- b) A zöld koronggal könnyebb 1-et kapni.
- c) A két koronggal ugyanakkora eséllyel kapunk 1-et.
- d) Erre a kérdésre nem lehet válaszolni.

Indokolja választát!

Maguk a válaszok nem mondanak sokkal többet a 2. feladat eredményeinél. Mindhárom vizsgált csoport körülbelül ugyanazt az eredményt produkálta. Az viszont nagyon szépen látszik, hogy ki hogyan gondolkodott. Az indoklások ugyanis illeszkedtek a válaszhoz. Aki a b. (helyes) választ jelölte meg, az területtel is indokolt. (Ez alól 2 TTK és 5 TÓK hallgató volt kivétel). Aki az a. választ jelölte, darabszámmal indokolt. (Csak a gyerekek csoportjában volt a számuk jelentős).



14. diagram

Egyik vizsgálati csoportban sem elhanyagolható (TTK: 11%, TÓK: 8%, gyerekek: 11%) azoknak a száma, akik azt válaszolták, hogy ezt a kérdést nem lehet megválaszolni. Érdekes megfogalmazások születtek annak indoklására, hogy a kérdésre miért nem lehet válaszolni.

Az indoklások között szerepeltek szubjektív tényezők:

„Nem csak a szintől függ ill. azok elrendezésétől, hogy hol áll meg. Ott van tényezőnek a pörgetési sebesség, magának a korongnak a jól működése (nehezebb-könnyebb vele pörgetni stb.)” (TÓK hallgató) „A véletlenül múlik!” (TÓK hallgató) „Ha meg is pörgetnék a valóságban, akkor sem mondhatom ki, hogy ennek hol kell megállnia” (gyerek) „Függ a pörgetéstől, hogy milyen erővel forgatjuk meg a mutatókat” (TÓK hallgató)

És megjelentek a modellválasztás dilemmái:

„Területében a zöld korongon van több hely, hogy 1-est kapjunk, de számszerűen a sárgán” (TÓK hallgató) „A sárgán több az 1-es, de a zöldön nagyobb felületet foglal el” (gyerek) „A sárgánál a 2-es van nagyobb számban, a zöldnél az 1-es. Viszont sok azonos szám van egymás mellett, így bármelyik kijöhet pörgetés során, 1 és 2 is.” (TTK hallgató) „Nem tudjuk, hogy mekkora a számok felosztása, azért nem lehet válaszolni” (gyerek) „Mert a két korong ugyanakkora” (gyerek)

Kissé meglepő volt, hogy az egyértelműen matematika feladatnak szánt kérdésben is jelen vannak a szubjektív tényezők. Gyanítható, hogy ezzel a jelenséggel mindenképpen számolni kell a matematika tanítása során, a valószínűség témakörében pedig fokozottan jelen van. Érdekes, hogy a TTK hallgatók indoklásaiban szubjektív tényezők nem szerepeltek.

A kérdőív 10. és 11. kérdésének szerkezete megegyező, nehézsége viszont különböző.

10. Az A jelű zsák 3 fekete és egy fehér golyót tartalmaz, a B jelű zsákban két fekete és egy fehér golyó van.

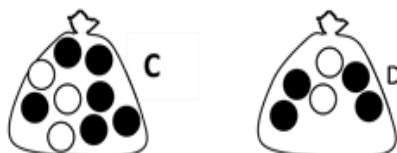


Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni az A zsákból.
- b) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni a B zsákból.
- c) Ugyanakkora eséllyel lehet fekete golyót húzni a két zsákból.

Indokolja! _____

11. Az C jelű zsák 6 fekete és 3 fehér golyót tartalmaz, a D jelű zsákban 4 fekete és 2 fehér golyó van.



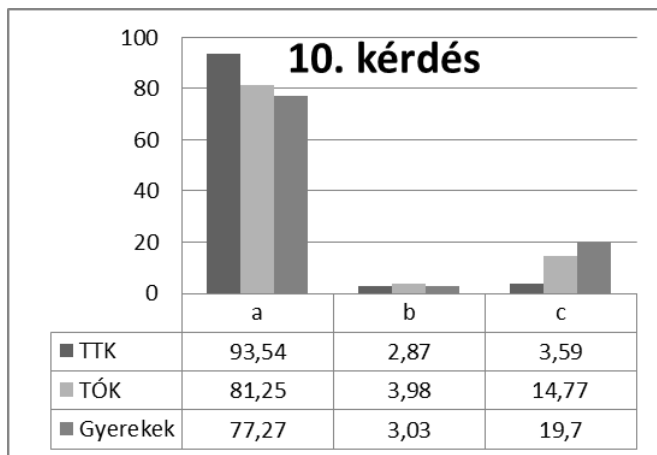
Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni az C zsákból.
- b) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni a D zsákból.
- c) Ugyanakkora eséllyel lehet fekete golyót húzni a két zsákból.

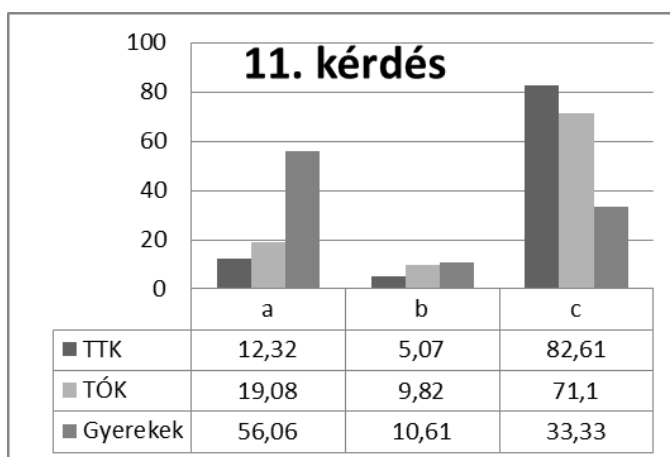
Indokoljon! _____

A 10. feladat megoldásához nem szükséges, hogy a valószínűséget mint két szám arányát értelmezzük. Ott elegendő azt látni, hogy az A jelű zsákban több fekete golyó van, miközben mindkét zsákban ugyanannyi fehér. Ezzel szemben a 11. feladatban sem a fehér golyók, sem a feketék száma nem egyenlő, ezért az arányossági gondolkodás elkerülhetetlen.

Ha összehasonlítjuk a 10. és 11. kérdésre adott válaszokat (15 – 16. diagram), láthatjuk hogy az utóbbi jóval nehezebbnek bizonyult. (A 10. kérdésben az a. volt a helyes válasz, a 11.-ben pedig c.) A 10. kérdésre b. választ adók száma mindhárom csoportban elenyésző volt, és nem számottevő a c. választ adó TTK hallgatók száma sem.



15. diagram



16. diagram

A 10. feladatra adott válaszokból arra következtethetünk, hogy mindhárom csoportban elég jól érzik azt, hogy „többől könnyebb egyet kiválasztani, mint kevesebből”, miközben a nem kívánatos fehér golyók száma ugyanannyi. Az eltérés szignifikáns a TTK hallgatók és gyerekek között, illetve a TTK hallgatók és TÓK hallgatók között.

A 11. feladatra a gyerekek közül a legtöbben az a. (rossz) választ adták. Ennek oka, hogy ők nem jutottak el a fogalomalkotásba addig, hogy nem a fekete golyók darabszámát, hanem az összes golyóhoz viszonyított arányát kell használni a feladatmegoldás során. Ez a gondolkodásbeli hiányosság akadály lehet a fogalomfejlődésnek. Az arányossági gondolkodás fejlesztésére a gyerekek esetében éppen ezekben az iskolai években kell nagyobb hangsúlyt fordítani. Megjegyzendő, hogy az ekképp gondolkodók száma nem elhanyagolható sem a TTK, sem a TÓK hallgatóinak körében.

Mi jellemzi azokat a megoldókat, akik a 10. kérdést jól megválasztották, de a 11. kérdést nem? A valószínűség számításához szükség van az arány értésére. A variancia-analízis során kiderült, hogy a 10. feladat megoldásában nincs

szignifikáns eltérés a TÓK hallgatók és a gyerekek között, viszont a 11. feladat megoldásában a három vizsgálati csoport teljesítménye páronként szignifikáns eltérést mutat.

Az, hogy ki hogyan gondolkodott, az indoklásokból derült ki. A 10. feladatra négyféle indoklás született: A legegyszerűbb indoklás, hogy az A jelű zsákban több a fekete, mint a B-ben. Ebben az indoklásban vagy nem foglalkozik a válaszoló a fehér golyók számával, vagy a látványt annyira nyilvánvalónak tekinti, hogy feleslegesnek tartja a mondat befejezését. Ezt utólag nem tudjuk eldönteni. Magasabb szintű gondolkodásra utal, ha valaki tekintetbe veszi a fehér golyók számát is, és indoklásában ezt ki is fejezi. Más – még magasabb szintű – megközelítése a problémának, amikor valaki kiszámolja az egyes zsákokban a fekete golyók húzásának esélyét, majd ezeket összehasonlítja. (Vagy ha ezt nem is teszi meg, a válaszában utal arra, hogy aránnyal dolgozott.) A problémának itt is van egy olyan megközelítése, amikor valaki rossz modellt használ: „Vagy feketét húzunk, vagy fehérét. Pepitát nem láttam.” (TÓK hallgató) A szubjektív ítéletalkotás itt csak kis számban volt egyértelműen jelen (2 TÓK hallgató és 1 gyerek). Továbbá azt sem tudhatjuk, hogy a kérdést megválaszolók, de az indoklást kihagyók milyen módon gondolkodtak.

A következő táblázat a 10. feladatban az indoklást is adó válaszolók gondolkodását mutatja:

	TTK	TÓK	Gyerekek
„Több a fekete”	20,89%	42,85%	80,3%
„Több a fekete, és fehér csak 1 van”	20,89%	22,62%	10,6%
Kiszámolta, vagy arányt nevezett meg	54,48%	20,67%	4%
Rossz modell	3,74%	13,86%	5,1%

A táblázatból látszik, hogy a gyerekek nagy része a legegyszerűbb indoklást választotta. 10 – 13 éves gyerekek esetében nem meglepő, hogy indoklásai logikailag nem tökéletesek. További vizsgálat tárgya lehet, hogy a valószínűségi problémák megoldásában ez milyen hátrányt okoz. Meglepő viszont, hogy a TÓK hallgatók kb. 43%-a valamint a TTK hallgatók kb. 20,8%-a még ezen a szinten érvel.

A „több a fekete, és fehér csak 1 van” típusú indoklás jól kifejezi a probléma értését, és a feladat megoldáshoz elegendő. Az így indoklók nem tartották szükségesnek a számolást, vagy az arányok felírását.

Más volt a helyzet a legtöbb TTK hallgató s sok TÓK hallgatók esetében. Ők a 10. feladatban is a valószínűségek kiszámolását, majd ezek összehasonlítását választották. Érzésünk szerint ők a matematika órákon megszerzett tudásukat kívánták hangsúlyozni. Megjegyzendő, hogy a számolás során néhányan visszatértek a jól bevált százalékokhoz: „Én a zsákokban lévő golyókat %-osan osztottam fel. Ha egy golyó 25%-nak felel meg, akkor 75%-os eséllyel húzhatok feketét a golyók közül.”

Érdekesen módosult az indoklás a 11. feladtnál. Az indoklást adók gondolkodását a következő táblázat mutatja:

	TTK	TÓK	Gyerekek
„Több benne a fekete”	6,07%	19,31%	59,1%
Kiszámolta, vagy arányt nevezett meg	83,34%	63,07%	21,2%
Rossz modell	2,29%	5,12%	3,03%
Szubjektív ítéletalkotás	8,3%	12,5%	16,67%

Ennél a feladatnál az aránnyal való gondolkodás elkerülhetetlen. Mint ahogy a válaszokból sejteni lehetett, a gyerekek nagy része és a TÓK hallgatók kb. ötöde ezt nem látja. Számukra egyszerűen abból a zsákból könnyebb fekete golyót húzni, amiben több fekete van. Aki az a. választ jelölte meg, így gondolkodott és ezt meg is fogalmazta. Tipikus érvelési hiba volt, a következő: „Mert ha mindkét zsákból ugyanannyi fehéret veszünk el, mint feketét, akkor látszik” (gyerek) „Mert ha összepárosítom a golyókat, akkor a "C"-ben 3 fekete marad.”(TÓK)

A TÓK hallgatók most sokkal nagyobb számban indokoltak aránnyal. Azt gyanítom, hogy ezt az előző feladatnál is képesek lettek volna megtenni, de akkor még szükségtelennek tartották. Lehet, hogy a feladatok egymást követő sorrendje érlelte meg bennük a gondolatot. Gyanítható, hogy az ilyen típusú feladatok megoldásának egyik fontos állomása, amikor ezt az összefüggést képesek vagyunk látni. Még akkor is jelentős előrelépés, ha hibásan alkalmazzák: „6:3 arányból szintén esélyesebb feketét húzni, mint 4: 2 arányból” (gyerek) „A C zsákból 66%, hogy feketét húzok, a D zsákból 68%, hogy feketét húzok” (TÓK)

Ennél a feladatnál jóval nagyobb számban születtek szubjektív válaszok, melyek többnyire a golyók elhelyezkedésére utaltak: „A zsák tetején vannak a fekete golyók. Ám ha olyan típus vagyok, hogy beletúrok a zsákba, ez már nem állja meg a helyét.” (TÓK) A szubjektív tényezők megjelenésének növekedése összefüggésben van a feladat bonyolultságával. Ha a feladat meghaladja az egyén matematikatudását, akkor talán inkább hajlamos szubjektív ítéletalkotásra.

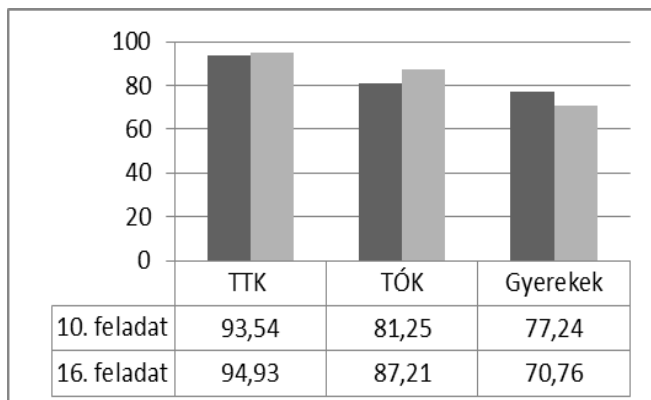
Szintén arányossági gondolkodást kíván a kérdőív 16. számú kérdése:

16. Egy zsákba 8 piros, 4 kék, és 2 zöld golyót tettek. Összerázták a zsákot, és kihúztak öt golyót: 4 pirosat és 1 kék. Ezután még egy golyót kivettek. Az utoljára kivett golyó színéről néhány állítást írtunk.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A piros golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- b) A kék golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- c) A zöld golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- d) Bármelyik golyó húzásának ugyanakkora az esélye.

Ebben a feladatban nem szerepel rajz. A válaszolónak belső képet kell teremteni a feladatról. Akárcsak a 10. feladatokban, itt sem kell feltétlen számolni. Elég az a tapasztalat, hogy többször nagyobb eséllyel lehet választani, mint kevesebből. Egy kicsi könnyebbséget jelent, hogy most egyetlen zsákot kell elképzelni. A 16. feladat kiértékelése a 10. feladattal való összehasonlításban érdekes.



17. diagram

A 17. diagram a helyes válaszok számát hasonlítja össze a 10. és 16. feladatban. Látható, hogy a 16. feladatot is igen jó arányban oldották meg helyesen mindhárom vizsgálati csoportban. Sőt a felnőtt hallgatók körében (nem számottevő) javulás mutatkozik, ami abból eredhet, hogy csak egyetlen zsákot kell szem előtt tartani. A gyerekek viszont picit gyengébben teljesítettek ennél a feladatnál. Talán az magyarázza, hogy a 16. feladatban nem volt képi ábrázolás. Ez megjelenítés jelentőségét mutatja, mely különösen a gyerekeknél fontos.³⁰

A 12. és 13. feladatok mindegyik vizsgálati csoportban meghaladták a válaszolók matematika tudását:

12. Jancsi és Péter elhatározzák, hogy ötször egymás után dobnak a kockával. Megegyeznek abban, hogy Jancsi akkor kap egy pontot, ha a dobás eredménye 2, 3, 4, 5, vagy 6. Ha nem ez történik, Péter kap néhány pontot. Az öt dobás után az a nyertes, aki több pontot gyűjtött. Ha azt szeretnénk, hogy a játék igazságos legyen, hány pontot kell kapnia Péternek, amikor a kocka 1-et mutat?

Válasz: _____ pontot

Indokolja! _____

13. Jancsi és Péter most is ugyanezzel a szabállyal játszanak, csak most ötven kockadobás után számolják össze pontjaikat. Ebben a játékban hány pontot kapjon Péter, amikor a kocka egyest mutat?

Válasz: _____ pontot

Indokolja! _____

Az egyik érdekesség, hogy vajon zavarja-e a megoldót, hogy 5 vagy 50 dobás van a játékban. A kérdőív 12. és 13. feladatainak megfogalmazása és egymást követő sorrendje arra csábít, hogy az egyik eredményéből következtessünk a másikra.

³⁰ A kérdésfeltevés módjának jelentőségét vizsgáló részben más – erre vonatkozó – tapasztalat is bemutatásra kerül.

A feladatok bonyolultsága miatt nem is feltételeztük, hogy bárki kiszámolja a megfelelő valószínűségeket. Ennek a feladatnak volt messze a legrosszabb a kitöltöttsége. A TTK hallgatók 84,89%-a, a TÓK hallgatók 70,39%-a és a gyerekek 77,27%-a adott becslést a pontszámra. Ennél is jóval kevesebben voltak, akik indokolták válaszukat. (TTK mindössze 9,35%, TÓK 45,17%, gyerekek 19,69%). Később, amikor tanítványaimmal beszélgettünk a feladról, erős nemtetszésüket fejezték ki. Jelezték, hogy egyáltalán nem tudtak mit kezdeni vele. A 12. feladatban nem tudjuk teljesen igazságossá tenni a játékot, és ezt elemi módszerekkel beláthatjuk. Az egyes dobásának valószínűsége ugyanis a következőképpen alakul:

$$P(\text{Péter nem dob egyest}) = \binom{5}{0} \cdot \frac{5^5}{6^5} \approx 0,4018$$

$$P(\text{Péter 1 – szer dob egyest}) = \binom{5}{1} \cdot \frac{5^4}{6^5} \approx 0,4018$$

$$P(\text{Péter 2 – szer dob egyest}) = \binom{5}{2} \cdot \frac{5^3}{6^5} \approx 0,1607$$

$$P(\text{Péter 3 – szor dob egyest}) = \binom{5}{3} \cdot \frac{5^2}{6^5} \approx 0,0321$$

$$P(\text{Péter 4 – szer dob egyest}) = \binom{5}{4} \cdot \frac{5^1}{6^5} \approx 0,0032$$

$$P(\text{Péter 5 – ször dob egyest}) = \binom{5}{5} \cdot \frac{1}{6^5} \approx 0,0001$$

Ha Péter 1 pontot kap, akkor úgy tud nyerni, ha legalább 3-szor egyest dob. Ennek valószínűsége $0,0321 + 0,0032 + 0,00001$. Így az csak esetek kb. 4%-ban fordul elő, tehát semmiképpen nem igazságos, Jancsinak kedvez.

Ha 2 pontot kap, akkor úgy tud nyerni, ha legalább kétszer egyest dob. Péter nyerési esélye ekkor: $0,1607 + 0,0321 + 0,0032 + 0,00001$. Ez az esetek kb. 20%-ban fordul elő, tehát nem igazságos, még mindig erősen Jancsinak kedvez.

Ha 3 pontot kap, akkor szintén legalább kétszer kell egyest dobnia. Ez még mindig nem elég.

Ha 4 pontot kap, akkor kb. 40% esély van rá, hogy döntetlennel végződjön a játék (ekkor egy egyest dobna és négy nem egyest), és 20% arra, hogy Péter nyerjen.

Amennyiben 4-nél több pontot kap, úgy Péter számára lesz kedvező a játék kb. 60% vagy több eséllyel.

Ennek a gondolatmenetnek (vagy hasonlóknak), nem lehetett felfedezni nyomát a kérdőívek egyikén sem. Nem jelezte senki, hogy a játékot nem lehet teljesen igazságossá tenni. (Akkor a legkevesbé igazságtalan, ha 4 pontot kap) A válaszolók vagy tippeltek egy számra, vagy kihagyták a feladatot.

A 13. feladatban 50 kockadobás esetén érdemes meghatározni, hogy várhatóan hányszor dobunk egyest. Mivel diszkrét egyenletes eloszlásról van szó, az egyes dobásának várható értéke 8,33. A keresett pontszám az $(50 - 8,33) / 8,33 = 5,002$

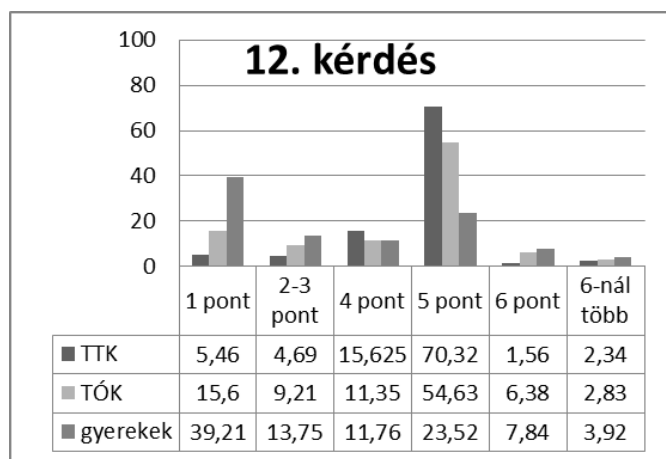
Mivel azonban a dobások száma mindenképpen egész szám, a feladatmegoldó a következőképpen is okoskodhat: A legnagyobb valószínűsége

annak van, hogy 50 dobásból 8-szor dobunk egyest: $\binom{50}{7} \cdot \frac{5^{43}}{6^{50}} < \binom{50}{8} \cdot \frac{5^{42}}{6^{50}} < \binom{50}{9} \cdot \frac{5^{41}}{6^{50}}$ Ebben az esetben $(50-8)/8=5,25$ pont.

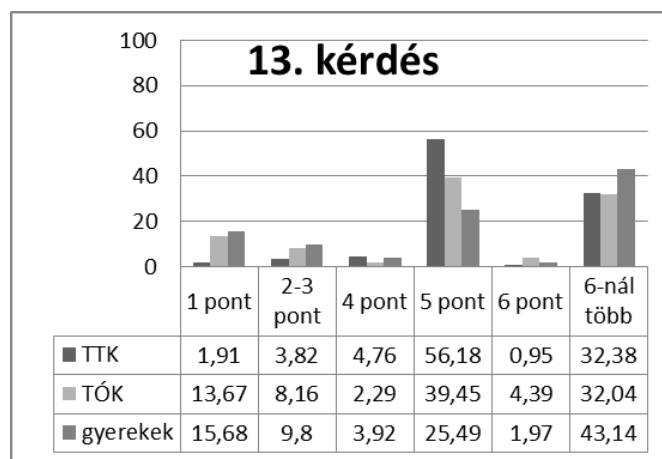
Az a fajta meggondolás is értékes, ha valaki észreveszi, hogy minden dobáskor Jancsinak 5-ször nagyobb esélye van, tehát az érte járó pontszám is lehet ötszörös.

A kockadobásos feladatoknál „valami” $1/6$ erősen bevéssődik a tudatba. Például ez lehet az oka annak, ha valaki Péternek 6 pontot ítélne egy dobásért.

A 12. és 13. feladatra adott válaszokat a 18 – 19. számú diagram mutatja:



18. diagram



19. diagram

A gyerekek teljesítményében szembeszökő a 12. feladatban adott 1 pont választása (39%). Úgy gondolom, hogy a feladat olyan mértékben volt áttekinthetetlen számukra, hogy visszatértek jól bevált (jelen esetben rossz) modellhez: vagy 1-est dob vagy nem. Így tett a TÓK hallgatók 15%-a is. Azon kevesek, akik indoklást is adtak, ezt szavakkal is kifejezték. A 13. feladatban

mindhárom csoportban csökkent az egy pontot ítélők száma. A nagyobb dobásszám tette átláthatóbbá számukra a problémát.

Ebben a feladatban mindhárom csoportban elhanyagolható volt azok száma, akik 6-nál több pontot ítéltek Péternek. Könnyen átlátható ugyanis, hogy összesen 5 pontot lehet gyűjteni a játék során. Szembeszökően magas volt azoknak a száma viszont, akik a 13. feladatban 6-nál (jóval) több pontot ítéltek Péternek. Az sejthető, hogy itt a hibaforrás az előző feladat téves analógiájában rejlik az adott pontszámokból következtetni lehet a gondolkodásra. Például sokan, akik a 12. feladatban 5 pontot adtak, most 50-et, vagy a 4 pontot 40-re emelték. Az ő gondolkodásuk mögött az állhat, hogy ha 10-szer annyi fordulót játszanak, akkor 10-szer annyi pontot kell adni. Gyakori hiba volt az is, hogy 8-szorozták a 12. feladatban adott pontszámot. Az 5-40 párosítás több ízben előfordult. Ők vélhetően kigondolták az egyes dobásának várható értékét, és ezt használták szorzóként. A TTK hallgatók 18%-ánál, a TÓK hallgatók 20%-ánál, a gyerekek 16%-ánál volt nyomon követhető ez a fajta okoskodás. Ez a feladatpár ebből a szempontból jó példát mutat arra, hogy a valószínűség témakörében az analógiák alkalmazásával óvatosan kell bánni.

A 12. és a 13. feladatban egyaránt a vártnál jóval kevesebben adtak 6 pontot Péternek. Úgy tűnik, a gondolkodás ezen buktatóját mindhárom vizsgálati csoport sikeresen elkerülte.

Összegzés:

A klasszikus valószínűségi modell segítségével megoldható feladatok legkevésbé a gyerekek csoportjában sikerültek, legjobban pedig a TTK hallgatók csoportjában.

Az olyan típusú valószínűségi feladatok megoldását és a modellállítást, amiben az arányosságnak szerepe van, akadályozza az arányossági gondolkodás fejletlensége. Az egyenes arányosság empirikus értéke nélkül a feladat szerkezete nehezen átlátható.

Az analógiás gondolkodás a matematika tanulásának és értésének fontos része. A valószínűség témakörében az analógiák alkalmazásával óvatosan kell bánni. A valószínűségi problémák megoldása során sok lehetőség adódik hamis analógiák alkalmazására.

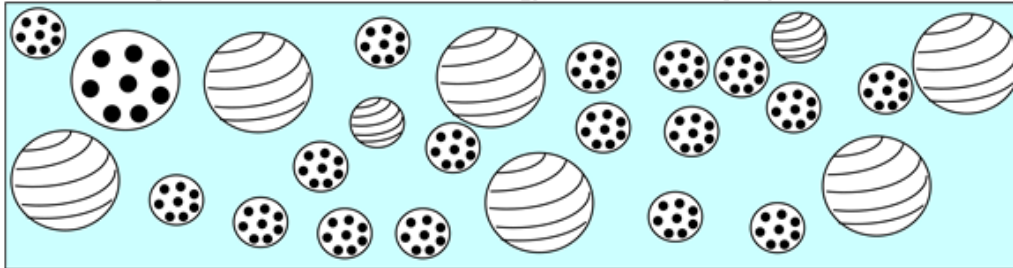
Érdemes a közoktatás gyakorlatában átgondolni az arány és a valószínűség fogalmi fejlődésének közös pontjait.

4.4.2.3. A kérdésfeltevés módjának jelentősége

A következő kérdéscsoportban azt próbáltuk megtudni, hogy a kérdés feltevésének módja hogyan befolyásolja a valószínűségi döntést a különböző vizsgálati csoportokban. Hogy összehasonlításokat tudjunk tenni, ezért kétszer kérdeztünk ugyanarra, de más módon. A tesztkérdések tehát párban állnak. Ezek egyike sem szerepelt sem a Green-tesztben, sem a SIMULO projektben.

Az egyik kérdéspár kérdőívünk 22. és 19. kérdése volt.

22. Ezen a képen labdák vannak. Kicsik és nagyok, csíkosak és pöttyösek.



A labdák közül taláломra kivettünk egyet.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

- a) Kicsi, pöttyös labdát vettünk ki.
- b) Nagy labdát vettünk ki.
- c) Kicsi labdát vettünk ki.
- d) Csíkos labdát vettünk ki.

Indokolja választát! _____

19. Kati nagyon komolyan sportol. Minden héten ötször lemegy a tornaterembe.

Ugyanakkor nagyon szereti a süteményt is, és hetente 4-5 alkalommal meglátogatja a közeli cukrászdát is.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

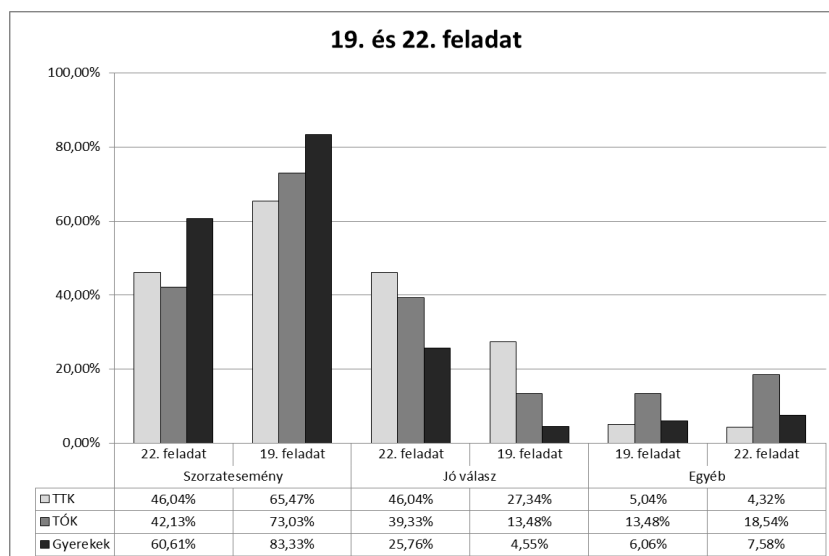
- a) Kati holnap lemegy a tornaterembe.
- b) Kati holnap süteményt eszik.
- c) Kati holnap lemegy a tornaterembe és elmegy a cukrászdába is.

Mindkét feladatban nehézséget okoz, hogy események együttes vagy külön-külön bekövetkezésének valószínűségét kell nagyság szerint jellemezni. (Tudjuk, hogy két esemény együttes előfordulásának (a szorzatuk) valószínűsége nem lehet nagyobb egyik esemény előfordulásának valószínűségénél sem: $P(AB) \leq P(A)$ és $P(AB) \leq P(B)$) A felnőttek esetében a középiskolában már szerepelhetett eseményalgebra, a gyerekek esetében nem.

Nehezen átlátható az analógia a két feladat szerkezete között. Nevezetesen az, hogy mindkét feladatban szerepel szorzesemény. Mindkét példában a gyors és felszínes válaszadás csapdát rejt. Hiszen bár kicsi pöttyös labdából sok van, kicsiből még több. Ugyanígy a másik feladatnál: Kati elég sokszor megy edzésre és a cukrászdába is, ezek együttes előfordulásának valószínűsége mégis kisebb, mint külön-külön bármelyiké.

A szorzesemény rossz becslésével (a szakirodalom ezt „conjunctive fallacy”-nak nevezi) számos szerző foglalkozott már. Ez általános jelenség szubjektív ítéletalkotások során (Tversky and Kahneman). A kérdésekkel jelen esetben nem az volt a cél, hogy ismét igazoljunk egy olyan tényt, melyet már sokan dokumentáltak. A válaszokból azért látni fogjuk, hogy ez most is beigazolódott. Inkább az foglalkoztatott, hogy függ-e a kérdésfeltevéstől a csapda elkerülése.

A két kérdésfeltevésben alapvető különbség van: Az elsőhöz tartozik kép, míg a második esetben a feladatmegoldónak kell megteremtenie a képet magában. Kérdéses, hogy melyikben vehető észre, hogy a szorzatesemény valószínűsége nem lehet nagyobb egyik esemény valószínűségénél sem.



20. diagram

Mindkét feladatnál és mindhárom vizsgálati csoportban magas volt azok száma, akik a szorzatesemény legnagyobb valószínűségére tippeltek. Az egyik esetben azt érezték a legvalószínűbbnek, hogy kicsi pöttyös labdát vettünk ki, a másik feladatban pedig azt, hogy Kati holnap lemegy a tornaterembe és elmegy a cukrászdába is. Ez igazolta a conjunctive fallacy effektust. Ennek elkerüléséhez azt kellene látni, hogy több szempont egyidejű figyelembe vétele a halmaz szűkítését vonja maga után.

Az is leolvasható, hogy a 19. („Kati”) feladat megoldása során mindhárom vizsgálati csoportban jóval többen sétáltak ebbe a csapdába, mint a 22. („Labda”) feladatban.

A teljesítményben mutatkozó nagy különbség oka lehet a kérdésfeltevés módja. A labdás feladat esetében a képen jól megszámlálható, hogy mennyi kicsi labda van, mennyi pöttyös, csíkos, nagy. Az is látható, hogy a kicsi pöttyös labdák száma kevesebb a kicsi labdákénál. A másik feladat nem tartalmaz ilyenfajta segítséget, az erről alkotott belső képek igen változatosak lehetnek. Ugyanis nem olyan könnyű elképzelni ezt a szituációt. Például aki a naptár lapjait maga előtt megjeleníti, csak azt a momentumot emeli ki, hogy elég sok olyan nap lehet, amikor Kati cukrászdába és edzésre egyaránt megy.

A két feladat még egy fontos momentumban különbözik egymástól. A labdás feladat esetében egy már matematika órán megszokott, de a mindennapi életben nem jelenlevő problémát dolgozunk fel, mely erősen ösztönöz a matematikai modell alkalmazására. A „Kati” feladat sokkal életszerűbb, mely esetleg megfogalmazásában azt sugallja, hogy matematikai megfontolások helyett inkább a

megérzésekre hagyatkozzanak, ezért nem fárasztják magukat a megfelelő modell megkeresésével. Azt a problémát, amelyikhez könnyebben kapcsolható matematikai modell, mindhárom csoportban könnyebben oldották meg.

Eredetileg egyik feladathoz sem terveztünk indoklást. A kérdőív bemérése során azonban szembesültünk azzal, hogy – az általunk matematikai iskolai példának szánt – labdás feladat megoldásában is számolni kell egyéb nézőpontokkal. Azzal, hogy akadhat olyan egyén, aki a labdák méretéből és/vagy elhelyezkedéséből következtet. Ezért itt az indoklás kérése utólag került a tesztbe.

„Mert ha térben nézzük a labdákat, lehetnek ugyanakkorák, mint a többi, csak távolabb vannak.” (TÓK) „Nagyobb helyet foglalnak a nagyok” (gyerek) „Csak van, amelyik távolabb van, azt kisebbnek látjuk, de van olyan pöttyös, ami ugyanakkorának látszik, mint a nagy csíkos.” (TÓK) „Viszont a nagyobb jobban kézbe kerül.” (TTK) Ez utóbbi megjegyzést 9 TTK hallgató, 7 TÓK hallgató és 2 gyerek tette meg, függetlenül attól, hogy mi volt az eredeti válasza. Mindegyik probléma abból a feladatkitűzési hibából ered, hogy a labdák mérete különböző, így a véletlenszerű kiválasztás a gyakorlatban nem valósítható meg. Célszerűbb lett volna a képen egyforma méretű labdákat szerepeltetni, a kicsi/nagy tulajdonságpárt például piros/kék tulajdonságpárra cserélni. Annak ellenére, hogy ez a jelenség ebben a vizsgálatban nem okozott számottevő eltérést, mégis fontos tanulsága van a feladatírók számára: Egy erősen matematikai gondolkodást sugalló tanpélda megfogalmazásakor is akadhat olyan tanuló, aki belegondol annak valóságtartalmába.

A két feladat összehasonlítása során, tehát egyértelműen kiderült a képi reprezentáció meglétének fontossága. Sokkal jobb teljesítményt nyújtott mindhárom vizsgálati csoport annak a feladatnak a megoldásában, melyhez képi reprezentáció is társult.

Az órai megfigyelések során is azt tapasztaltuk, hogy a megoldók általában jobban átlátják azokat a problémákat, amelyekhez tárgyi tevékenységek vagy képek kapcsolhatók:

A következő kísérletet elvégeztük a budapesti Lauder Iskola 2., és a TÓK Gyakorló Iskola 5. osztályában is:

A 2. osztályban egy zsákba 4 piros és 2 kék golyót tettek. A gyerekek minden kísérletben egyszerre hármat húztak. Azt vizsgálták, hogy a következő állítások közül melyek lesznek igazak a három kihúzott golyóra:

- A: Mindhárom piros
- B: Mindhárom kék
- C: Van közte piros
- D: Nem mind piros
- E: Van közte kék

A tanító a gyerekek előtt helyezte a golyókat a zacskóba, majd mielőtt a kísérlethez hozzákezdtek, érdeklődött a tippjeikről. Mivel akkor már nem láttak bele a zacskóba, csak fejben, reprezentáció nélkül gondolkodhattak. Ebben a fázisban egyetlen tanuló sem jelezte azt, hogy szerinte van olyan állítás, ami mindenképp igaz lesz (a C biztos esemény), és van olyan állítás, amelyik sehogyan

sem lehet igaz (a B lehetetlen esemény). 10 közös próbahúzás után (melyet a táblára is felírtak) kezdett érlelődni ez a gondolat, de az osztályban ezt három gyerek tudta csak megfogalmazni. Miután ők mindenkit meggyőztek, a lehetetlen eseményt és a biztos eseményt kizárták a vizsgálatból, és csak a maradék hárommal foglalkoztak.

A továbbiakban mindenki arra tippelt, hogy a három állítás közül melyik lesz legtöbbször igaz. Egyetlen tanuló sem vette észre, hogy a D és E állítások ugyanazt jelentik. Ezután elvégezték a kísérletet melynek eredménye a következő volt: az A állítás 7 alkalommal bizonyult igaznak, a D és E állítások pedig 12 alkalommal. A kísérletet frontálisan végezték, úgy, hogy minden gyerek húzását a tanító a táblán jegyezte. Csak 8 kísérlet után született meg az első felismerés, hogy amikor a D állításhoz „strigula kerül”, akkor az E-hez is, és hogy akkor viszont az A állításhoz nem. (Ezt a tapasztalatot ugyanaz a gyerek fogalmazta meg, aki a lehetetlent is először vette észre.) A tapasztalatot beépítve a strigulázás eljárása kissé felgyorsult.

Amikor tippjeiket összehasonlították az eredménnyel, kissé csalódottak voltak. Többségük ugyanis eredetileg arra tippelt, hogy a három piros lesz leggyakrabban igaz. Az egyik kisgyerek így fogalmazott: ”Mivel 4 piros volt benne, az volt esélyesebb.” Másvalaki: „Ez nem jelenti azt, hogy bután gondolkodtam. Most így lett.” A tanító ezzel egyetértett, és ebben az évfolyamban egyelőre ennyiben maradtak. (Pedig annak valószínűsége, hogy mindhárom golyó piros $1/5$, tehát a kísérlet során kapott $7/19$ relatív gyakoriság meghaladta a várakozást)

Ugyanezt a tevékenységet elvégezték a Gyakorló iskola 5. osztályában is. Ezt az órát egy tanítási gyakorlatát teljesítő tanító szakos hallgató tartotta. Nagy különbség volt az órán a másodikosokhoz képest, hogy itt a gyerekek kísérlet nélkül, fejben ki tudták szűrni a lehetetlen és a biztos eseményt. Önmaguktól nem, de a tanár kérdésére észrevették a D és E állítások azonosságát is. A probléma ezek után egy kérdésre szűkölt: Minek nagyobb az esélye, három piros golyó, vagy „vegyes” húzásának? Akik hangosan megfogalmazták sejtésüket, többnyire a három pirosra tippeltek. (Hogy milyen volt a tipp aránya, azt nem tudtam egészen pontosan dokumentálni, mert az órát a hátsó padból követtem)

A kísérlet elvégzése után ebben az évfolyamban már feltárták az okokat is. A módszer a következő volt. A golyókat megszámozták, majd csoportmunkában felírták mind a 20 lehetséges kimenetelt. Ezek után aláhúzták azokat, amelyekre igaz, hogy mindhárom golyó piros.

A TÓK hallgatók számára is felvetettük ugyanezt a problémát a megfelelő elméleti részek tárgyalása után. A problémát gyakorló feladatnak szántuk. Ebben a fázisban nem állt szándékunkban kísérletet végezni, ezért azt kértük, hogy számítsák ki az egyes események valószínűségét. Az ekvivalens állítások kiválasztása, valamint a 0 és 1 valószínűségű események kiválasztása nem jelentett problémát. A feladat további megoldása ennek ellenére nehézségbe ütközött. Egyik hallgató így kérdezett: „Van arca a golyóknak?” A kérdés hátterében az állt, hogy az egyforma színű golyók között kell-e különbséget tenni. (Vagyis az elemi események megadása okozott problémát.) Ekkor úgy módosítottuk a feladatot, hogy az egyik piros golyó színét zöldre változtattuk. Ekkor kicsit könnyebben

sikerült megtalálni az elemi eseményeket. További segítséget jelentett, hogy a zsákot és tartalmát megjelenítettük kivetítőn is, ahol a színes golyókat megszámoztuk.

Az órai megfigyelések jól kiegészítik a kérdőív 19. és 22. kérdésének elemzése során nyert tapasztalatunkat: a tanulók jobban átlátják azokat a problémákat, amelyekhez tárgyi tevékenységek vagy képek kapcsolhatók.

A kérdésfeltevés módjának jelentőségét mutatja a következő két feladat, mely a kérdőív egymást követő két kérdése volt, és melyek közül a 21. kérdés a labdás feladat ábrájára vonatkozik. A diáknak gyakran nem csak a kérdésre adott választ akarja megadni, hanem azt is megpróbálja kitalálni, hogy a tanár milyen választ vár. Nem volt könnyű a 20. és 21. kérdések szövegének értelmezése:

20. Igaznak tartja-e a következő állítást? „A dohányzó emberek rövidebb ideig élnek, mint azok, akik nem dohányoznak.” IGEN / NEM Indokolja válaszát!
21. Igaznak tartja-e a következő állítást? „A pöttyös labdák kicsik.” IGEN / NEM Indokolja válaszát!

A matematikai problémák megoldása során a legtöbbször a formális logika szabályait követjük. Nem igaz például a következő kijelentés: „Minden prímszám páratlan.” Az állítás igazságértékét megváltoztatja az egyetlen kivétel. A társadalomtudományok és a természettudományok – amennyiben az adott problémában nem releváns – az ilyen esetekben nagyvonalúbban viselkednek, az állítás igazságértéke nem változik egy-két kivételtől. Például az a kijelentés, hogy „A borjúnak egy feje van” igaz, még akkor is, ha már hallottunk kétfejű borjú születéséről. Azaz, az igazság ott tendencia jellegűen kezelt.

Felvethetőek olyan problémák, amelyek kétféleképpen is értelmezhetőek:

- Ha tapasztalataink azt mutatják, hogy A megjelenésekor rendszeresen megjelenik B is és viszont, akkor a két jelenséget együttjárónak tekintjük.
- Az ok-okozati típusnál ez a séma úgy módosul, hogy akárhányszor megjelenik A, mindig megjelenik B is, de ez fordítva nem igaz.

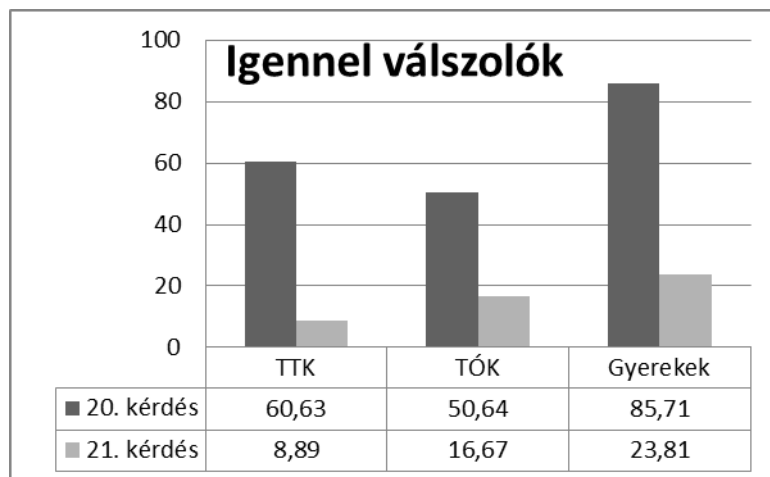
Piaget csak ez utóbbi, mások, Magyarországon például Nagy József pedig az „együttjárás” értelmezésben végeztek vizsgálatokat. (idézi Bán Sándor, 1998 p. 221-227.)³¹

Vizsgálatunkban mi arra voltunk kíváncsiak, hogy a két kérdést azonos szerkezetűnek kezelik vagy sem. Nem az az elsődleges kérdés, hogy ok-okozati sémában gondolkodnak, vagy az együttjárás értelmezésében, hanem inkább az,

³¹ Sok szerző munkájában megjelenik a korrelatív gondolkodás (correlational thinking) kifejezésének használata, melyben elsődleges forrásként Piaget-t nevezik meg.

hogy egyformán gondolkodnak-e a két kérdés megválaszolásakor. Ezért is került ez a két kérdés közvetlen egymást követően a feladatlapra.

A 21. diagram mutatja 20. illetve 21. kérdésre igennel válaszolók számát.



21. diagram

A különbség szembeötlő. Mindegyik populációban többen válaszoltak igennel a dohányzás káros hatását firtató kérdésre, mint a labdás feladat kérdésére.

Fontos megfigyelni, hogy hányan válaszoltak a két kérdésre ugyanazt a fajta gondolkodást használva. A TTK hallgatók 40,28%-a, a TÓK hallgatók 43%-a és a gyerekek 24,24%-a kezelte azonos szerkezetűként a két feladatot.

A válaszadásban fellelhető eltérés oka talán a feladatok megfogalmazásában rejlik. Az egyik esetben a probléma egy formális logika szabályait alkalmazandó matematika feladattal vált ekvivalenssé. Ha ennek szabályai szerint jártak el, természetesen nem igaz, hogy a pöttyös labdák kicsik, hiszen nem minden pöttyös labda kicsi. Van ellenpélda. A másik probléma esetében viszont a válaszadók szabadabbnak érezhették magukat, a kérdés természettudományos felvetése jobban megengedi a kivételek figyelmen kívül hagyását. A fentiek mutatják azt, hogy ugyanaz a feladat egészen más meg gondolást kíván a köznapi gondolkodásban, mint a matematikai gondolkodásban.

A válaszadókat zavarhatta a 20. feladat hétköznapi tartalma. A 21. feladat esetében viszont inkább a matematika tantárgy keretében általában a megszokottakhoz igazították képzelt elvárásainkat. A feladatok indoklásos része volt hivatott a bizonytalanságot tompítani, mely lehetőséget adott gondolkodásmódjuk feltárására és a második esetben a természettudományos magyarázatra.

Összegzés:

A valószínűségszámítás tanulása során rengeteg olyan probléma vetődhet fel, mely többféleképpen értelmezhető. A válaszadáshoz legjobban illeszkedő modell kiválasztása csak akkor lehet sikeres, ha a diákok ebben segítséget kapnak. A reprezentáció segítséget jelent a feladat értelmezésében.

A modellválasztás nagy mértékben függ a kérdésfeltevés módjától.

Mind a kérdőíves, mind az órákon szerzett tapasztalatok azt igazolják, hogy a kérdés feltevésének módja nagymértékben befolyásolja a tanulók gondolkodási stratégiáját. A tanulók a feltett kérdés mögött megsejtett elvárásnak meg kívánnak felelni.

4.4.2.4. *Érzelmi tényezők*

Az érzelmek elemzése a pszichológiai kutatások témája. Az érzelem fogalma nem rendelkezik éles határokkal, ezért a kategorizálás és meghatározás körülményes. Számos tudományos igényű és ismeretterjesztő tanulmány foglalkozik az érzelmek vizsgálatával. Többségük nem is tesz kísérletet az érzelem fogalmának meghatározására, hanem csak egyszerűen belevág azok elemzésébe. Mondhatjuk, hogy az érzelem a pszichológia tudományának egyik alapfogalma. Általában úgy értelmezik, hogy az a környezet jelenségeihez, eseményeihez történő viszonyulás kifejeződése, melyeket vegetatív jelzések kísérnek. (Juhász, 2006)

A modern pszichológia bizonyította, hogy az érzelmek nem függetlenek a logikus gondolkodástól, hanem annak nélkülözhetetlen segédeszközei. (Mérő, 2010)

Az egyik érzelmekkel kapcsolatos jelenség a matematika tanulása során a motiváció. A tanuló motiváltsága növeli a problémamegoldás hatékonyságát. A valószínűségi szemlélet fejlesztése során egy sor olyan probléma adódik, amely önmagában is felkelti a tanulók érdeklődését. Ilyenek például a valószínűségi játékok, de ezt jelzi a mi kérdőívünk magas kitöltöttsége is. Ezért ebben a témában a fogalmak bevezetésének időszakában többnyire nem az a kérdés, hogy hogyan motiváljuk tanulóinkat a feladat megoldására.

A valószínűség tanulásakor általában egy szöveggel adott matematikai probléma megoldására kerül sor. A megértést követően általában a modellalkotás következik, ami a szöveg matematika nyelvére való átkódolását jelenti. (Pólya, 1945) Azt gondolhatnánk, hogy a probléma megoldásához vezető terv megtalálása már nem „érzelmi kérdés”. Tanítási tapasztalataim során mégis az a sejtés kezdett erősödni, hogy a megfelelő valószínűségi modell kiválasztását érzelmi tényezők is befolyásolják. Ennek próbáltunk utánajárni a kérdőíves kikérdezésen és a tanítási órákon egyaránt.

A kérdőív 3. számú kérdését az tevékenység közben is megvizsgáltuk:

3. Egy szabályos pénzérmével egymás után ötször írást dobtunk.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A következő alkalommal nagyobb lesz a fej dobásának az esélye.
- b) A következő alkalommal nagyobb lesz az írás dobásának az esélye.
- c) A következő alkalommal ugyanakkora eséllyel dobunk fejet vagy írást

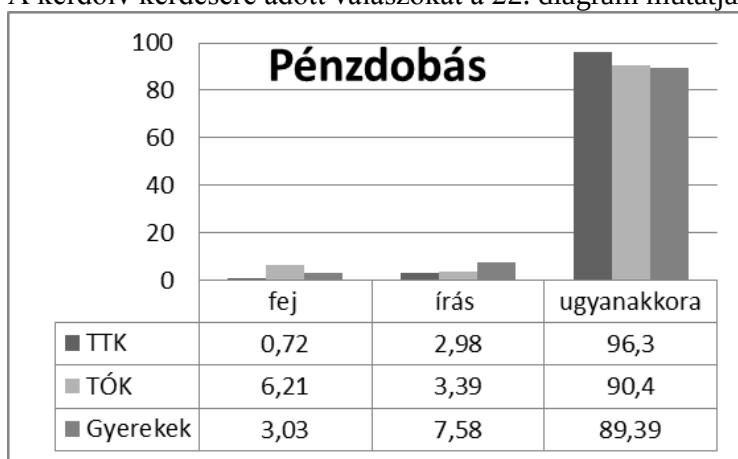
Indokolja választát! _____

Elemezzük a helyzetet:

- A feladat nem arra kérdez rá, hogy mekkora az esélye annak, hogy egymás után hatszor írást dobjunk, hanem a hatodik dobás esélyeit firtatja. Annak ugyanis tényleg kicsi a valószínűsége, hogy egymás után hat írást dobjunk. A független események valószínűségeinek szorzata, jelen esetben $(1/2)^6$. Ellenben annak valószínűsége, hogy öt írás dobása után a hatodik is írás, éppen $1/2$.
- A matematikai megoldás mellett létezik a probléma intuitív megközelítése, melyben a dobássorozat kiegyenlítődését várják. Aki így gondolkodik, annak számára a fej dobásának lesz nagyobb valószínűsége. (Ez a fajta intuitív megközelítés talán a nagy számok törvényének téves értelmezésére vezethető vissza.)
- Gondolhatja valaki, hogy abból a tapasztalatból indul ki, hogy ezzel a pénzérmével már 5-ször dobtak írást. Ezzel a pénzérmével az írás dobásának megfigyelt relatív gyakorisága 1. Ezek szerint várhatóan a hatodik dobás írás lesz.

A válaszokból következtetni lehet a modellválasztásra. Számunkra nem pusztán az volt a kérdés, hogy az egyes vizsgálati csoportok milyen modellt választanak. Vizsgáltuk, hogy befolyásolható-e a modellválasztás érzelmi tényezők hatására.

A kérdőív kérdéseire adott válaszokat a 22. diagram mutatja:



22. diagram

A diagram alapján úgy tűnik, mindhárom vizsgálati csoport egyértelműen a matematika órán elvárt módon gondolkodott. A pénzfeldobás egy klasszikus problémafelvetés, mellyel nagy eséllyel mindenki találkozott már. Sőt talán átlátva szándékunkat, tudatosan kerülték a feladatban vélt csapdát.

Kevesen tekintették az érméről kapott információt statisztikának, vagy közelítették meg a kérdést szubjektíven. Azok, akik így gondolkodtak, kivétel nélkül adekvátan indokoltak. „Írást, mert ugyanazt a mechanizmust fogjuk követni a pénzérme feldobásánál, mint az előző esetekben.” (TÓK) „Lehet, hogy a fej oldala nehezebb” (gyerek) „Nem lehet mindig írást dobni” (TTK)

Azonban ezzel nem fejeződött be a dolog, kíváncsiak voltunk arra is, hogy hogyan reagálnak „valóságos” helyzetben. A TÓK hallgatók körében négy héttel a

kérdőíves kikérdezés után az órákon eljátszottuk ezt a problémát. Az eltelt idő alatt a kérdést és az akkor adott válaszaikat elfelejtették, és nem is utaltunk rá.

Az órán piros-kék koronggal dobtunk, a jegyzőkönyvet vezető beépített kolléga segítségével. Úgy ügyeskedtünk, hogy a dobásokat csak ő látta. Minden esetben csak arra kellett tippelni, hogy a korong kék vagy piros oldalra esett. Függetlenül attól, hogy mit volt a dobás, előzetesen megbeszélve minden alkalommal azt mondta be, hogy a korong piros oldalra esett. Arckifejezésünkkel, gesztusainkkal, közbeiktatott megjegyzéseinkkel azt a látszatot keltettük, mintha magunk is csodálkoznánk a kísérlet kimenetelének e sorozatán. Az események minden hallgatói csoportban hasonló módon folytak.

Az első dobás előtt – ahogyan várható volt – a hallgatók fele a piros, a másik fele a kék dobásra adta le tippjét. (Kb. 15-15 fő) Minden egyes dobás után azonban egyre nőtt a kékre tippelők száma. Az ötödik dobás után egy csoportban hárman maradtak, akik továbbra is pirosra tippeltek, egy másikban mindössze ketten. A hatodik dobás előtt feltettük a kérdést: „Na most milyen eséllyel dobok kéket?”. A hallgatók ilyenfajta válaszokat adtak: „Már kidobtuk a pirosakat, a kék jön.” „Minél több pirosat dobtunk, annál valószínűbb, hogy kék következik” „Próbáljon a tanárnő a másik kezével dobni!” „Nagyon kicsi a valószínűsége annak, hogy egymás után hat pirosat dobjunk” Hosszú ideig senkinek sem jutott eszébe, hogy a feltett kérdésre válaszoljon. Ugyanis konkrétan rákérdeztünk, hogy mi az esélye a kék korong dobásának.

Végül valaki így nyilatkozott: „Tudom, hogy megint fele-fele a kék dobás esélye, de már annyi pirosat dobtunk!”. Ez utóbbi megjegyzésen aztán élénk vita alakult ki, de végül megegyeztek abban, hogy minden alkalommal $1/2$ valószínűséggel dobunk kéket vagy pirosat. A játék elemzésekor a játék közben tanúsított viselkedésüket szembesítettük a kérdőívben adott válaszaikkal.

Arra a meglepő következtetésre jutottunk közösen, hogy bár birtokukban van valamiféle tudás a problémával kapcsolatban ezt a tényleges játékban nem alkalmazzák. Erre utal az a tény, hogy már nem fele-fele arányban tippeltek pirosra és kékre, amikor a dobássorozattal előrehaladtunk. Sokkal erősebbnek bizonyultak a kiegyenlítődést rövid távon váró érzelmi tényezők a játék során, mint a meglévő tudás aktivizálása.

Hasonló jelenséget mutatott be a 18. feladat, ami egy lottójáték volt. A magyar matematikatanítás általában a lottó-problémával vezeti be a kiválasztásos feladatok, majd az ismétlés nélküli kombinációk tanítását. Egyszerű lottószelvényekkel alsó tagozaton is találkoztak már. Akik elvégezték a középiskolát, azok a matematika tanulása során valószínűleg ki is számolták már, hogy a különböző lottófajtákban milyen eséllyel lehet nyerni. Ezt a problémafelvetést tankönyveink is tárgyalják. Kérdőívünk 18. kérdésében kis nyerési esélyű kitöltésre kérdeztünk rá:

18. A farsangi ünnepségre iskolai lottót terveztek. 12 szám közül 4-et húznak. Három gyerek a következő lottószelvényeket töltötte ki:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

B

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

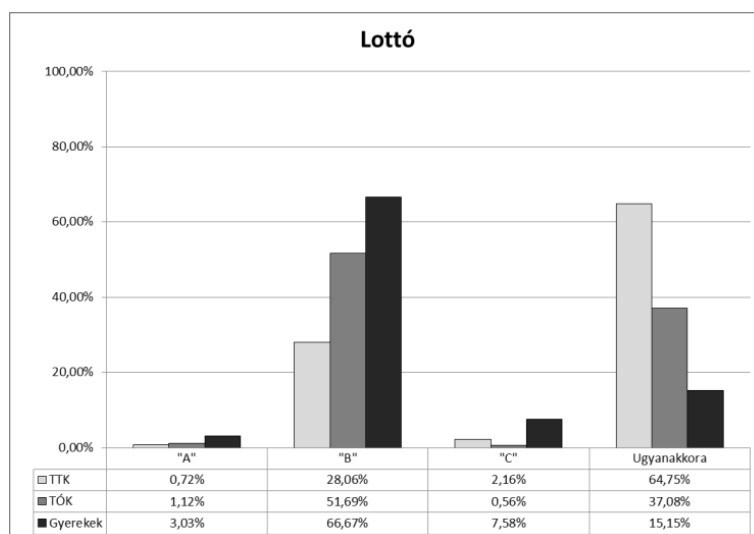
C

Melyik szelvénynek van ezek között a legkisebb nyerési esélye?

Válasz: _____

Indokolja választát! _____

A vizsgálati csoportok válaszait a következő. diagramon láthatjuk:



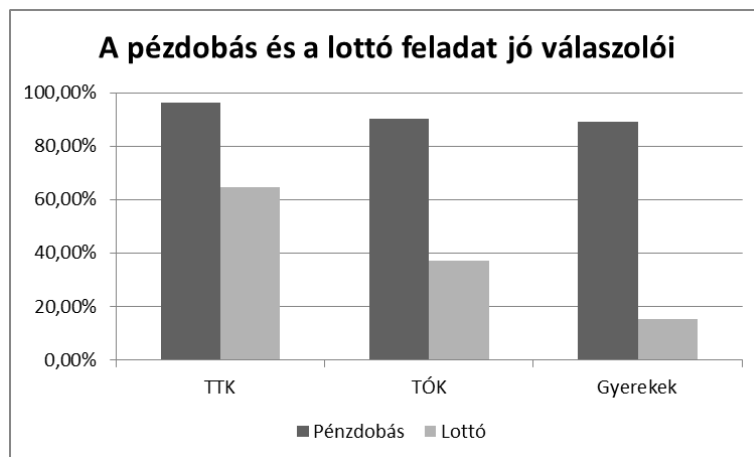
23. diagram

A válaszokból az látszik, hogy az érzelmi befolyásoltság nem független a tanultágtól. A TTK hallgatók legnagyobb hányada a matematikában tanultaknak megfelelő választ adta, azaz ugyanakkora a nyerési esély a három esetben. Azonban nem elhanyagolható a rossz választ adók száma ebben a vizsgálati csoportban sem (28%). Jólal kevesebben adtak helyes választ a TÓK hallgatói (mindössze 37%), a többség érzelmi alapon döntött. Annak ellenére, hogy középiskolában ezt tanulták. A gyerekek pedig láthatóan nincsenek tisztában a lottójáték matematikájával, szubjektív módon közelítik meg a kérdést.

A hibás gondolkodás oka az lehet, hogy a gyakorlatban általában nem várunk semmiféle szimmetriát egy valószínűségi esemény vagy eseménysorozat megfigyelése során. Nagyon csodálkoznánk például, amikor elered az eső, és az esőcseppek valamiféle szabályos alakzatot rajzolnának. Az is meglepne, ha egy fej-írás dobássorozat például így alakulna: FFFFFFFF....., vagy FIFIFIFI..... (A 3. feladat éppen erről szólt) Érzéseinkre hagyatkozva általában elutasítjuk a „rendet” egy valószínűségi megfigyelésnél. Úgy gondolom, hogy ezt a – jelen esetben hamis – analógiát alkalmazták. A rossz válaszok közül mindhárom csoportban a B bizonyult a legnépszerűbbnek, annak ellenére, hogy az A lehetőséggel is szimmetriát kínáltunk fel. Az indoklások pro és kontra igen változatosak voltak. Néhányan például hivatkoztak a Magyarországon közismert és igen kedvelt „Valami Amerika” c. filmre, ahol az egyik szereplő éppen az 1, 2, 3, 4, 5 számokkal nyert 90 számból.

Elég szép számmal akadtak (9 TTK és 14 TÓK hallgató), akik ugyan tudták a probléma matematikáját, az elvárásnak megfelelő választ is adtak, indoklásukban mégis fontosnak tartották intuíciónjukat megosztani. „Reálisan nézve a B-nek, de matematikailag ugyanannyi” (TTK hallgató) Ezeknél a hallgatóknál érezhető, hogy a szubjektív tényezőket nem tudják teljesen kioltani a matematika órákon megtanult formális mondatok. Bár a lottójátékot nem dolgoztuk fel a tanítási órák során, az a sejtésünk, hogy valóságos problémahelyzetben még erősebben érvényesülnének az érzelmi tényezők.

Ha teljesítményüket összehasonlítjuk a pénzfeldobásos feladatban nyújtott teljesítményükkel, mindhárom vizsgálati csoportban jóval alacsonyabb az átlag:



24. diagram

A szembeötlő különbség oka az lehet, hogy a „lottó” feladat sokkal nehezebben áttekinthető. Különösen nagy különbséget láthatunk a jó választ adó gyerekek számában, akik számára a lottó-probléma matematika órákon még nem került feldolgozásra.

Bár az érzelmi tényezők megjelenése a kérdőíven is látható, úgy gondoljuk, hogy a kérdőíves kikérdezés módszere nem ad teljes képet. Igazán akkor tudunk képet alkotni, ha tevékenység közben figyeljük meg tanítványainkat. A féléves

kurzus megfigyelései során kivétel nélkül minden órán tapasztalható volt az érzelmi tényezők megjelenése. Nem csak azért, mert az esetek egy részében mi provokáltuk. A jelenséget megfigyelhettük akkor is, amikor ez egyáltalán nem volt célunk. Ezek közül az egyik tapasztalatomat megosztom az olvasóval.

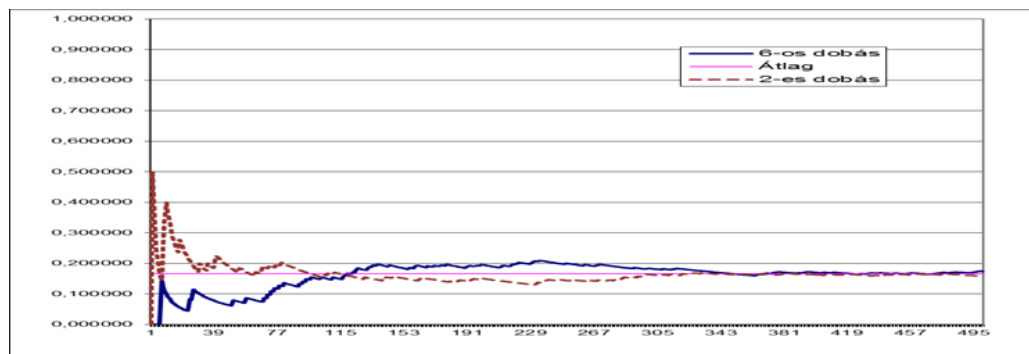
Tanításunk 7. óráján a relatív gyakoriságok megfigyelése történt. A következő kérdést tettük fel. Egy kockával dobunk. Mi lesz gyakoribb? Kettes, vagy hatos? (Ebben a fázisban még nem volt benne a kérdésben, hogy hányszor fogunk dobni.) A diákok a következő válaszokat adták:

„10-ből legfeljebb 3-szor dobunk 6-ost. Igaz, kettest is.”

„Kettest többet fogunk dobni” „Csak azért mondd, mert a hatost szoktuk figyelni.”

„Ugyanakkora az esélye”

Néhány valószínűségi kockadobás után a számítógépen szimuláltuk a kísérletet. Ismertettük a véletlen szám generálását, és bemutattuk a grafikon készítésének módját. Több mint 500 eseményből álló kísérletsorozatot figyeltünk meg, és mellé ilyenfajta grafikonokat³²:



A diákok úgy reagáltak, ahogyan szeretnénk volna: „Ritmusa van”, „Az elején nagyon kileng”, „Egyre simább”, „Mindig 0,16 körül van”

Megjegyzés: Mindeközben az egyik hallgató felvetette azt a kérdést, hogy vajon a számítógép adta véletlen számok valóban véletlenek-e. „A programot ember készítette, tehát nincs benne véletlen.” Mindenáron be akarta bizonyítani, hogy a számítógép más, mint a valódi dobás. Azt szeretnénk tudni, hogy a véletlen számot milyen módon generálja a gép. Erre a kérdésre ott és akkor nem voltunk felkészülve, tehát elnapoltuk. A következő órára viszont elolvastuk Lovász László „Véletlen és álvéletlen” című remek cikkét, és megosztottuk a frissen szerzett tudást. Mi tagadás, a hallgatónak igaza volt, a számítógép pusztán arra képes, hogy bár megfelelő, de mégiscsak álvéletlen sorozatot generáljon. (Ez azonban a mi problémánk szempontjából természetesen nem releváns kérdés.)

Miközben erről filozofáltunk, egy másik hallgató, aki társasjátékokban szerzett tapasztalatai alapján nem nyugodott bele a grafikonok nyújtotta látványba 100 dobást végzett. 9 alkalommal dobott hatost, és 18 alkalommal kettest. Úgy érezte, igaza van: hatost jóval nehezebb dobni, mint kettest. Erről a változó diagramokban

³² A grafikon a 6-os és 2-es dobások relatív gyakoriságát mutatja. Az „átlag”-ot a hallgatók kérésére 1/6-ra állítottuk be.

fellelhető hasonlóság sem győzte meg. Nem hagyta magát, újabb kísérletet végzett, melyben ismét az ő feltevése igazolódott. Így kommentálta: „Igen, mert lehet gondolni valamire, hogy azt akarja dobni. Ilyenkor a kocka érzi, és úgy pörög neki.” Ennyiben maradtunk.

Ugyanezen az órán a két kockával való dobás esélyeit is vizsgáltuk. A kérdés az volt, hogy két kockával dobva mi a valószínűbb? Az összeg hat, vagy az összeg 7?

A tippelés során a következő megjegyzések hangzottak el:

„Ki melyikre húz. A szíve szerint” (Ez a hallgató nem a kérdésre válaszolt)

A legtöbben (12 hallgató) úgy gondolták, hogy az esély megegyező. Így érveltek: „3-3 feleképpen jöhet ki, tehát ugyanannyi az esélye.” „Ugyanannyi az esély, mert a 6-nak és a 7-nek 3-3-féle bontása van”

„2-től 12-ig kaphatunk eredményt. A 6 és a 7 éppen középen van. Ezért ugyanannyi az esély.”

Ugyanez a diák később módosította észrevételét: „Rájöttem, hogy egy közepe van: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 (Ezt fel is írta a táblára)”

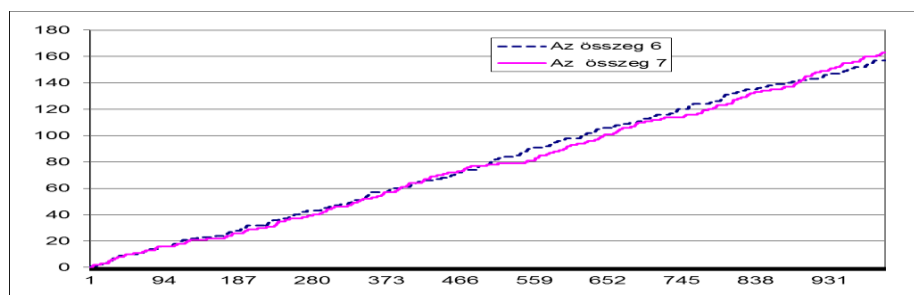
„Azért lesz kevesebb a 6, mert abban a 3;3 is benne van. Két különbözőt könnyebb dobni, mint két azonosat.” (Ez utóbbi megjegyzést többen vitatták)

Párban dolgozva 30 dobásból álló kísérletsorozatot végeztek. Ez persze kevés volt ahhoz, hogy következtessenek, hiszen 5 párnál győzött a 7, és 5 párnál a 6. Ennek alapján azokban, akik az esélyeket egyenlőnek vélték megerősödött a feltevés. Azok viszont, akik a 7 összeget látták esélyesebbnek, nem hagyták annyiban. Javasolták egy újabb kísérletsorozat elvégzését. Az új kísérletben ugyan többször jött ki a 7 összegként, de egyik tábor sem lett meggyőzve. Megjegyzéseik:

„Amint előre szuggeráltuk!”

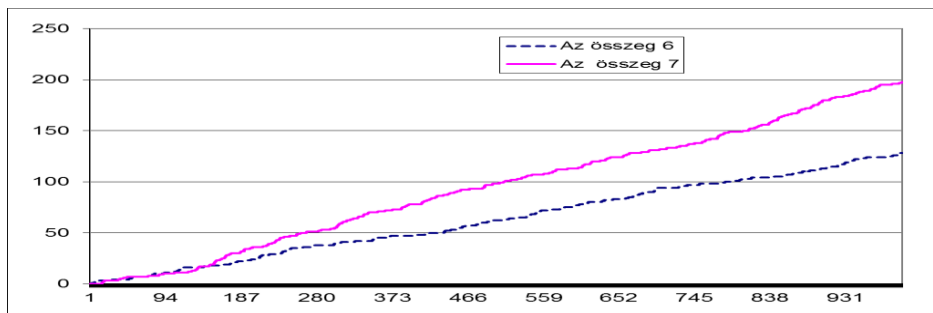
„Kevés volt a kísérlet!”

Végül ismét a gépet hívták segítségül, az több kísérletet tud egyszerre végezni. Sok diagramot megfigyeltek, amik között akadtak ilyenek:³³



De persze a legtöbb helyen nagyobb volt az eltérés:

³³ A grafikonok a 6-os és 7-es összegek dobásának gyakoriságát mutatják.



Ezek után került sor az okok feltárására a következő táblázat segítségével, melyben a 36 eset közül azokat jelöltük, melyek a 6-os illetve a 7-es összeget állítják elő.

6-os dobás							7-es dobás						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1					1+5		1						1+6
2				2+4			2					2+5	
3			3+3				3				3+4		
4		4+2					4			4+3			
5	5+1						5		5+2				
6							6	6+1					

Ebben az óraleírásban igen sok olyan momentum szerepel, ami az érzelmi tényezők jelenlétét igazolja. A diákok megjegyzései, és a kísérlet kimenetelére vonatkozó elképzeléseik tükrözik ezt a tényt. Az is tapasztalható volt, hogy igen sok esetben kitarítottak az esemény valószínűségét illető elsődleges megérzésük mellett. (Egy kockával könnyebb kettest dobni, mint hatot. Két kockával ugyanolyan eséllyel dobunk összegként hetet, mint hatot.) Tették ezt még abban az esetben is, amikor a kísérletek nem ezt támasztották alá.

Összegzés:

A kérdőíves és az órai tapasztalatok alapján egyaránt megerősítést nyert az a sejtés, hogy a valószínűség témakörében az érzelmi tényezők egyetlen vizsgálati csoportban sem elhanyagolhatóak. A hiedelmek befolyásolják, vagy gátolják az esély ismert elméleti modell alapján történő becslését. A hiedelmek típusainak bővebb körüljárása újabb kutatások irányát jelölheti.

A kérdőíves felmérés azt mutatja, hogy az érzelmi befolyásoltság a matematika és a valószínűségszámítás tanulásának hatására csökken. Minél képzetesebb valaki matematikából, annál kevésbé befolyásolják a hiedelmek.

A kérdőíves és az órai tapasztalatok összevetése azt mutatja, hogy az érzelmi tényezők valóságos problémahelyzetben sokkal erősebbek, mint a tanfeladatok megoldásakor. Az érzelmi tényezők hatása az egyik oka annak, hogy a valószínűségszámításban megszerzett ismeretek tevékenységben nehezen aktivizálódnak, akadályozhatják a megfelelő modell kiválasztását. Különösen

fontos ezt szem előtt tartani a szemléletfejlesztés időszakában, a valószínűség fogalmának alapozásakor. Ellenkező esetben nem azt készítjük elő, amire vállalkoztunk.

4.4.2.5. A tudás aktivizálhatósága

A valószínűségszámítás tanítása során feldolgozott problémák a matematika egyéb területeit is érintik. A feladatmegoldásokban támaszkodunk a diákok megszerzett kombinatorikai, geometriai, számelméleti, statisztikai ismereteire, szükségünk van számolási képességeikre és az arányos következtetés értésére. Az előző fejezetekben feldolgozott feladatok és szituációk már részben megmutatták, hogy az ismeretek és képességek mobilizálásának vannak gátjai. Akadályt jelenthet a kérdésfeltevés más módja (19. és 22. feladat, valamint 20. és 21. feladatok összehasonlítása), és az érzelmi tényezők is befolyásoló tényezőt jelentenek (3. és 18. feladatok.)

Vannak azonban olyan gátak is, melyek a valószínűségszámítás természetéből erednek. A kérdőív 14. és 15. kérdésével és a TÓK féléves kurzusán azt vizsgáltuk, hogy egy kombinatorikából már megszerzett tudást valószínűségi probléma megoldása során milyen eredményességgel alkalmazzuk.

14. Egyszerre feldobunk egy 10 forintos és egy 20 forintos pénzérmét. Leesés után több különböző esetet láthatunk. Például: **Fejet** dobunk a 10 forintossal és **Írást** a 20 forintossal. Ezt az eredményt be is írtuk egy táblázatba. *Írja be ugyanebbe a táblázatba az összes többi lehetőséget!*

10-forintos	20-forintos
F	I

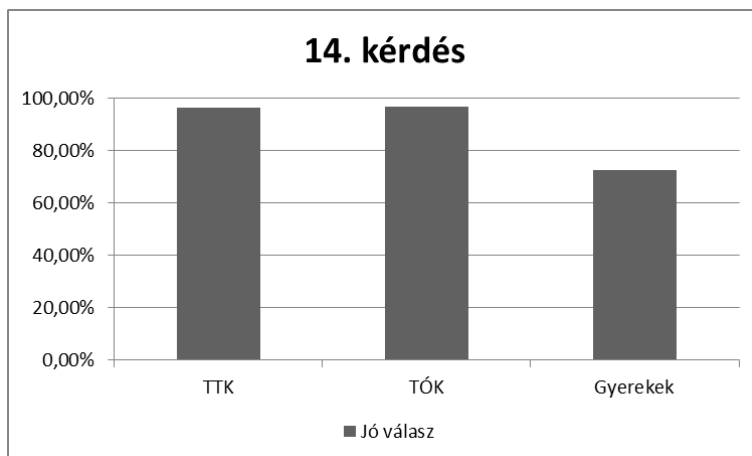
15. Egyszerre feldobunk három korongot, melynek az egyik oldala piros, a másik kék. Leesés után több különböző eset következhet be. Például mindhárom koronggal pirosat dobunk: PPP

Sorolja fel az összes többi lehetőséget!

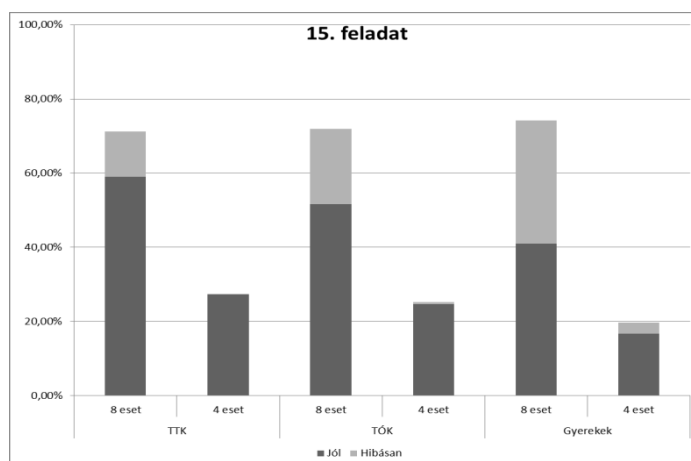
PPP, _____

A 14. feladat megfogalmazása egyértelmű. A 10 és 20 forintos érmék megkülönböztetése és a táblázatos elrendezés miatt csak egyetlen jó megoldása van, 4 lehetséges esetet kell megkülönböztetni. A 15. feladat viszont kétféleképpen is értelmezhető. Nem tudhatjuk ugyanis, hogy a kérdésben szereplő „eset” szó mire utal. Az összes elemi esemény meghatározását kéri, vagy azt kívánja, hogy a kísérlet során tapasztalható „látványokat” soroljuk fel. Ha az összes elemi eseményt akarjuk felírni, akkor 8 eset lehet, ha a „látványt”, akkor 4 (PPP, PKP, PPK, KKK). A feladatok egymást követő sorrendjével azt próbáltuk sugallni, hogy az elemi eseményeket határozzák meg. Ezt sugallta a PPP lineáris felírása is.

A kérdésekre adott válaszokat a következő diagramok mutatják:



25. diagram



26. diagram

A 14. kérdés jó megválaszolása mindhárom csoportban az előzetes feltevésnek megfelelően primán ment.

A 15. kérdésre adott válaszokból két dologra lehet következtetni. Egyrészt a kombinatorikában való jártasságra. Voltak, akik láthatóan a 8 eset felírására törekedtek, de nem oldották meg jól, kimaradt valami, vagy egy esetet többször is felsoroltak (a diagramon szürke). A diagram mutatja, hogy minél gyakorlottabb a feladatmegoldó annál kevésbé hibázott. Másrészt az is látható, hogy mindhárom vizsgálati csoportban megjelenik a kérdés másfajta, a látványra vonatkozó értelmezése. A jó válaszadókat tekintve körülbelül ugyanabban az arányban: (TTK 27,3; TÓK 24,7; gyerekek 16,67)

A 15. kérdésben megfogalmazott probléma a TÓK kurzus és az általános iskolákban tapasztaltakkal egybevetve válik érdekessé:

A TÓK kurzus 3. órájának egyik témája az elemi és az összetett események megkülönböztetése volt. Három hallgatói csoportban is azonos módon tettük fel ugyanazt a kérdést: „Három korongot feldobunk. Hányféleképpen eshetnek le?”

A folytatás is mindhárom csoportban körülbelül azonos módon zajlott: Kivétel nélkül mindenki 4 esetet sorolt fel a füzetében (a kérdőíven 53%-uk 8 esetet sorolt fel), és ez fel is került a táblára: PPP, PPK, PKK, KKK Senki sem emlékezett arra, hogy a kérdőíven már szerepelt ez a kérdés. Ezek szerint most arra gondoltak, hogy milyen látványt kaphatunk.

Tanár: „Tippeljék meg, hogy a 20 dobásból melyik esemény hányszor következik be!”

A tippek is felkerültek a táblára:

PPP	PPK	PKK	KKK
5	5	5	5
3	7	7	3
4	6	6	4

Másfajta tipp nem volt.

Általában nagyobb számot tippeltek arra, hogy a dobás „vegyes” lesz, de az egyik csoportban volt 4, a másik kettőben 3-3 fő kétkedő, aki 5,5,5,5 tippet adott. Kivétel nélkül mindenki „szimmetrikusan” tippelt. A kísérletek tényleges elvégzése után természetesen sehol sem kaptak a tippjeiknek megfelelő eredményt. Így indokoltak: „Véletlen.”; „Én gondoltam, hogy nem pont ennyi lesz, de most is ugyanúgy tippelnék.”

Összesítik az eredményeket, majd ezek felkerülnek a táblára.

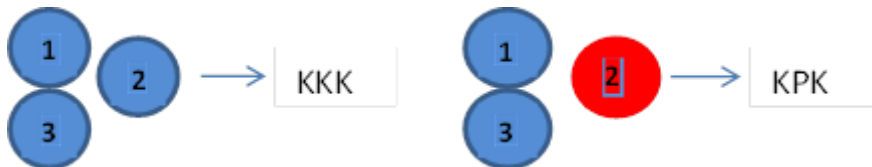
	PPP	PPK	PKK	KKK
1. csoport	26	59	52	28
2. csoport	12	32	35	15
3. csoport	6	22	39	7

A kísérletsorozat kimenetelére a hallgatók reakciói a következők voltak: „Nem lepődtem meg. Szerintem kevesebb esély van arra, hogy egyszínű”; „Csak egy esetben lehet PPP, KKK, de több kombináció van a vegyesnél.”; „A dobókockánál is így van. Egyest vagy hatost nehezebb dobni!” Ez utóbbi megjegyzés azért érdekes, mert kiolvasható belőle, hogy ez a hallgató egyáltalán nem látta a probléma lényegét. Ezért a kísérletsorozat kimenetelét azonnal érzelmi megközelítésbe helyezte. Voltak olyan hallgatók is, akik a véletlennek tudták be ezt a kísérletsorozatot. A kétkedők azért a társak érveinek hatására egy idő után igazolni látták, hogy a „vegyes” dobás gyakoribb.

Ezek után került sor az okok keresésére, melyben megfogalmazták, hogy a vegyes dobására „több eset van”. Minden csoportban felvetődött az a gondolat, hogy nem mindegy, melyik korongról van szó. Így kérdeztek: „Tehát számít a sorrend?” Ez a fajta kérdésfeltevés azért jelentős, mert itt fogható meg, hogy a kombinatorikában megszerzett tudást hogyan aktivizálják. Ebben a problémában nehezen érthető a „sorrend” jelentése. Három koronggal való dobáskor ugyanis nincsenek sorrendben a korongok. Sőt, igencsak csodálkoznánk, ha azok minden

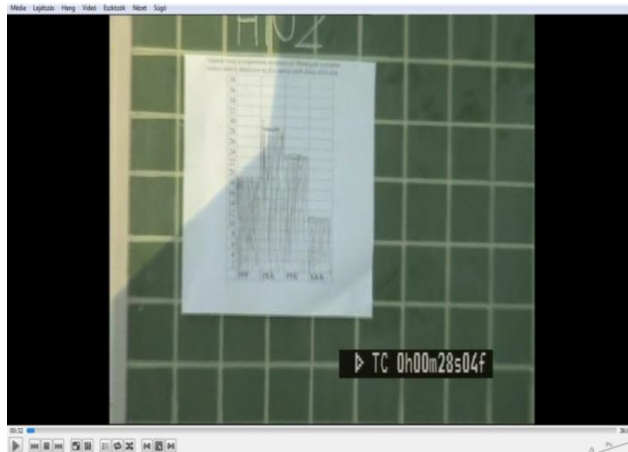
esetben szép egyenes vonalban sorakoznának a padon. A hallgatók ekkor már érezték, hogy milyen kombinatorikai alapesetet kell modellként választani, de hogy miért, az még nem volt világos. Nehéz volt azt a kombinatorikai feladatot megalkotni, amelyik modellje lehet a valószínűségi problémának.

Nagy sokára megszületett az a gondolat, hogy számozzuk be a korongokat. Ezáltal tudtuk ezt a megfeleltetést bemutatni.



....és így tovább, mind a nyolc esetben.

Ugyanezt a problémát dolgozták fel a Lauder iskola 3. osztályában is. Ők nem jutottak el az esetek összeszámlálásához, csak a gyakoriságok megfigyelése volt a cél. A tippelés során a gyerekek jóval nagyobb arányban gondolták, hogy mind a négy esemény ugyanannyiszor fog előfordulni. Egyáltalán nem érzékelték, hogy az egyszínű dobásra kevesebb esély van. Amikor eredményeiket a csoportjukban oszlopdiagramon összesítették, kissé meglepődtek, de még a véletlen számlájára írták. Ezután a diagramok összehasonlítása következett. Nagyon jól látható volt a hasonlóság közöttük, ami jelezte a tendenciát. Ilyenfajta diagramok születtek.



Ebben az életkorban a cél a tapasztalatszerzés volt, ezért természetesen nem firtatták tovább az okokat. Volt azonban két gyerek az osztályban, aki megfogalmazta, hogy ez azért lehet így, mert PPK-t vagy KKP-t többféleképpen lehet dobni.

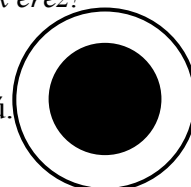
Úgy gondoljuk, hogy ez az előkészítő tevékenység nem csak a tapasztalatszerzés miatt volt hasznos. A munka során fejlődtek a gyerekek az adatok lejegyzésében, számolási képességeikben (összesíteni kellett az eredményeket), csoportban való együttműködésben, megtanulták a diagramkészítés egy módját, leolvastak adatokat más diagramokról, és összehasonlították azokat.

A kérdőív 23. kérdésével szintén a tudás aktivizálhatóságát vizsgáltuk:

23. Egy 5 dm sugarú világos körbe egy 3 dm sugarú sötét kört rajzoltunk az ábrán látható módon.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

- a) Egy, az ábrán taláломra kiválasztott pont sötét színű.
- b) Egy, az ábrán taláломra kiválasztott pont világos színű.

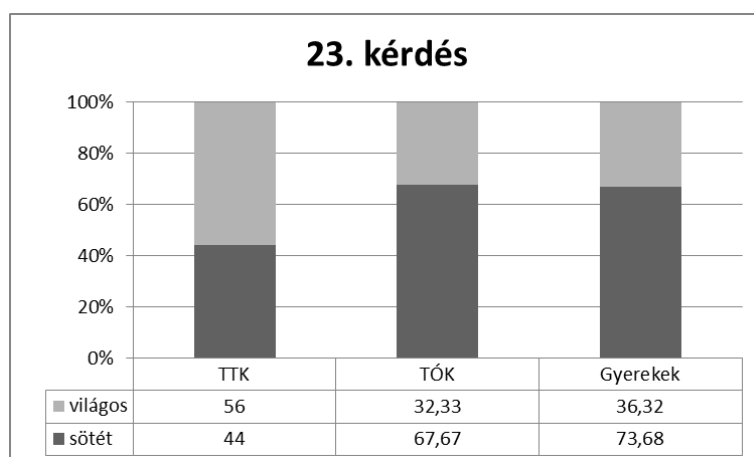


Ez a kérdés felfogható matematika feladatként. Ha az utasításból az „érez” szót elhagynánk, lehetne bármelyik középiskolás tankönyvben. Aki érettségizett, annak ismernie kell a kör és a körgyűrű területének kiszámítási módját. Mivel a feladat tartalmazza a szükséges adatokat is, könnyen megoldható a meglévő matematikai ismeretekkel: $9\pi < 25\pi - 9\pi$, tehát a világos rész területe a nagyobb. Az ábra viszont optikailag kissé megtévesztő, de a sugarak aránya ott is 3:5.

Aki nem tudja a kör területének kiszámítását, érzéseire hagyatkozva oldja meg a problémát. Sőt, aki nem akarja matematizálni a problémát, nyugodt szívvel megteheti, hiszen a kérdés arra vonatkozik, hogy melyiket *érzi* nagyobbak. Az indoklás kérésével próbáltuk arra irányítani a figyelmet, hogy ne pusztán az érzésekre hagyatkozzanak, gondolkodjanak el a miérteken.

A gyerekek nem tanulták még a kör területének számítását, így számukra nem volt meg a szükséges feltétel a feladat számításos matematikai modelljének megteremtéséhez.

Mind a TTK hallgatók, mind a TÓK hallgatók rendelkeznek viszont a feladat megoldásához szükséges tudással. (A TÓK hallgatói éppen előző félévben végezték el a geometria kurzust.) Az ő esetükben a tudás aktivizálása a kérdés. A válaszokat a következő diagram mutatja:



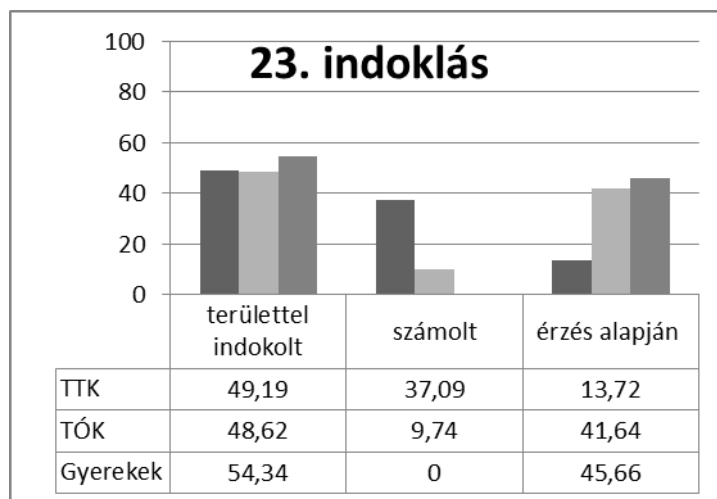
27. diagram

A gyerekek nagyon nagy többséggel (73%) a sötétre tippeltek. Mivel náluk nem jöhetett szóba a számítás, ezért ebből csak arra lehet következtetni, hogy optikai illúzió hatására a sötét területét nagyobbak látták.

Megfigyelhető azonban, hogy a másik két csoportban is magas volt azok száma, akiket az optika megtévesztett. Az is látható, hogy matematikából minél képzetlenebb valaki, annál kevésbé hagyja magát becsapni.

Az indoklásokból derül ki igazán, hogy milyen megfontolások alapján választottak. Ha valaki jól, vagy rosszul, de számolt, azzal indokolt. Ha valaki olyan ítéletet fogalmazott meg, hogy a sötét vagy a világos területe a nagyobb, akkor az illető a kérdésben matematikai problémát látott. Ha pedig valaki úgy indokolt, hogy nem tudja miért, de ezt vagy azt érzi nagyobbnak, azzal kifejezi, hogy a kérdésfeltevésnek megfelelően válaszolt és nem kíván a dolog matematikai vonatkozásával foglalkozni. Ide sorolom azokat is, akik a kérdésre ugyan válaszoltak, de indoklást nem adtak.

A következő diagram az indoklások megoszlását mutatja:



28. diagram

A területtel indokolt minősítés itt most azt jelenti, hogy a válaszoló ítéletet alkotott a sötét és világos részek területének viszonyában, de az indoklásban nem számolt. Ez a fajta ítéletalkotás csak akkor születik, ha a megoldó úgy gondolja, hogy az a valószínűbb, aminek a területe nagyobb. Ebben az esetben ő nem szubjektív módon választ, matematikai szakértőként viselkedik, de indoklása hiányos. Aki kiszámolta a két síkidom területét vagy csak azok arányát, az természetesen szintén látja az alkalmazható modellt. A TTK hallgatók matematikai képzettsége és matematikai érdeklődése abból látható, hogy 86,28%-uk az első két kategóriába sorolható. Ugyanez a TÓK hallgatóknál 58,36%, a gyerekeknél 54,34%.

A TÓK hallgatók meglepően kevesen (9,74%) éltek a számolás lehetőségével annak ellenére, hogy érezték a probléma lényegét, és rendelkeztek a megfelelő matematikai apparátussal a megoldáshoz, hiszen éppen az azt megelőző

félévben vettek részt egy geometria kurzuson, ahol ez előkerült. Mégis nagyon sokan (41%) intuitív módon alkottak ítéletet.

Az intuitív ítéletek igen változatosak voltak: „A sötét egybefüggő”; (TTK hallgató) „Az ember inkább a közepére bök.” (TÓK hallgató) „Én sosem találom el a darts közepét” (TÓK hallgató); „Ez van beljebb” (gyerek); „Mert egy pont mindig sötét színű” (gyerek)

Összegzés:

A matematikából megszerzett tudás valószínűségi ítéletalkotások során való aktivizálásának gátjai részben a valószínűségi probléma természetéből erednek:

- Gátat jelent a probléma és az azt leíró matematikai modell közötti megfeleltetés.
- Egy valószínűségi kérdésfeltevésben lehetőség van az intuitív ítéletalkotásra, ezáltal a matematikai modell megkeresésének elhagyására.

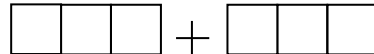
4.4.3. A valószínűségszámítás kapcsolata a matematika egyéb területeivel

A dokumentumelemzés, az órák tapasztalatai és a kérdőívben feldolgozott kérdések mutatják, hogy a valószínűségi feladatok a legtöbb esetben a matematika más területeit is érintik. A kérdőív 2. 10-17. 22. 23. kérdésének elemzésénél ezt már feltártuk. Magasabb évfolyamokon, a valószínűség számításának időszakában a matematika más területein szerzett ismeretek szükséges feltételt jelentenek a feladatmegoldásban. Azt tapasztaltuk, hogy a kombinatorikai megfontolások kiemelt jelentőséget kapnak. Ez olyan hiedelmeknek adhat táptalajt, mintha minden valószínűségi probléma megoldható lenne kombinatorikus módszerekkel.

A valószínűségi szemlélet alakítása során is sok olyan problémát vethetünk fel, ami más matematikai témakör épülését is segíti. Tévedés azt gondolni, hogy amennyiben a tanóra kiemelt célja a valószínűségi szemlélet fejlesztése, akkor egész órán kizárólag dobókockákat dobálunk, pénzérméket csörgetünk vagy egy zsákból színes golyókat húzunk. A tanórákon megvalósulhat a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy is, hogy olyan problémákat vetünk fel, amelyek matematika más területeit is érintik, vagy éppen azok a hangsúlyosak. Ebben a fejezetben néhány összetett tevékenységet szeretnénk bemutatni (Szendrei – Sztányi, 2007), a kapcsolódási lehetőségeket, természetesen a teljesség igénye nélkül, és elsősorban a szemléletformálás idején feldolgozandó tananyagra koncentrálni.

Órai tevékenység:

A táblán egy rajz látható, ami egy összeg számjegyeinek helyét mutatja, és amit a tanulók a füzetükbe lerajzolnak:



Játékszabály: A játékvezető egy számot húz az 1-9-ig számkártyák közül, a tanulók a kapott számot beírják valamelyik helyre (utána változtatni nem szabad), ezután újra húz visszatevéssel egyet, és a második számot is beírják, majd ugyanígy tovább. Az nyer, aki a legnagyobb számot tudja előállítani.

Ebben a játékban a valószínűségi szemlélet alapozása úgy valósul meg, hogy megtapasztalják, hogy nem az ő akaratukon, hanem a véletlen mülködik, hogy mekkora lesz egy-egy húzott számjegy. Megfigyelhetik, hogy az előzmények nem befolyásolják az újabb húzás eredményét. Ha először húzunk az 1, 2, 3 számokból, akkor azt az egyesek helyére érdemes írni. Érzik viszont, hogy például a 7, 8, 9 elég nagy számok ahhoz, hogy a százask helyére írják, mert még az 1, 2, 3, 4, 5, 6 is lehetséges. Sőt, látják, hogy ha 9-et húztunk, akkor *biztos*, hogy nem húzunk később nagyobbakat stb.

Ennek a játéknak azonban nem csak valószínűségi vagy stratégiai fejlesztő hatása van. Igen sok tapasztalatot szerezhetnek a helyiértékek szerepéről. Tapasztalatot szerezhetnek például arról is, hogy ha az összeadást úgy változtatom, hogy az egyik tagot megnövelem, és a másikat nem csökkentem, akkor az összeg nagyobb lesz. Ugyanis tegyük fel, hogy „A” gyermek a húzások után a $342 + 721$ összeget állította elő, „B” pedig $432 + 721$ -et. Egy ilyen összefüggést sokkal érdekesebb egy ilyen játék keretében észrevenni, mintha a tanár elmondaná azt a

gyermek számára semmitmondó mondatot, hogy „ha egy összeadás egyik tagja nagyobb és a másik változatlan, akkor az összeg is nagyobb”.

A játékot kipróbáltuk TÓK hallgatók körében. A számokat dobókockával dobtuk. A következő számokat dobtuk, ilyen sorrendben: 4, 3, 2, 5, 2, 1. Mivel az első dobás után a fejlett valószínűségi érzékkel rendelkező emberek joggal várhattak még a hatos kidobására is (még volt hátra öt dobás), szinte senki nem írta be a százások helyére a négyest. Ahogy fogytak a dobási lehetőségek, egyre többször lehetett hallani azt a bekiabálást, hogy „nagyot tessék dobni!” Érezhető volt, hogy megfogalmazás nélkül tudják, hogy ha sikerül nagyot dobni nagy helyiértékű helyre, az összeg is nagyobb lesz.

Egy ilyen összefüggést feltárhatunk úgy is, hogy megoldatunk a gyerekekkel jó pár célirányosan megszerkesztett feladatsort. Például ilyen:

$$634+243=$$

$$634+244=$$

$$634+245=$$

$$634+253=$$

$$634+263=$$

$$634+273=$$

A kétfajta tevékenység közötti különbséget leginkább a motiváló hatásnak lehet tulajdonítani. A játék során a tanuló személyes *érdeke*, hogy „jó” helyre írja a számjegyeket, jól elvégezze az összeadásokat, majd összehasonlítsa az eredményeket. Érzelmek motiválják, a nyerni akarás érdekében vállal, vagy nem vállal kockázatot. Tudnunk kell, hogy ez az érzelmi hatás gátat jelent a rendszerezett ismeretszerzésben. Sok esetben ugyanis a tanulók csak az éppen aktuális játékokra koncentrálnak. Miután nyertek vagy vesztek, már gondolatban a következő fordulót várják, a játék elemzése nem izgatja különösebben őket. Ezért a rendszerezett ismeretszerzésről a tanárnak még külön gondoskodnia kell.

A feladatsor megoldásához fűződő egyetlen érdek viszont a megfelelni akarás. A feladatsor megoldása előtt ugyanis nincs tudomása arról, hogy *miért* csinálja. A feladatsor – szemben a játékkal – igen rendszerezett, ezáltal alkalmas lehet az irányított felfedeztetésre.

Ilyen, és ehhez hasonló játékokat a látogatott órákon is láttunk. A Felsőtárkányi iskola 2. osztályában két kockával dobtak, és a szorzatra vonatkozó eseményeket figyelték meg. Ezen az órán szerezték meg az első tapasztalatot arról, hogy egy szorzat akkor páros, ha az egyik tényezője páros, és csak akkor páratlan, ha mindkét tényezője az. Harmadik osztályban éppen az írásbeli összeadás és kivonás gyakorlásának adott keretet egy számkártyákkal végzett valószínűségi játék. A Gyakorló iskola 4. osztályában pedig a műveletek sorrendjének és a zárójel használatának gyakorlása volt a cél egy alkalmasan választott valószínűségi játékkal.

A következő tevékenységet a TÓK féléves kurzus idején három szemináriumi csoportban elvégeztük, és kérésre elvégezték a Lauder iskola 2. osztályában, majd egy évvel később, 3. osztályban megismételték. Ugyanezt a tevékenységet a Gyakorló iskola 5. osztályában is láthattam.

A TÓK hallgatókkal a lehetetlen esemény fogalmának bevezetése volt a cél. A következőképpen vetettük fel a problémát: „Lépegetünk a számegyenesen.

Páronként 10 koronggal fognak játszani. Rajzoljanak számegyeneset egy lapra, és bábuval lépkedjenek! A korongok feldobása után annyit lépjenek a pozitív irányba, amennyi piros korong esett az asztalra, és annyit a negatív irányba, amennyi kék! Mit gondolnak, a 10. dobás után hová érkezik a bábu legtöbbször ezek közül? Az első dobás a 0-ról indul, a második onnan, ahova az első jutott.”

-4	-3	10	1	-16
----	----	----	---	-----

Az első csoportban a következő tippek születtek: 1, -3, 10, -3, 1, -3, -3 A táblára írtuk, hogy hova jutottak: -6, -4, -4, -2, -4, -6, -6, -4, 0

Tanár: „4-nél vannak. Hova fognak jutni?” Tippek: 1, 4, 8, -6 Ebben a fázisban még nem volt észrevehető, hogy csak páros sokat léphetünk.

Tanár: „Karikázzák be azokat a helyeket, amikor páratlanra érkeztek!”

Diákok: „Most nem, de az előzőben igen” „Most nem jó valami”

Hosszú idő után született csak meg a felismerés: „Mindig 2-t, 0-t, 4-et hatot vagy 8-t lépünk jobbra vagy balra.” Végül egy diák: „Azonos paritású számok különbsége páros. Rájöttem, hogy hogyan lehetne páratlant kapni: páratlanról kell indulni!” Egy másik diák: „Szerintem az is fontos, hogy páros sok korong volt.”

Ezek után került sor a számelméleti ismeretek mozgósítására, és a probléma feloldása után a lehetetlen és a biztos események meghatározására.

A második csoportban ugyanez a tevékenység a következőképpen zajlott:

Tippek: 1, -3, -4, 10, -3, 1, -4, -4, -3. Ahova jutottak: -2, 12, 1, -2, -4, 7, -18, -4, 0

Tanár: Úgy veszem észre, hogy volt a csoportban olyan, aki hibázott a lépegetésnél.

1. Diák: „Igen, mert nem mindegy, hogy a pozitív irányba kezdek lépni, vagy a negatív irányba.”

2. Diák: „Mi egyszer kipróbáltuk így is, úgy is. Mindegy.”

3. Diák: Elég megnézni azt, hogy melyikből van több és mennyivel. Annyit kell csak lelépni.

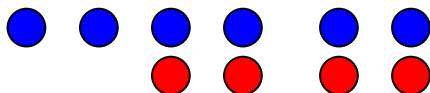
Tanár: Na de ki hibázott?

4. Diák: A -18 túl nagy, ez nem esélyes. Valószínűleg mi hibáztunk

5. Diák: Lehet, hogy mi. A 0 közelében kellett volna maradni.

Nagyon hosszú ideig csak a számok nagyságrendjében gondolkodtak, de a vita után rájöttek, hogy az hibázhatott, aki páratlanra érkezett. ezután következett a magyarázatok keresése:

Egy diák bemutatta: „Eldobom valahogy” Dobott, majd a padján így rendezte a korongokat:



„4 piros és kék kiejti egymást. Csak kettő maradhat az előző miatt.”

A harmadik csoport tippjei: 1, 1, 1, -3, -4, -3, -3, 1, 1, 1 Ahova jutottak: 13, -10, 12, 18, -2, 6, 6, -2, -22

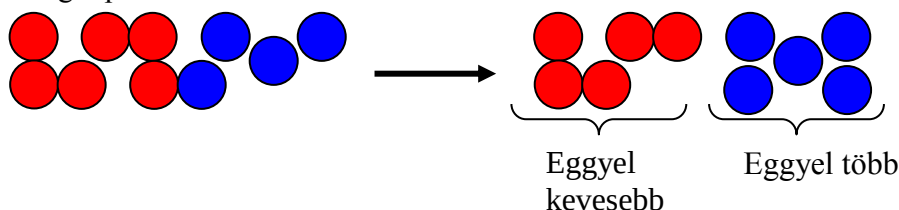
A viták és megbeszélések hasonlóképpen zajlottak, mint az előző csoportban. Először itt sem volt egyértelmű, hogy mindegy melyik irányba lépünk először.

Mivel csak egyetlen helyen hibáztak, könnyen rájöttek, hogy melyik szám a nem lehetséges. A magyarázatot is könnyebben megtalálták.

A részletes magyarázat keresésére két módszer kínálkozik. Összegyűjthetjük a lehetséges dobásokat, és az egy lépés hosszára vonatkozó lehetőségeket:

$10p = -10$; $9p + 1k = -8$; $8p + 2k = -6$; $7p + 3k = -4$; $6p + 4k = -2$

Vagy egyszerűen csak azt figyelik, meg, hogy mi történik, ha egyetlen kék korongot pirosra változtatunk:



Úgy gondoljuk, hogy ez egy olyan összefüggés, amit ha a tanulók maguk ismerhetnek fel, sokkal inkább magukénak érzik, mint a tanár szájából elhangzott mondatot: „Ha a kisebbítendőt egyvel csökkentem, és a kivonandót egyvel növelem, a különbség kettővel csökken”

Akárhogyan is dobunk tehát a 10 koronggal, az első dobás után mindenképpen páros helyre érünk. A további dobások során pedig minden esetben páros sokat lépünk. A lépegetés során a tanulók tapasztalathoz juthatnak a pozitív számok ellentettjének értelmezéséhez szükséges tevékenységről, pozitív és negatív számok összeadásáról, valamint arról is, hogy az összeg paritására vonatkozó összefüggés a negatív számok körében is érvényes marad. A valószínűségről alkotott fogalmak tekintetében élményszerűbb tapasztalathoz juthatnak a *lehetetlen eseményről*, mint mondjuk egy olyan állítással, hogy „két kockával dobva a dobott számok összege 13”.

Mind a Lauder iskolában, mind a Felsőtárkányi iskolában a tanító elsődleges célja a különbség paritására vonatkozó tapasztalat megszerzése volt. Alkalmat adott viszont a lehetetlen és a biztos szavak használatára, és értékes hozadéka volt a véletlen és a nem véletlen elkülönítése. Az óra menete mindenütt nagyjából hasonló módon zajlott, mint a TÓK-on. A Felsőtárkányi iskolában a tanítóknak szerencséje volt, mert volt olyan gyerek, aki hibázott a lépegetés során: 2, 0, 14, 3, 4, 4, 2, 8 Erre a tévedésre számított, mert ez nyújtott lehetőséget a probléma felvetéséhez. Mivel csak ez az egy tévesztés volt, a kakukktozást hamar megtalálták.

A Lauder iskolában 2. osztályban senki sem hibázott. A 10. dobás után mindenki páros számra érkezett. 2,6,2,0,6, 6,12,10, 4, 2, 4, 2, 2, 2, 8

A tanító megkérdezte, hogy mit vettek észre. Mindenki felfedezte, hogy ezen számok mindegyike páros. Sőt, azt is megfigyelték, hogy menet közben is csak páros számokon lépkedtek.

Az egyik gyerek így indokolt: „Persze, hiszen 10 koronggal dobtunk. És az mindenképpen páros”

Tanító: „És, ha azt dobtuk, hogy 7 kék 3 piros? A 7 is és a 3 is páratlan.”

Gyerek: „Igen, de $7+3$ az 10, így mindenképp páros. Két páratlan szám összege mindig páros.” Ennek a megjegyzésnek a mélyén az áll, hogy a gyerek már megsejtett valamit, de még nem látta át teljesen a problémát.

Egy másik gyerek így indokolt: „ha például 9 pirosat dobunk és 1 kéket, akkor először a piros 9-re lépünk, de aztán vissza kell lépünk egyet és az már 8.” Ez a gyerek konkrét esetben már meg tudta fogalmazni észrevételét, de az általánosítás még várat magára.

Tanító: „Elmondhatjuk-e, hogy *biztos*, hogy mindig páros számra érkezünk?” Erre a kérdésre megszólaltak a vélemények. Egyelőre itt megálltak, az igazi okok feltárása és az általános érvényű összefüggés megfogalmazása most még korai lett volna. A kérdés tehát nyitva maradt.

Mivel a gyerekek még nem tanultak a negatív számokról, ők nem számegyenesen lépkedtek, hanem egy piros-kék játéktáblán. Nem pozitív és negatív, hanem piros és kék irányba.

Egy évvel később, 3. osztályban ugyanezt a tevékenységet végezte ugyanez az osztály. Addigra már ismerkedtek a negatív számokkal is, ezért a játéktáblájukon levő számok előjelet is kaptak. A táblát most függőlegesen tartották, hasonlóan a hőmérő-modellhez. Először nem emlékeztek az előző évi tapasztalatokra, ezért újnak érezték a tevékenységet. Sőt, most akadt olyan tanulópár, amelyik a 13-ra érkezett. Nagyon hamar észrevették, hogy ők hibáztak. Az előző évi gondolatok szépen lassan újraformálódtak, majd megérlelődött az összefüggés is: Gyerek: „10-et akárhogy bontom, a kettő számot kivonom, az mindig páros.” Nem mondható, hogy ez egy precízen fogalmazott matematikai tétel, de a lényeg benne van. Ez a gyerek már látta az összefüggést, és ki is tudta fejezni. Ezután a problémát részletesen kidolgozták, a tanító 10 korongot tett a táblára a piros felével, majd egyesével átfordították a kék felére, és megállapították a különbségeket.

A folytatásban 9 koronggal dobta. Itt azt figyelték meg, hogy felváltva lépkednek páratlan, és páros számokra. Az e mögött meghúzódó számelméleti összefüggést azonban most nem járták végig. Újabb tapasztalatot szereztek.

Az a tevékenység, melyben 10 koronggal kellett dobni, más-más célt szolgált a különböző korcsoportokban. A TÓK hallgatókkal a valószínűségi szemléletfejlesztés volt hangsúlyos, hiszen az óra célja a lehetetlen esemény fogalmának bevezetése volt. Az általános iskolák 2. osztályában a tevékenység alapvető célja az volt, hogy számelméleti tapasztalatokat szerezzenek. (Ha egy páros számot két egész szám összegére bontunk, akkor a tagok egyező paritásúak; két páros szám összege is, különbsége is páros.) Harmadik osztályban e mellett a negatív szám fogalmának mélyítése, az egész számok körében végzett műveletek előkészítése történt. Mindezek mellett fontos tapasztalatokat szereztek véletlen és nem véletlen eseményekről, használták a lehetetlen és biztos kifejezéseket.

Összegzés:

A valószínűségi problémák fogalmazhatók úgy, hogy megoldásuk során más matematikai témakörök területén is történjék fejlesztés.

Az alapozó szakaszban tervezhetők olyan tevékenységek, melyekben a kiemelt fejlesztési cél nem a valószínűségi szemlélet fejlesztése, hanem a matematika más területe hangsúlyos, de értékes hozadéka a tapasztalatszerzés a véletlenről. És fordítva: tervezhetők olyan tevékenységek is, melyekben a valószínűségi szemléletfejlesztés a kiemelt cél, de a matematika más területén alkalmazott gondolkodásmódot is fejleszt. Ezért az alapozó szakasz tevékenységeit célszerű komplex módon szervezni.

4.5. A vizsgálat összegzése

A valószínűségi ítéletalkotások során az anyanyelv használata szerepe döntő jelentőséggel bír. Egyrészt a valószínűség kifejezésének módjából következtethetünk a válaszadó gondolkodásmódjára. A gondolkodásmód nem annyira a képzettségtől, mint inkább az adott problémahelyzettől függ. Másrészt a matematika tanulása során rengeteg olyan kifejezést használunk, amely mást jelent a hétköznapi szóhasználatban, mint a szaknyelvben. (Szendrei, 2005) Ez a probléma a valószínűség témakörében fokozottan jelen van. A matematikai modell készítését nehezíti, hogy a köznyelvben található gazdag szókinccsel megfogalmazott problémát kevés szakszóval bíró modellbe kell fordítani.

A klasszikus valószínűségi modellben megfogalmazott valószínűségi problémák megoldásának egyik fontos összetevője az arány fogalma. Az egyenes arányosság empirikus értéke nélkül egy valószínűségi feladat szerkezete nehezen átlátható.

Az analógiás gondolkodás a matematika tanulásának és értésének fontos része. A valószínűség témakörében az analógiák alkalmazásával óvatosan kell bánni. A valószínűségszámítás tanulása során rengeteg olyan kérdés vetődhet fel, mely többféleképpen értelmezhető. A válaszadáshoz legjobban illeszkedő modell kiválasztása csak akkor lehet sikeres, ha a diákok ebben segítséget kapnak. A kérdés feltevésének módja nagymértékben befolyásolja a tanulók gondolkodási stratégiáját.

A valószínűség témakörében az érzelmi tényezők nem elhanyagolhatóak. A hiedelmek befolyásolják, vagy gátolják az esély ismert elméleti modell alapján történő becslését. Az érzelmi befolyásoltság a matematika és a valószínűségszámítás tanulásának hatására csökken. Minél képzetesebb valaki matematikából, annál kevésbé befolyásolják a hiedelmek. Az érzelmi tényezők valóságos problémahelyzetben sokkal erősebbek, mint a tanfeladatok megoldásakor. Az érzelmi tényezők hatása az egyik oka annak, hogy a valószínűségszámításban megszerzett ismeretek tevékenységben nehezen aktivizálódnak.

A matematikából megszerzett tudás a valószínűségi ítéletalkotások során való aktivizálásának gátjai részben a valószínűségi probléma természetéből erednek. Gátat jelent probléma és az azt leró matematikai modell közötti megfeleltetés. Egy valószínűségi kérdésfeltevésben lehetőség van a szubjektív ítéletalkotásra, ezáltal a matematikai modellkeresésének elkerülésére.

A valószínűségi problémák a matematika egyéb területeit is érintik.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A kutatás során a valószínűségi gondolkodás sajátosságait vizsgáltuk. Elsősorban azt kívántuk feltárni, hogy a valószínűségi problémák megoldása során a megoldók milyen gondolkodási stratégiákat választanak. Ennek tükrében vizsgáltuk a valószínűség fogalmánk fejlődési lehetőségeit, és a témakör feldolgozásának módját a jelenlegi magyarországi közoktatás gyakorlatában. A kutatás részeként elemeztük a közoktatás dokumentumait, valamint kérdőíves kikérdezéssel és órai megfigyelésekkel vizsgáltuk a valószínűségi gondolkodás jellegzetességeit.

A kutatás a következő kérdésekre kereste a választ:

1. Tapasztalhatók-e eltérések a különböző matematikai előképzettséggel rendelkező csoportok valószínűségi ítéletalkotásában?
2. Aktivizálódnak-e a valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek valószínűségi ítéletalkotás során?
3. Hat-e a valószínűséggel kapcsolatos elsődleges megérzés matematikai problémamegoldás közben?
4. Hol a helye ennek a témakörnek a magyar matematikatanítási gyakorlatban?

A hozzájuk tartozó hipotézisek a következők voltak:

1. A magasabb matematikai előképzettségű csoportok átlagosan jobban teljesítenek a valószínűségi problémák megoldása során.
2. A valószínűségszámítás témakörében megtanult ismeretek a valószínűségi ítéletalkotás során nehezen aktivizálódnak. A valószínűség fogalmánk különböző értelmezései között fellelhető eltérések az ítéletalkotást nagymértékben befolyásolják.
3. Egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is.
4. a) A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik. A valószínűség kiszámításának időszakában végzett feladatok a valószínűség kombinatorikus módon való számítását erősítik.
b) A valószínűség témaköre a matematika más témaköreivel összekapcsolható.

Az 1. kérdés és az 1. hipotézis:

A három különböző matematikai előképzettségű vizsgálati csoport teljesítményének összehasonlítása a következő eredményt hozta:

Átlagosan a legmagasabb teljesítményt az ELTE – TTK hallgatói nyújtották. (Ebben a mintában magasabb matematikai előképzettséget, illetve természettudományos érdeklődét feltételeztünk.) Ezt követte az ELTE – TÓK hallgatók csoportjának átlagos teljesítménye (Ez a csoport reprezentálja a valószínűségszámítást már tanult, de nem feltétlenül matematikai érdeklődésű populációt). Átlagosan legalacsonyabb teljesítményt nyújtott az általános iskolások

csoportja, akik valószínűesszámítást még nem tanultak. Ennek alapján az 1. hipotézisünket nem vetjük el.

Az összteljesítményt tekintve a három csoport szignifikánsan elkülönül, ugyanakkor az egyes kérdésekre adott válaszok sok esetben nem különítik el a három vizsgálati csoportot.

A 2. kérdés és a 2. hipotézis:

A vizsgálat eredményeinek tükrében a 2. hipotézis sem vethető el.

A kérdőíves vizsgálat, és az órai tapasztalatok alapján kimondhatjuk, hogy a matematika és a valószínűesszámítás tanulása során megszerzett tudás nehezen aktivizálódik a valószínűségi ítéletalkotások során.

Az események valószínűségének becslésére háromféle gondolkodási stratégiát alkalmaztak:

- Intuitív módon, érzésekre hagyatkozva.
- A valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítésével.
- A valószínűség valamilyen elméleti értékének kiszámításával.

Úgy találtuk, hogy a kérdéshez legjobban illeszkedő stratégia kiválasztása a valószínűségi gondolkodás kulcskérdése. A kérdőíves és órai tapasztalatok azt mutatják, hogy a stratégiaválasztást mindhárom vizsgálati csoportban befolyásolják a nyelvi tényezők, a kérdésfeltevés módja, a valószínűesszámítás és a matematika más területein megszerzett ismeretek, valamint az érzelmi tényezők.

A valószínűségi ítéletalkotások során a nyelvhasználat szerepe döntő jelentőséggel bír. Egyrészt a valószínűség kifejezésének módjából következtethettünk a válaszoló gondolkodásmódjára. Másrészt a matematikai szaknyelv és a hétköznapi szóhasználat között meglévő eltérés a tudás aktivizálásának gátját jelentheti.

A valószínűség témakörében az érzelmi tényezők nem elhanyagolhatóak. A hiedelmek befolyásolják, vagy gátolják az esély ismert elméleti modell alapján történő becslését. Az érzelmi befolyásoltság a matematika és a valószínűesszámítás tanulásának hatására csökken. Az érzelmi tényezők valóságos problémahelyzetben erősebbek, mint a tanfeladatok megoldásakor. Az érzelmi tényezők hatása az egyik oka annak, hogy a valószínűesszámításban megszerzett ismeretek tevékenységben nehezen aktivizálódnak.

A 3. kérdés és a 3. hipotézis:

Fischbein kutatásai igazolták, hogy létezik elsődleges intuíció a valószínűségről. Az intuíciók a matematika tanítása során mindvégig jelen vannak. A kérdőíves és az órai vizsgálat azt mutatta meg, hogy a valószínűséggel kapcsolatos megérzés gyakran ellentétes a mérhető, kiszámolható valószínűséggel. A döntésemélet más kutatásai is ezt a feltevést támasztják alá (Kapadia – Borovcnik 1991).

A kérdőíves vizsgálat során az is kiderült, hogy az elsődleges megérzés olyan erősen hat a valószínűségi problémamegoldásra, hogy helyenként a matematikából megszerzett tudást is elfedi.

Igazoltuk, hogy egy esemény valószínűségének becslését a fogalomalkotás minden fázisában befolyásolják szubjektív tényezők is.

Tehát a harmadik hipotézis sem vethető el.

A 4. kérdés és a 4. hipotézis:

- a) Mind a tantervi, mind a tankönyvi dokumentumok elemzése alátámasztják a 4. a. hipotézist: A valószínűségi szemléletfejlesztés időszakában végzett iskolai tevékenységek a valószínűség relatív gyakoriságokkal történő megközelítését segítik, emellett a tankönyvekben megjelennek a valószínűség kombinatorikus módon való számolására szolgáló feladatok. A valószínűség kiszámításának időszakában végzett feladatok tovább erősítik a valószínűség kombinatorikus módon való számítását. A tankönyvekben megjelenő problémák döntő többsége a klasszikus valószínűségi modellel oldható meg.
- A dokumentumelemzések azt is megmutatták, hogy a közoktatás gyakorlata keveset foglalkozik a modellválasztás kérdésével. Ha a kérdőíves vizsgálat és az órai megfigyelés tapasztalatait összevetjük a dokumentumelemzés eredményével, azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a valószínűségszámítás eredményes tanításának alapvető kérdése a valószínűség megadásához választható modellek ismerete és ezek eltéréseinek tudatosítása.
- b) A kerettantervek az általános célok meghatározásakor minden esetben említést tesznek a valószínűségi gondolkodás fejlesztésének lehetőségéről a matematika más területein, ez viszont a részletes kidolgozás során csak kevés esetben jelenik meg. A tankönyvekben nem, vagy csak elenyésző mértékben jelennek meg valószínűségi problémák a matematika más témaköreiben. A dolgozat példát mutatott a valószínűség témakörének a matematika más témaköreivel történő összekapcsolására, ezáltal egzisztenciális kijelentésünk igaz.

További kutatási lehetőségek:

A dolgozatban bemutatott korábbi kutatások (Green kutatásai és a SIMULO kutatás) a valószínűségi gondolkodás négy szintjét állapították meg. További kutatások szükségesek annak vizsgálatához, hogy a szintek megállapítása akkor milyen módon történt. Amennyiben ez lehetséges, érdemes lenne különböző matematikai előképzettségű vizsgálati csoportok valószínűségi gondolkodásának Green-féle szintjeit meghatározni.

Kutatásunk 4. kérdése adott válasz tulajdonképpen a jelenlegi magyar közoktatási gyakorlatban lévő hiányokra hívja fel a figyelmet. Ezért utat jelöl fejlesztő kutatások számára. Szükség van arra, hogy kidolgozzanak, és a gyakorlatban kipróbáljanak olyan tanítási anyagokat,

- a) amelyek során a valószínűségi problémák statisztikai megoldása vezet célhoz;
- b) amelyek egyszerre fejlesztik a valószínűségi gondolkodást és megvalósíthatnak a matematika egy másik területén való fejlesztést. E mellett szükség van annak hangsúlyozására, hogy a valószínűségi szemléletfejlesztés során végzett tevékenységek a matematika más területeit is érintik.

6. SUMMARY

We examined the specialties of the probability thinking during our research. First of all, we intended to discover, what kind of thinking strategies are chosen by the ones who solve problems related to probability. According to this, we examined the development of the term of probability and the manner how this topic is elaborated in the current practice of the Hungarian education. Analysis of education documents was part of our research and we also examined the specialties of probability thinking by questionnaires and observations of lessons.

The goal of our research was to find answers to the following questions

1. What kind of differences can be experienced in probability decision of groups of people having different level of mathematical grounding?
2. Is the learnt knowledge activated during probability decisions?
3. Has the primary anticipation related to the probability influence on mathematical problem solving?
4. How can this subject be positioned in the practice of Hungarian teaching mathematics?

The related hypotheses are the following:

1. Groups having higher level of mathematical grounding perform better in average in probability problem solving.
2. The knowledge gained in studying probability is going to be activated during decision making hardly. The differences among the interpretations of probability influence the decisions substantially.
3. Subjective factors also have influence on the estimation of the probability of an event in each and every phase of concept formation.
4. a) The exercises completed in lessons during the period of the development of probability approach help the approximation of probability by relative frequency. The exercises during the calculation of probability enhance the combinatorial manners.
b) The probability topics can be linked to other areas of mathematics.

The first question and hypothesis

The comparison of the performance of three groups having different mathematical grounding is the following:

Students of ELTE-TTK gained the best performance on the average. We assumed the highest level of mathematical grounding and interest in natural sciences in this group. Students of ELTE-TOK gained the second average result. They represented the population of ones who have already learnt calculation of probability but not necessarily having mathematical interest. Students of 5th and 6th classes of primary school reached the third position in the competition. They have not learnt calculation of probability yet. We do not rule our first hypothesis out.

Regarding to the overall results, the three groups are significantly different. On the other hand, the three groups cannot be differentiated based on the answers given to one or another individual question.

The second question and hypothesis

According to the results of our examination the second hypothesis cannot be ruled out either.

Based on our questionnaire and experiences on lessons we can state that the knowledge gained during studying mathematics and probability is hardly activated during making probability decisions.

There can be three different thinking strategies for estimation of an event.

- Intuitive manner, reclining upon anticipation.
- Approximation of probability by relative frequency
- Calculation of the theoretical value of the probability

Selecting the best strategy according to the question is the key point of the probability thinking. Based on our experiences, the selection of the model is influenced by linguistic factors, the manner how the question is asked, the knowledge about probability and other mathematical areas and emotional factors as well.

The used terminology has crucial significance in probability decisions. On one hand, we can judge the way of thinking based on the manner how the probability is expressed. On the other hand, the differences between the mathematical terminology and the ordinary usage of the language could prevent the activation of the gained knowledge.

The emotional factors cannot be neglected in topics of probability. Beliefs could influence or even prevent the estimation of the chance based on the theoretical model. The emotional influence reduces by learning mathematics and probability. The emotional factors are stronger in real life situations than in case of solving mathematical exercises. The emotional factor is one of the reasons why the gained knowledge about probability can hardly be activated.

The third question and hypothesis

Fischbein verified that primary intuition about the probability does exist. The intuitions continuously present in teaching mathematics. The questionnaire and the lesson observations indicated that anticipation related to the probability quite often contradicts to the measurable and countable probability. The results of decision theory confirm this assumption (Kapadia – Borovcnik 1991).

The evaluation of the questionnaire indicated that the primary anticipation influences the probability problem solving so strongly that sometimes it obscures the gained mathematical knowledge.

We proved that the estimation of the probability of an event is influenced by subjective factors in each phase of concept formation.

The fourth question and hypothesis

- a) This hypothesis was proven by the analysis of curriculum of studies and schoolbooks. The schoolwork in the period of development of probability

approach helps the approximation of probability be relative frequency. Besides that the exercises for combinatorial manner of calculating the probability also appear in schoolbooks. In the period of calculating probability, the exercises enhance the combinatorial manner. Most of the exercises appearing in the schoolbooks can be solved by the classic probability model.

The document evaluations also indicated that the questions around the model selection hardly appear in practice of education. If we compare the experiences of the questionnaire and observation of lessons to the result of document analysis we can conclude that knowledge about the selectable models for solving probability problems and bringing the differences among them to students' consciousness are the fundamental questions to teach probability successfully.

- b) The curriculums of studies always mention the possibilities of developing probability thinking within other areas of mathematics. On the hand it rarely appears in the elaborated plans. Probability problems of other mathematical areas do not or rarely appear in the schoolbooks. This document exhibits example of linking topics of probability to other areas of mathematics. This example proves our hypothesis.

Further possibilities of research

Researches exhibited in this paper – Green's researches and the Simulo program – determined four levels of probability thinking. Further researches are needed to investigate how these levels were determined. If it was possible, it would be worth to determine the Green-levels of probability thinking for groups having different levels of mathematical grounding.

The answer to the fourth question of our research draws the attention to the lacks in the current practice in Hungarian public education. Therefore it shows the direction of the new researches.

It is necessary to elaborate and try in practice such teaching materials that

- a. Show statistical manners of solving probability problems
- b. Develop probability thinking and other areas of mathematics at the same time. It is also necessary to emphasize that activities performed during development of probability approach also influences other topics of mathematics.

IRODALOM

1. Ambrus András (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába*, Eötvös Kiadó, Budapest
2. Bán Sándor (1998): *Gondolkodás a bizonytalanról: Valószínűségi és korrelatív gondolkodás* In: Csapó Benő (szerk.) (1998): *Az iskolai tudás*, Osiris Kiadó, Budapest
3. Bognár Jánosné – Nemetz Tibor – Tusnády Gábor (1980): *Ismerkedés a véletlennel*, Tankönyvkiadó, Budapest
4. Bryant, P. – Nunes, T (2012): *Children's understanding of probability*, University of Oxford, www.nuffieldfoundation.org (2012.10.12.)
5. Engel, A. – Varga, T. – Walser W. (1972): *Hasard ou stratégie?* O.C.D.L., Paris
6. Falus Iván – Ollé János (2000): *Statistikai módszerek pedagógusok számára*, OKKER Kiadó
7. Fazekas István (2009): *Valószínűségszámítás*, Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen
8. Fazekas, István– Tómacs, Tibor (1996): *A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról*, A matematika tanítása, 1996. szeptember (8 – 11)
9. Feller, W. (1978): *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
10. Fischbein, E. – Gazit, A. (1984): *Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?* Educational Studies in Mathematics, 15., (p. 1-24.)
11. Fischbein, E. – Pampu, I. - Manzat, I. (1970): *Effects of age and instruction on combinatory ability in children*, British Journal of Educational Psychology (p.261–270)
12. Fischbein, E. (1975): *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*, D. Reidel Publishing Company, Boston
13. Freudenthal, H. (1970): *The aims of teaching probability*, In: Lennart Råde: *The teaching of probability and statistics*, proceedings of the first CSMP international conference, Almqvist and Wiksell, Uppsala
14. Freudenthal, H. (1991): *Revisiting mathematics education*, Kluwer, Dordrecht
15. Green, D.R. (1982): *Probability concept ian 11-16 year old pupils*, Report of reasarch sponsored by the Social Science Researc Council 1978-1981, University of Technology, Loughborough, England
16. Greer, B. (2001): *Understanding probabilistic thinking: The legacy of Efraim Fischbein*, Educational Studies in Mathematics, 45. (p. 15–33)
17. Hajós György (1971): *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, Budapest
18. Hawkins, A. S. – Kapadia, R. (1984):. *Children's conceptions of probability. – A psychological and pedagogical review*, Educational Studies in Mathematics, 1984. 15.
19. Izard, John (1991): *Patterns of Development with probability concepts*, Australian Councilé for Educational Researc, Australia
20. Juhász Márta – Takács Ildikó (2006): *Pszichológia*, Typotex Kiadó, Budapest

21. Kahneman, D. – Tversky A. (2002): *Belief in the law of small numbers*. In *Judgment under uncertainty. Heuristics and biases*, Cambridge University Press., Cambridge
22. Kalmár László (1986): *Integrállevél*, Gondolat Kiadó, Budapest
23. Kapadia, R. – Borovcnik, M. (1991): *Chance and encounter: Probability in Education*, Kluwer, Dordrecht
24. Lovász László (2000): *Véletlen és álvéletlen*, Természet világa, Informatika különszám
25. Mérő László (2010): *Az érzelmek logikája*, Tericum Könyvkiadó, Budapest
26. Nagy Lászlóné (2000): *Analógiák és az analogikus gondolkodás a kognitív tudományok eredményeinek tükrében*, Magyar Pedagógia, 100. 3. sz. 275-302.
27. Nemetz Tibor – Wintsche Gergely (1998): *Valószínűségszámítás*, Typotex Kiadó, Budapest
28. Nemetz Tibor – Wintsche Gergely (1999): *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*, Polygon Kiadó, Szeged
29. Nemzeti Alaptanterv, 2007., 2012. OM
30. Paivio, A. (2006): *Dual coding theory and education. Draft chapter for the conference on "Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children"*, University of Michigan School of Education
31. Pálfalvi Józsefné (2000): *Matematika didaktikusan*, Typotex Kiadó, Budapest
32. Piaget, J. – Inhelder, B. (1999): *Gyermelek lélektan*, Osiris Kiadó, Budapest
33. Piaget, J. – Inhelder, B. (1975): *The Origin of the Idea of Chance in Children*, Routledge and Kegan Paul, London
34. Pinkler, S. (1994): *A nyelvi ösztön*, Typotex Kiadó, Budapest
35. Pólya György (1989): *Plauzibilis következtetés*, Gondolat Kiadó, Budapest
36. Pólya, G. (1945): *How to solve it? A new aspect of mathematical method*, Princeton University
37. Rényi Alfréd (1967): *Levelek a valószínűségről*, Akadémiai Kiadó, Budapest
38. Rényi Alfréd (1981): *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest.
39. Rényi Alfréd (1970): *Remarks on the teaching of probability*, In: Lennart Råde: *The teaching of probability and statistics*, proceedings of the first CSMP international conference, Almqvist and Wiksell, Uppsala
40. Schoenfeld, A. H. (Ed.) (1994). *Mathematical thinking and problem solving*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.
41. Skemp R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*, Gondolat Kiadó, Budapest
42. Székely J, Gábor (1982): *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest
43. Szendrei Julianna – Sztányi Judit (2007): *Intereses y sentimientos ¿ Qué dificultades tiene el desarrollo de la mentalización hacia las probabilidades en la escuela primaria?*, Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Probabilidades, 31-46. Barcelona
44. Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek*, Typotex Kiadó, Budapest.

45. Takács Lajos – Ziermann Margit (1972): *Valószínűségszámítás*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest
46. Vancsó Ödön – Szitányi Judit: (2005): *Mérés, mértékváltás, mennyiségi és valószínűségi következtetések*; tanulmány, SuliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht., Budapest.
47. Varga Tamás (1971): *Nemzetközi matematikaoktatási tanfolyam Budapesten*, Kapcsolat 1971 júliusi száma, OPI, Budapest
48. Varga Tamás (1973): *A valószínűség számítás tanítása*, Kapcsolat 1973 májusi száma, OPI, Budapest
49. Varga Tamás (1981): *On Probability*, Southern Illinois University at Edwardsville
50. Vásárhelyi Éva (2006): *Problem solving with the help of different representations*. In: Learning in Europe, Jena.
51. Vásárhelyi Éva (2007): Fogalomalkotás és reprezentációk, ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ
52. Vetier András (1991): *Szemléletes mérték és valószínűségelmélet*, Tankönyvkiadó, Budapest
53. Vidákovich Tibor (2001): *Diagnosztikus tudásszint- és képességvizsgálatok*, In: Csapó Benő és Vidákovich Tibor (szerk.) (2001): *Neveléstudomány az ezredfordulón*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
54. Vigotszkij, L. Sz. (1966): *Gondolkodás és beszéd*, Akadémia Kiadó, Budapest
55. Warren Weaver (1979): *Szerencse kisasszony*, Gondolat Kiadó, Budapest
56. <http://www.nefmi.gov.hu/kozoktatasi/tantervek/gimnazium>

A kutatásban vizsgált 50 tankönyv listája a 3. sz. mellékletben található.

MELLÉKLETEK

- 1. melléklet:** A tantervek által megjelölt képességfejlesztési területek a a valószínűség, statisztika témák kifejtése során. (A táblázatban szereplő szám azt mutatja, hogy az adott tanterv hányszor említi az adott képességfejlesztési területet)

	Apáczai	Mozaik	Műszaki	NTK	OM	
a valószínűségi szemlélet alapozása.	3	3	1	4	3	1 – 8. évfolyam
logikus gondolkodás	1	1	1		1	
kifejezőképesség	1		1		2	
a matematika és a valóság kapcsolata	1		4		1	
kombinatorikus gondolkodás	1		1		1	
problémamegoldás	1		1		1	
megfigyelés		1	3	1	1	
számolás	1		1			
rendszerezőképesség	1	1	1		1	
ábrázolás		1			1	
a valószínűségi szemlélet fejlesztése	2					Középiskola
a matematika és a valóság kapcsolata		1		1	1	
gyakorlati alkalmazás				2	2	
menyiségi következtetések	2					
számolás	2					
döntési képesség	2					
kommunikáció	1					
modellalkotás		1		1	1	

2. melléklet: Tantervi útmutatások a tananyag, fejlesztési feladatok és követelmények rendszerében.

1-8. évfolyam:

Apáczai Kerettantervcsalád

Év	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
1-2.	Valószínűségi játékok, kísérletek megfigyelése.	A valószínűségi és a statisztikai szemlélet alapozása. A logikus gondolkodás fejlesztése. Kifejezőképesség fejlesztése a sejtések megfogalmazásával.	-
3-4.	Valószínűségi játékokban a lehetséges és lehetetlen fogalmak értelmezése. A biztos és a véletlen esetek megállapítása. A gyakoriság, a valószínű, kevésbé valószínű értelmezése konkrét példákon.	A valószínűségi és statisztikai szemlélet alapozása. A matematika és a valóság kapcsolatának folyamatos figyelemmel kísérése. Kombinatorikus képességek fejlesztése. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése.	A biztos és a véletlen megkülönböztetése konkrét tapasztalatszerzés útján. Példák megfogalmazása a <i>biztos</i> , a <i>lehetséges</i> és a <i>lehetetlen</i> fogalmának használatával.
5-6.	Valószínűségi kísérletek elvégzése, megfigyelése. Relatív gyakoriság. Egyenlően valószínű események valószínűségének meghatározása egyszerű esetekben.	A figyelem terjedelmének és tartósságának növelése. Rendszerezés. A valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése. A számolási készség fejlesztése.	Relatív gyakoriság kiszámítása néhány kísérlet alapján. Konkrét feladatok kapcsán a biztos és a lehetetlen eseményeket felismeri.
7-8.	A valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma	Önálló eljárások keresése, megoldási kísérletek, tippelések szabad végzése, összevetése a kapott információkkal, valósággal.	A relatív gyakoriságot kiszámítja.

Mozaik Kerettantervrendszer

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
1-2.	Közös játékok, kísérletek a "biztos", "lehetséges, de nem biztos", "lehetetlen" fogalmak megértése érdekében próbálgatással, találgatással. Valószínűségi kísérletek végzése, megfigyelése.	Logikus gondolkodás, várható események megfogalmazása szóban. A megfigyelő és rendszerező képesség fejlesztése matematikai játékok segítségével. Tapasztalatszerzés, szemléleti alapozás konkrét valószínűségi játékok alapján. Ábrázolási képesség, modellalkotás. Oksági kapcsolatok keresése.	-
3-4.	Kísérletek, játékok alapján a lehetséges esetek keresése. Biztos, lehetetlen, lehet de nem biztos események eldöntése egyszerűbb esetekben. Események bekövetkezésének megfigyelése, lejegyzése. Sejtések, indoklások megfogalmazása.	Oksági kapcsolatok keresése. Események lejátszódásának elképzelése, sejtések megfogalmazása. Tapasztalatok, várható események megfogalmazása szóban. Megfigyelő és rendszerező képesség. Modell alkotása probléma megoldásához.	tudja használni a biztos, lehetséges és lehetetlen fogalmakat; tudja egyszerű valószínűségi kísérletek lehetséges eseteit megkeresni;
5-6.	Valószínűségi játékok és kísérletek.	A valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése.	Konkrét feladatok kapcsán a biztos és a lehetetlen esemény felismerése.
7-8.	Valószínűségi kísérletek a teljes eseményrendszeren. Valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma	Valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése.	Valószínűségi kísérlet kimeneteleinek felsorolása. Gyakoriság, relatív gyakoriság fogalma. Teljes eseményrendszer, és részhalmazai.

A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének kerettanterve

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
1-2.	Tapasztalatok gyűjtése a véletlen és a biztos eseményről játékok során.	A „valószínűségi szemlélet” alapozása, tapasztalatok gyűjtése a véletlen és a nem véletlen megkülönböztetésére.	Gondolkodásukban kezd különválni a „biztos”, a „lehetetlen” és a „nem biztos, de lehetséges”. Képzeletük kiterjed játékokhoz kapcsolódó kísérletek lehetséges kimeneteleinek áttekintésére.
3-4.	Tapasztalatok gyűjtése a különböző eséllyel bekövetkező eseményekről játékok során. Adott kísérlet lehetséges eseményeinek számbavétele, a kísérlet során bekövetkezett események jegyzése, adott események gyakorisági diagramjának készítése. Adott kísérlet eseményeinek sorba állítása bekövetkezésük esélye szerint. A sejtések ellenőrzése kísérlettel.	A „valószínűségi szemlélet” fejlesztése, tapasztalatok gyűjtése a véletlen és a nem véletlen szétválasztására, a valószínűbb és a kevésbé valószínű átélésére, megkülönböztetésére, ellenőrzésére.	Tapasztalataik, megfigyeléseik alapján megfogalmazott becsléseiket képesek összevetni és korrigálni a sorozatba, táblázatba rendezett adatok és a grafikon információi szerint.
5-6.	Valószínűségi játékok és kísérletek.	A valószínűségi és statisztikai szemlélet, a megfigyelőképesség, az elemzőképesség fejlődése.	-
7-8.	Valószínűségi kísérletek egyszerű konkrét példák esetében. Gyakoriság, relatív gyakoriság fogalma, tulajdonságai. Valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma A kombinatorikus valószínűség szemléletes fogalmának megértése.	A valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlődése.	A gyakoriság, relatív gyakoriság fogalmának értése.

Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettanterv

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
1-2.	Események,	A matematikai	-

	ismétlődések játékos tevékenység során. "Biztos", "lehetséges, de nem biztos", "lehetetlen" érzékelése találgatással, próbálgatással.	tevékenységek iránti érdeklődés felkeltése matematikai játékok segítségével. A megfigyelő és rendszerező képesség fejlesztése valószínűségi játékokkal. A valószínűségi szemlélet alapozása. A szóbeli kifejezőképesség fejlesztése. Ábrázolási képesség. Kombinatorikus képességek fejlesztése, tapasztalatok megfogalmazása, összegzés.	
3-4.	A lehetséges és lehetetlen tapasztalati úton való értelmezése. A biztos és véletlen megkülönböztetése. A gyakoriság, valószínű, kevésbé valószínű értelmezése konkrét példákon.	A matematika és a valóság kapcsolatának folyamatos figyelemmel kísérése. Kifejezőképesség fejlesztése a sejtések megfogalmazásával. Logikus gondolkodás fejlesztése. Tapasztalatok szerzésével későbbi fogalomalkotás előkészítése (a biztos, a lehetséges és a lehetetlen események, törtszámok). A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése.	A biztos és a véletlen megkülönböztetése konkrét tapasztalatszerzés útján. Példák megfogalmazása a biztos, a lehetséges és a lehetetlen fogalmának használatával.
5-6.	Valószínűségi játékok és kísérletek.	A valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése.	Konkrét feladatok kapcsán a biztos és a lehetetlen események felismerése.
7-8.	Valószínűségi kísérletek egyszerű konkrét példák esetében. Valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma.	Valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése.	Relatív gyakoriság.

Műszaki Kiadó Matematika 1-8. Mintatanterv

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
1-2.	Valószínűségi játékok, például kockadobások kimeneteleinek megfigyelése. A „biztos”, a „lehetséges”	A rendszerezőképesség, a megfigyelőképesség és a matematikai szemléletmód fejlesztése. A matematika iránti	-

	és a „lehetetlen” események elkülönítése.	érdeklődés felkeltése matematikai játékok segítségével. Szóbeli és képi kifejezőképesség fejlesztése. Kombinatorikus képesség fejlesztése, a valószínűségi szemlélet alapozása.	
3-4.	Valószínűségi kísérletek kimeneteleinek megfigyelése. A kimenetek gyakoriságának meghatározása. Sejtések megfogalmazása, összehasonlításuk az eredménnyel. A valószínűbb és a kevésbé valószínű események megkülönböztetése („biztos”, „lehetséges”, „lehetetlen”). A tanuló mindennapi életével kapcsolatos véletlen események megfigyelése, lejegyzése. Tapasztalatok szerzésével további fogalomalkotás előkészítése (a „biztos”, a „lehetséges” és a „lehetetlen” események, törtszámok).	A megfigyelőképesség és a matematikai szemléletmód fejlesztése, a mindennapi élet és a matematika közötti kapcsolatok felfedeztetése. Kifejezőképesség fejlesztése a sejtések megfogalmazásával. Logikus gondolkodás fejlesztése. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése.	A biztos és a véletlen megkülönböztetése konkrét tapasztalatszerzés útján. Példák megfogalmazása a „biztos”, a „lehetséges” és a „lehetetlen” fogalmának használatával.
5-6.	Véletlen események megfigyelése. Valószínűségi kísérletek eredményeinek statisztikai elemzése, az események gyakorisága; relatív gyakoriság. A biztos, a lehetséges és a lehetetlen esemény fogalmának alakítása.	A megfigyelő-, elemzőképesség és a matematikai szemlélet fejlesztése. A mindennapi élet matematikai vonatkozásainak és a matematika gyakorlati alkalmazhatóságának felismertetése. A matematika gyakorlati alkalmazására törekvés. A számolási rutin fejlesztése. Tervszerűség.	Események megfigyelése, biztos, lehetséges, lehetetlen események kiválasztása.
7-8.	Egyszerű valószínűségi kísérletek végzése, a kimenetel becslése,	A matematikai látásmód fejlesztése. A mindennapi véletlen jelenségek	Egyszerű kísérletekben a valószínűség

	megfigyelése, lejegyzése. A becslés és a valószínűs kimenetel összehasonlítása. A relatív gyakoriság meghatározása. A valószínűség kiszámítása kombinatorikus gondolatmenettel. A kiszámított valószínűség és a relatív gyakoriság összehasonlítása.	értelmezése.	becslése, a kimenetek lejegyzése, a relatív gyakoriság kiszámítása.
--	--	--------------	---

9-12. évfolyam:

Apáczai Kerettantervcsalád

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
9.	-	-	-
10.	Esemény fogalma. Eseménytér: elemi és összetett események, biztos és lehetetlen esemény. Műveletek eseményekkel. Gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség. A valószínűség klasszikus modellje.	Valószínűségi szemlélet fejlesztése. Megfigyelőképesség, analízis képesség fejlesztése. Számolási készség fejlesztése. A mennyiségi következtetés fejlesztése egyszerű számítások relatív gyakoriságokkal, kombinatorikus módszerekkel megoldható valószínűség-számítási feladatok. A döntési képesség fejlesztése a mindennapi életben előforduló egyszerű valószínűségi állítások jelentésének elemzésével.	Véges sok kimenetel esetén szimmetria megfontolásokkal számítható valószínűségek (egyenlő esélyű elemi eseményekből) egyszerű feladatokban. Esemény, eseménnytér elemzése konkrét példák esetén. A klasszikus modell ismerete. Szemléletes kapcsolat a relatív gyakoriság és a valószínűség között.
11.	Kombinatorikus valószínűség. Binomiális eloszlás. Klasszikus valószínűségi modell. Valószínűség és statisztika.	Valószínűségi és statisztikai szemlélet fejlesztése. Kommunikációs készség, vitakultúra fejlesztése állítások és cáfolatok megfogalmazásával. Becslési képesség és a döntési képesség fejlesztése szerencsejátékok szabályainak vizsgálata során.	A klasszikus (Laplace) modell ismerete. Szemléletes kapcsolat a relatív gyakoriság és a valószínűség között. Valószínűségek kiszámítása visszatevéses mintavétel esetén, binomiális eloszlás.

		A számolási készség fejlesztése.	
12.	-	-	-

Mozaik Kerettantervrendszer

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
9.	-	-	-
10.	További valószínűségi kísérletek, a valószínűség becslése, kiszámítása egyszerű esetekben. A valószínűség szemléletes fogalma (esemény, lehetetlen esemény, biztos esemény, komplementer esemény fogalma, valószínűsége). A valószínűség kiszámítása konkrét esetekben.	A valós helyzetek értelmezése, megértése és értékelése.	A valószínűségi kísérlet, a gyakoriság, a relatív gyakoriság és az esemény fogalma. Események összegének és szorzatának fogalma, tulajdonságai. A valószínűség fogalmának ismerete. A klasszikus valószínűségi modell ismerete, és annak alapján megoldható egyszerű gyakorlati problémák megoldása.
11.	Egyszerű valószínűség-számítási problémák. Néhány konkrét eloszlás vizsgálata. Műveletek eseményekkel konkrét valószínűség-számítási példák esetén („és”, „vagy”, „nem”).	A körülmények kellő figyelembevétele. Előzetes becslés összevetése a számításokkal.	A relatív gyakoriság és a valószínűség közötti szemléletes kapcsolat ismerete. Műveletek eseményekkel konkrét valószínűség-számítási példák kapcsán. Egyszerű feladatok megoldása a valószínűség klasszikus modelljében.
12.	A valószínűség meghatározása geometriai mérték segítségével. A geometriai modellre visszavezethető feladatok. A véletlen paradoxonai.	Geometriai modell szerepeltetése a valószínűség meghatározására.	A geometriai valószínűségi modell alkalmazása egyszerű feladatokban.

A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének kerettanterve

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
9.	-	-	-
10.	Valószínűségi kísérletek. A valószínűség szemléletes fogalma, kiszámítása egyszerű esetekben.	A valós helyzetek értelmezése, megértése és értékelése. Kísérletek elvégzése és számítógépes modellezése.	Egyszerű problémák megoldása a klasszikus valószínűségi modell alapján.
11.	Relatív gyakoriság. A valószínűség klasszikus modellje	Modellalkotásra nevelés.	A relatív gyakoriság és a valószínűség közötti szemléletes kapcsolat ismerete, egyszerű valószínűségi feladatok megoldása.
12.	Gyakoriság, relatív gyakoriság. A klasszikus valószínűségi modell.	A leíró statisztika és a valószínűség számítás gyakorlati szerepe, alkalmazása. A számítógép felhasználása statisztikai adatok kezelésére, véletlen jelenségek vizsgálatára.	Az előző években felsorolt továbbhaladási feltételek.

Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettanterv

Évfolyam	Tananyag	Fejlesztési feladatok	Követelmények
9.	-	-	-
10.	A valószínűség szemléletes fogalma, kiszámítása egyszerű esetekben.	A valós helyzetek értelmezése, megértése és értékelése.	Egyszerű problémák megoldása a klasszikus valószínűségi modell alapján.
11.	Egyszerű valószínűség-számítási problémák. Relatív gyakoriság. A valószínűség klasszikus modellje.	Modellalkotásra nevelés.	A relatív gyakoriság és a valószínűség közötti szemléletes kapcsolat ismerete, egyszerű valószínűségi feladatok megoldása.
12.	Összefoglalás: Gyakoriság, relatív gyakoriság. A klasszikus valószínűségi modell.	A leíró statisztika és a valószínűség számítás gyakorlati szerepe, alkalmazása. A számítógép felhasználása statisztikai adatok kezelésére, véletlen jelenségek vizsgálatára.	Az előző években felsorolt továbbhaladási feltételek. Egyszerű klasszikus valószínűség-számítási feladatok megoldása.

3. melléklet: Az áttekintett tankönyvek listája

Műszaki Kiadó:

	Kiadás éve	Szerzők	Cím
1.	2011	Scherlein Márta, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné	Matematika 1.
2.	2010	Scherlein Márta, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné	Matematika 2
3.	2009	Scherlein Márta, Czakó Anita, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné	Matematika 3.
4.	2011	Scherlein Márta, Czakó Anita, Dr. Hajdu Sándor, Novák Lászlóné	Matematika 4.
5.	2011	Hajdu Sándor Zoltán, Dr. Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Zankó Istvánné	Matematika Gondolkodni jó! 5.
6.	2011	Hajdu Sándor Zoltán, András Tiborné, Dr. Czeglédy István, Czeglédy Istvánné, Novák Lászlóné, Zankó Istvánné	Matematika Gondolkodni jó! 6.
7.	2012	Hajdu Sándor, Czeglédy Istvánné, Dr. Czeglédy István, Novák Lászlóné, Sümegi Lászlóné, Szalontai	Matematika Gondolkodni jó! 7.
8.	2011	Czeglédy Istvánné, Dr. Czeglédy István, Dr., Novák Lászlóné, Sümegi Lászlóné, Szalontai Tibor, Zankó Istvánné	Matematika Gondolkodni jó! 8.
9.	2009	Dr. Czeglédy István, Dr. Hajdu Sándor, Dr. Kovács András, Hajdu Sándor Zoltán	Matematika Gondolkodni jó! 9.
10.	2011	Dr. Czeglédy István, Dr. Hajdu Sándor, Dr. Kovács András, Hajdu Sándor Zoltán	Matematika Gondolkodni jó! 10.
11.	2011	Dr. Hajdu Sándor, Dr. Czeglédy István, Dr. Kovács András, Hajdu Sándor Zoltán	Matematika 11.
12.	2007	Dr. Czeglédy István, Dr. Hajdu Sándor, Hajdu Sándor Zoltán, Dr. Kovács András	Matematika 12.
13.	2010	Dr. Vancsó Ödön, Dr. Ambrus Gabriella, Frenkel Andor, Szarka Klára, Szűcs Ágnes, Papp Péter, Kaposiné Pataky Krisztina, Dr. Szabadi László, Orosz Sándorné, Székely Péter, Tóth Attila	Matematika 9.
14.	2010	Dr. Ambrus Gabriella, Bölcskei Attila, Csík Zoltán, Kaposiné Pataky Krisztina, Nagyné Szokol Ágnes, Papp Péter, Dr. Szabadi László, Szász Antónia, Tóth Attila, Dr. Vancsó Ödön	Matematika 10.
15.	2011	Dömel András, Dr. Marosvári Péter, Mezei József, Nagyné Szokol Ágnes, Szász Antónia, Székely Péter, Dr. Szabadi László, Dr. Vancsó Ödön	Matematika 11.
16.		Bartha Dénesné, Dömel András, Dr. Fűhrné Nagy Györgyi, Kaposiné Pataky Krisztina, Dr. Marosvári Péter, Nagyné Lakatos Eszter, Nagyné Szokol Ágnes, Dr. Szabadi László, Szász Antónia, Dr. Vancsó Ödön	Matematika 12.

Nemzeti Tankönyvkiadó

17.	1998	dr Török Tamás	Matematika 1.
18.	1999	dr Török Tamás, Debnárik Gézané	Matematika 2.
19.	1999	dr Török Tamás, Bognár Péterné	Matematika 3.
20.	2000	dr Török Tamás, Bognár Péterné	Matematika 4.
21.	1993	C. Neményi Eszter, Sz. Oravecz Márta	Matematika 1. osztály
22.	1994	C. Neményi Eszter, Sz. Oravecz Márta	Matematika 2. osztály
23.	1998	C. Neményi Eszter, Wéber Anikó	Matematika 3. osztály
24.	2001	C. Neményi Eszter, Káldi Éva	Matematika 4. osztály
25.	2011	Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta	Matematika 5.
26.	2011	Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta	Matematika 6.
27.	2011	Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta	Matematika 7.
28.	2011	Békéssy Szilvia, dr. Fried Katalin, Korándi József, Paróczay József, Számadó László, Tamás Beáta	Matematika 8.
29.	2009	Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit	Matematika 9.
30.	2011	Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit	Matematika 10.
31.	2011	Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit	Matematika 11.

Mozaik Kiadó

32.	2010	Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia, Szabados Anikó	Sokszínű matematika 1.
33.	2010	Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia, Szabados Anikó	Sokszínű matematika 2.
34.	2011	Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia, Szabados Anikó	Sokszínű matematika 3.
35.	2010	Árvainé Libor Ildikó, Lángné Juhász Szilvia, Szabados Anikó	Sokszínű matematika 4.
36.	2011	Csordás Mihály, Kontár László, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze Istvánné	Sokszínű matematika 5.
37.	2007	Csordás Mihály, Kontár László, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze Istvánné	Sokszínű matematika 6.
38.	2008	Jakab Tamás, Kosztolányi József, Pintér Klára, Vincze István	Sokszínű matematika 7.
39.	2010	Jakab Tamás, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze István	Sokszínű matematika 8.
40.	2010	Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István	Sokszínű matematika 9.

41.	2010	Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István	Sokszínű matematika10.
42.	2010	Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István	Sokszínű matematika 11.
43.	2010	Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István	Sokszínű matematika 12.

Apáczai Kiadó

44.	2011	Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva	Matematika Tankönyv 5.
45.	2011	Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva	Matematika Tankönyv 6.
46.	2011	Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva	Matematika Tankönyv 7.
47.	2011	Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva	Matematika Tankönyv 8.
48.	2010	Csatár Katalin, Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnady Katalin, Schubert Mihály	Matematika a középiskolák 9. évfolyama számára
49.	2010	Csatár Katalin, Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnady Katalin, Schubert Mihály	Matematika a középiskolák 10. évfolyama számára
50.	2012	Csatár Katalin, Kornai Júlia, Kovács Előd, Lövey Éva, Pálovicsné Tusnady Katalin, Schubert Mihály	Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára

4. melléklet: Az alsó tagozatos tankönyvi tevékenységek osztályozása

Tankönyv	Osztály	Tevékenység				Nem klasszikus modell
		játék	kísérlet	feladat	mintapélda, meghatározás	
C. Neményi	1.	1	-	-	-	0
	2.	6	1	2	-	0
	3.	1	7	3	-	0
	4.	12	4	5	-	1
Török	1.	-	3	2	-	0
	2.	1	2	7	-	0
	3.	1	6	3	-	0
	4.	-	2	1	1	0
Hajdu	1.	-	-	-	-	-
	2.	-	2	1	1	1
	3.	1	3	2	2	1
	4.	-	5	8	2	1
Sokszínű	1.	-	-	-	-	-
	2.	2	-	2	-	0
	3.	1	3	4	-	1
	4.	-	2	5	-	1

5. melléklet: A felső tagozatos tankönyvi tevékenységek osztályozása

Tankönyv	Osztály	Tevékenység				Nem klasszikus modell
		játék	kísérlet	feladat	mintapélda, meghatározás	
NTK	5.	10	10	9	1	3
	6.	-	-	3	-	-
	7.	-	6	20	2	1
	8.	-	4	26	7	7 ³⁴
Apáczai	5.	1	3	4	2	-
	6.	1	-	6	-	2
	7.	-	-	10	-	-
	8.	1	3	22	5	10
Hajdu	5.	-	1	2	2	-
	6.	-	4	-	2	-
	7.	-	2	1	6	2
	8.	-	-	8	6	3
Sokszínű	5.	-	3	-	1	-
	6.	1	-	6	3	-
	7.	1	2	9	7	-
	8.	1	-	15	5	-

³⁴ csak a kiegészítő anyagban, emelt szinten

6. melléklet:

A Green teszt eredményei

	Átlagos szint
Életkor	
11 év	1,14
12 év	1,32
13 év	1,66
14 év	1,8
15 év	2,2

5. melléklet

A SIMULO kutatás eredményei

	Átlagos szint		
	Quebec	Magyarország	Brazília
Életkor			
11 év	1,0	1,3	-
12 év	1,4	1,8	1,5
13 év	2,0	2,0	1,8
14 év	1,9	2,0	-
15 év	2,3	-	2,2 ³⁵

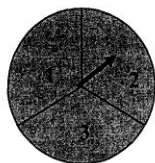
³⁵ 15-19 éves diákok

6. melléklet: A kérdőív

1. Egy osztályba 13 fiú és 16 lány jár. Mindegyik gyerek nevét felírjuk egy cédulára. Ezeket betesszük egy sapkába. A tanár összekeveri a cédulákat, és becsukott szemmel kihúz egyet közülük. Akiét kihúzza, nyereményhez jut.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) Nagyobb az esélye annak, hogy fiú nevét húzza ki, mint annak, hogy lányét.
 - b) Nagyobb az esélye annak, hogy lány nevét húzza ki, mint annak, hogy fiút.
 - c) Ugyanakkora az esélye annak, hogy fiú nevét húzza ki, mint annak, hogy lányét.
2. Két korongot készítettünk: egy pirosat és egy kékét. A megpörgetett mutató véletlenszerűen áll meg valamelyik számon. Melyik korong esetében lesz nagyobb az esélye a 3-as számnak?



piros



kék

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A piros koronggal nagyobb esélye van annak, hogy 3-ast kapunk, mert kevesebb számból választunk egyet.
 - b) A kék koronggal nagyobb az esélye annak, hogy 3-ast kapunk, mert több számból választunk egyet.
 - c) A piros koronggal nagyobb az esélye annak, hogy 3-ast kapunk, mert a piros korongon nagyobb területet foglal el a 3-as mező, mint a kéken.
 - d) Egyforma az esély a két korong esetén.
3. Egy szabályos pénzérmével egymás után ötször írást dobtunk.
- Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!*
- a) A következő alkalommal nagyobb lesz a fej dobásának az esélye.
 - b) A következő alkalommal nagyobb lesz az írás dobásának az esélye.
 - c) A következő alkalommal ugyanakkora eséllyel dobunk fejet vagy írást

Indokolja választát! _____

4. Érzése szerint mekkora eséllyel következnek be az alábbi események?

- a) Holnap Budapesten esni fog az eső. _____
- b) Egy pénzérmével fej dobást kapunk. _____
- c) Egy véletlenszerűen kiválasztott budapesti ember ismeri a japán nyelvet. _____
- d) Egy véletlenszerűen kiválasztott negyedikes gyerek szereti a csokoládét. _____
- e) Egy dobókockával 3-ast dobunk. _____

5. Írjon egy olyan mondatot, melynek az utolsó szavai ezek: „.....véletlenszerűen következik be.”

_____ véletlenszerűen következik be.

6. Írjon egy olyan mondatot, melynek az utolsó szavai ezek: „.....kis eséllyel következik be.”

_____ kis eséllyel következik be.

7. Fejezze be a következő mondatot tetszése szerint!

Nem valószínű, hogy Budapest _____.

8. Fejezze be a következő mondatot tetszése szerint!

Nagyon valószínű, hogy Sidney _____.

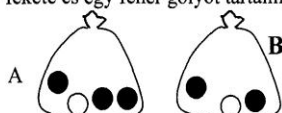
9. Öt kifejezést megszámoztunk:

1. Nem következhet be....
2. Nem következik be nagyon gyakran...
3. Elég gyakran bekövetkezik....
4. Majdnem minden esetben bekövetkezik...
5. Mindig bekövetkezik....

Írja a következő kifejezések mindegyikéhez annak a kifejezésének a sorszámát, amit leginkább azonos értelműnek érez vele! (Ugyanazt a számot többször is használhatja)

- a) „Majdnem biztos, hogy...”
- b) „Nem valószínű, hogy...”
- c) „Nagyon valószínű, hogy...”
- d) „Valószínű, de csak kicsit, hogy...”
- e) „Kicsi az esélye, hogy...”
- f) „Esélytelen, hogy...”

10. Az A jelű zsák 3 fekete és egy fehér golyót tartalmaz, a B jelű zsákban két fekete és egy fehér golyó van.



Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni az A zsákból.
- b) Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni a B zsákból.
- c) Ugyanakkora eséllyel lehet fekete golyót húzni a két zsákból.

Indokolja választát! _____

11. Az C jelű zsák 6 fekete és 3 fehér golyót tartalmaz, a D jelű zsákban 4 fekete és 2 fehér golyó van.



Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni az C zsákból.
- Nagyobb eséllyel lehet fekete golyót húzni a D zsákból.
- Ugyanakkora eséllyel lehet fekete golyót húzni a két zsákból.

Indokolja választát! _____

12. Jancsi és Péter elhatározzák, hogy ötször egymás után dobnak a kockával. Megegyeznek abban, hogy Jancsi akkor kap egy pontot, ha a dobás eredménye 2, 3, 4, 5, vagy 6. Ha nem ez történik, Péter kap néhány pontot. Az öt dobás után az a nyertes, aki több pontot gyűjtött. Ha azt szeretnénk, hogy a játék igazságos legyen, hány pontot kell kapnia Péternek, amikor a kocka 1-et mutat?

Válasz: _____ pontot

Indokolja választát! _____

13. Jancsi és Péter most is ugyanezzel a szabállyal játszanak, csak most ötven kockadobás után számolják össze pontjaikat. Ebben a játékban hány pontot kapjon Péter, amikor a kocka egyest mutat?

Válasz: _____ pontot

Indokolja választát! _____

14. Egyszerre feldobunk egy 10 forintos és egy 20 forintos pénzérmet. Leesés után több különböző esetet láthatunk. Például: Fejet dobunk a 10 forintossal és Írást a 20 forintossal. Ezt az eredményt be is irtuk egy táblázatba.

Írja be ugyanebbe a táblázatba az összes többi lehetőséget!

10-forintos	20-forintos
F	Í

15. Egyszerre feldobunk három korongot, melynek az egyik oldala piros, a másik kék. Leesés után több különböző eset következhet be. Például mindhárom koronggal pirosat dobunk: PPP

Sorolja fel az összes többi lehetőséget!

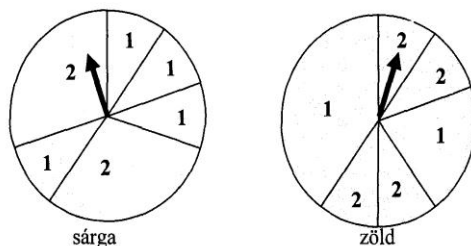
PPP, _____

16. Egy zsákba 8 piros, 4 kék, és 2 zöld golyót tettek. Összerázták a zsákot, és kihúztak öt golyót: 4 pirosat és 1 kék. Ezután még egy golyót kivettek. Az utoljára kivett golyó színéről néhány állítást írtunk.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A piros golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- b) A kék golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- c) A zöld golyó húzásának a legnagyobb az esélye.
- d) Bármelyik golyó húzásának ugyanakkora az esélye.

17. Két – csak színében különböző - korongot készítettünk, egy sárgát és egy zöldet. Számokat írtunk rájuk. A megpörgetett mutató véletlenszerűen áll meg valamelyik számon.



Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább igaznak érez!

- a) A sárga koronggal könnyebb 1-et kapni.
- b) A zöld koronggal könnyebb 1-et kapni.
- c) A két koronggal ugyanakkora eséllyel kapunk 1-et.
- d) Erre a kérdésre nem lehet válaszolni.

Indokolja választát! _____

18. A farsangi ünnepségre iskolai lottót terveztek. 12 szám közül 4-et húznak. Három gyerek a következő lottószelvényeket töltötte ki:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

A

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

B

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

C

Melyik szelvénynek van ezek között a legkisebb nyerési esélye?

Válasz: _____

Indokolja választát! _____

19. Kati nagyon komolyan sportol. Minden héten ötször lemegy a tornaterembe. Ugyanakkor nagyon szereti a süteményt is, és hetente 4-5 alkalommal meglátogatja a közeli cukrászdát is.

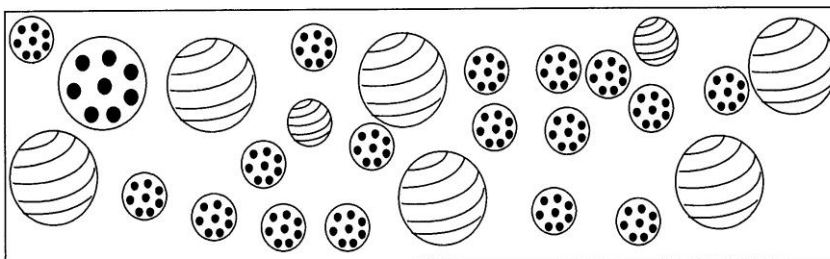
Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

- a) Kati holnap lemegy a tornaterembe.
- b) Kati holnap süteményt eszik.
- c) Kati holnap lemegy a tornaterembe és elmegy a cukrászdába is.
- d) Holnap Kati nem eszik sütit és edzésre sem megy.

20. Igaznak tartja-e a következő állítást? „A dohányzó emberek rövidebb ideig élnek, mint azok, akik nem dohányoznak.” IGEN / NEM

Indokolja választát! _____

21. Ezen a képen labdák vannak. Kicsik és nagyok, csíkosak és pöttyösek.



Igaznak tartja-e a következő állítást? „A pöttyös labdák kicsik.” IGEN / NEM

Indokolja választát! _____

22. A labdák közül találmra kivettünk egyet.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

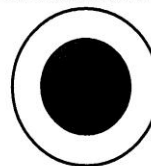
- a) Kicsi, pöttyös labdát vettünk ki.
- b) Nagy labdát vettünk ki.
- c) Kicsi labdát vettünk ki.
- d) Csíkos labdát vettünk ki.

Indokolja választát! _____

23. Egy 5 dm sugarú világos körbe egy 3 dm sugarú sötét kört rajzoltunk az ábrán látható módon.

Karikázza be azt az állítást, amit a leginkább valószínűnek érez!

- a) Egy, az ábrán találmra kiválasztott pont sötét színű.
- b) Egy, az ábrán találmra kiválasztott pont világos színű.



Indokolja választát! _____

7. melléklet: Az ELTE-TÓK féléves kombinatorika, valószínűség, statisztika kurzusának tematikája 2008/2009 tanév, Egy periódus ideje: 90 perc.

1. Tapasztalatszerzés valószínűségi döntésekről
 - A kutatásban szereplő kérdőív kitöltése
 - Beszélgetés hétköznapi valószínűségi problémákról
 - Benyomások a kérdőív feladatairól
2. Tapasztalatszerzés játékban: a véletlen a matematikai nevelés egyéb területein.
 - Valószínűség tartalmú játékok a számolási készség fejlesztésére és a műveletek gyakorlására
 - A relatív gyakoriság fogalma
3. Események megfigyelése
 - Elemi esemény, összetett esemény fogalmának előkészítése
 - Összetett események elemi eseményekre bontása
4. Az eseményekkel kapcsolatos elnevezések
 - Események esély szerinti összehasonlítása
 - Tudatosítás, megnevezés: események; elemi esemény; események szorzata; események összege, részesemény; jelölések
5. A valószínűség fogalma mint események relatív gyakorisága
 - Olyan problémák megoldása, melyekben a valószínűség nem számolható elméleti modell segítségével
6. A leíró statisztika fogalmai
7. A valószínűség kiszámítása klasszikus valószínűségi mezőben
 - Adott probléma megoldása statisztikai modell illetve klasszikus valószínűségi modell segítségével. A kapott eredmények összevetése.
 - A valószínűség kiszámítása kombinatorikus esetekben (kedvező elemi események száma/összes elemi esemény száma) és ennek feltételei.
8. Zárthelyi dolgozat;
9. Kombinatorikai problémák csoportosítása
 - Megoldási módszerek keresése sorba rendezési és kiválasztási problémákra: gráfok, táblázatok
10. A kombinatorika alapkérdése és tipikus problémák
 - Permutációk, variációk, kombinációk és kiszámításuk
11. Gyakorló feladatok a valószínűség kiszámítása klasszikus valószínűségi mezőben
 - Valószínűségi problémák feldolgozása az alsó tagozaton. Módszertani kérdések.
12. Zárthelyi dolgozat
13. A megszerzett ismeretek mozgósítása játékban; paradoxonok
 - Ugyanazok a játékok más kontextusban
 - Paradoxonok a véletlen matematikájában

PUBLIKÁCIÓK – PUBLICATIONS

Idegen nyelvű referált folyóiratban, megjelent publikációk

- Szendrei Julianna – Szitányi Judit (2007): Intereses y sentimientos ¿ Qué dificultades tiene el desarrollo de la mentalización hacia las probabilidades en la escuela primaria?, Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, Probabilidades, 31–46. Barcelona REF: Zentralblatt ME 2008c.00461
- Csikos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2011): The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students, 2011. november, 47–65., Educational Studies in Mathematics 81
- Szitányi Judit (2012): Probabilistic thinking, characteristic features, TMCS, 10/1 13-36., Debrecen

Konferencia kiadványban megjelent referált publikáció idegen nyelven:

- Szitányi Judit – Zsinkó Erzsébet (2007): Calculators used not only for calculations. In.: Szendrei Julianna (szerk.): International Commission for the Study and Improvement of Mathematics Education. 273-277. CIEAEM 59 Congress, Dobogókő.

Magyar nyelvű referált folyóiratban, megjelent publikációk:

- Csikos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei, Magyar Pedagógia 110. évf. 2. szám 149–166.

Egyéb publikációk:

- C. Neményi Eszter–Szabóné Szitányi Judit–Zsinkó Erzsébet (2008): Kerettanterv Matematikai kompetenciaterület 1–4. évfolyam. In.: Az Educatio Kht. kompetenciafejlesztő oktatási program kerettanterve – *Matematikai kompetencia* – Általános iskola és középiskola 1–12. évfolyam. (www.educatio.hu)
- Csikos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné, Makara Ágnes, Szendrei Julianna, Szitányi Judit és Zsinkó Erzsébet (2011): Részletes tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk): Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest
- Angol nyelven: Csaba Csikos, Katalin Gábri, Józsefné Lajos, Ágnes Makara, Julianna Szendrei, Judit Szitányi, Erzsébet Zsinkó (2011): Detailed Framework for Diagnostic Assessment of Mathematics In: Benő Csapó, Mária Szendrei: Framework for diagnostic Assessment of mathematics, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Előadások idegen nyelven:

1. Calculators used not only for calculations, CIEAEM konferencia, 2007, Dobogókő
2. Probability sense, 2008, Erasmus oktatói mobilitás program, Belfast
3. Hungarian Education System, 2008, Erasmus oktatói mobilitás program, Belfast
4. Csikos Csaba, Szitányi Judit, Kelemen Rita, 2009 Promoting 3rd grade children's mathematical problem solving through learning about the role of visual representations, 13th European Conference for Research on Learning and Instruction held in Amsterdam
5. Traditions and new elements of teaching mathematics in Hungary, 2012, Palmenia

Centre for Continuing Education, Helsinki

Magyar nyelven:

1. Grafikus zsebszámológépek felhasználása az oktatásban 2003, TIT matematikatanár továbbképzés, Budapest
2. Valószínűségi játékok 2004, Rátz László vándorgyűlés, Nyíregyháza
3. A fogalomalkotás 2005, Varga Tamás napok, Budapest
4. Differenciálás a matematika órákon 2005, Békés megyei szakmai napok, Békéscsaba
5. Kezdeti lépések a valószínűségi szemlélet fejlesztésében, 2006, Varga Tamás napok, Budapest
6. Mentorképzés, SuliNova Közoktatás-fejlesztési és Pedagógus-továbbképzési Kht., 2005, Balatonszemes
7. Fogalmam sincs – A számfogalom és a műveletfogalom alakulása az írásbeli algoritmusok során., 2008, Varga Tamás napok, Budapest
8. 3. osztályos tanulók körében, a matematikai szöveges feladatok területén végzett kísérlet módszerei és a fejlesztő feladatok rendszere, 2008, VIII. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest
9. Valószínűségi tapasztalatok a matematika más témaköreiben, 2011, A matematikai kompetenciák fejlesztése és mérése 1–6. osztályban, ELTE-TÓK Matematika Tanszék, Budapest