Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

On approximately convex functions

Makó Judit

Témavezető: Dr. Páles Zsolt

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2013.

Acknowledgements

I would like to thank everybody who has conduced me to the completion of my dissertation. First and foremost I would like to express my deepest gratitude to my supervisor, Dr. Zsolt Páles. I would also like to thank all professors and colleagues of the Department of Analysis of the University of Debrecen, who helped me during my studies and researches. I also wish to express my gratitude to all colleagues of the University of Miskolc for their kind support. Last but not least I thank my family and my friends for their patience and continuous encouragement.

The work is supported by the TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 project. The project is co-financed by the European Union and the European Social Fund.

Introduction

This PhD dissertation contains new results related to the theory of approximate convexity.

As usual, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{R}$ denote the set of natural, integer, rational and real numbers, respectively, $\mathbb{R}_+$ denotes the set of nonnegative real numbers. Denote by I a nonempty real interval.

The investigation of approximate convexity probably can be traced to the paper by Hyers and Ulam [**34**] who in the year 1952 introduced and investigated ε-convex functions. The Hyers and Ulam decomposition theorem of ε-convex functions was later generalized by Páles in [**57**]. Since then many results on this subject have seen the light. Two trends in these papers can be observed. One focuses on the investigation of the regularity properties (differentiability, Lipschitz or Hölder property, etc.) of approximately convex functions (cf. [**52**], [**53**], [**63**], [**15**], [**26**], [**61, 62, 64**]). The other concerns, roughly speaking, the connections of approximate Jensen convexity and approximate convexity, see, for example, Házy [**29, 30**], Házy and Páles [**31, 32, 33**], Makó and Páles [**43**], Mureńko, Tabor and Tabor [**50**], Tabor and Tabor [**65, 66**], Tabor, Tabor, and Żołdak [**68, 67**].

Our considerations lie in the second current. In Chapter 1, we introduce Takagi-like functions, which are motivated by the fact that they appear naturally in the investigation of approximate convexity. The main results of this chapter is the examination of approximate Jensen convexity of these Takagi type functions.

The integral average of any standard convex function $f : I \to \mathbb{R}$ can be estimated from the midpoint and the endpoints of the domain as follows:

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x,y \in I), \tag{1}$$

which is the well known Hermite–Hadamard inequality. The above chain of inequalities was discovered by Hadamard [**27**]. (See also [**48**], [**40**], and [**55**], [**22**], [**54**], [**55**], [**56**] for a historical account.)

More generally, it is easy to see that the ε-convexity of f (cf. [**34**]), i.e., the validity of

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)+\varepsilon \qquad (x,y \in D,\ t \in [0,1]),$$

implies the following ε-Hermite–Hadamard inequalities

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt + \varepsilon \qquad (x,y \in D). \tag{2}$$

and

$$\int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon \qquad (x,y \in D). \tag{3}$$

Concerning the reversed implication, Nikodem, Riedel, and Sahoo in [**56**] have recently shown that the ε-Hermite–Hadamard inequalities (2) and (3) do not imply the $c\varepsilon$-convexity of f (with any $c > 0$). Thus, in order to obtain results that establish implications between the approximate Hermite–Hadamard inequalities and the approximate convexity type inequality, one has to consider these inequalities with nonconstant error terms. In Chapter 2, we will investigate the connections between approximate upper Hermite–Hadamard type inequality and Jensen type inequalities. Chapter 3 deals with some connections between lower Hermite–Hadamard type inequalities and convexity type inequalities.

1. Approximate convexity of Takagi type functions

We introduce Takagi-like functions, which appear naturally in the investigation of approximate convexity. Let $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ and introduce the following Takagi type functions.

$$T_\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(d_{\mathbb{Z}}(2^n x))}{2^n} \quad \text{and} \quad S_\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \phi\Big(\frac{1}{2^n}\Big) d_{\mathbb{Z}}(2^n x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

where

$$d_{\mathbb{Z}}(x) := 2\,\mathrm{dist}(x, \mathbb{Z}) := 2 \min\{|x - z| : z \in \mathbb{Z}\} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Our main results state that, under some natural regularity assumptions for ϕ, the functions T_ϕ and S_ϕ are approximately Jensen convex. To describe the details, we shall need to recall the notion of higher-order monotonicity and convexity. Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be a proper interval and $\phi : I \to \mathbb{R}$. Given $h \in \mathbb{R}$, we use the notation $\Delta_h \phi(x) := \phi(x+h) - \phi(x)$ whenever $x \in I \cap (I - h)$. We say that a function ϕ is *n-monotone* (*$(n-1)$-Wright-convex) on I* if, for all $h_1, \dots, h_n \geq 0$ and for all $x \in I \cap (I - h_1 - \cdots - h_n)$, the inequality

$$\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n} \phi(x) \geq 0$$

holds.

Theorem. (Makó–Páles [**42**])
Let $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ be a continuous function. Assume that $\phi(0) = 0$ and ϕ is 1- and 3-monotone, and $(-\phi)$ is 2-monotone. Then T_ϕ is approximately Jensen convex in the following sense

$$T_\phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{T_\phi(x) + T_\phi(y)}{2} + \phi \circ d_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Theorem. (Makó–Páles [**47**])
Let $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ be a function. Assume that $\phi(0) = 0$ and the mapping $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ is concave on $]0,1]$. Then S_ϕ is approximately Jensen convex in the following sense

$$S_\phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{S_\phi(x) + S_\phi(y)}{2} + \phi \circ d_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Applying these theorems, we can get the approximate Jensen convexity of the following Takagi type functions:

$$T_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d_{\mathbb{Z}}(2^n x))^q}{2^n} \quad \text{and} \quad S_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{nq}} d_{\mathbb{Z}}(2^n x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

where $q \in \mathbb{R}_+$.

Corollary. (Makó–Páles [**42**])
For $0 < q \le 1$, the Takagi type function T_q satisfies, for all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$T_q\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{T_q(x)+T_q(y)}{2} + d_{\mathbb{Z}}^q\Big(\frac{x-y}{2}\Big).$$

Corollary. (Tabor–Tabor [**65**])
For $1 \le q \le 2$ the Takagi type function S_q satisfies, for all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$S_q\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{S_p(x)+S_q(y)}{2} + d_{\mathbb{Z}}^q\Big(\frac{x-y}{2}\Big).$$

These results can be applied in the theory of approximate convexity. Let D be a nonempty convex set of the normed space X and denote $D^+ := \{\|x-y\| : x, y \in D\}$. Let $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ be a given error function. We say that $f : D \to \mathbb{R}$ is *φ-Jensen convex on D*, if for all $x, y \in D$,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varphi(\|x-y\|).$$

An important particular case occurs when $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ is of the form $\varphi(u) := \varepsilon u^q$, where $q, \varepsilon \ge 0$ are arbitrary constants and $u \in D^+$. In this case, a φ-Jensen convex function f is called *(ε, q)-Jensen convex* on D.

Define, for all $(t, u) \in \mathbb{R} \times D^+$,

$$\mathcal{T}_\varphi(t,u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)u)}{2^n} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}_\varphi(t,u) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\Big(\frac{u}{2^n}\Big) d_{\mathbb{Z}}(2^n t).$$

Hereafter we shall formulate some Bernstein–Doetsch type theorems.

Theorem. (Makó–Páles [**43**], Tabor–Tabor [**66**])
Let $f : D \to \mathbb{R}$ be locally upper bounded on D and let $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ be a continuous function such that $\varphi(0) = 0$. Then f is φ-Jensen convex on D, if and only if

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{T}_\varphi(t, \|x-y\|)$$

for all $x, y \in D$ and $t \in [0, 1]$.

Theorem. (Tabor–Tabor [**66**])
Let $f : D \to \mathbb{R}$ be upper semicontinuous on D and let $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ be nondecreasing such that $\sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(2^{-n}) < \infty$ for some $n_0 \in \mathbb{N}$. Then f is φ-Jensen convex on D, if and only if

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{S}_\varphi(t, \|x-y\|)$$

for all $x, y \in D$ and $t \in [0, 1]$.

Some immediate consequences of these theorems can be formulated in the following corollaries.

Corollary. (Házy [**28**])
Let $f : D \to \mathbb{R}$ be locally upper bounded on D, $q > 0$ and $\varepsilon \geq 0$. Then f is (ε, q)-Jensen convex on D, if and only if

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon T_q(t)\|x-y\|^q$$

for all $x, y \in D$ and $t \in [0, 1]$.

Corollary. (Tabor–Tabor [**66**])
Let $f : D \to \mathbb{R}$ be upper semicontinuous on D, $q > 0$ and $\varepsilon \geq 0$. Then f is (ε, q)-Jensen convex on D if and only if

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon S_q(t)\|x-y\|^q$$

for all $x, y \in D$ and $t \in [0, 1]$.

In [**13**] Boros proved that if $q = 1$ and $t \in [0, 1]$ is fixed, then $S_1(t) = T_1(t)$ is the smallest possible. In [**65**] Tabor and Tabor showed that if $1 \leq q \leq 2$ and $t \in [0, 1]$ is fixed, then $S_q(t)$ is the smallest possible value.

It is also an important question whether the error terms $\mathcal{T}_\varphi(t, \|x-y\|)$, $\mathcal{S}_\varphi(t, \|x-y\|)$ and $T_q(t)$ are the smallest possible ones. In other words, for all fixed $x, y \in D$, we want to establish the exact upper bound of the convexity-difference of φ-Jensen convex functions defined by

$$C_\varphi(x, y, t) := \sup_{f \in \mathcal{JC}_\varphi(D)} \{f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)\},$$

where

$$\mathcal{JC}_\varphi(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ is } \varphi\text{-Jensen convex on } D\}.$$

Theorem. (Makó–Páles [**42**], [**47**])
Let $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ be a continuous nondecreasing function with $\varphi(0) = 0$. Then, for all fixed $x, y \in D$,

$$C_\varphi(x, y, t) = \mathcal{T}_\varphi(t, \|x-y\|) \qquad (t \in [0, 1])$$

provided that φ is 3-monotone, and $(-\varphi)$ is 2-monotone on D^+. Furthermore, for all fixed $x, y \in D$,

$$C_\varphi(x, y, t) = \mathcal{S}_\varphi(t, \|x-y\|) \qquad (t \in [0, 1]),$$

provided that $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u}$ is concave on $D^+ \setminus \{0\}$.

Applying the previous result to the function $\varphi(u) := \varepsilon u^q$. where $\varepsilon, q \in \mathbb{R}_+$, we obtain the following results.

Corollary. (Makó–Páles [**42**],[**47**] Tabor–Tabor [**65**])
Let $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $q > 0$. Then, with $\varphi(u) := \varepsilon u^q$, for all $x, y \in D$ and $t \in [0, 1]$,

$$C_\varphi(x, y, t) = \begin{cases} \varepsilon T_q(t)\|x-y\|^q & \text{if} \quad 0 < q \leq 1, \\ \varepsilon S_q(t)\|x-y\|^q & \text{if} \quad 1 \leq q \leq 2. \end{cases}$$

2. Implications between upper Hermite–Hadamard and Jensen type inequalities

In what follows, let D be a nonempty, convex subset of the linear space X. Denote $D^* := (D - D)$ and $D^{2*} := \{(x, y) \in D^2 \mid x \neq y\}$. Let $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ be a given even function (we note that α need not be nonnegative). We say that $f : D \to \mathbb{R}$ is *α-Jensen convex on D*, if, for all $x, y \in D$,

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \alpha(x-y).$$

An important particular case occurs when X is a normed space and $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ is of the form $\alpha(u) := \varepsilon\|u\|^q$, where $\varepsilon \in \mathbb{R}$ and $q \geq 0$ are arbitrary constants and $u \in D^*$. In this case, a α-Jensen convexity is equivalent to (ε, q)-Jensen convexity on D.

We need to introduce the following terminology. For a function $f : D \to \mathbb{R}$, we say that f is *hemi-P* if, for all $x, y \in D$, the mapping

$$t \mapsto f((1-t)x + ty) \qquad (t \in [0, 1])$$

has property P. For example, f is hemi-bounded if for all $x, y \in D$ the previous mapping is bounded. Analogously, we say that a function $h : D^* \to \mathbb{R}$ is *radially-P* if, for all $u \in D^*$, the mapping

$$t \mapsto h(tu) \qquad (t \in [0, 1])$$

has property P on $[0, 1]$.

In this chapter, we investigate the connections between α-Jensen convex functions and functions which satisfy the following upper Hermite–Hadamard type inequality:

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)\rho(t)dt \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \beta(x-y) \qquad (x, y \in D), \tag{2.1}$$

where $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ is a given even functions, $\lambda \in [0, 1]$, and $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ is an integrable nonnegative function with $\int_0^1 \rho = 1$.

Two implications from α-Jensen convexity to an upper Hermite–Hadamard type inequality are stated in the following two theorems.

Theorem. (Makó–Páles [**44**])
Let $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ be radially bounded and measurable and $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ be a Lebesgue integrable function with $\int_0^1 \rho = 1$. Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ is hemi-integrable and α-Jensen convex on D. Then f also satisfies the approximate upper Hermite–Hadamard inequality (2.1) *with $\lambda := \int_0^1 t\rho(t)dt$ and $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ defined by*

$$\beta(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \alpha(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)u)\rho(t)dt \quad (u \in D^*).$$

Theorem. (Makó–Páles [**44**])
Let $\alpha : D^* \to \mathbb{R}_+$ be nonnegative, radially increasing such that $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\frac{u}{2^n}) < \infty$ if $u \in D^*$. If $f : D \to \mathbb{R}$ is upper hemicontinuous and α-Jensen convex on D, then f also satisfies the Hermite–Hadamard inequality (2.1) *with $\lambda := \int_0^1 t\rho(t)dt$ and $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ is defined by*

$$\beta(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\Big(\frac{u}{2^n}\Big) \int_0^1 d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\rho(t)dt \qquad (u \in D^*).$$

Now, if we consider the case when $\rho \equiv 1$ and f is (ε, q)-Jensen convex, then these theorems reduce to the following corollaries.

Corollary. (Makó–Páles [**44**])
Let $\varepsilon \in \mathbb{R}$ and $q > 0$. Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ is hemiintegrable and (ε, q)-Jensen convex. Then f also satisfies the following approximate Hermite–Hadamard inequality

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \le \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{2\varepsilon}{q+1}\|x - y\|^q \qquad (x, y \in D).$$

Corollary. (Makó–Páles [**44**])
Let $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ and $q > 0$. Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ is upper hemicontinuous and (ε, q)-Jensen convex. Then f also satisfies the following approximate Hermite–Hadamard inequality

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \le \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{2^q\varepsilon}{2^{q+1} - 2}\|x - y\|^q \qquad (x, y \in D).$$

The following theorem states that approximate upper Hermite–Hadamard inequality can also imply α-Jensen convexity with a properly chosen function α. The core of our approach is a multiplicative type convolution and its asymptotic properties.

Theorem. (Makó–Páles [**44**])
Let $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ be even and radially upper semicontinuous, $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ be integrable with $\int_0^1 \rho = 1$ and there exist $c \ge 0$ and $p > 0$ such that

$$\rho(t) \le c(-\ln|1 - 2t|)^{p-1} \qquad (t \in]0, \tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2}, 1[),$$

and $\lambda \in [0, 1]$. Then every $f : D \to \mathbb{R}$ lower hemicontinuous function satisfying the approximate upper Hermite–Hadamard inequality (2.1)*, is α-Jensen convex provided that $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ is a radially lower semicontinuous solution of the functional inequality*

$$\alpha(u) \ge \int_0^1 \alpha(|1 - 2t|u)\rho(t)dt + \beta(u) \qquad (u \in D^*)$$

and $\alpha(0) \ge \beta(0)$.

Now we consider the case in the previous theorem when $\rho \equiv 1$ and β is the form of $\varepsilon\|\cdot\|^q$.

Corollary. (Makó–Páles [**44**])
Let $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ and $q > 0$. Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ is lower hemicontinuous and satisfies the Hermite–Hadamard type inequality

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \varepsilon\|x-y\|^q \qquad (x, y \in D).$$

Then f is $(\varepsilon\frac{q+1}{q}, q)$-Jensen convex.

3. Implications between lower Hermite–Hadamard and convexity inequalities

Let (ω_0, ω_1) be a positive Chebyshev system on the real interval I. In Chapter 3, we establish connections between an approximate (ω_0, ω_1)-convexity inequality and an approximate lower Hermite–Hadamard type inequality. First, we investigate implication from approximate (ω_0, ω_1)-convexity to approximate lower Hermite–Hadamard type inequality. Consider the following basic assumptions.

(A1) $(T, \mathcal{A}, \mu)$ is a measure space.
(A2) $\Lambda : T \times \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}_+$ is μ-integrable in its first variable.
(A3) $M : T \times \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}$ is $\mathcal{A}$-measurable in its first variable and for all $t \in T$, the map $(x, y) \mapsto M(t, x, y)$ is a two-variable mean on I. $M_0 : \Delta^\circ(I) \to I$ is a strict mean such that

$$\mu\{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) \neq M_0(x, y)\} > 0 \tag{3.1}$$

holds.

(A4) There exists an (ω_0, ω_1)-Chebyshev system on I such that ω_0 is positive. Furthermore, for $i \in \{0, 1\}$

$$\omega_i(M_0(x, y)) = \int_T \Lambda(t, x, y)\omega_i(M(t, x, y))d\mu(t) \qquad ((x, y) \in \Delta^\circ(I)). \tag{3.2}$$

holds.

Theorem. (Makó–Páles [**46**])
Assume that (A1)–(A4) hold. Let $f : I \to \mathbb{R}$ be a locally upper bounded Borel measurable solution of the approximate (ω_0, ω_1)-convexity type functional inequality

$$f(u) \leq \frac{\Omega(u, y)}{\Omega(x, y)}f(x) + \frac{\Omega(x, u)}{\Omega(x, y)}f(y) + \varepsilon_{x,y}(u) \qquad (u \in [x, y]), \tag{3.3}$$

where for all $(x, y) \in \Delta^\circ(I)$ and $u \in]x, y[$, the function $(v, w) \mapsto \varepsilon_{v,w}(u)$ is bounded and Borel measurable for $(v, w) \in [x, u] \times [u, y]$. Then f also satisfies the approximate lower Hermite–Hadamard type inequality

$$f(M_0(x, y)) \leq \int_T \Lambda(t, x, y) f(M(t, x, y))d\mu(t) + \mathcal{E}(x, y) \quad ((x, y) \in \Delta(I)), \tag{3.4}$$

where $\mathcal{E} : \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}$ is defined by

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{\displaystyle\int_{T'_{x,y}}\int_{T''_{x,y}} \Upsilon(t', t'', x, y)\varepsilon_{M(t',x,y),M(t'',x,y)}(M_0(x, y))d\mu(t'')d\mu(t')}{\displaystyle\int_{T'_{x,y}}\int_{T''_{x,y}} \Upsilon(t', t'', x, y)d\mu(t'')d\mu(t')},$$

where, for all $(t', t'', x, y) \in T^2 \times \Delta^\circ(I)$,

$$\begin{aligned}\Upsilon(t', t'', x, y) &:= \Lambda(t', x, y)\Lambda(t'', x, y)\Omega(M(t', x, y), M(t'', x, y)),\\ T'_{x,y} &:= \{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) < M_0(x, y)\},\\ T''_{x,y} &:= \{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) > M_0(x, y)\}.\end{aligned}$$

The reversed implication will be stated in the theorem below, which is the main result of this chapter. The key for the proof of this result is a Korovkin type theorem which enables us to deduce the approximate convexity property from the approximate lower Hermite–Hadamard type inequality via an iteration process. Consider the following basic assumptions:

(B1) $(T, \mathcal{A}, \mu)$ is a measure space.

(B2) $\Lambda : T \times \Delta(I) \to \mathbb{R}_+$ is measurable in its first variable and separately continuous in its second variable; furthermore, for all $(x, y) \in \Delta(I)$, the function $L_{x,y} : T \to \mathbb{R}_+$ defined by

$$L_{x,y}(t) := \sup_{u \in [x,y]} \max\left(\Lambda(t, x, u), \Lambda(t, u, y)\right)$$

is μ-integrable, i.e., $\int_T L_{x,y}(t)d\mu(t) < +\infty$.

(B3) $M : T \times \Delta(I) \to \mathbb{R}$ is measurable in its first variable and for all $t \in T$, the map $(x, y) \mapsto M(t, x, y)$ is separately continuous and partially differentiable at the diagonal of $I \times I$. $M_0 : \Delta(I) \to I$ is a separately continuous, strictly increasing and partially differentiable at the diagonal of $I \times I$ with $\partial_1 M_0(z, z) > 0$ and $\partial_2 M_0(z, z) > 0$ for all $z \in I$. Furthermore, $M(t, \cdot)$ is separately uniformly calm with respect to M_0 at the diagonal of $I \times I$, i.e., for all $z \in I$, there exist constants $\delta > 0$ and $K \geq 0$ such that, for all $t \in T$,

$$\begin{aligned} z - M(t, u, z) &\leq K(z - M_0(u, z)) \qquad (u \in [z - \delta, z]),\\ M(t, z, u) - z &\leq K(M_0(z, u) - z) \qquad (u \in [z, z + \delta]),\end{aligned}$$

and (3.1) holds and, for all $z \in I$ and $i \in \{0, 1\}$,

$$\mu\{t \in T \mid \Lambda(t, z, z) \neq 0,\ \partial_i M(t, z, z) \neq \partial_i M_0(z, z)\} > 0.$$

(B4) There exist functions $\omega_0, \omega_1 : I \to \mathbb{R}$ such that ω_0 is positive, $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ is differentiable on I, with $(\frac{\omega_1}{\omega_0})' > 0$. Furthermore, for $i \in \{0, 1\}$, (3.2) hold.

Theorem. (Makó–Páles [**45**])
Suppose that conditions (B1)–(B4) hold and assume that $f : I \to \mathbb{R}$ *is an upper semicontinuous solution of the functional inequality* (3.4), *where* $\mathcal{E} : \Delta(I) \to \mathbb{R}$ *is an arbitrary function. Assume that, for all* $(x, y) \in \Delta^\circ(I)$, $\varepsilon_{x,y} : [x, y] \to \mathbb{R}$ *is a lower semicontinuous function with* $\varepsilon_{x,y}(x) = \varepsilon_{x,y}(y) = 0$ *satisfying the following system of*

inequalities:

$$\varepsilon_{x,y}(M_0(x,u)) \geq \int_T \Lambda(t,x,u)\varepsilon_{x,y}(M(t,x,u))d\mu(t) + \mathcal{E}(x,u) \quad (u \in [x,y]),$$

$$\varepsilon_{x,y}(M_0(u,y)) \geq \int_T \Lambda(t,u,y)\varepsilon_{x,y}(M(t,u,y))d\mu(t) + \mathcal{E}(u,y) \quad (u \in [x,y]).$$

Then, for all fixed $(x,y) \in \Delta^\circ(I)$*, the function* f *also satisfies the approximate* (ω_0, ω_1)*-convexity inequality* (3.3)*.*

We would point out that important applications of these theorems are related to the investigations of the connections of the following inequalities.

Consider the following approximate convexity type inequality:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) + e_{x,y}(t) \quad ((x,y) \in D^2,\ t \in [0,1]), \tag{3.5}$$

where $f : D \to \mathbb{R}$ is an unknown function and for all $(x,y) \in D^2$, $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is a given function. In this chapter, we also investigated the connections between (3.5) and the following approximate lower Hermite–Hadamard type inequality

$$f((1-\mu_1)x + \mu_1 y) \leq \int_{[0,1]} f((1-t)x + ty)d\mu(t) + E(x,y) \quad ((x,y) \in D^2), \tag{3.6}$$

where $f : D \to \mathbb{R}$ is an unknown function, μ is a probability measure on $[0,1]$, $\mu_1 := \int_{[0,1]} t d\mu(t)$ and $E : D^2 \to \mathbb{R}$.

Theorem. (Makó–Páles [**46**])
Let $\mathcal{A}$ *be a* σ*-algebra containing the Borel subsets of* $[0,1]$ *and* μ *be a probability measure on the measurable space* $([0,1], \mathcal{A})$ *such that the support of* μ *is not a singleton. Denote*

$$S(\mu) := \mu([0,\mu_1]) \int_{]\mu_1,1]} t d\mu(t) - \mu(]\mu_1,1]) \int_{[0,\mu_1]} t d\mu(t).$$

Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ *is an hemi-*μ*-integrable solution of the functional inequality* (3.5) *where, for all* $(x,y) \in D^{2*}$*,* $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *is a function such that*

$$I(x,y) := \int_{]\mu_1,1]} \int_{[0,\mu_1]} (t'' - t') e_{(1-t')x+t'y,(1-t'')x+t''y}\Big(\frac{\mu_1 - t'}{t'' - t'}\Big) d\mu(t') d\mu(t'')$$

exists in $[-\infty, \infty]$*. Then, for all* $(x,y) \in D^{2*}$*, the function* f *also satisfies the lower Hermite–Hadamard type inequality* (3.6)*, where* $E(x,y) := \frac{I(x,y)}{S(\mu)}$*.*

Theorem. (Makó–Páles [**45**])
Let μ be a Borel probability measure on $[0,1]$, denote $\mu_1 := \int_{[0,1]} t d\mu(t)$ and assume that the support of μ is not a singleton, i.e., $\mu \neq \delta_{\mu_1}$. Assume that, for all $(x,y) \in D^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ is an upper hemicontinuous solution of the functional inequality (3.6)*, where $E : D^2 \to \mathbb{R}$. Assume that, for all $(x,y) \in D^2$, $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is a lower semicontinuous function with $e_{x,y}(0) = e_{x,y}(1) = 0$ satisfying the following system of inequalities:*

$$e_{x,y}(s) \geq \begin{cases} \int\limits_{[0,1]} e_{x,y}\big(\frac{st}{\mu_1}\big)d\mu(t) + E\big(x, (1-\frac{s}{\mu_1})x + \frac{s}{\mu_1}y\big) & (s \in [0,\mu_1]), \\ \int\limits_{[0,1]} e_{x,y}\big(1-\frac{(1-s)(1-t)}{1-\mu_1}\big)d\mu(t) + E\big(\frac{1-s}{1-\mu_1}x + (1-\frac{1-s}{1-\mu_1})y, y\big) & (s \in [\mu_1, 1]). \end{cases}$$

Then, for all $(x,y) \in D^2$ and $t \in [0,1]$, the function f also satisfies the approximate convexity inequality (3.5)*.*

Corollary. (Makó–Páles [**45**])
Let $\tau \in]0,1[$ and $E : D^2 \to \mathbb{R}$. Assume that $f : D \to \mathbb{R}$ is an upper hemicontinuous solution of the functional inequality

$$f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau)f(x) + \tau f(y) + E(x,y) \qquad ((x,y) \in D^2).$$

Assume that, for all $x, y \in D$, $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is a lower semicontinuous function with $e_{x,y}(0) = e_{x,y}(1) = 0$, satisfying the following system of inequalities:

$$e_{x,y}(s) \geq \begin{cases} \tau e_{x,y}\big(\frac{s}{\tau}\big) + E\big(x, (1-\frac{s}{\tau})x + \frac{s}{\tau}y\big) & (s \in [0,\tau]), \\ (1-\tau)e_{x,y}\big(\frac{s-\tau}{1-\tau}\big) + E\big(\frac{1-s}{1-\tau}x + (1-\frac{1-s}{1-\tau})y, y\big) & (s \in [\tau, 1]). \end{cases}$$

Then, for all $x, y \in D$ and $t \in [0,1]$, the function f also satisfies the approximate convexity inequality (3.5)*.*

Bevezetés

Ez a PhD értekezés a közelítőleg konvex függvények vizsgálatával foglalkozik. A továbbiakban az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ és az $\mathbb{R}$ szimbólumok rendre jelöljék a természetes (pozitív egész), az egész, a racionális és a valós számok halmazát. Továbbá a nemnegatív számok halmazára az $\mathbb{R}_+$ jelölést fogjuk használni. Legyen I egy nemüres valós intervallum.

A közelítő konvexitás kutatása Hyers és Ulam [**34**] 1952-es cikkével kezdődött, amelyben definiálták és vizsgálták ε-konvex függvényeket. Később a Hyers–Ulam-féle dekompozíciós tételt Páles általánosította [**57**]. Azóta nagyon sok cikk született és születik ebben a témában. A cikkek témáját tekintve két irányzat figyelhető meg. Az egyik a közelítőleg konvex függvények olyan regularitási tulajdonságaikkal foglalkozik, mint a differenciálhatóság vagy a Lipschitz és Hölder tulajdonság (lásd [**52**], [**53**], [**63**], [**15**], [**26**], [**61, 62, 64**]). A másik a közelítőleg Jensen-konvex és közelítőleg konvex függvények kapcsolatát vizsgálja, például az alábbi cikkek: Házy [**29, 30**], Házy és Páles [**31, 32, 33**], Makó és Páles [**43**], Mureńko, Tabor és Tabor [**50**], Tabor és Tabor [**65, 66**], Tabor, Tabor, és Żołdak [**68, 67**].

Az első fejezetben olyan Takagi-típusú függvényekkel foglalkozunk, amelyek fontos szerepet játszanak a közelítőleg konvex függvények elméletében. Ennek a fejezetnek a fő eredménye Takagi-típusú függvények közelítő Jensen-konvexitását állítja.

Egy tetszőleges $f : I \to \mathbb{R}$ konvex függvény integrálátlaga becsülhető alulról és felülről a következő módon:

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x,y \in I).$$

Ez a jól ismert Hermite–Hadamard-egyenlőtlenség. A fenti egyenlőtlenséget Hadamard fedezte fel ([**27**]). (Történelmi adalékokért lásd még [**48**], [**40**], és [**55**], [**22**], [**54**], [**55**], [**56**])

Általánosabban, nem nehéz látni, hogy az f függvény ε-konvexitásából (lásd [**34**]), azaz az

$$f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y)+\varepsilon \qquad (x,y \in D,\ t \in [0,1]),$$

egyenlőtlenségből következik, hogy f teljesíti a

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt + \varepsilon \qquad (x,y \in D) \tag{1}$$

és a

$$\int_0^1 f(tx+(1-t)y)dt \le \frac{f(x)+f(y)}{2} + \varepsilon \qquad (x,y \in D) \tag{2}$$

Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségeket. A fordított irányt tekintve, Nikodem, Riedel és Sahoo a [**56**] cikkükben megmutatták, hogy a (1) és (2) ε-Hermite–Hadamard egyenlőtlenségek teljesülése nem vonja maga után az f függvény $c\varepsilon$-konvexitását (bármely $c > 0$ esetén). Így, a Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségek és a konvexitás típusú egyenlőtlenségek kapcsolatának vizsgálatához nemkonstans hibafüggvényre van szükség.

A második fejezetben a felső Hermite–Hadamard-féle és a Jensen-féle egyenlőtlenségek kapcsolatát vizsgáljuk.

A harmadik fejezetben pedig alsó Hermite–Hadamard-féle és konvexitás típusú egyenlőtlenségek kapcsolatával foglalkozunk.

1. Takagi-típusú függvények közelítő konvexitása

Az első fejezetben Takagi-típusú függvényekkel foglalkozunk. Ezek a függvények ugyanis fontos szerepet játszanak a közelítőleg konvex függvények elméletében. Adott $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén tekintsük a következő Takagi-típusú függvényeket:

$$T_\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(d_\mathbb{Z}(2^n x))}{2^n} \quad \text{és} \quad S_\phi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \phi\Big(\frac{1}{2^n}\Big) d_\mathbb{Z}(2^n x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol

$$d_\mathbb{Z}(x) := 2\,\mathrm{dist}(x, \mathbb{Z}) := 2\min\{|x - z| : z \in \mathbb{Z}\} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A fejezet fő eredménye az, hogy a T_ϕ és az S_ϕ függvények közelítőleg Jensen-konvexek, ha ϕ rendelkezik bizonyos regularitási tulajdonságokkal. Az eredményeink ismertetéséhez szükségünk van a magasabb rendben monoton függvények definíciójára. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy valódi intervallum és $\phi : I \to \mathbb{R}$. Adott $h \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\Delta_h\phi(x) := \phi(x + h) - \phi(x)$ ha $x \in I \cap (I - h)$. Azt mondjuk, hogy a ϕ függvény *n-monoton (($n-1$)-Wright-konvex) I-n* ha, bármely $h_1, \ldots, h_n \geq 0$ és bármely $x \in I \cap (I - h_1 - \cdots - h_n)$ esetén a következő

$$\Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_n}\phi(x) \geq 0$$

egyenlőtlenség teljesül.

Tétel. (Makó–Páles [**42**])
Legyen $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ olyan folytonos függvény, hogy $\phi(0) = 0$, ϕ 1- és 3-monoton, illetve $(-\phi)$ 2-monoton. Ekkor a T_ϕ függvény a következő értelemben Jensen-konvex:

$$T_\phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{T_\phi(x) + T_\phi(y)}{2} + \phi \circ d_\mathbb{Z}\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Tétel. (Makó–Páles [**47**])
Legyen $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ olyan függvény, hogy $\phi(0) = 0$ és a $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ leképezés konkáv $]0,1]$-n. Ekkor az S_ϕ függvény a következő értelemben Jensen-konvex

$$S_\phi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{S_\phi(x) + S_\phi(y)}{2} + \phi \circ d_\mathbb{Z}\Big(\frac{x-y}{2}\Big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Alkalmazva ezeket a tételeket, a következő Takagi-típusú függvények közelítő Jensen-konvexitását is kapjuk:

$$T_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_\mathbb{Z}^q(2^n x)}{2^n} \quad \text{és} \quad S_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{nq}} d_\mathbb{Z}(2^n x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $q \in \mathbb{R}_+$.

Következmény. (Makó–Páles [**42**])
Ha $0 < q \leq 1$ *és* $x, y \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$T_q\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{T_q(x) + T_q(y)}{2} + d_{\mathbb{Z}}^q\Big(\frac{x-y}{2}\Big).$$

Következmény. (Tabor–Tabor [**65**])
Ha $1 \leq q \leq 2$ *és* $x, y \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$S_q\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{S_q(x) + S_q(y)}{2} + d_{\mathbb{Z}}^q\Big(\frac{x-y}{2}\Big).$$

Legyen D egy nemüres, konvex részhalmaza az X normált térnek és vezessük be a következő jelölést: $D^+ := \{\|x - y\| : x, y \in D\}$. Legyen $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ egy adott hibafüggvény. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény *φ-Jensen-konvex D-n*, ha bármely $x, y \in D$ esetén

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \varphi(\|x - y\|).$$

A φ-Jensen-konvex függvények fontos osztályát alkotják az *(ε, q)-Jensen-konvex függvények*. Ebben az esetben $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ függvény a $\varphi(u) := \varepsilon u^q$ módon van értelmezve, ahol $q, \varepsilon \geq 0$ tetszőleges konstansok és $u \in D^+$. Definiáljuk minden $(t, u) \in \mathbb{R} \times D^+$ esetén a

$$\mathcal{T}_\varphi(t, u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)u)}{2^n} \quad \text{és} \quad \mathcal{S}_\varphi(t, u) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\Big(\frac{u}{2^n}\Big) d_{\mathbb{Z}}(2^n t)$$

függvényeket. Ezeket felhasználva a következő Bernstein–Doetsch típusú tételeket kapjuk.

Tétel. (Makó–Páles [**43**], Tabor–Tabor [**66**])
Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy lokálisan felülről korlátos függvény D-n. Tegyük fel, hogy $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos és $\varphi(0) = 0$. Ekkor f pontosan akkor φ-Jensen-konvex D-n, ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{T}_\varphi(t, \|x - y\|)$$

teljesül minden $x, y \in D$ *és* $t \in [0, 1]$ *esetén.*

Tétel. (Tabor–Tabor [**66**])
Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos D-n és tegyük fel, hogy $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ monoton növekvő, úgy hogy $\sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi(2^{-n}) < \infty$ valamely $n_0 \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor f pontosan akkor φ-Jensen-konvex D-n, ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \mathcal{S}_\varphi(t, \|x - y\|)$$

teljesül minden $x, y \in D$ *és* $t \in [0, 1]$ *esetén.*

Az előző tételekből azonnal adódnak a következők.

Következmény. (Házy [**28**])
Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ lokálisan felülről korlátos D-n, $q > 0$ és $\varepsilon \geq 0$. Ekkor f pontosan akkor (ε, q)-Jensen-konvex D-n, ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon T_q(t)\|x-y\|^q$$

minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1]$ esetén.

Következmény. (Tabor–Tabor [**66**])
Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos D-n, $q > 0$ és $\varepsilon \geq 0$. Ekkor f pontosan akkor (ε, q)-Jensen-konvex D-n, ha

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon S_q(t)\|x-y\|^q$$

minden $x, y \in D$ és $t \in [0,1]$ esetén.

Boros a [**13**] cikkben megmutatta, hogy $q = 1$ esetén $S_1(t) = T_1(t)$ a lehető legkisebb, amit hibafüggvényként az előző egyenlőtlenségbe írhatunk. Tabor és Tabor bebizonyították [**65**]-ben , hogy $1 \leq q \leq 2$ esetén $S_q(t)$ a lehető legkisebb.

Az első fejezetben arra keressük a választ, hogy $\mathcal{T}_\varphi(t, \|x-y\|)$, $\mathcal{S}_\varphi(t, \|x-y\|)$ és $T_q(t)$ milyen φ hibafüggvény és q konstans esetén lesz a legoptimálisabb választás. Más szavakkal, minden rögzített $x, y \in D$ esetén a φ-Jensen-konvex függvények konvexitási differenciájának keressük a pontos felső korlátját, azaz keressük $C_\varphi(x, y, t)$-t, ahol

$$C_\varphi(x,y,t) := \sup_{f \in \mathcal{JC}_\varphi(D)} \{f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y)\},$$

és

$$\mathcal{JC}_\varphi(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \ \varphi\text{-Jensen-konvex } D\text{-n}\}.$$

Tétel. (Makó–Páles [**42**], [**47**])
Legyen $\varphi : D^+ \to \mathbb{R}_+$ olyan folytonos, monoton növekvő függvény, hogy $\varphi(0) = 0$. Ekkor, minden rögzített $x, y \in D$ esetén

$$C_\varphi(x,y,t) = \mathcal{T}_\varphi(t, \|x-y\|) \qquad (t \in [0,1])$$

ha φ 3-monoton, és $(-\varphi)$ 2-monoton D^+-n. Továbbá, minden $x, y \in D$ esetén

$$C_\varphi(x,y,t) = \mathcal{S}_\varphi(t, \|x-y\|) \qquad (t \in [0,1]),$$

ha, $u \mapsto \frac{\varphi(u)}{u}$ konkáv $D^+ \setminus \{0\}$-n.

Alkalmazva az előző eredményt (ε, q)-Jensen-konvex függvényekre, a következőket kapjuk.

Következmény. (Makó–Páles [**42**],[**47**] Tabor–Tabor [**65**])
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $q > 0$. *Ha* $\varphi(u) := \varepsilon u^q$, *akkor bármely rögzített* $x, y \in D$ *és* $t \in [0,1]$ *esetén*

$$C_\varphi(x,y,t) = \begin{cases} \varepsilon T_q(t)\|x-y\|^q & \text{ha} \quad 0 < q \le 1, \\ \varepsilon S_q(t)\|x-y\|^q & \text{ha} \quad 1 \le q \le 2. \end{cases}$$

2. Felső Hermite–Hadamard-féle és Jensen-féle egyenlőtlenségek kapcsolata

Az alábbiakban legyen D egy nemüres konvex részhalmaza az X lineáris térnek. Legyen $D^* := (D - D)$ és $D^{2*} := \{(x, y) \in D^2 \mid x \neq y\}$. Tekintsük az $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ páros hibafüggvényt. (Vegyük észre, hogy α-ról nem követeljük meg a nemnegativitást.) Azt mondjuk, hogy $f : D \to \mathbb{R}$ *α-Jensen-konvex*, ha, minden $x, y \in D$ esetén

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} + \alpha(x - y).$$

Eredményeink ismertetéséhez szükségünk van az alábbi fogalmakra. Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény *hemi-P* ha, minden $x, y \in D$ a

$$t \mapsto f((1 - t)x + ty) \qquad (t \in [0, 1])$$

leképezés rendelkezik a P tulajdonsággal. Például, f hemi-korlátos ha minden $x, y \in D$ esetén a fenti leképezés korlátos. Hasonlóan, azt mondjuk, hogy az $h : D^* \to \mathbb{R}$ *irányonként-P* ha, minden $u \in D^*$ esetén, a

$$t \mapsto h(tu) \qquad (t \in [0, 1])$$

leképezés rendelkezik a P tulajdonsággal $[0, 1]$-en.

Ebben a fejezetben α-Jensen-konvex függvények kapcsolatát vizsgáljuk olyan függvényekkel, amelyek teljesítik a következő felső Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenséget:

$$\int_0^1 f(tx + (1 - t)y)\rho(t)dt \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \beta(x - y) \qquad (x, y \in D), \tag{2.1}$$

ahol $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ a hibafüggvény, $\lambda \in [0, 1]$, és $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ egy nemnegatív integrálható függvény, amelyre $\int_0^1 \rho = 1$.

A következő két tétel alsó Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségeket állít α-Jensen-konvex függvényekre.

Tétel. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\alpha : D^* \to \mathbb{R}_+$ irányonként korlátos és mérhető továbbá $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ egy olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelyre $\int_0^1 \rho = 1$. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{R}$ hemi-integrálható és α-Jensen-konvex D-n. Ekkor az f függvény a $\lambda := \int_0^1 t\rho(t)dt$ konstanssal és a $\beta : D^* \to \mathbb{R}_+$ hibafüggvénnyel, ahol

$$\beta(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \alpha\big(d_{\mathbb{Z}}(2^n t)u\big)\rho(t)dt \quad (u \in D^*).$$

teljesíti a felső Hermite–Hadamard típusú (2.1) *egyenlőtlenséget.*

Tétel. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\alpha : D^* \to \mathbb{R}_+$ *olyan nemnegatív, irányonként monoton növekvő függvény, amelyre* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\frac{u}{2^n}) < \infty$ *ha* $u \in D^*$. *Tegyük fel, hogy* $f : D \to \mathbb{R}$ *felülről hemi-folytonos és* α*-Jensen-konvex* D*-n. Ekkor az* f *függvény a* $\lambda := \int_0^1 t\rho(t)dt$ *konstanssal és a* $\beta : D^* \to \mathbb{R}_+$ *hibafüggvénnyel, ahol*

$$\beta(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\Big(\frac{u}{2^n}\Big) \int_0^1 d_{\mathbb{Z}}(2^n t)\rho(t)dt \qquad (u \in D^*)$$

teljesíti a felső Hermite–Hadamard-féle (2.1) *egyenlőtlenséget.*

A következőkben azt az esetet tekintjük, amikor az α hibafüggvény $\varepsilon\|\cdot\|^q$ alakú és $\rho \equiv 1$.

Következmény. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *és* $q \in \mathbb{R}_+$. *Tegyük fel, hogy* $f : D \to \mathbb{R}$ *hemi-integrálható és* (ε, q)*-Jensen-konvex* D*-n. Ekkor* f *teljesíti a következő felső Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenséget:*

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \le \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{2\varepsilon}{q+1}\|x - y\|^q \qquad (x, y \in D).$$

Következmény. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\varepsilon, q \in \mathbb{R}_+$. *Tegyük fel, hogy* $f : D \to \mathbb{R}$ *felülről hemi-folytonos és* (ε, q)*-Jensen-konvex* D*-n. Ekkor,* f *teljesíti a következő felső Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenséget:*

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \le \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{2^q\varepsilon}{2^{q+1} - 2}\|x - y\|^q \qquad (x, y \in D).$$

A következő tétel azt mutatja, hogy a felső Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségből is következik α-Jensen-konvexitás típusú egyenlőtlenség, ha az α-t megfelelő módon választjuk. A tétel bizonyítása egy multiplikatív típusú konvolúció bevezetésén és tulajdonságain alapszik.

Tétel. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\lambda \in [0, 1]$, $\beta : D^* \to \mathbb{R}$ *páros és irányonként felülről félig folytonos, és legyen* $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ *integrálható, amelyre* $\int_0^1 \rho = 1$. *Tegyük fel továbbá, hogy létezik* $c \ge 0$ *és* $p > 0$ *úgy, hogy*

$$\rho(t) \le c(-\ln|1 - 2t|)^{p-1} \qquad (t \in]0, \tfrac{1}{2}[\cup]\tfrac{1}{2}, 1[).$$

Ekkor, ha az alulról hemi-folytonos $f : D \to \mathbb{R}$ *teljesíti a Hermite–Hadamard-féle* (2.1) *egyenlőtlenséget, akkor* α*-Jensen-konvex, ahol* $\alpha : D^* \to \mathbb{R}$ *irányonként alulról* *félig folytonos megoldása a*

$$\alpha(u) \geq \int_0^1 \alpha(|1-2t|u)\rho(t)dt + \beta(u) \qquad (u \in D^*)$$

függvényegyenlőtlenségnek és $\alpha(0) \geq \beta(0)$.

Most tekintsük azt a speciális esetet, amikor $\rho \equiv 1$ és a β függvény $\varepsilon\|\cdot\|^q$ alakban írható.

Következmény. (Makó–Páles [**44**])
Legyen $\lambda \in [0,1]$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *és* $q > 0$. *Tegyük fel, hogy az alulról hemi-folytonos* $f : D \to \mathbb{R}$ *teljesíti a*

$$\int_0^1 f(tx + (1-t)y)dt \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \varepsilon\|x-y\|^q \qquad (x, y \in D)$$

Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenséget. Ekkor az f *függvény* $(\varepsilon\frac{q+1}{q}, q)$*-Jensen-konvex* D*-n.*

3. Alsó Hermite–Hadamard-féle és konvexitási egyenlőtlenségek kapcsolata

Legyen (ω_0, ω_1) egy pozitív Csebisev rendszer az I intervallumon. A harmadik fejezetben (ω_0, ω_1)-konvexitás típusú egyenlőtlenségek és alsó Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségek kapcsolatával foglalkozunk. Először azt vizsgáljuk, hogy egy közelítőleg (ω_0, ω_1)-konvex függvényre milyen alsó Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenség igaz. Tekintsük a következő feltételeket.

(A1) Legyen $(T, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér.
(A2) Legyen $\Lambda : T \times \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}_+$ az első változójában μ-integrálható függvény.
(A3) Legyen $M : T \times \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}$ az első változójában $\mathcal{A}$-mérhető és minden $t \in T$-re, $(x, y) \mapsto M(t, x, y)$ egy kétváltozós közép I-n. Továbbá legyen $M_0 : \Delta^\circ(I) \to I$ egy szigorú közép I-n és tegyük fel, hogy

$$\mu\{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) \neq M_0(x, y)\} > 0. \tag{3.1}$$

(A4) Tegyük fel, hogy létezik egy (ω_0, ω_1)-Csebisev rendszer I-n, úgy hogy $\omega_0 > 0$ és $i \in \{0, 1\}$ esetén

$$\omega_i(M_0(x, y)) = \int_T \Lambda(t, x, y)\omega_i(M(t, x, y))d\mu(t) \qquad ((x, y) \in \Delta^\circ(I)). \tag{3.2}$$

Tétel. (Makó–Páles [**46**])
Tegyük fel, hogy (A1)–(A4) teljesül és minden $(x, y) \in \Delta^\circ(I)$ esetén $\varepsilon_{x,y} : [x, y] \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, hogy tetszőleges $u \in]x, y[$ esetén a $(v, w) \mapsto \varepsilon_{v,w}(u)$ függvény korlátos és Borel-mérhető $[x, u] \times [u, y]$-en. Ekkor, ha a lokálisan felülről korlátos Borel mérhető $f : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása az

$$f(u) \leq \frac{\Omega(u, y)}{\Omega(x, y)} f(x) + \frac{\Omega(x, u)}{\Omega(x, y)} f(y) + \varepsilon_{x,y}(u) \qquad (u \in [x, y]) \tag{3.3}$$

(ω_0, ω_1)-konvexitás típusú egyenlőtlenségnek, akkor f teljesíti a

$$f(M_0(x, y)) \leq \int_T \Lambda(t, x, y) f(M(t, x, y))d\mu(t) + \mathcal{E}(x, y) \quad ((x, y) \in \Delta(I)) \tag{3.4}$$

alsó Hermite–Hadamrd-féle egyenlőtlenséget, ahol $\mathcal{E} : \Delta^\circ(I) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{\displaystyle\int_{T'_{x,y}} \int_{T''_{x,y}} \Upsilon(t', t'', x, y)\varepsilon_{M(t',x,y),M(t'',x,y)}(M_0(x, y))d\mu(t'')d\mu(t')}{\displaystyle\int_{T'_{x,y}} \int_{T''_{x,y}} \Upsilon(t', t'', x, y)d\mu(t'')d\mu(t')}$$

módon van értelmezve és minden $(t', t'', x, y) \in T^2 \times \Delta^\circ(I)$ *esetén*

$$\begin{aligned} \Upsilon(t', t'', x, y) &:= \Lambda(t', x, y)\Lambda(t'', x, y)\Omega(M(t', x, y), M(t'', x, y)), \\ T'_{x,y} &:= \{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) < M_0(x, y)\}, \\ T''_{x,y} &:= \{t \in T \mid \Lambda(t, x, y) > 0,\ M(t, x, y) > M_0(x, y)\}. \end{aligned}$$

A másik irányú implikáció bizonyítása egy Korovkin-féle tételen alapszik, amely segítségével közelítő konvexitás típusú egyenlőtlenséget kaphatunk alsó Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenségből. Tekintsük a következő feltételeket:

(B1) $(T, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér.

(B2) $\Lambda : T \times \Delta(I) \to \mathbb{R}_+$ az első változójában mérhető és minden $t \in T$ esetén a $(x, y) \mapsto \Lambda(t, x, y)$ leképezés változónként folytonos; továbbá, minden $(x, y) \in \Delta(I)$ esetén a

$$L_{x,y}(t) := \sup_{u\in[x,y]} \max\left(\Lambda(t, x, u), \Lambda(t, u, y)\right)$$

módon definiált $L_{x,y} : T \to \mathbb{R}$ függvény μ-integrálható, azaz $\int_T L_{x,y}(t)d\mu(t) < +\infty$.

(B3) $M : T \times \Delta(I) \to \mathbb{R}$ az első változójában mérhető és minden $t \in T$ esetén az $(x, y) \mapsto M(t, x, y)$ leképezés változónként folytonos és változónként parciálisan differenciálható $I \times I$ átlóján. $M_0 : \Delta(I) \to I$ változónként folytonos, monoton növekvő és parciálisan differenciálható $I\times I$ átlóján és $\partial_1 M_0(z, z) > 0$, $\partial_2 M_0(z, z) > 0$ minden $z \in I$ esetén. Továbbá, minden $t \in T$ esetén $M(t, \cdot, \cdot)$ változónként egyenletesen nyugodt M_0-ra nézve $I\times I$ átlóján, azaz minden $z \in I$ esetén léteznek $\delta > 0$ és $K \geq 0$ konstansok úgy, hogy bármely $t \in T$ esetén

$$\begin{aligned} z - M(t, u, z) &\leq K(z - M_0(u, z)) \qquad (u \in [z - \delta, z]), \\ M(t, z, u) - z &\leq K(M_0(z, u) - z) \qquad (u \in [z, z + \delta]). \end{aligned}$$

Továbbá, (3.1) teljesül és, minden $z \in I$ és $i \in \{0, 1\}$ esetén

$$\mu\{t \in T \mid \Lambda(t, z, z) \neq 0,\ \partial_i M(t, z, z) \neq \partial_i M_0(z, z)\} > 0.$$

(B4) Léteznek $\omega_0, \omega_1 : I \to \mathbb{R}$ függvények, hogy ω_0 pozitív, $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ differenciálható I-n, és $(\frac{\omega_1}{\omega_0})' > 0$. Továbbá, ha $i \in \{0, 1\}$ akkor (3.2) is teljesül.

Tétel. (Makó–Páles [**45**])
Tegyük fel, hogy (B1)–(B4) teljesül és $\mathcal{E} : \Delta(I) \to \mathbb{R}$ *esetén az* $f : I \to \mathbb{R}$ *függvény felülről félig folytonos megoldása az* (3.4) *egyenlőtlenségnek. Minden* $(x, y) \in \Delta^\circ(I)$ *esetén legyen* $\varepsilon_{x,y} : [x, y] \to \mathbb{R}$ *egy olyan alulról félig folytonos függvény, amely*

megoldása a

$$\varepsilon_{x,y}(M_0(x,u)) \geq \int_T \Lambda(t,x,u)\varepsilon_{x,y}(M(t,x,u))d\mu(t) + \mathcal{E}(x,u) \qquad (u \in [x,y]),$$

$$\varepsilon_{x,y}(M_0(u,y)) \geq \int_T \Lambda(t,u,y)\varepsilon_{x,y}(M(t,u,y))d\mu(t) + \mathcal{E}(u,y) \qquad (u \in [x,y])$$

függvényegyenlőtlenség-rendszernek és $\varepsilon_{x,y}(x) = \varepsilon_{x,y}(y) = 0$. *Ekkor, minden rögzített* $(x,y) \in \Delta^\circ(I)$ *esetén az* f *függvény teljesíti a* (ω_0, ω_1)*-konvexitás típusú* (3.3) *egyenlőtlenséget.*

A következő függvényegyenlőtlenségek kapcsolatának vizsgálata az előző tételek alkalmazása segítségével történhet. Tekintsük a:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) + e_{x,y}(t) \quad ((x,y) \in D^2,\ t \in [0,1]) \tag{3.5}$$

konvexitás típusú egyenlőtlenséget, ahol $f : D \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény és minden $(x,y) \in D^2$ esetén $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ a hibafüggvény. Illetve tekintsük a

$$f((1-\mu_1)x + \mu_1 y) \leq \int_{[0,1]} f((1-t)x + ty)d\mu(t) + E(x,y) \quad ((x,y) \in D^2) \tag{3.6}$$

alsó Hermite–Hadamard-féle egyenlőtlenséget, ahol $f : D \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, μ valószínűségi mérték $[0,1]$-n, $\mu_1 := \int_{[0,1]} td\mu(t)$ és $E : D^2 \to \mathbb{R}$. A harmadik fejezet másik fő eredménye tehát (3.5) és (3.6) összehasonlítása.

TÉTEL. (Makó–Páles [**46**])
Legyen $\mathcal{A}$ *egy olyan* σ*-algebra, amely tartalmazza a* $[0,1]$ *intervallum Borel-mérhető részhalmazait és* μ *egy olyan valószínűségi mérték a* $([0,1], \mathcal{A})$ *mérhető téren, hogy* μ *tartója nem egyelemű. Jelölje* $S(\mu)$ *a*

$$S(\mu) := \mu([0,\mu_1]) \int_{]\mu_1,1]} td\mu(t) - \mu(]\mu_1,1]) \int_{[0,\mu_1]} td\mu(t)$$

kifejezést. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{R}$ *hemi-*μ*-integrálható megoldása* (3.5)*-nek ahol, minden* $(x,y) \in D^{2*}$, $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *egy olyan függvény, hogy az*

$$I(x,y) := \int_{]\mu_1,1]} \int_{[0,\mu_1]} (t'' - t')e_{(1-t')x+t'y,(1-t'')x+t''y}\Big(\frac{\mu_1 - t'}{t'' - t'}\Big)d\mu(t')d\mu(t'')$$

a kifejezés létezik $[-\infty,\infty]$*-ben. Ekkor, minden* $(x,y) \in D^{2*}$ *esetén az* f *függvény megoldása az alsó Hermite–Hadamard-féle* (3.6) *egyenlőtlenségnek, ahol*

$$E(x,y) := \frac{I(x,y)}{S(\mu)}.$$

A fordított irányú implikációt a következő tétel tartalmazza.

TÉTEL. (Makó–Páles [**45**])
Legyen μ egy olyan Borel-valószínűségi mérték $[0,1]$-n, hogy μ tartója nem egyelemű. Jelölje $\mu_1 := \int_{[0,1]} t d\mu(t)$. Tegyük fel, hogy minden $(x,y) \in D^2$ esetén a felülről hemi-folytonos $f : D \to \mathbb{R}$ megoldása a Hermite–Hadamard-féle (3.6) *egyenlőtlenségnek, ahol $E : D^2 \to \mathbb{R}$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $(x,y) \in D^2$ esetén az alulról félig folytonos $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ megoldása a*

$$e_{x,y}(s) \geq \begin{cases} \int\limits_{[0,1]} e_{x,y}\left(\frac{st}{\mu_1}\right) d\mu(t) + E\left(x, (1-\frac{s}{\mu_1})x + \frac{s}{\mu_1}y\right) & (s \in [0,\mu_1]), \\ \int\limits_{[0,1]} e_{x,y}\left(1 - \frac{(1-s)(1-t)}{1-\mu_1}\right) d\mu(t) + E\left(\frac{1-s}{1-\mu_1}x + (1-\frac{1-s}{1-\mu_1})y, y\right) & (s \in [\mu_1, 1]) \end{cases}$$

függvényegyenlőtlenség-rendszernek és $e_{x,y}(0) = e_{x,y}(1) = 0$. Ekkor, minden $(x,y) \in D^2$ és $t \in [0,1]$ esetén az f függvény teljesíti a közelítő konvexitás típusú (3.5) *egyenlőtlenséget.*

Ennek az eredménynek egy fontos alkalmazása a következő Bernstein–Doetsch típusú tétel.

KÖVETKEZMÉNY. (Makó–Páles [**45**])
Legyen $\tau \in]0,1[$ és $E : D^2 \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f : D \to \mathbb{R}$ felülről hemi-folytonos megoldása az

$$f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau)f(x) + \tau f(y) + E(x,y) \qquad ((x,y) \in D^2)$$

Jensen-féle egyenlőtlenségnek. Tegyük fel továbbá, hogy minden $(x,y) \in D^2$ esetén az alulról félig folytonos $e_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$e_{x,y}(s) \geq \begin{cases} \tau e_{x,y}\left(\frac{s}{\tau}\right) + E\left(x, (1-\frac{s}{\tau})x + \frac{s}{\tau}y\right) & (s \in [0,\tau]), \\ (1-\tau)e_{x,y}\left(\frac{s-\tau}{1-\tau}\right) + E\left(\frac{1-s}{1-\tau}x + (1-\frac{1-s}{1-\tau})y, y\right) & (s \in [\tau,1]) \end{cases}$$

függvényegyenlőtlenség-rendszert és $e_{x,y}(0) = e_{x,y}(1) = 0$. Ekkor, minden $(x,y) \in D^2$ és $t \in [0,1]$ esetén az f függvény teljesíti a közelítő konvexitás típusú (3.5) *egyenlőtlenséget.*

Bibliography

[1] J. Aczél. A generalization of the notion of convex functions. *Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem*, 19(24):87–90, 1947.

[2] P. C. Allaart. An inequality for sums of binary digits, with application to Takagi functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 381(2):689–694, 2011.

[3] P. C. Allaart. The finite cardinalities of level sets of the Takagi function. *J. Math. Anal. Appl.*, 388(2):1117–1129, 2012.

[4] P. C. Allaart and K. Kawamura. The improper infinite derivatives of Takagi's nowhere-differentiable function. *J. Math. Anal. Appl.*, 372(2):656–665, 2010.

[5] P. C. Allaart and K. Kawamura. On the distribution of the cardinalities of level sets of the Takagi function. *arXiv.org*, (1107.0712), 2011.

[6] P. C. Allaart and K. Kawamura. The Takagi function: a survey. *arXiv.org*, (1110.1691), 2011.

[7] F. Altomare and M. Campiti. Korovkin-type approximation theory and its applications *de Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter & Co., Berlin*, 17, , 1994.

[8] F. Bernstein and G. Doetsch. Zur Theorie der konvexen Funktionen. *Math. Ann.*, 76(4):514–526, 1915.

[9] M. Bessenyei. Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(3):Article 63, pp. 51 (electronic), 2008.

[10] M. Bessenyei and Zs. Páles. Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 6(3):379–392, 2003.

[11] M. Bessenyei and Zs. Páles. Characterizations of convexity via Hadamard's inequality. *Math. Inequal. Appl.*, 9(1):53–62, 2006.

[12] P. Billingsley, Notes: Van Der Waerden's Continuous Nowhere Differentiable Function. *Amer. Math. Monthly*, 89(9):691, , 1982.

[13] Z. Boros. An inequality for the Takagi function. *Math. Inequal. Appl.*, 11(4):757–765, 2008.

[14] A.M. Bruckner, J.B. Bruckner and B.S. Thomson. Real Analysis. *International Edition. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall International*, 1997.

[15] P. Cannarsa and C. Sinestrari. Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control. *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 58. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA,* 2004.

[16] F. S. Cater, On van der Waerden's nowhere differentiable function. *Amer. Math. Monthly*, 91:307–308, , 1984.

[17] E. de Amo, I. Bhouri, M. Díaz Carrillo, and J. Fernández-Sánchez. The Hausdorff dimension of the level sets of Takagi's function. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A*, 74(15):5081–5087, 2011.

[18] E. de Amo and J. Fernández-Sánchez. Takagi's function revisited from an arithmetical point of view. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 54(3):407–427, 2009.

[19] S. J. Dilworth, R. Howard, and J. W. Roberts. Extremal approximately convex functions and estimating the size of convex hulls. *Adv. Math.*, 148(1):1–43, 1999.

[20] S. J. Dilworth, R. Howard, and J. W. Roberts. Extremal approximately convex functions and the best constants in a theorem of Hyers and Ulam. *Adv. Math.*, 172(1):1–14, 2002.

[21] S. J. Dilworth, R. Howard, and J. W. Roberts. A general theory of almost convex functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(8):3413–3445 (electronic), 2006.

[22] S. S. Dragomir and C. E. M. Pearce. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities. RGMIA Monographs (`http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermite_hadamard.html`), Victoria University, 2000.

[23] R. Ger. Almost approximately convex functions. *Math. Slovaca*, 38(1):61–78, 1988.

[24] A. Gilányi and Zs. Páles. On Dinghas-type derivatives and convex functions of higher order. *Real Anal. Exchange*, 27(2):485–493, 2001.

[25] A. Gilányi and Zs. Páles. On convex functions of higher order. *Math. Inequal. Appl.*, 11(2):271–282, 2008.

[26] J. W. Green. Approximately convex functions. *Duke Math. J.*, 19:499–504, 1952.

[27] J. Hadamard. Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. Math. Pures Appl.*, 58:171–215, 1893.

[28] A. Házy. On approximate *t*-convexity. *Math. Inequal. Appl.*, 8(3):389–402, 2005.

[29] A. Házy. On stability of *t*-convexity. In *Proc. MicroCAD 2007 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 23–28, 2007.

[30] A. Házy. On the stability of *t*-convex functions. *Aequationes Math.*, 74(3):210–218, 2007.

[31] A. Házy and Zs. Páles. On approximately midconvex functions. *Bull. London Math. Soc.*, 36(3):339–350, 2004.

[32] A. Házy and Zs. Páles. On approximately *t*-convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 66:489–501, 2005.

[33] A. Házy and Zs. Páles. On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2102):571–583, 2009.

[34] D. H. Hyers and S. M. Ulam. Approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:821–828, 1952.

[35] H.-H. Kairies. Takagi's function and its functional equations. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, (15): 73–83, 1998.

[36] K. Knopp. Ein einfaches Verfahren zur Bildüng stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen. *Math. Z.*, 2(1-2):1–26, 1918.

[37] M. Krüppel. On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function. *Rostocker Math. Kolloq.*, 62:41–59, 2007.

[38] M. Krüppel. Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums. *Rostocker Math. Kolloq.*, 63:37–54, 2008.

[39] P. P. Korovkin On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 90:961–964, 1953.

[40] M. Kuczma. An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, volume 489 of *Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski. Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

[41] M. Laczkovich. The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation. *Aequationes Math.*, 58:135–142, 1999.

[42] J. Makó and Zs. Páles. Approximate convexity of Takagi type functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 369:545–554, 2010.

[43] J. Makó and Zs. Páles. On φ-convexity. *Publ. Math. Debrecen*, 80:107–126, 2012.

[44] J. Makó and Zs. Páles. Implications between approximate convexity properties and approximate Hermite–Hadamard inequalities. *Cent. Eur. J. Math.*, 10:1017–1041, 2012.

[45] J. Makó and Zs. Páles. Korovkin type theorems and approximate Hermite–Hadamard inequalities. *J. Approx. Theory*, 164:1111-1142, 2012.

[46] J. Makó and Zs. Páles. Approximate Hermite–Hadamard type inequalities for approximately convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 16:507–526, 2013.

[47] J. Makó and Zs. Páles. On approximately convex Takagi type functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141: 2069-2080 , 2013.

[48] D. S. Mitrinović and I. B. Lacković. Hermite and convexity. *Aequationes Math.*, 28:229–232, 1985.

[49] J. Mrowiec, Ja. Tabor, and Jó. Tabor. Approximately midconvex functions. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 261–267. Birkhäuser Verlag, 2008.

[50] A. Mureńko, Ja. Tabor, and Jó. Tabor. Applications of de Rham Theorem in approximate midconvexity. *J. Diff. Equat. Appl.*, 18:335-344, 2012.

[51] C. T. Ng and K. Nikodem. On approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(1):103–108, 1993.

[52] H. V. Ngai, D. T. Luc, and M. Théra. Approximate convex functions. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 1(2):155–176, 2000.

[53] H. V. Ngai and J.-P. Penot. Approximately convex functions and approximately monotonic operators. *Nonlin. Anal.*, 66:547–567, 2007.

[54] C. P. Niculescu and L.-E. Persson. Old and new on the Hermite-Hadamard inequality. *Real Anal. Exchange*, 29(2):663–685, 2003/04.

[55] C. P. Niculescu and L.-E. Persson. *Convex Functions and Their Applications*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23. Springer-Verlag, New York, 2006. A contemporary approach.

[56] K. Nikodem, T. Riedel, and P. K. Sahoo. The stability problem of the Hermite-Hadamard inequality. *Math. Inequal. Appl.*, 10(2):359–363, 2007.

[57] Zs. Páles. On approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(1):243–252, 2003.

[58] Zs. Páles. The Forty-first International Symposium on Functional Equations, June 8–15, 2003, Noszvaj, Hungary. *Aequationes Math.*, 67:285–320, 2004.

[59] T. Popoviciu. *Les fonctions convexes*. Hermann et Cie, Paris, 1944.
[60] A. W. Roberts and D. E. Varberg. *Convex Functions*, volume 57 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York–London, 1973.
[61] S. Rolewicz. On paraconvex multifunctions. In *Third Symposium on Operations Research (Univ. Mannheim, Mannheim, 1978), Section I*, volume 31 of *Operations Res. Verfahren*, pages 539–546. Hain, Königstein/Ts., 1979.
[62] S. Rolewicz. On γ-paraconvex multifunctions. *Math. Japon.*, 24(3):293–300, 1979/80.
[63] S. Rolewicz. On $\alpha(\cdot)$-paraconvex and strongly $\alpha(\cdot)$-paraconvex functions. *Control Cybernet.*, 29(1):367–377, 2000.
[64] S. Rolewicz. Paraconvex analysis. *Control Cybernet.*, 34(3):951–965, 2005.
[65] Ja. Tabor and Jó. Tabor. Generalized approximate midconvexity. *Control Cybernet.*, 38(3):655–669, 2009.
[66] Ja. Tabor and Jó. Tabor. Takagi functions and approximate midconvexity. *J. Math. Anal. Appl.*, 356(2):729–737, 2009.
[67] Ja. Tabor, Jó. Tabor, and M. Żołdak. Approximately convex functions on topological vector spaces. *Publ. Math. Debrecen,* 77:115–123, 2010.
[68] Ja. Tabor, Jó. Tabor, and M. Żołdak. Optimality estimations for approximately midconvex functions. *Aequationes Math.* 80:227–237, 2010.
[69] T. Takagi. A simple example of the continuous function without derivative. *J. Phys. Math. Soc. Japan* 1:176–177, 1903.
[70] B. L. van der Waerden. Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion. *Math. Z.* 32:474–475, 1930.
[71] E. M. Wright. An inequality for convex functions. *Amer. Math. Monthly*, 61:620–622, 1954.