Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Coprimality in consecutive terms of integer sequences

Szikszai Márton

Témavezető: Dr. Hajdu Lajos
egyetemi tanár

DEBRECENI EGYETEM
Matematika-és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2018.

Tézisek

Kezdésként tekintsünk egy Szekeres [7], majd tőle függetlenül Pillai [24] által tanulmányozott számelméleti problémát, melyet a következő módon fogalmazunk meg.

1. Probléma. Legyen $k \geq 2$ egész szám. Igaz-e, hogy bármely k egymást követő egész között létezik olyan, mely az összes többihez relatív prím?

Amennyiben k elegendően kicsi, úgy a kérdés könnyedén megválaszolható. Két egymást követő egész mindig relatív prím egymáshoz. Ugyanez igaz a középsőre három egymást követő egész szám esetén. Nyilvánvaló, hogy k növelésével a közös osztók direkt meghatározása egyre nehezebbé válik.

A legkorábbi dokumentált eredmény egészen Erdősig [6] vezet vissza, aki igazolta, hogy a válasz negatív kell legyen minden $k > k_0$ esetén, ahol k_0 egy pozitív konstans. Bizonyítása ineffektív, így nem ad módszert a k_0 effektív korlátozására. Az első állítás ebben az irányban Pillai [24] nevéhez köthető. Megmutatta, hogy $k \leq 16$ esetén mindig létezik a kívánt tulajdonságú elem, ám ennek éppen ellenkezője igaz, ha $17 \leq k \leq 430$. Utóbbi eredményt Brauer [3] terjesztette ki minden $k \geq 17$ értékre, teljes megoldását adva az 1. Problémának.

Megjegyezzük, hogy az 1. Probléma iránti érdeklődés igen sokrétű. Itt most csakis a két legfontosabb, a téma korai kibontakozását leginkább inspiráló területet említjük meg röviden.

Pillait az a hosszú ideig fennálló sejtés motiválta, mely szerint $k \geq 2$ egymást követő egész szám szorzata sosem lehet teljes hatvány. Eredményeit más, elsősorban elemi, eszközökkel kombinálva bizonyította a sejtést $k \leq 16$ esetben, lásd [25]. Köztu-

dott, hogy a probléma teljes megoldása Erdős és Selfridge [8] nevezetes tételéhez fűződik.

Egy másik szorosan kapcsolódó kutatási terület a prímhézagoké. Erdős [6] eredendően egymást követő prímszámok távolságára adott alsó korlátot, viszont nem tárgyalta ennek az 1. Problémára vonatkozó következményeit. Ezzel szemben Brauer [3] már határozott összefüggésbe hozta érdeklődését egy Zeitz-cel [4, 1] közös munkájával. Ebben Legendre [21] egy kérdését tanulmányozták olyan egymást követő egészek maximális számával kapcsolatban, melyek oszthatók az első m prím valamelyikével.

Idővel, az 1. Probléma megnövekedett figyelemre tett szert és számos irányban kiterjesztésre került. Ennek két természetes módja kínálkozik: az egyik a relatív prím feltétel gyengítése, a másik az egymást követő egészek cseréje egészek egy sorozatának egymást követő tagjaira. Mivel a kapcsolódó irodalom mindkét esetben gazdag, részletesen mutatjuk be.

Mielőtt az eredmények tárgyalását megkezdenénk, ideje bevezetnünk a relatív prím fogalom egy általánosabb formáját és két szorosan kapcsolódó, a leírást egyszerűsítő mennyiséget.

Legyen T egészek egy tetszőleges halmaza, melyre $1 \in T$. Az x és y egészeket T-relatív prímnek nevezzük, ha $\text{lnko}(x, y) \in T$. Most tekintsük egészek valamely $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatát és definiáljuk a $g_s(T)$ és $G_s(T)$ számokat a következőképpen. Legyen $g_s(T)$ az s azon egymást követő tagjainak minimális száma, hogy azok egyike sem relatív prím az összes többihez. Hasonlóan, jelölje $G_s(T)$ azt a legkisebb pozitív egészt, hogy bármely $k \geq G_s(T)$ esetén található s-nek k egymást követő tagja ezzel a tulajdonsággal. Ezen mennyiségek létezhetnek, de nem szükségképpen, a lehetőségek összes kombinációjára látunk majd példát a későbbiekben. Valahányszor s az egymást követő

nemnegatív egészek sorozata vagy pedig $T = \{1\}$, úgy mind a sorozatot, mind a T halmazt elhagyjuk a jelölésből. Például, Pillai [24] és Brauer [3] megmutatta, hogy $g = G = 17$.

A relatív prím feltétel gyengítésével kezdjük. Legyen d rögzített pozitív egész. Caro [5] a $g(d) = g(\{1, 2, \ldots, d\})$ és $G(d) = G(\{1, 2, \ldots, d\})$ mennyiségek létezését tetszőleges d esetén igazolta, továbbá effektív felső korlátokat is adott

$$g(d) \leq 45d \log d \qquad \text{és} \qquad G(d) \leq 54d \log d$$

alakban. Saradha és Thangadurai [27] egy közös munkájukban mindkettőt megjavították, feltéve, hogy $d \leq 11$, illetve $d \leq 20$. Érdekes módon egyik cikk sem tartalmazza akár $g(d)$ akár $G(d)$ egzakt értékét valamely d mellett, legyen az bármilyen kicsi.

Hajdu és Saradha [13] jelentős előrelépést értek el. Amennyiben T nem tartalmaz „túl" sok elemet, úgy mind $g(T)$, mind $G(T)$ értékére effektív felső korlátot adtak. Pontosabban, ha létezik olyan c_0 konstans, hogy minden $c > c_0$ esetén a T-beli elemek száma nem megy $c/(10 \log c)$ fölé, akkor

$$G(T) \leq \max(425, 2c_0 + 1).$$

Hasonló korlátot igazoltak azon feltétel mellett, hogy a T-beli elemeket osztó prímek halmaza analóg növekedési követelményeknek tesz eleget. Ezen túlmenően megadtak egy heurisztikán alapuló algoritmust is $g(T)$ és $G(T)$ explicit kiszámítására. Ezt, példának okáért felhasználták $g(2) = G(2) = 25$ és $g(\{2^\alpha : \alpha \geq 0\}) = G(\{2^\alpha : \alpha \geq 0\}) = 86$ meghatározására.

Az egymást követő egészeket lecserélhetjük egészek egy sorozatának egymást követő tagjaira is. Evans [9] volt az első, aki $s = (a + nd)_{n=0}^{\infty}$ alakú, azaz számtani sorozatokat tanulmányozott, megmutatva G_s létezését. Akárcsak Erdős [6] cikkében, ő sem

tárgyalta az effektív meghatározás módját. Othtomo és Tamari [23] ugyanezt az eredményt fogalmazta meg, de még a $g_s \leq 385$ korlátot is igazolták a páratlan számok sorozatára. Hajdu és Saradha [13] tárgyalták, hogy ha effektív korlátot szeretnénk nyerni, úgy könnyen konstruálható egy T halmaz, melyre $g_s = g(T)$ és $G_s = G(T)$ teljesül.

Egy számtani sorozatot lényegében tekinthetünk az $a + dx \in \mathbb{Z}[x]$ lineáris polinom nemnegatív egészek feletti kiértékelésének. Ebben a szellemben Harrington és Jones [18] kiterjesztette az 1. Problémát másodfokú sorozatokra. Direkt leszámlálással meghatározták g_s értékét minden egy főegyütthatós polinomra, illetve egy speciális, nem egy főegyütthatós, családra is. Sejtésként fogalmazták meg g_s létezését és uniform korlátosságát minden másodfokú sorozatra. Ezzel szemben G_s viselkedését egyáltalán nem tanulmányozták.

Jelen dolgozat a fentebb részletezett vizsgálatokhoz kapcsolódik és az 1. Problémát egészek más fontos családjaira terjeszti ki változó relatív prím feltételek mellett. A hátralévő részben foglaljuk össze a témákörben elért eredményeinket.

Másod- és harmadfokú sorozatok.

Evans [9], illetve Harrington és Jones [18], nyomdokain

$$s = (f(n))_{n=0}^{\infty} \qquad f \in \mathbb{Z}[x]$$

alakú sorozatok tanulmányozásával kezdünk. Fő érdekeltségünk az utóbbi szerzők, már korábban is említett, sejtése.

1. Sejtés (Harrington és Jones [18])**.** *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy másodfokú irreducibilis polinom, továbbá $s = (f(n))_{n=0}^{\infty}$. Ekkor g_s létezik és $g_s \leq 35$.*

Valójában a következő állítást igazoljuk.

1. Tétel (Sanna és Szikszai [26], 2017)**.** *Legyen $f \in \mathbb{Z}[x]$ és $s = (f(n))_{n=0}^{\infty}$. Ha $\deg f \leq 3$, akkor létezik egy olyan k_0 pozitív konstans, hogy bármely $k \geq k_0$ egész esetén található végtelen sok nemnegatív egész n, melyre*

$$f(n+1), f(n+2), \ldots, f(n+k)$$

egyike sem relatív prím az összes többihez. Speciálisan, mind G_s, mind g_s létezik.

Az 1. Tétel azonnali következménye az 1. Sejtés létezéssel kapcsolatos állítása, így kvalitatív választ ad. Ugyanakkor az eredmény ineffektív és nem biztosít semmilyen felső, nemhogy egy uniform, korlátot G_s értékére. Ez a $g_s \leq 35$ problémát nyitva hagyja.

A bizonyítás gerincét egy egyszerű, de gyümölcsöző kapcsolat adja az f polinom, illetve egy belőle, pontosabban eltoltjaival vett rezultánsából, származtatott $\tilde{f}$ polinom között. Ez lehetővé teszi egy mohó megközelítés alkalmazását a k_0 meghatározására. Az ötlet sikerességét prímek bizonyos halmazainak sűrűségére vonatkozó becslések garantálják.

Lineáris rekurziók.

Figyelmünket most olyan $u = (u_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok felé fordítjuk, melyek eleget tesznek egy

$$u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + a_2 u_{n+r-2} + \cdots + a_r u_n \qquad (n \geq 0) \qquad (1)$$

lineáris rekurziónak valamely rögzített $r \geq 1$ és $a_1, a_2, \ldots, a_r$ ($a_r \neq 0$) egészek mellett. Eleinte azt is feltesszük, hogy teljesül

az úgynevezett *oszthatósági tulajdonság*, azaz tetszőleges $m \mid n$ esetén $u_m \mid u_n$ áll fenn. Könnyen látható, hogy az 1. Probléma vizsgálata triviális, amennyiben az $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, illetve $d = \text{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = 1$ feltételek valamelyike nem teljesül, így ezekkel a továbbiakban élni fogunk.

Vegyük észre, hogy az $r = 1$ esetben mértani sorozatokra szorítkozunk, melyekben az alapkérdés vizsgálata rendkívül egyszerű. Sokkal érdekesebb az $r = 2$ eset, mely a kezdőtagokra és (1) együtthatóinak közös osztóira tett feltevésünk miatt éppen az úgynevezett *elsőfajú Lucas-sorozatokhoz* vezet. A következő általános eredményt fogalmazzuk meg.

2. Tétel (Hajdu és Szikszai [15], 2012)**.** *Legyen u egy nemdegenerált elsőfajú Lucas-sorozat és legyen $T \subset \mathbb{Z}_S$, ahol S prímeknek egy véges halmaza. Ekkor mind $g_u(T)$, mind $G_u(T)$ létezik, továbbá*

$$g_u(T) \leq G_u(T) \leq 20(2|S| + 30)\log(2|S| + 30).$$

A bizonyítás lelke a Lucas-sorozatok *erős oszthatóság tulajdonsága*, miszerint bármely m, n esetén $\text{lnko}(u_m, u_n) = u_{\text{lnko}(m,n)}$ teljesül. Segítségével természetes konstrukció adható egy olyan T' halmazra, hogy $g_u(T) = g(T')$ és $G_u(T) = G(T')$. Az ötlet Bilu, Hanrot és Voutier [2] primitív prímosztókra vonatkozó tételén múlik, a konklúziót Hajdu és Saradha [13] becslései biztosítják.

A $T = \{1\}$ speciális esetben sokkal erősebb eredmény nyerhető.

3. Tétel (Hajdu és Szikszai [15], 2012)**.** *Legyen $u = u(a_1, a_2)$ egy elsőfajú Lucas-sorozat. Ekkor g_u és G_u pontosan akkor léteznek, ha (a_1, a_2) nem a $(0, \pm 1)$ vagy pedig $(\pm 1, -1)$ párok valamelyike. Amennyiben g_u és G_u létezik, úgy $g_u = G_u = 17$, kivéve az 1. Táblázatban található sorozatokat.*

(a_1, a_2)	g_u	G_u
$(\pm 1, a_2), a_2 \neq -1, -2, -3, -5$	25	25
$(a_1, -a_1^2 + 1), \lvert a_1 \rvert > 1$	43	43
$(\pm 12, -55), (\pm 12, -377)$	31	31
$(\pm 1, -3)$	45	45
$(\pm 1, -5)$	49	51
$(\pm 1, -2)$	107	107

1. táblázat. A g_u és G_u értékei a kivételes Lucas sorozatok esetén.

Az állítást lényegében a 2. Tétel konstrukcióját követve igazoljuk, azonban a $T = \{1\}$ megkötés miatt a T' halmaz egy nagyon szűk listából kerülhet csak ki. Ezekre Hajdu és Saradha [13] heurisztikus algoritmusát alkalmazva, intenzív számítások révén jutunk az eredményhez.

Lineáris oszthatósági sorozatok esetén még szót kell ejtsünk az általános esetről, amikor is $r \geq 3$. Belátható, hogy a gyengébb oszthatósági tulajdonság még mindig elégséges a korábbi eszközök felhasználásához, viszont $g_u(T) = g(T')$ helyett csupán $g_u(T) \leq g(T')$ következik. Ugyanez igaz a $G_u(T)$ mennyiségre is. Ezen felül Bilu, Hanrot és Voutier tételét sem alkalmazhatjuk, helyette Schlickewei és Schmidt [28] egy polinomiális-exponenciális egyenletek megoldásszámára vonatkozó korlátja az alternatívánk. Kapcsolódó eredményünk a következő.

4. Tétel (Hajdu és Szikszai [15], 2012)**.** *Legyen u egy $r \geq 3$ rendű nem-degenerált lineáris oszthatósági sorozat és legyen $T \subset \mathbb{Z}_S$, ahol S prímek egy véges halmaza. Ekkor $G_u(T)$, és így $g_u(T)$ is létezik, továbbá*

$$g_u(T) \leq G_u(T) \leq r^{2^{8(|S|+r)}}$$

teljesül.

A 2-4. Tételeket tekintve a $g_u(T)$ és $G_u(T)$ mennyiségek létezése bizonyos értelemben automatikusnak tűnhet lineáris rekurziók esetén. Ugyanakkor vegyük észre, hogy a bizonyítások eszközei között rendre kiemeltük az oszthatósági tulajdonságokon múló konstrukciót. Kiderül, hogy ezek gyengítése igen jelentős változásokat okozhat. A jelenség tanulmányozására kiváló példa az úgynevezett *másodfajú Lucas-sorozatok* családja. Ezek olyan másodrendű lineáris rekurziók, melyek 2 és a_1 értékekkel kezdődnek. McDaniel [22] egy tételének következménye, hogy a másodfajú Lucas-sorozatok páratlan indexű részsorozatai lényegében erős oszthatósági sorozatoknak tekinthetők, míg a páros indexű tagok közös osztói az indexek 2-adikus értékelésének függvényei. A következő tétel teljes jellemzésüket adja.

5. Tétel (Hajdu és Szikszai [17], 2015)**.** *Legyen $v = v(a_1, a_2)$ egy nem-degenerált másodfajú Lucas sorozat. Ekkor a következők teljesülnek.*

i) Ha a_1 páros és a_2 páratlan, akkor mind g_v, mind G_v létezik, továbbá $g_v = G_v = 2$.

ii) Ha mind a_1, mind a_2 páratlan, akkor G_v nem létezik, azonban g_v igen és ekkor teljesül, hogy

$$g_v = \begin{cases} 171, & \textit{ha } a_1 = \pm 1, \\ 341, & \textit{textha } a_2 = -(a_1^2+1)/2, \\ 6, & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

iii) Ha a_1 páratlan és a_2 páros, akkor g_v és G_v egyike sem létezik.

A bizonyítás teljes egészében konstruktív és McDaniel [22] tételén, illetve Hajdu és Saradha [14] számításain alapszik.

Elliptikus oszthatósági sorozatok.

Természetes kérdés, hogy mi történik, ha elhagyjuk a linearitást, de megtartjuk az oszthatósági tulajdonságot. Vizsgálataink tárgya most a bilineáris rekurziók egy családja, az úgynevezett elliptikus oszthatósági sorozatok. Legyen E egy $\mathbb{Q}$ feletti elliptikus görbe az

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

általánosított Weierstrass-egyenlettel adva és legyen P egy végtelen rendű affin racionális pont. Ennek többszöröseit írjuk

$$nP = \left(\frac{A_n}{B_n^2}, \frac{C_n}{B_n^3}\right) \qquad (n \geq 1)$$

alakba, ahol $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}$ és $\text{lnko}(A_nC_n, B_n) = 1$. A $B_0 = 0$ választással adódó $B = B(E,P) = (B_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot *elliptikus oszthatósági sorozatnak* nevezzük. Ward [30] egy klasszikus, a fenti definíció okán gyakran Silverman-nak [29] tulajdonított, eredménye, hogy B erős oszthatósági sorozat. Ennek fényében a következő, nem meglepő, eredményt tudjuk igazolni.

6. Tétel (Hajdu és Szikszai [16], 2014)**.** *Legyen $B = B(E,P)$ egy elliptikus oszthatósági sorozat és legyen $T \subset \mathbb{Z}_S$, ahol S prímek egy véges halmaza. Ekkor mind $g_B(T)$, mind $G_B(T)$ létezik és*

$$g_B(T) \leq G_B(T) \leq C(E, |S|, \max S),$$

teljesül, ahol $C(E, |S|, \max S)$ egy effektív konstans, mely kizárólag az E, $|S|$ és $\max S$ paraméterektől függ. Speciálisan, g_u és G_u léteznek, továbbá effektív módon korlátozhatók E függvényében.

A bizonyításban a korábban már említett konstrukciót követjük, azonban az így kapott T' halmaz elemeinek számát Hajdu és

Herendi [11] egy elliptikus görbék S-egész pontjainak számára vonatkozó eredményével korlátozzuk.

Diofantikus applikációk.

Emlékeztetnénk, hogy az 1. Probléma vizsgálatát Diofantikus alkalmazások is motiválják. Pillai eredendően azt a híres sejtést akarta bizonyítani, miszerint egymást követő egész számok szorzata nem lehet teljes hatvány. Ez valójában ekvivalens az

$$n(n+1)\dots(n+k-1) = y^{\ell} \tag{2}$$

egyenlet megoldhatatlanságának igazolásával ismeretlen n, y, k, ℓ egészek körében, ahol $k, \ell \geq 2$. Pillai [25] $g = 17$ eredményét felhasználva belátta a sejtést $k \leq 16$ esetben.

Legyen $B = B(E, P) = (B_n)_{n=0}^{\infty}$ egy elliptikus oszthatósági sorozat és tekintsük a

$$B_n B_{n+d} \dots B_{n+(k-1)d} = y^{\ell} \tag{3}$$

egyenletet ismeretlen n, d, k, y, ℓ egészekben, ahol $\text{lnko}(m, d) = 1$ és $k, \ell \geq 2$. Megjegyezzük, hogy az indexek egy számtani sorozatból származnak így (3) részesetként tartalmazza az egymást követő indexekét.

Tegyük fel, hogy $B_1 = 1$. Mivel B mind a görbétől, mind a ponttól függésben van, ez egy szigorú megkötésnek tekinthető, azonban megmutatható, hogy pusztán technikai egyszerűsítésről van szó. Későbbi hivatkozás céljából vezessük be a

$$\mathcal{P}_{\ell}(B) = \{n : B_n \text{ egy } \ell\text{-edik hatvány}\},$$

illetve

$$N_{\ell} = |\mathcal{P}_{\ell}(B)| \qquad \text{és} \qquad M_{\ell} = \max_{n \in \mathcal{P}_{\ell}(B)} n$$

jelöléseket. A disszertáció utolsó eredményeként a következő állítást fogalmazzuk meg.

7. Tétel (Hajdu, Laishram és Szikszai [12], 2016)**.** *Legyen $\ell \geq 2$ rögzített. Ekkor az* (3) *egyenletnek csak véges sok megoldása lehet. Továbbá, ha (n, d, k, y) egy megoldás, akkor*

$$\max(n, d, k, y) \leq C(N_\ell, M_\ell)$$

teljesül, ahol C egy effektív módon kiszámítható konstans, mely kizárólag az N_ℓ és M_ℓ értékétől függ. Speciálisan, ha $\mathcal{P}_\ell(B)$ explicit adott, akkor a (3) *egyenlet összes megoldása effektív módon meghatározható.*

A bizonyítás során számos eszközt felhasználunk, elsősorban Silverman [29] elliptikus oszthatósági sorozatok p-adikus értékelésére vonatkozó egy eredményét, illetve következményeit, Laishram és Shorey [19, 20] számtani sorozatok egymást követő tagjaiban található prímosztókkal kapcsolatos becsléseit, Hajdu és Saradha [14] számításait, végezetül pedig Everest, Reynolds és Stevens [10] elliptikus oszthatósági sorozatokban található teljes hatványokat érintő végességi állítását.

Theses

Let us begin by considering a problem which was first studied by Szekeres [7] in an unpublished communication and independently in a paper of Pillai [24]. We present it as follows.

Problem 1. Let $k \geq 2$ be an integer. Is it true that in every set of k consecutive integers there exists one which is coprime to all the others?

One may immediately answer the question if k is reasonably small. For instance, each of two consecutive integers is always coprime to the other. Same holds for the one in the middle of three consecutive integers. Obviously, the larger k becomes, the harder it is to directly check the common divisors.

The earliest documented result traces back to Erdős [6], who proved that if k is larger than some positive constant k_0, then the answer should be false. However, his method is ineffective and does not give a way to compute k_0. The first effective statement was made by Pillai. Indeed, he showed that there always exists an element coprime to all the others if $k \leq 16$, but the contrary holds whenever $17 \leq k \leq 430$. The latter was extended to every $k \geq 17$ in a work of Brauer [3], resolving Problem 1 completely.

Note that the interest in the study of Problem 1 is many-folded. Here, we briefly mention two important directions that stimulated the early progress of the topic.

Pillai was motivated by the long standing folklore conjecture which states that the product of $k \geq 2$ consecutive integers can never be a perfect power. Combining his result with further elementary methods he verified it for $k \leq 16$, see [25]. It is well-known that a complete solution was given by the famous

theorem of Erdős and Selfridge [8].

Another closely related research area is that of prime gaps. Originally, Erdős [6] worked on lower bounds concerning the difference of consecutive primes, but he did not discuss the consequences regarding Problem 1. On the contrary, Brauer [3] definitely related his interest in the topic to an earlier result he obtained with Zeitz [4, 1]. There, they considered an old problem of Legendre [21] on the maximum number of consecutive integers which are divisible by at least one of the first m primes.

Gradually, Problem 1 itself began to attract increased attention and was extended in many directions. There are two natural ways to take if we intend to generalize the original question: one is to relax the coprimality condition, the other is to replace consecutive integers with consecutive terms of some sequence of integers. Since the related literature is very rich in each case, we give a detailed exposition of the results.

Before starting the discussion, it is time to introduce a more general notion of coprimality and two strongly connected quantities, simplifying the description of results related to Problem 1.

Let T be an arbitrary set of positive integers such that $1 \in T$. The integers x and y are said to be *T-coprime* if $\gcd(x, y) \in T$. Now take any sequence of integers $s = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ and define two numbers, $g_s(T)$ and $G_s(T)$, as follows. Let $g_s(T)$ be the smallest positive integer such that there exist $g_s(T)$ consecutive terms of s with the property that none of them is T-coprime to all the others. Similarly, let $G_s(T)$ stand for the smallest positive integer such that for each $k \geq G_s(T)$ one can find k consecutive terms so that the latter property holds. Both quantities may or may not exist, we will see examples of every possibility later. Note that whenever s is the sequence of consecutive non-negative

integers or if $T = \{1\}$, we suppress the dependence both on s and T, respectively. For instance, we write that the combined efforts of Pillai [24] and Brauer [3] gave $g = G = 17$.

We start with the relaxation of the coprimality condition. Let d be a fixed positive integer. Caro [5] proved the existence of $g(d) = g(\{1, 2, \ldots, d\})$ and $G(d) = G(\{1, 2, \ldots, d\})$ for arbitrary d and established the upper bounds

$$g(d) \leq 45d \log d \qquad \text{and} \qquad G(d) \leq 54d \log d.$$

Both were slightly improved in a joint work of Saradha and Thangadurai [27], in case $d \geq 11$ and $d \geq 20$, respectively. Interestingly, neither paper contains any exact values of $g(d)$ or $G(d)$ for some value of d, let it be very small.

In a recent work, Hajdu and Saradha [13] made significant progress on the previous results. Let T be a non-empty set of positive integers. Provided that T does not have "too many" elements, they obtained effective upper bounds on both $g(T)$ and $G(T)$. More precisely, if there exists some constant c_0 such that for every $c > c_0$ the number of elements in T does not exceed $c/(10 \log c)$, then

$$G(T) \leq \max(425, 2c_0 + 1).$$

They derived a similar upper bound under the assumption that the set of all primes dividing some element in T satisfies analogous restrictions. They also invented a heuristic algorithm for the exact computation of $g(T)$ and $G(T)$, in case T is given explicitly. It was used, for instance, to show that $g(2) = G(2) = 25$ and that $g(\{2^\alpha : \alpha \geq 0\}) = G(\{2^\alpha : \alpha \geq 0\}) = 86$.

One may replace consecutive integers by consecutive terms of some sequence of integers as well. Evans [9] was the first to study

arithmetic progressions $s = (a + nd)_{n=0}^{\infty}$, showing the existence of G_s. As in the paper of Erdős [6], the means of effectively computing it, or at least g_s, are not discussed. Ohtomo and Tamari [23] derived the same result, but also obtained $g_s \leq 385$ for the sequence of odd numbers. Hajdu and Saradha [13] noted that if one aims to find effective upper bounds, then there is a set T such that $g_s = g(T)$ and $G_s = G(T)$ hold.

An arithmetic progression $(a + nd)_{n=0}^{\infty}$ is essentially the evaluation of the linear polynomial $a + dx \in \mathbb{Z}[x]$ over non-negative integers. In this spirit, Harrington and Jones [18] extended the scope of Problem 1 to quadratic sequences defined by polynomials of degree 2 with integer coefficients. Using direct computation they gave all the possible values of g_s for every monic and a specific family of non-monic quadratic polynomials. They also conjectured that g_s exists for any quadratic sequence and is uniformly bounded. On the other hand, they did not study G_s.

Present work connects to the previous investigations and considers Problem 1 in important sequences of integers under varying coprimality conditions. In the remaining part of the discussion we summarize our contributions and the underlying ideas.

Quadratic and cubic sequences.

Following Evans [9], we begin with a study of sequences

$$s = (f(n))_{n=0}^{\infty} \qquad f \in \mathbb{Z}[x].$$

Our main concern is the following, and already mentioned, conjecture made by Harrington and Jones.

Conjecture 1 (Harrington and Jones [18])**.** *Let $f \in \mathbb{Z}[x]$ be an irreducible polynomial of degree 2 and let $s = (f(n))_{n=0}^{\infty}$. Then*

g_s exists and $g_s \leq 35$.

Indeed, we prove the following result.

Theorem 1 (Sanna and Szikszai [26], 2017)**.** *Let $f \in \mathbb{Z}[x]$ and let $s = (f(n))_{n=0}^{\infty}$. If $\deg f \leq 3$, then there exists a positive constant k_0 such that for every integer $k \geq k_0$ there are infinitely many non-negative integers n with the property that none of*

$$f(n+1), f(n+2), \ldots, f(n+k)$$

is coprime to all the others. In particular, both G_s and g_s exist.

Theorem 1 verifies the existence part of Conjecture 1 immediately, providing a qualitative answer. On the other hand, the result is ineffective and we do not get any upper bound, let alone a uniform one, for G_s. This leaves the problem of $g_s \leq 35$ open.

The backbone of the proof is formed by a simple, but fruitful relationship between solutions to system of congruences involving f and an auxiliary polynomial $\tilde{f}$ arising from the resultant of f and its shifts. This connection allows a "greedy" approach to finding a constant k_0. The success of our idea also relies on estimates of the density of certain sets of primes.

Linear recurrences.

Now we turn our attention to sequences $u = (u_n)_{n=0}^{\infty}$ which obey a linear recurrence relation of the form

$$u_{n+r} = a_1 u_{n+r-1} + a_2 u_{n+r-2} + \cdots + a_r u_n \qquad (n \geq 0) \qquad (4)$$

for some fixed integers $r \geq 1$ and $a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(a_r \neq 0)$. In the beginning, we assume that they satisfy the additional divisibility

property that $m \mid n$ implies $u_m \mid u_n$. Further, we note that if any of the conditions $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, or $d = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_r) = 1$ is violated, then answering Problem 1 is trivial, and hence, we live with each from now on.

Observe that if $r = 1$, then we have to work with geometric progressions, a very specific situation which can be handled easily. The case $r = 2$ is more interesting which, due to our assumptions on the initial values and the common divisors of the coefficients in (4), leads to so-called *Lucas sequences of the first kind*. We formulate the following general statement for them.

Theorem 2 (Hajdu and Szikszai [15], 2012)**.** *Let u be a non-degenerate Lucas sequence of the first kind and let T be a subset of $\mathbb{Z}_S$, where S is a finite set of primes. Then, both $g_u(T)$ and $G_u(T)$ exist and we have*

$$g_u(T) \leq G_u(T) \leq 20(2|S| + 30)\log(2|S| + 30).$$

The heart of the proof is that Lucas sequences satisfy the *strong divisibility property*, that is, $\gcd(u_m, u_n) = u_{\gcd(m,n)}$ for every positive integer m and n. With its help, we are able to construct a set T' such that $g_u(T) = g(T')$ and $G_u(T) = G(T')$. This idea relies on the theorem of Bilu, Hanrot, and Voutier [2] concerning primitive prime divisors, while the conclusion is obtained through estimates of Hajdu and Saradha [13].

In the specific case of $T = \{1\}$, we give a much stronger results.

Theorem 3 (Hajdu and Szikszai [15], 2012)**.** *Let $u = u(a_1, a_2)$ be a Lucas sequence of the first kind. Then g_u and G_u exist if and only if (a_1, a_2) is not one of $(0, \pm 1)$ or $(\pm 1, -1)$. In case g_u and G_u exist, we have $g_u = G_u = 17$, except the sequences listed in Table 2.*

(a_1, a_2)	g_u	G_u
$(\pm 1, a_2), a_2 \neq -1, -2, -3, -5$	25	25
$(a_1, -a_1^2 + 1), \lvert a_1 \rvert > 1$	43	43
$(\pm 12, -55), (\pm 12, -377)$	31	31
$(\pm 1, -3)$	45	45
$(\pm 1, -5)$	49	51
$(\pm 1, -2)$	107	107

Table 2: Values of g_u and G_u for exceptional Lucas sequences.

The statement can be proved along the same line as Theorem 2, but due to the restriction $T = \{1\}$ we are left to choose T' from a very short list. For each we apply the heuristic algorithm of Hajdu and Saradha [13] and execute intense computation.

Finally, we need to treat linear divisibility seuqences of order at least 3. It turns out that the divisibility property itself is enough to use the previous tools, however, we only get $g_u(T) \leq g(T')$ in place of the equality. The same is true for $G_u(T)$. In addition, we cannot apply the theorem of Bilu, Hanrot, and Voutier, instead, we replace it with a result of Schlickewei and Schmidt [**?**] concerning the number of solutions to polynomial-exponential equations. Our corresponding result is the following.

Theorem 4 (Hajdu and Szikszai [15], 2012)**.** *Let u be a non-degenerate linear divisibility sequence of order $r \geq 3$ and let T be a subset of $\mathbb{Z}_S$, where S is a finite set of primes. Then $G_u(T)$, and hence $g_u(T)$, exist and*

$$g_u(T) \leq G_u(T) \leq r^{2^{8(|S|+r)}}.$$

In view Theorems 2-4, it may seem that for linear recurrences the existence of both g_s and G_s is somewhat automatic, except

certain degenerate cases. However, the outlined ideas rely on the divisibility property. In this part, we see that even a very modest weakening of the arithmetic properties can cause a significant change. A promising study of such a phenomenon is induced by Lucas sequences of the second kind, which are linear recurrences $v = (v_n)_{n=0}^{\infty}$ of order 2 with initial terms $v_0 = 2$ and $v_1 = a_1$. A consequence of theorem of McDaniel [22] is that Lucas sequences of the second kind behave like strong divisibility sequences when we consider odd indices, but the common divisors of terms with even indices depend on the 2-adic valuations of the indices. Our next theorem gives a complete characterization of Problem 1 for them.

Theorem 5 (Hajdu and Szikszai [17], 2015)**.** *Let $v = v(a_1, a_2)$ be a non-degenerate Lucas sequence of the second kind.*

i) If a_1 is even and a_2 is odd, then both g_v and G_v exist and $g_v = G_v = 2$.

ii) If both a_1 and a_2 are odd and coprime, then G_v does not exist, but g_v does and

$$g_v = \begin{cases} 171, & \text{if } a_1 = \pm 1, \\ 341, & \text{if } a_2 = -(a_1^2+1)/2, \\ 6, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

iii) If a_1 is odd and a_2 is even, then neither g_v nor G_v exists.

The proof is constructive and uses the theorem of McDaniel [22] and computations due to Hajdu and Saradha [14].

Elliptic divisibility sequences.

It is natural to ask what happens if we drop the linearity in the recursive definition, but keep the strong arithmetic intact. The subject of our experiment is a family of bilinear recurrences known as elliptic divisibility sequences. Let E be an elliptic curve over $\mathbb{Q}$ given by a generalized Weierstrass equation of the form

$$E: \qquad y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

and let P be an affine rational point of infinite order. Write the coordinates of the multiples nP in the form

$$nP = \left(\frac{A_n}{B_n^2}, \frac{C_n}{B_n^3}\right) \qquad (n \geq 1)$$

with $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{Z}$ and $\gcd(A_nC_n, B_n) = 1$. Putting $B_0 = 0$, the resulting sequence $B = (B_n)_{n=0}^{\infty}$ is said to be an *elliptic divisibility sequence*. A classical theorem of Ward [30], often contributed to Silverman [29], is that B is a strong divisibility sequence. In view of this, we obtain the following, expected, result.

Theorem 6 (Hajdu and Szikszai [16], 2014)**.** *Let $B = B(E, P)$ be an elliptic divisibility sequence and let T be a subset of $\mathbb{Z}_S$, where S is a finite set of primes. Then both $g_B(T)$ and $G_B(T)$ exist and*

$$g_B(T) \leq G_B(T) \leq C(E, |S|, \max S),$$

where $C(E, |S|, \max S)$ is an effective constant depending on E, $|S|$ and $\max S$ only. In particular, g_u and G_u exist and are effectively bounded in terms of E only.

In the proof, we progress as in that of Theorem 2 with the only change being the application of a theorem of Hajdu and Herendi [11] concerning integral and S-integral points on elliptic curves.

Diophantine applications.

Recall that there is a deep Diophantine interest in Problem 1. Pillai himself was motivated by the famous folklore conjecture that the product of at least two consecutive positive integers is never a perfect power. This translates to the consideration of the equation

$$n(n+1)\dots(n+k-1) = y^{\ell} \tag{5}$$

in unknown positive integers n, y, k, and ℓ with $k, l \geq 2$. Pillai [25] was able to prove that there is no solution if $k \leq 16$.

Let $B = B(E,P) = (B_n)_{n=0}^{\infty}$ be an elliptic divisibility sequence and consider the equation

$$B_n B_{n+d} \dots B_{n+(k-1)d} = y^{\ell} \tag{6}$$

in unknown positive integers n, d, k, y, and ℓ with $\gcd(m,d) = 1$, where $k, \ell \geq 2$. Note that the indices in (6) come from an arithmetic progression and in this sense the equation is slightly more general than the case of consecutive indices.

Now assume that $B_1 = 1$. Since B is dependent on both the equation of the curve E and the generator point P, this seems a serious limitation, but it is merely a technical condition. For later use we set

$$\mathcal{P}_{\ell}(B) = \{n : B_n \text{ is an } \ell\text{th power}\}.$$

Let us also put

$$N_{\ell} = |\mathcal{P}_{\ell}(B)| \qquad \text{and} \qquad M_{\ell} = \max_{n \in \mathcal{P}_{\ell}(B)} n$$

for easier reference. The last result of the dissertation is as follows.

Theorem 7 (Hajdu, Laishram, and Szikszai [12], 2016)**.** *Let $\ell \geq 2$ be fixed. Then* (6) *has only finitely many solutions. Further, if (n, d, k, y) is a solution, then*

$$\max(n, d, k, y) \leq C(N_\ell, M_\ell),$$

where C is an effectively computable constant depending on N_ℓ and M_ℓ only. In particular, if $\mathcal{P}_\ell(B)$ is given explicitly, then all the solutions to (6) *can be effectively determined.*

In the proof we combine several tools, like results of Silverman [29] on the p-adic valuation of elliptic divisibility sequences, estimates due to Laishram and Shorey [19, 20] concerning the prime divisors of consecutive terms of arithmetic progressions, computations of Hajdu and Saradha [14], and finally, a finiteness result of Everest, Reynolds, and Stevens [10] on perfect powers.

Hivatkozások/References

[1] A. A. Bennett and A. Brauer, *Questions, Discussions, and Notes: Question Concerning the Maximum Term in the Diatomic Series*, Amer. Math. Monthly **40** (1933), no. 7, 409–410.

[2] Y. Bilu, G. Hanrot and P. M. Voutier, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers: with an appendix by M. Mignotte*, J. Reine Angew. Math. **593** (2001), 75-122.

[3] A. Brauer, *On a property of k consecutive integers*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 328-331.

[4] A. Brauer and H. Zeitz, *Über eine zahlentheoretische Behauptung von Legendre*, Sitz. Berliner Math. Ges. **29** (1930), 116-125.

[5] Y. Caro, *On a division property of consecutive integers*, Israel J. Math. **33** (1979), no. 1, 32-36.

[6] P. Erdős, *On the difference of consecutive primes*, Q. J. Math. **6** (1935), 124-128.

[7] P. Erdős, *Some remarks on number theory*, Israel J. Math. **3** (1965), 6-12.

[8] P. Erdős and J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Illinois J. Math. **19** (1975), 292-301.

[9] R. J. Evans, *On N consecutive integers in an arithmetic progression*, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (1972), 295-296.

[10] G. Everest, J. Reynolds and S. Stevens, *On the denominators of rational points on elliptic curves*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 5, 762-770.

[11] L. Hajdu and T. Herendi, *Explicit bounds for the solutions of elliptic equations with rational coefficients*, J. Symbolic Comput. **25** (1998), no. 3, 361-366.

[12] L. Hajdu, S. Laishram and M. Szikszai, *Perfect powers in products of terms of elliptic divisibility sequences*, Bull. Aust. Math. Soc. **94** (2016), no. 3, 395-404.

[13] L. Hajdu and N. Saradha, *On a problem of Pillai and its generalizations*, Acta Arith. **144** (2010), no. 4, 323-347.

[14] L. Hajdu and N. Saradha, *Examples for sets S_m not having property $P(T)$*, neumann.math.unideb.hu/-∼hajdul/Tables.pdf.

[15] L. Hajdu and M. Szikszai, *On the GCD-s of k consecutive terms of Lucas sequences*, J. Number Theory **132** (2012), no. 12, 3056-3069.

[16] L. Hajdu and M. Szikszai, *On common factors within a series of consecutive terms of an elliptic divisibility sequence*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), no. 1-2, 291-301.

[17] L. Hajdu and M. Szikszai, *Common factors in series of consecutive terms of associated Lucas and Lehmer sequences*, Fibonacci Quart. **53** (2015), no. 3, 221-229.

[18] J. Harrington and L. Jones, *Extending a theorem of Pillai to quadratic sequences*, Integers **15A** (2015), Paper No. A7, 22 pp.

[19] S. Laishram and T. N. Shorey, *Number of prime divisors in a product of consecutive integers*, Acta Arith. **113** (2004), no. 4, 327-341.

[20] S. Laishram and T. N. Shorey, *Number of prime divisors in a product of terms of an arithmetic progression*, Indag. Math. (N. S.) **17** (2006), no. 3, 425-436.

[21] A. M. Legendre, *Théorie des nombres, Tome II*, Paris, 1830.

[22] L. W. McDaniel, *The g.c.d. in Lucas sequences and Lehmer number sequences*, Fibonacci Quart. **29** (1991), no. 1, 24-29.

[23] M. Ohtomo and F. Tamari, *On relative prime number in a sequence of positive integers*, J. Statist. Plann. Inference **106** (2002), no. 1-2, 509-515.

[24] S. S. Pillai, *On m consecutive integers. I.*, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. **11** (1940), 6-12.

[25] S. S. Pillai, *On m consecutive integers. II.*, Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A. **11** (1940), 73-80.

[26] C. Sanna and M. Szikszai, *On a coprimality condition for consecutive values of polynomials*, Bull. Lond. Math. Soc., accepted.

[27] N. Saradha and R. Thangadurai, *Pillai's problem on consecutive integers*, Number theory and applications, 175–188, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009.

[28] H. P. Schlickewei and W. M. Schmidt, *The number of solutions of polynomial-exponential equations*, Compos. Math. **120** (2000), no. 2, 193-225.

[29] J. H. Silverman, *Wieferich's criterion and the abc-conjecture*, J. Number Theory **30** (1988), no. 2, 226-237.

[30] M. Ward, *Memoir on elliptic divisibility sequences*, Amer. J. Math. **70**, (1948), 31-74.

Szikszai Márton publikációi/Publications of Márton Szikszai

[1] L. Hajdu and M. Szikszai, *On the GCD-s of k consecutive terms of Lucas sequences*, J. Number Theory **132** (2012), no. 12, 3056-3069.

[2] L. Hajdu and M. Szikszai, *On common factors within a series of consecutive terms of an elliptic divisibility sequence*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), no. 1-2, 291-301.

[3] Z. Gál, Á. Nagy, M. Szikszai, and Gy. Terdik, *Stochastic modeling of Wireless Networks: a case study in time domain*, Proceedings of the 9th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary, January 29-February 1, 2014. Vol. 2., 195-201.

[4] L. Hajdu and M. Szikszai, *Common factors in series of consecutive terms of associated Lucas and Lehmer sequences*, Fibonacci Quart. **53** (2015), no. 3, 221-229.

[5] L. Hajdu, S. Laishram and M. Szikszai, *Perfect powers in products of terms of elliptic divisibility sequences*, Bull. Aust. Math. Soc. **94** (2016), no. 3, 395-404.

[6] A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikić and M. Szikszai, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 2, 490-508.

[7] I. Pink and M. Szikszai, *A Brocarcd-Ramanujan-type equation with Lucas and associated Lucas sequences*, Glas. Mat. Ser. III **52(72)** (2017), no. 1, 11-21.

[8] L. Hajdu, M. Szikszai and V. Ziegler, *On arithmetic progressions in Lucas sequences*, J. Integer Seq. **20** (2017), no. 8, Art. 17.8.6, 18 pp.

[9] C. Sanna and M. Szikszai, *On a coprimality condition for consecutive values of polynomials*, Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), 908-915.

[10] M. Szikszai, *Distinct products in Lucas sequences - On a problem of Kimberling*, Fibonacci Quart. **55** (2017), no. 4, 291-296.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/37/2018.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Szikszai Márton
Neptun kód: QURR6V
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10049702

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: On common factors within a series of consecutive terms of an elliptic divisibility sequence.
   Publ. Math. Debr. 84 (1-2), 291-301, 2014. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2014.5830
   IF: 0.503

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (4)

2. Sanna, C., **Szikszai, M.**: A coprimality condition on consecutive values of polynomials.
   Bull. London Math. Soc. 49 (5), 908-915, 2017. ISSN: 0024-6093.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1112/blms.12078
   IF: 0.707 (2016)

3. Hajdu, L., Laishram, S., **Szikszai, M.**: Perfect powers in products of terms of elliptic divisibility sequences.
   Bull. Aust. Math. Soc. 94 (03), 395-404, 2016. ISSN: 0004-9727.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1017/S0004972716000332
   IF: 0.548

4. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: Common factors in series of consecutive terms of associated Lucas and Lehmer sequences.
   Fibonacci Q. 53 (3), 221-229, 2015. ISSN: 0015-0517.

5. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: On the GCD-s of k consecutive terms of Lucas sequences.
   J. Number Theory. 132 (12), 3056-3069, 2012. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2012.05.022
   IF: 0.466

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvrészletek (1)

6. Gál, Z., Nagy, Á., **Szikszai, M.**, Terdik, G.: Stochastic modeling of wireless networks: A case study in time domain.
   In: Proceedings of the 9th International Conference on Applied Informatics January 29 - Februar 1, 2014. Eger, Hungary Volume II [elektronikus dokumentum]. Ed.: by Kovács Emőd, Kusper Gábor, Kunkli Roland, Tómács Tibor, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 195-201, 2015. ISBN: 9786155297182

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (4)

7. Pink, I., **Szikszai, M.**: A Brocard-Ramanujan-type equation with Lucas and associated Lucas sequences.
   Glas. Mat. 52 (1), 11-21, 2017. ISSN: 0017-095X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.3336/gm.52.1.02
   IF: 0.328 (2016)

8. **Szikszai, M.**: Distinct products in Lucas sequences - on a problem of Kimberling.
   Fibonacci Q. 2017 (55), 291-296, 2017. ISSN: 0015-0517.

9. Hajdu, L., **Szikszai, M.**, Ziegler, V.: On arithmetic progressions in Lucas sequences.
   J. Integer Seq. 2017 (20), Article 17, 2017. EISSN: 1530-7638.

10. Dujella, A., Kazalicki, M., Mikić, M., **Szikszai, M.**: There are infinitely many rational Diophantine sextuples.
    Int. Math. Res. Notices. 2017 (2), 490-508, 2017. ISSN: 1073-7928.
    DOI: http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnv376
    IF: 0.924 (2016)

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 3,476
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,224

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2018.02.07.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/37/2018.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Márton Szikszai
Neptun ID: QURR6V
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10049702

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: On common factors within a series of consecutive terms of an elliptic divisibility sequence.
   Publ. Math. Debr. 84 (1-2), 291-301, 2014. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2014.5830
   IF: 0.503

Foreign language scientific articles in international journals (4)

2. Sanna, C., **Szikszai, M.**: A coprimality condition on consecutive values of polynomials.
   Bull. London Math. Soc. 49 (5), 908-915, 2017. ISSN: 0024-6093.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1112/blms.12078
   IF: 0.707 (2016)

3. Hajdu, L., Laishram, S., **Szikszai, M.**: Perfect powers in products of terms of elliptic divisibility sequences.
   Bull. Aust. Math. Soc. 94 (03), 395-404, 2016. ISSN: 0004-9727.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1017/S0004972716000332
   IF: 0.548

4. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: Common factors in series of consecutive terms of associated Lucas and Lehmer sequences.
   Fibonacci Q. 53 (3), 221-229, 2015. ISSN: 0015-0517.

5. Hajdu, L., **Szikszai, M.**: On the GCD-s of k consecutive terms of Lucas sequences.
   J. Number Theory. 132 (12), 3056-3069, 2012. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2012.05.022
   IF: 0.466

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language Hungarian book chapters (1)

6. Gál, Z., Nagy, Á., **Szikszai, M.**, Terdik, G.: Stochastic modeling of wireless networks: A case study in time domain.
In: Proceedings of the 9th International Conference on Applied Informatics January 29 - Februar 1, 2014. Eger, Hungary Volume II [elektronikus dokumentum]. Ed.: by Kovács Emőd, Kusper Gábor, Kunkli Roland, Tómács Tibor, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 195-201, 2015. ISBN: 9786155297182

Foreign language scientific articles in international journals (4)

7. Pink, I., **Szikszai, M.**: A Brocard-Ramanujan-type equation with Lucas and associated Lucas sequences.
Glas. Mat. 52 (1), 11-21, 2017. ISSN: 0017-095X.
DOI: http://dx.doi.org/10.3336/gm.52.1.02
IF: 0.328 (2016)

8. **Szikszai, M.**: Distinct products in Lucas sequences - on a problem of Kimberling.
Fibonacci Q. 2017 (55), 291-296, 2017. ISSN: 0015-0517.

9. Hajdu, L., **Szikszai, M.**, Ziegler, V.: On arithmetic progressions in Lucas sequences.
J. Integer Seq. 2017 (20), Article 17, 2017. EISSN: 1530-7638.

10. Dujella, A., Kazalicki, M., Mikić, M., **Szikszai, M.**: There are infinitely many rational Diophantine sextuples.
Int. Math. Res. Notices. 2017 (2), 490-508, 2017. ISSN: 1073-7928.
DOI: http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnv376
IF: 0.924 (2016)

Total IF of journals (all publications): 3,476
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,224

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

07 February, 2018