Doktori (PhD) értekezés tézisei

Kombinatorikus számok általánosításai

Szabó-Gyimesi Eszter

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2019

1. Bevezetés

A leszámláló kombinatorikában alapvetőek a Stirling- és a Bell-számok.

Az $\left[{n \atop k}\right]$ elsőfajú Stirling-szám azon S_n-beli permutációk számát adja meg, amelyek k darab diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak, míg az $\left\{{n \atop k}\right\}$ másodfajú Stirling-szám az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz k elemű osztályozásait számolja össze $(0 \leq k \leq n)$. Ha az előző halmaz összes osztályozásainak számára vagyunk kíváncsiak, akkor a B_n Bell-szám fogalmához jutunk $(n \geq 0)$, amelyekhez kapcsolódóan bevezethetők a $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^k$ Bell-polinomok is.

A Lah-számok közeli rokonai a Stirling-számoknak. Az $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ Lah-szám az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz elemeinek k darab rendezett osztályba történő osztályozásainak számát adja meg $(0 \leq k \leq n)$, tetszőleges számú rendezett osztály esetén pedig az L_n összegzett Lah-számok fogalmához jutunk $(n \geq 0)$. A fentiekhez hasonlóan értelmezhetők az $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^k$ Lah-polinomok is.

A Stirling- és Bell-típusú számoknak, valamint a Bell-típusú polinomoknak számos általánosítása létezik. Ezek közül az egyik leginkább ismert és vizsgált az úgynevezett r-általánosítás. Az r-általánosított kombinatorikus számok esetében mindig van r kitüntetett elem, amelyektől a ciklusokba, osztályokba és rendezett osztályokba sorolás során elvárjuk, hogy különböző ciklusokba, osztályokba, valamint rendezett osztályokba kerüljenek.

A Stirling-számok másik általánosítása az m-edrendű véges csoportokhoz konstruált Dowling-hálóhoz kapcsolódóan értelmezett első- és másodfajú Whitney-számok. Ezek speciálisan, a triviális csoport esetén, a Stirling-számokat adják vissza. Az r-Stirling- és a Whitney-számok közös általánosításaként adódnak az első- és másodfajú

r-Whitney-számok, amelyek segítségével definiálták az r-Whitney–Lah-számokat is. A Bell-számok és Bell-polinomok általánosításaként a másodfajú r-Whitney-számokhoz kapcsolódóan értelmezhetőek az r-Dowling-számok, valamint az r-Dowling-polinomok is.

Végül ismertetjük a Bell-számok egy további általánosítását. Amennyiben az osztályozás során az osztályok elemszámára egy s alsó korlátot adunk, az s-asszociált Bell-számok fogalmához jutunk. Ezek r-általánosított változatát eddig kizárólag a 2-asszociált esetben értelmezték. Megemlítjük még, hogy amennyiben a probléma permutációs megfelelőjét vizsgáljuk, és azt írjuk elő, hogy minden ciklus legalább 2 hosszúságú legyen, azaz a fixpontmentes permutációk számát akarjuk meghatározni, akkor a szubfaktoriálisok fogalmához jutunk.

Az értekezésben az eddigiek során ismertetett kombinatorikus számok általánosításainak vizsgálatával foglalkozunk. A dolgozat alapjául a [20], [22], [21], [19] és [23] cikkek szolgálnak.

A 2. fejezetben a másodfajú r-Stirling-számok új kombinatorikus interpretációjaként megmutatjuk, hogy a segítségükkel miként adható meg a Ramsey-elméletben alapvető jelentőséggel bíró kombinatorikus alterek száma.

A 3. fejezet az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokkal foglalkozik. A fejezet egyik legfontosabb eredményeként ismertetjük ezen számok új kombinatorikus interpretációit, amelyek speciális esetben illeszkednek a Stirling- és a Lah-számok kombinatorikus értelmezéséhez. Ezt követően ezeket definícióként használva az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokra számos új összefüggést igazolunk a lehető legáltalánosabb formában, továbbá új bizonyításokat adunk néhány korábban már ismert tulajdonságukra is.

A 4. fejezetben az r-Dowling-polinomok, valamint az általunk definiált r-Dowling–Lah-polinomok átfogó vizsgálatát adjuk. A kétféle polinom tulajdonságait párhuzamosan tárgyaljuk. A bizonyítások során az r-Dowling-polinomok esetében többször tudjuk alkalmazni a kombinatorikus interpretációjukat, míg az r-Dowling–Lah-polinomoknál alapvetően más, különféle algebrai átalakításokat használó eszközök működnek, amelyek elsősorban az előző fejezet eredményein alapulnak.

A disszertáció 5. és egyben zárófejezete s-asszociált r-Dowling-típusú számokkal foglalkozik. Először az úgynevezett r-kompozíciós formulát igazoljuk, amely segítségével egyszerűen meghatározhatjuk az r-Bell-típusú számok és az általánosításaik sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét. Ezt követően bevezetjük és az exponenciális generátorfüggvényeikből kiindulva vizsgáljuk az s-asszociált r-Dowling-számokat, az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokat, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokat.

2. r-Stirling- és r-Bell-típusú számok

Az $\left[{n \atop k}\right]_r$ elsőfajú és $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ másodfajú r-Stirling-számokat L. Carlitz [8], A. Z. Broder [6] és R. Merris [38], míg az $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ r-Lah-számokat Nyul G. és Rácz G. [47] definiálta. A másodfajú r-Stirling-számok összegeként adódó $B_{n,r}$ r-Bell-számokat L. Carlitz [8], valamint Mező I. [40] értelmezte, utóbbi szerző bevezette a $B_{n,r}\left(x\right)$ r-Bell-polinomokat is. Ennek mintájára az $L_{n,r}$ összegzett r-Lah-számokat és az $L_{n,r}\left(x\right)$ r-Lah-polinomokat Nyul G. és Rácz G. [48] definiálta.

2.1. Másodfajú r-Stirling-számok és kombinatorikus alterek

A kombinatorikus alterek fogalma fontos szerepet tölt be a Ramsey-elméletből ismert Hales–Jewett-tétel [24] általánosított változatában. Megmutatjuk, hogy a k dimenziós kombinatorikus alterek száma megadható a másodfajú r-Stirling-számok segítségével.

2.1. Tétel. *Legyen $1 \leq k \leq n$, $r \geq 1$ és A egy r elemű halmaz. Ekkor a k dimenziós kombinatorikus alterek száma A^n-ben $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$.*

3. r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok

T. A. Dowling [17] algebrai úton értelmezte a $w_m(n,k)$ elsőfajú és $W_m(n,k)$ másodfajú Whitney-számokat, amelyek a Stirling-számok általánosításai.

Mező I. [39] közös általánosítását adta az r-Stirling- és a Whitney-számoknak. Az elsőfajú r-Whitney-számokat az

$$m^n x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\,(mx-r)^k\,, \tag{1}$$

míg a másodfajú r-Whitney-számokat az

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k) m^k x^{\underline{k}} \tag{2}$$

egyenlőséggel definiálta.

G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] pedig a

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} w_{m,r}(n,j)\, W_{m,r}(j,k) \tag{3}$$

összefüggéssel vezették be az r-Whitney–Lah-számok fogalmát.

Az r-Whitney-típusú számokkal számos cikkben foglalkoztak, tisztán kombinatorikus jelentésükkel kapcsolatban azonban csak részleges eredményekkel találkozhatunk a szakirodalomban.

3.1. Kombinatorikus definíciók

A továbbiakban az alábbi, általunk megadott kombinatorikus interpretációkat használjuk definícióként.

3.1. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n+r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $w_{m,r}(n,k)$ jelölje azon S_{n+r}-beli színezett permutációk számát, amelyek $k+r$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak fel úgy, hogy

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző ciklusokba kerülnek,
- a ciklusok legkisebb elemei nincsenek színezve,
- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem ciklusában vannak, nincsenek színezve, ha a kitüntetett elemtől az adott elemig tartó ciklusív nem tartalmaz nála kisebb számot,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $w_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat **elsőfajú r-Whitney-számoknak**, és az ilyen permutációkat **r-Whitney-színezett permutációknak** nevezzük.

3.2. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n+r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $W_{m,r}(n,k)$ jelölje az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon $k+r$ elemű színezett osztályozásainak számát, ahol

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek,
- az osztályok legkisebb elemei nincsenek színezve,
- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem osztályában vannak, nincsenek színezve,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $W_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat **másodfajú r-Whitney-számoknak**, és az ilyen osztályozásokat **r-Whitney-színezett osztályozásoknak** nevezzük.

3.3. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $WL_{m,r}(n,k)$ jelölje az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon $k+r$ darab rendezett osztályba történő színezett osztályozásainak számát, ahol

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek,
- a rendezett osztályok legkisebb elemei nincsenek színezve,
- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem rendezett osztályában vannak, nincsenek színezve, ha a kitüntetett elem és az adott elem között nincs nála kisebb szám,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $WL_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat **r-Whitney–Lah-számoknak**, és az ilyen osztályozásokat **r-Whitney–Lah-színezett osztályozásoknak** nevezzük.

Speciális paraméterekkel

$$w_{m,1}(n,k) = w_m(n,k)\,,\ w_{1,r}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r,$$

$$w_{1,0}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},\ w_{m,0}(n,k) = m^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

továbbá hasonló áll fenn a másodfajú r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokra is.

3.2. Tulajdonságok és azonosságok

Az eredmények ismertetése során $(x|m)^{\overline{n}}$ és $(x|m)^{\underline{n}}$ rendre az m differenciájú emelkedő és süllyedő faktoriálisokat fogja jelölni.

A legkisebb és legnagyobb lehetséges k értékekre az alábbi speciális értékek adódnak:

- $w_{m,r}(n,0) = (r|m)^{\overline{n}}$, $W_{m,r}(n,0) = r^n$, $WL_{m,r}(n,0) = (2r|m)^{\overline{n}}$
- $W_{m,r}(n,1) = \frac{1}{m}\left((m+r)^n - r^n\right)$,
  $WL_{m,r}(n,1) = \frac{1}{m}\left((m+2r|m)^{\overline{n}} - (2r|m)^{\overline{n}}\right)$ $(n \geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n-1) = W_{m,r}(n,n-1) = m\binom{n}{2} + rn$,
  $WL_{m,r}(n,n-1) = mn(n-1) + 2rn$ $(n \geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n) = W_{m,r}(n,n) = WL_{m,r}(n,n) = 1$

A következő tételben és következményben polinomos azonosságokat ismertetünk. Megjegyezzük, hogy az első két formula ekvivalens az (1) és (2) egyenlőségekkel, amelyek Mező I. [39] definícióiként szolgáltak.

3.4. Tétel. *Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor*

$$(x+r|m)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, x^k,$$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}},$$

$$(x+2r|m)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}}.$$

3.5. Következmény. *Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor*

$$(x-r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, w_{m,r}(n,k)\, x^k,$$

$$(x-r)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, W_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\overline{k}},$$

$$(x-2r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, WL_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\overline{k}}.$$

Megjegyzés. A tétel speciálisan megadja az elsőfajú r-Whitney-számok összegét rögzített n esetén:

$$\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k) = (r+1|m)^{\overline{n}}.$$

A következő tételben az r-Whitney-típusú számokra vonatkozó rekurziókat ismertetjük.

3.6. Tétel. *Ha* $1 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k) = w_{m,r}(n,k-1) + (mn+r)\, w_{m,r}(n,k),$$

$$W_{m,r}(n+1,k) = W_{m,r}(n,k-1) + (mk+r)\, W_{m,r}(n,k),$$

$$WL_{m,r}(n+1,k) = WL_{m,r}(n,k-1) + (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k).$$

Az alábbiakban függőleges rekurziókat adunk az r-Whitney-típusú számokra vonatkozóan.

3.7. Tétel. *Ha* $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (mn+r|m)^{\underline{n-j}}\, w_{m,r}(j,k),$$

$$W_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(k+1)+r)^{n-j}\, W_{m,r}(j,k),$$

$$WL_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(n+k+1)+2r|m)^{\underline{n-j}}\, WL_{m,r}(j,k).$$

A másodfajú r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számokra a következő explicit formula bizonyítható.

3.8. Tétel. *Ha* $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+r)^n,$$

$$WL_{m,r}(n,k)=\frac{1}{m^k k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\left(m(k-j)+2r|m\right)^{\overline{n}}.$$

Az r-Whitney–Lah-számokra a fentinél egyszerűbb explicit formula is létezik.

3.9. Tétel. *Ha* $0\le k\le n$ *és* $r,m\ge 1$, *akkor*

$$WL_{m,r}(n,k)=\binom{n}{k}\frac{(2r|m)^{\overline{n}}}{(2r|m)^{\overline{k}}}.$$

Az alábbi állítás a későbbi tételek bizonyítása során bizonyul hasznosnak.

3.10. Tétel. *Ha* $0\le k\le n$, $r\ge 0$ *és* $m,l\ge 1$, *akkor*

$$l^{n-k}w_{m,r}(n,k)=w_{ml,lr}(n,k),$$

$$l^{n-k}W_{m,r}(n,k)=W_{ml,lr}(n,k),$$

$$l^{n-k}WL_{m,r}(n,k)=WL_{ml,lr}(n,k).$$

A következőkben egy Spivey-típusú formulát adunk az r-Whitney-típusú számokra vonatkozóan.

3.11. Tétel. *Ha* $t,n,k,r,s\ge 0$, $k\le t+n$ *és* $m,l\ge 1$, *akkor*

$$l^n m^k w_{m,r}(t+n,k)=\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n}w_{m,r}(t,i)\binom{n}{j}l^{k-i}m^{i+j}\cdot w_{l,s}(j,k-i)\left(mlt+lr-ms|ml\right)^{\overline{n-j}},$$

$$l^n m^k W_{m,r}(t+n,k)=\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n}W_{m,r}(t,i)\binom{n}{j}l^{k-i}m^{i+j}\cdot W_{l,s}(j,k-i)\left(mli+lr-ms\right)^{n-j},$$

$$l^n m^k WL_{m,r}(t+n,k) = \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \cdot WL_{l,s}(j,k-i)\left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}.$$

Ha az előző tételben $t=0$, akkor az alábbi összefüggésekhez jutunk az m színes r-Whitney- és az l színes s-Whitney-típusú számok között.

3.12. Következmény. *Ha* $0 \leq k \leq n$, $r,s \geq 0$ *és* $m,l \geq 1$, *akkor*

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} w_{l,s}(j,k)\left(lr-ms|ml\right)^{\overline{n-j}},$$

$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} W_{l,s}(j,k)\left(lr-ms\right)^{n-j},$$

$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} WL_{l,s}(j,k)\left(2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. A paraméterek speciális megválasztásával az m színes r-Whitney-számokat ki tudjuk fejezni m színes s-Whitney-számokkal, l színes r-Whitney-számokkal, l illetve m színes Whitney-számokkal, s-Stirling-számokkal, r-Stirling-számokkal, továbbá klasszikus Stirling-számokkal, és ugyanez fennáll az r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan is.

Ha a Spivey-típusú formulában $t=1$, $l=m$ és $s=r$, akkor az alábbi rekurziós formulák adódnak.

3.13. Következmény. *Ha* $1 \leq k \leq n+1$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k) = r\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k)\, m^{n-j}(n-j)! + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k-1)\, m^{n-j}(n-j)!,$$

$$W_{m,r}(n+1,k) = rW_{m,r}(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} W_{m,r}(j,k-1)\, m^{n-j},$$

$$\begin{aligned} WL_{m,r}(n+1,k) = {} & 2r \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} WL_{m,r}(j,k)\, m^{n-j} (n-j)! \\ & + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} WL_{m,r}(j,k-1)\, m^{n-j} (n-j+1)!. \end{aligned}$$

A következő tételben újabb összefüggéseket ismertetünk az m színes r-Whitney- és l színes s-Whitney-típusú számok között.

3.14. Tétel. *Ha* $0 \le k \le n$*,* $r, s \ge 0$ *és* $m, l \ge 1$*, akkor*

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j} w_{l,s}(n,j) \binom{j}{k} (lr - ms)^{j-k},$$

$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j} W_{l,s}(n,j) \binom{j}{k} (lr - ms|ml)^{\underline{j-k}},$$

$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j} WL_{l,s}(n,j) \binom{j}{k} (2lr - 2ms|ml)^{\underline{j-k}}.$$

Az alábbiakban egy binomiális konvolúciós azonosságot adunk meg az m színes r-Whitney- és az l színes s-Whitney-típusú számokra.

3.15. Tétel. *Ha* $n, k, h, r, s \ge 0$*,* $k + h \le n$ *és* $m, l \ge 1$*, akkor*

$$\begin{aligned} \binom{k+h}{k} w_{ml,lr+ms}(n,k+h) = {} & \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} w_{m,r}(j,k) \\ & \cdot w_{l,s}(n-j,h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{k+h}{k} W_{ml,lr+ms}(n,k+h) = {} & \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} W_{m,r}(j,k) \\ & \cdot W_{l,s}(n-j,h), \end{aligned}$$

$$\binom{k+h}{k} WL_{ml,lr+ms}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} WL_{m,r}(j,k) \cdot WL_{l,s}(n-j,h).$$

A következő tétel az r-Whitney-típusú számok általánosított ortogonalitásáról szóló eredményeket tartalmazza.

3.16. Tétel. *Legyen* $0 \le k \le n$, $r, s \ge 0$ *és* $m, l \ge 1$. *Ekkor*

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr - ms|ml)^{\overline{n-k}},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) w_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr - ms)^{n-k},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-k}}.$$

Az alábbiakban további kapcsolatokat ismertetünk az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számok között.

3.17. Tétel. *Legyen* $0 \le k \le n$, $r, s \ge 0$ *és* $m, l \ge 1$. *Ekkor*

$$w_{ml,2lr-ms}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j) w_{l,s}(j,k),$$

ha $2lr \ge ms$,

$$W_{ml,2ms-lr}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k),$$

ha $2ms \ge lr$,

$$WL_{ml,\frac{lr+ms}{2}}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k),$$

ha lr *és* ms *azonos paritású.*

Megjegyzés. Amennyiben az utolsó összefüggésben feltesszük, hogy $l = m$ és $s = r$, a (3) egyenlőséget kapjuk, amely az r-Whitney–Lah-számok G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] által megadott eredeti definíciója.

Az r-Whitney-típusú számokat elő lehet állítani szimmetrikus polinomok segítségével.

3.18. Tétel. *Ha* $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{n-k} \leq k} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{n-k} \leq k} \prod_{j=1}^{n-k} ((2i_j + j - 1) m + 2r),$$

vagyis $w_{m,r}(n,k)$ *az* $r, m+r, \ldots, (n-1)m+r$ *számok* $(n-k)$*-adik elemi szimmetrikus polinomja, míg* $W_{m,r}(n,k)$ *az* $r, m+r, \ldots, km+r$ *számok* $(n-k)$*-adik teljes szimmetrikus polinomja.*

Ismert, hogy az elsőfajú és a másodfajú r-Whitney-számok véges sorozata rögzített n esetén szigorúan log-konkáv. Ugyanez az állítás az r-Whitney–Lah-számokra is igazolható.

3.19. Tétel. *Legyen* $n, m \geq 1$ *és* $r \geq 0$. *Ekkor a* $(WL_{m,r}(n,k))_{k=0}^{n}$ *sorozat szigorúan log-konkáv, így unimodális.*

A következő tétel az első- és másodfajú r-Whitney-transzformáció, az r-Whitney–Lah-transzformáció, valamint az inverzeik közötti kapcsolatokat írja le.

3.20. Tétel. *Legyenek* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *komplex számsorozatok és legyen* $r \geq 0$, $m \geq 1$. *Ekkor*

- $b_n = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, a_k$ $(n \geq 0)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} W_{m,r}(n,k)\, b_k$ $(n \geq 0)$,

- $b_n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\, a_k$ $(n \geq 0)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} w_{m,r}(n,k)\, b_k$ $(n \geq 0)$,

- $b_n = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, a_k$ $(n \geq 0)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} WL_{m,r}(n,k)\, b_k$ $(n \geq 0)$.

Az alábbi tétel szerint az r-Whitney-típusú transzformációk megőrzik a sorozatok log-konvexitását.

3.21. Tétel. *Nemnegatív valós log-konvex számsorozatok első- és másodfajú r-Whitney-transzformáltja, valamint r-Whitney–Lah-transzformáltja szintén log-konvex.*

4. r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok

A másodfajú Whitney-számok összegeként M. Benoumhani [2], [3] vezette be a $D_{n,m}$ Dowling-számokat, valamint hozzájuk kapcsolódóan a $D_{n,m}(x)$ Dowling-polinomokat. Az r-Bell- és a Dowling-polinomok közös általánosításaként adódó r-Dowling-polinomok fogalma pedig G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] nevéhez köthető.

A következőkben az r-Whitney–Lah-számok segítségével az r-Lah-polinomoknak is értelmezzük a Dowling-típusú általánosítását, az r-Dowling–Lah-polinomokat.

4.1. Definíciók és kombinatorikus interpretációk

4.1. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)x^k$$

polinomot r**-Dowling-polinomnak** nevezzük.

4.2. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a

$$DL_{n,m,r}\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}\left(n,k\right)x^k$$

polinomot r**-Dowling–Lah-polinomnak** nevezzük.

Ha $n+r \geq 1$, akkor az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-polinomokra az előző fejezet eredményei alapján az alábbi kombinatorikus interpretációk adhatóak: $D_{n,m,r}\left(c\right)$ és $DL_{n,m,r}\left(c\right)$ az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett, illetve r-Whitney–Lah-színezett osztályozásainak a számát adja meg, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok, valamint rendezett osztályok legkisebb elemei is színezve vannak c színnel ($c \geq 1$).

Ha a fenti interpretációkban $c = 1$, akkor a legkisebb elemek egy színnel történő kiegészítő színezése lényegében egybeesik azzal, hogy egyáltalán nem színezzük őket. Ekkor $D_{n,m,r} = D_{n,m,r}(1)$-et r-Dowling-számnak, míg $DL_{n,m,r} = DL_{n,m,r}(1)$-et r-Dowling–Lah-számnak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy

$$D_{n,m,1}(x) = D_{n,m}(x), \quad D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x), \quad D_{n,1,0}(x) = B_n(x),$$

továbbá hasonló áll fenn az r-Dowling–Lah-polinomokra is.

4.2. Tulajdonságok és azonosságok

Az alábbi tétel számos eredmény bizonyítása során hasznos.

4.3. Tétel. *Ha* $n, r \geq 0$ *és* $m, l \geq 1$, *akkor*

$$D_{n,ml,lr}(lx) = l^n D_{n,m,r}(x),$$

$$DL_{n,ml,lr}(lx) = l^n DL_{n,m,r}(x).$$

A következőkben megadjuk az r-Dowling-típusú polinomokra vonatkozó Spivey-típusú formulát a lehető legáltalánosabb alakban.

4.4. Tétel. *Ha* $t, n, r, s \geq 0$ *és* $m, l \geq 1$, *akkor*

$$l^n D_{t+n,m,r}(mx) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} W_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx) \cdot (mli + lr - ms)^{n-j}(mx)^i,$$

$$l^n DL_{t+n,m,r}(mx) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx) \cdot (ml(t+i) + 2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}}(mx)^i.$$

Amennyiben a tételben $t = 0$, az alábbi kapcsolatokhoz jutunk az m színes r-Dowling- és l színes s-Dowling-típusú polinomok között.

4.5. Következmény. *Ha* $n, r, s \geq 0$ *és* $m, l \geq 1$, *akkor*

$$l^n D_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx)(lr - ms)^{n-j},$$

$$l^n DL_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx)(2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. A paraméterek speciális megválasztásával az m színes r-Dowling-polinomokat ki tudjuk fejezni az m színes s-Dowling-polinomokkal, az l színes r-Dowling-polinomokkal, az l és m színes

Dowling-polinomokkal, az s-Bell-polinomokkal, az r-Bell-polinomokkal, valamint a Bell-polinomokkal, továbbá hasonló összefüggések adódnak az r-Dowling–Lah-polinomok esetében is.

A Spivey-típusú formula $t=1$, $l=m$ és $s=r$ esetén egy rekurziós formulát ad eredményül.

4.6. Következmény. *Ha $n,r\geq 0$ és $m\geq 1$, akkor*

$$D_{n+1,m,r}\left(x\right)=rD_{n,m,r}\left(x\right)+x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_{j,m,r}\left(x\right)m^{n-j},$$

$$\begin{aligned}DL_{n+1,m,r}\left(x\right)=2r&\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}\left(x\right)m^{n-j}\left(n-j\right)!\\&+x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}\left(x\right)m^{n-j}\left(n-j+1\right)!.\end{aligned}$$

Végül egy Carlitz-típusú formula is adódik.

4.7. Következmény. *Ha $t,n,r\geq 0$ és $m\geq 1$, akkor*

$$D_{t+n,m,r}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{t}W_{m,r}\left(t,i\right)D_{n,m,r+mi}\left(x\right)x^{i},$$

továbbá ha azt is feltesszük, hogy m páros, akkor

$$DL_{t+n,m,r}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{t}WL_{m,r}\left(t,i\right)DL_{n,m,r+\frac{mi+mt}{2}}\left(x\right)x^{i}.$$

Az r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozóan a következő másodrendű rekurziós formula igazolható.

4.8. Tétel. *Ha $r\geq 0$ és $n,m\geq 1$, akkor*

$$\begin{aligned}&DL_{n+1,m,r}\left(x\right)\\&\quad=\left(x+2mn+2r\right)DL_{n,m,r}\left(x\right)-mn\left(mn+2r-m\right)DL_{n-1,m,r}\left(x\right).\end{aligned}$$

Az alábbi addíciós tételben egy binomiális konvolúciós összefüggést adunk meg az m színes r-Dowling- és az l színes s-Dowling-típusú polinomokra.

4.9. Tétel. *Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor*

$$D_{n,ml,lr+ms}\left(ml\left(x+y\right)\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} D_{j,m,r}\left(mx\right) D_{n-j,l,s}\left(ly\right),$$

$$DL_{n,ml,lr+ms}\left(ml\left(x+y\right)\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} DL_{j,m,r}\left(mx\right) DL_{n-j,l,s}\left(ly\right).$$

A következőkben az r-Dowling-típusú polinomokra vonatkozó Dobiński-típusú formulát ismertetjük.

4.10. Tétel. *Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor*

$$D_{n,m,r}\left(x\right) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(mj+r\right)^n}{m^j j!} x^j,$$

$$DL_{n,m,r}\left(x\right) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(mj+2r|m\right)^{\overline{n}}}{m^j j!} x^j.$$

Az alábbi tételben megadjuk az r-Dowling-típusú polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét.

4.11. Tétel. *Ha $r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}\left(x\right)}{n!} y^n = \exp\left(ry + \frac{\exp\left(my\right) - 1}{m} x\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}\left(x\right)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1-my}\right) \left(1-my\right)^{-\frac{2r}{m}}.$$

Ismert, hogy az r-Dowling-polinomok gyökei valósak. Az alábbiak szerint hasonló állítás igaz az r-Dowling–Lah-polinomok gyökeire vonatkozóan.

4.12. Tétel. *Legyen $r \geq 0$ és $n, m \geq 1$. Ekkor a $DL_{n,m,r}(x)$ polinom gyökei valósak és egyszeresek, továbbá $r \geq 1$ esetén mindegyik gyök negatív, míg $r = 0$ esetén az egyik gyök 0 és a többi negatív.*

A következő tételben különböző kapcsolatokat ismertetünk az r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok között.

4.13. Tétel. *Legyen $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$. Ekkor*

$$D_{n,ml,2ms-lr}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^j W_{m,r}(n,j) DL_{j,l,s}(lx),$$

ha $2ms \geq lr$,

$$DL_{n,ml,\frac{lr+ms}{2}}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) D_{j,l,s}(lx),$$

ha lr és ms azonos paritású.

Végül azt mutatjuk meg, hogy az r-Dowling-típusú számok sorozatai log-konvexek.

4.14. Tétel. *Legyen $r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a $(D_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ és a $(DL_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozatok log-konvexek.*

5. s-asszociált r-Dowling-típusú számok

Habár a $B_n^{\geq s}$ s-asszociált Bell-számok több cikkben is megtalálhatók, a $B_{n,r}^{\geq s}$ s-asszociált r-Bell-számok egyedül F. T. Howard [27] munkájában lelhetőek fel, aki azonban kizárólag az $s = 2$ esettel foglalkozott.

Az asszociált Bell-számok permutációs változataként adódó $A_n^{\geq s}$ s-asszociált faktoriálisokat általánosított szubfaktoriálisoknak nevezik a szakirodalomban. Ezek egyfajta r-általánosítását a közelmúltban a [62] és [43] cikkekben vizsgálták.

Hasonlóan értelmezhetjük az $L_n^{\geq s}$ s-asszociált összegzett Lah-, valamint az $L_{n,r}^{\geq s}$ s-asszociált összegzett r-Lah-számokat is, ezekkel azonban eddig még nem foglalkoztak.

5.1. Az r-kompozíciós formula

A következő tételben megadjuk az exponenciális generátorfüggvényekre vonatkozó r-kompozíciós formulát. ($\mathbb{N}_0$ a nemnegatív egész számok halmazát, míg $\mathbb{K}$ egy 0 karakterisztikájú testet jelöl.)

5.1. Tétel. *Legyenek $f_1, f_2, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ olyan függvények, melyekre $f_2(0) = 0$ és $g(0) = 1$. Az exponenciális generátorfüggvényüket jelölje rendre $F_1(x)$, $F_2(x)$ és $G(x)$. A $h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ függvényt definiáljuk a következőképpen: $h(0) = 1$, és $n \geq 1$ esetén legyen*

$$h(n) = \sum f_1(|Y_1|) \cdots f_1(|Y_r|)\, f_2(|Z_1|) \cdots f_2(|Z_k|)\, g(k),$$

ahol az összegzést az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz összes $\{Y_1 \cup \{1\}, \ldots, Y_r \cup \{r\}, Z_1, \ldots, Z_k\}$ alakú osztályozására végezzük el. Ekkor h exponenciális generátorfüggvénye

$$H(x) = (F_1(x))^r\, G(F_2(x)).$$

5.2. Kombinatorikus definíciók

5.2. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $s, m \geq 1$. Ekkor $D_{n,m,r}^{\geq s}$ jelölje az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett osztályozásainak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok elemszáma legalább s. Legyen továbbá $D_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. Ezeket a számokat **s-asszociált r-Dowling-számoknak** nevezzük.

5.3. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $s, m \geq 1$. Ekkor $DA_{n,m,r}^{\geq s}$ jelölje S_{n+r} azon m színes r-Whitney-színezett permutációinak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó ciklusok hossza legalább s. Legyen továbbá $DA_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. Ezeket a számokat **s-asszociált r-Dowling-faktoriálisoknak** nevezzük.

5.4. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $s, m \geq 1$. Ekkor $DL_{n,m,r}^{\geq s}$ jelölje az $\{1, \ldots, n + r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney–Lah-színezett osztályozásainak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok elemszáma legalább s. Legyen továbbá $DL_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. Ezeket a számokat **s-asszociált r-Dowling–Lah-számoknak** nevezzük.

Értelemszerűen

$$D_{n,m,r}^{\geq 1} = D_{n,m,r}, \quad D_{n,1,r}^{\geq s} = B_{n,r}^{\geq s}, \quad D_{n,1,0}^{\geq s} = B_{n}^{\geq s},$$

továbbá hasonló kapcsolatok állnak fenn az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokra, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokra vonatkozóan is.

5.3. Tulajdonságok és azonosságok

Az r-kompozíciós formula segítségével meghatározhatjuk az s-asszociált r-Dowling-típusú számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét.

5.5. Tétel. *Ha $r \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = \exp\left(rx + \frac{\exp(mx) - 1}{m}\right) \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j!} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DA_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = (1 - mx)^{-\frac{r+1}{m}} \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n$$
$$= (1-mx)^{-\frac{2r}{m}} \exp\left(\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1-mx}-1\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s-1}(mx)^j\right).$$

Az alábbiakban rekurziós összefüggéseket adunk az s-asszociált r-Dowling-típusú számokra.

5.6. Tétel. *Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ és $n \geq s-1$, akkor*

$$D_{n+1,m,r}^{\geq s} = rD_{n,m,r}^{\geq s} + \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} D_{j,m,r}^{\geq s} m^{n-j},$$

$$DA_{n+1,m,r}^{\geq s} = r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA_{j,m,r}^{\geq s} m^{n-j}(n-j)! + \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DA_{j,m,r}^{\geq s} m^{n-j}(n-j)!,$$

$$DL_{n+1,m,r}^{\geq s} = 2r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL_{j,m,r}^{\geq s} m^{n-j}(n-j)! + \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DL_{j,m,r}^{\geq s} m^{n-j}(n-j+1)!.$$

Az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokra és s-asszociált r-Dowling–Lah-számokra vonatkozóan rögzített rendű rekurziós formulákat is bizonyíthatunk.

5.7. Tétel. *Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ és $n \geq s-1$, akkor*

$$DA_{n+1,m,r}^{\geq s} = (mn+r)\, DA_{n,m,r}^{\geq s} + (mn|m)^{\underline{s-1}}\, DA_{n-s+1,m,r}^{\geq s}.$$

Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ és $n \geq s$, akkor

$$\begin{aligned} DL^{\geq s}_{n+1,m,r} &= (2mn + 2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r} \\ &- mn\,(mn - m + 2r)\, DL^{\geq s}_{n-1,m,r} - (s-1)\,(mn|m)^{\underline{s}}\, DL^{\geq s}_{n-s,m,r}. \end{aligned}$$

A következő tételben s-asszociált r-Dowling- és s-asszociált r'-Dowling-típusú számok közötti kapcsolatokat mutatunk be.

5.8. Tétel. *Ha $n \geq 0$, $r \geq r' \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor*

$$D^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r'} \left(r - r'\right)^{n-j},$$

$$DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r'} \left(r - r'|m\right)^{\overline{n-j}},$$

$$DL^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r'} \left(2r - 2r'|m\right)^{\overline{n-j}}.$$

Az alábbiakban az s-asszociált r-Dowling-típusú számokra vonatkozó Dobiński-típusú formulákat ismertetjük.

5.9. Tétel. *Ha $n, r \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor*

$$D^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} (mk + r)^l \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j!}\right)^{i_j},$$

$$DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{*} \frac{n!}{l!} (r + 1|m)^{\overline{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j}\right)^{i_j},$$

$$DL^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} (mk + 2r|m)^{\overline{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-m^{j-1}\right)^{i_j},$$

ahol a $*$ szimbólummal jelölt összegzést az összes olyan nemnegatív egészekből álló $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, l)$ rendezett s-esre végezzük el, amelyre teljesül, hogy $i_1 + 2i_2 + \cdots + (s-1)\, i_{s-1} + l = n$.

Érdekes következménye az eddigieknek, hogy a 2-asszociált r-Dowling-számok megegyeznek az $(r-1)$-Dowling-számokkal.

5.10. Következmény. *Ha* $n \geq 0$ *és* $r, m \geq 1$, *akkor* $D^{\geq 2}_{n,m,r} = D_{n,m,r-1}$.

1 Introduction

Stirling and Bell numbers are fundamental in enumerative combinatorics.

The Stirling number of the first kind $\left[{n \atop k}\right]$ gives the number of permutations in S_n which are the product of k disjoint cycles, while the Stirling number of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$ counts the partitions of $\{1, \ldots, n\}$ into k nonempty subsets $(0 \leq k \leq n)$. If we are interested in the total number of partitions of the previous set, then we arrive at the notion of Bell numbers B_n $(n \geq 0)$. In connection with them, the Bell polynomials $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^k$ can be introduced.

Lah numbers are close relatives of Stirling numbers. The Lah number $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ is the number of partitions of $\{1, \ldots, n\}$ into k nonempty ordered subsets $(0 \leq k \leq n)$. If the number of ordered blocks is not fixed, then we get to the notion of summed Lah numbers L_n $(n \geq 0)$. Lah polynomials $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor x^k$ can be defined, analogously.

Stirling- and Bell-type numbers, as well as Bell-type polynomials have several generalizations. One of the most known and studied among them is the so-called r-generalization. In the case of r-generalized combinatorial numbers, there exist r distinguished elements, which have to belong to distinct cycles, blocks or ordered blocks.

Another generalizations of Stirling numbers are Whitney numbers of the first and second kind. They were introduced in connection with the Dowling lattice constructed for a finite group of order m. In the special case of the trivial group, they give back the Stirling numbers. As common generalizations of r-Stirling and Whitney numbers, we obtain r-Whitney numbers of the first and second kind. With the help of them, the r-Whitney–Lah numbers were also defined. As a generalization of Bell numbers and polynomials, in connection with

r-Whitney numbers of the second kind, the r-Dowling numbers and r-Dowling polynomials can be introduced.

Finally, we present a further generalization of Bell numbers. If a lower bound s is prescribed for the cardinality of the blocks, then we get the s-associated Bell numbers. Their r-generalization was studied only in the 2-associated case. We note that if we consider the permutational variant and we suppose that the length of every cycle is at least 2, or in other words, we want to determine the number of fixed-point-free permutations, then we obtain the notion of subfactorials.

In the dissertation, we examine generalizations of the previously described combinatorial numbers. The results are based on the papers [20], [22], [21], [19] and [23].

In Section 2, as a new combinatorial interpretation of r-Stirling numbers of the second kind, we show that the number of combinatorial subspaces, which are fundamental in Ramsey theory, can be given using them.

In Section 3, we discuss r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers. As one of the most important results of the section, we give new combinatorial interpretations of these numbers, which correspond better with the combinatorial meaning of Stirling and Lah numbers. Then, using these as definitions, we derive several new results for r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers in their most general forms, and we give new proofs for some already known properties.

In Section 4, we define r-Dowling–Lah polynomials, and give a comprehensive study of their properties together with r-Dowling polynomials. In the proofs, we can often rely on the combinatorial interpretation in case of r-Dowling polynomials, however for r-Dowling–Lah polynomials, we need to apply other approaches, mainly algebraic manipulations based on the results of the previous section.

The subjects of the final Section 5 of the dissertation are the s-associated r-Dowling-type numbers. First, we prove the so-called r-compositional formula, a useful tool that allows us to derive the exponential generating function of the sequences of r-Bell-type numbers and their generalizations. After that, we introduce the s-associated r-Dowling numbers, the s-associated r-Dowling factorials, along with the s-associated r-Dowling–Lah numbers, and study them based on their exponential generating functions.

2 r-Stirling- and r-Bell-type numbers

The r-Stirling numbers of the first kind $\left[{n \atop k}\right]_r$ and the r-Stirling numbers of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ were defined by L. Carlitz [8], A. Z. Broder [6] and R. Merris [38], while the r-Lah numbers $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ by G. Nyul and G. Rácz [47]. The r-Bell numbers $B_{n,r}$, which are the sum of r-Stirling numbers of the second kind, were introduced by L. Carlitz [8] and I. Mező [40]. The latter author also defined the r-Bell polynomials $B_{n,r}(x)$. Similarly, the summed r-Lah numbers $L_{n,r}$ and r-Lah polynomials $L_{n,r}(x)$ are due to G. Nyul and G. Rácz [48].

2.1 r-Stirling numbers of the second kind and combinatorial subspaces

The notion of combinatorial subspaces plays a fundamental role in the generalized form of the Hales–Jewett theorem [24], known from Ramsey theory. We show that the number of k-dimensional combinatorial subspaces can be given by the r-Stirling numbers of the second kind.

Theorem 2.1. *Let $1 \leq k \leq n$, $r \geq 1$ and A be an r-element set. Then the number of k-dimensional combinatorial subspaces in A^n is $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$.*

3 r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers

T. A. Dowling [17] introduced Whitney numbers of the first kind $w_m(n,k)$ and Whitney numbers of the second kind $W_m(n,k)$ from an algebraic point of view, which are generalizations of Stirling numbers.

I. Mező [39] gave a common generalization of r-Stirling numbers and Whitney numbers. He defined r-Whitney numbers of the first kind by equation

$$m^n x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\,(mx-r)^k\,, \tag{1}$$

while r-Whitney numbers of the second kind by

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k) m^k x^{\underline{k}}. \tag{2}$$

Later, G.-S. Cheon and J.-H. Jung [9] introduced the r-Whitney–Lah numbers by identity

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} w_{m,r}(n,j)\, W_{m,r}(j,k)\,. \tag{3}$$

The r-Whitney-type numbers were studied in numerous papers, however only partial results can be found in the literature regarding their purely combinatorial meaning.

3.1 Combinatorial definitions

We use our following combinatorial interpretations as definitions hereafter.

Definition 3.1. Let $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n+r \geq 1$ and $m \geq 1$. Denote by $w_{m,r}(n,k)$ the number of coloured permutations in S_{n+r} which are the product of $k+r$ disjoint cycles such that

- the distinguished elements $1, \ldots, r$ belong to distinct cycles,
- the smallest elements of the cycles are not coloured,
- an element in a cycle containing a distinguished element is not coloured if there are no smaller numbers on the arc from the distinguished element to this element,
- the remaining elements are coloured with m colours.

Moreover, let $w_{m,0}(0,0) = 1$. We call these numbers **r-Whitney numbers of the first kind**, and such permutations **r-Whitney coloured permutations**.

Definition 3.2. Let $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n+r \geq 1$ and $m \geq 1$. Denote by $W_{m,r}(n,k)$ the number of coloured partitions of $\{1, \ldots, n+r\}$ into $k+r$ nonempty subsets such that

- the distinguished elements $1, \ldots, r$ belong to distinct blocks,
- the smallest elements of the blocks are not coloured,
- elements in blocks containing a distinguished element are not coloured,
- the remaining elements are coloured with m colours.

Moreover, let $W_{m,0}(0,0) = 1$. We call these numbers **r-Whitney numbers of the second kind**, and such partitions **r-Whitney coloured partitions**.

Definition 3.3. Let $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n+r \geq 1$ and $m \geq 1$. Denote by $WL_{m,r}(n,k)$ the number of coloured partitions of $\{1,\ldots,n+r\}$ into $k+r$ nonempty ordered subsets such that

- the distinguished elements $1,\ldots,r$ belong to distinct ordered blocks,
- the smallest elements of the ordered blocks are not coloured,
- an element in an ordered block containing a distinguished element is not coloured if there are no smaller numbers between the distinguished element and this element,
- the remaining elements are coloured with m colours.

Moreover, let $WL_{m,0}(0,0) = 1$. We call these numbers **r-Whitney–Lah numbers**, and such partitions **r-Whitney–Lah coloured partitions**.

With special choices of parameters,

$$w_{m,1}(n,k) = w_m(n,k)\,,\ w_{1,r}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r,$$
$$w_{1,0}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},\ w_{m,0}(n,k) = m^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},$$

and these hold similarly for r-Whitney numbers of the second kind and r-Whitney–Lah numbers.

3.2 Properties and identities

When explaining our results, $(x|m)^{\overline{n}}$ and $(x|m)^{\underline{n}}$ denote the rising and falling factorials with difference m, respectively.

For the smallest and largest possible values of k, we obtain the following special values:

- $w_{m,r}(n,0) = (r|m)^{\overline{n}}$, $W_{m,r}(n,0) = r^n$, $WL_{m,r}(n,0) = (2r|m)^{\overline{n}}$
- $W_{m,r}(n,1) = \frac{1}{m}((m+r)^n - r^n)$,
  $WL_{m,r}(n,1) = \frac{1}{m}\left((m+2r|m)^{\overline{n}} - (2r|m)^{\overline{n}}\right)$ $(n \geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n-1) = W_{m,r}(n,n-1) = m\binom{n}{2} + rn$,
  $WL_{m,r}(n,n-1) = mn(n-1) + 2rn$ $(n \geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n) = W_{m,r}(n,n) = WL_{m,r}(n,n) = 1$

In the following theorem and corollary, we present polynomial identities. We note that equivalent formulations (1) and (2) of the first two equations serve as definitions by I. Mező [39].

Theorem 3.4. *If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$(x+r|m)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, x^k,$$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}},$$

$$(x+2r|m)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}}.$$

Corollary 3.5. *If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$(x-r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, w_{m,r}(n,k)\, x^k,$$

$$(x-r)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, W_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\overline{k}},$$

$$(x-2r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, WL_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\overline{k}}.$$

Remark. Especially, the theorem gives that the sum of r-Whitney numbers of the first kind with fixed n is

$$\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k) = (r+1|m)^{\overline{n}}.$$

In the following theorem, we give recurrence relations of r-Whitney-type numbers.

Theorem 3.6. *If $1 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$w_{m,r}(n+1,k) = w_{m,r}(n,k-1) + (mn+r)\, w_{m,r}(n,k),$$
$$W_{m,r}(n+1,k) = W_{m,r}(n,k-1) + (mk+r)\, W_{m,r}(n,k),$$
$$WL_{m,r}(n+1,k) = WL_{m,r}(n,k-1) + (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k).$$

Below, we present vertical recurrences for r-Whitney-type numbers.

Theorem 3.7. *If $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$w_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (mn+r|m)^{\underline{n-j}}\, w_{m,r}(j,k),$$

$$W_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(k+1)+r)^{n-j}\, W_{m,r}(j,k),$$

$$WL_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(n+k+1)+2r|m)^{\underline{n-j}}\, WL_{m,r}(j,k).$$

The following explicit formula can be proved for the r-Whitney numbers of the second kind and r-Whitney–Lah numbers.

Theorem 3.8. *If $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+r)^n,$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+2r|m)^{\overline{n}}.$$

A simpler explicit formula exists for r-Whitney–Lah numbers.

Theorem 3.9. *If* $0 \le k \le n$ *and* $r, m \ge 1$*, then*

$$WL_{m,r}(n,k) = \binom{n}{k} \frac{(2r|m)^{\overline{n}}}{(2r|m)^{\overline{k}}}.$$

The following statement will be useful in the proofs of subsequent theorems.

Theorem 3.10. *If* $0 \le k \le n$*,* $r \ge 0$ *and* $m, l \ge 1$*, then*

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = w_{ml,lr}(n,k),$$

$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = W_{ml,lr}(n,k),$$

$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = WL_{ml,lr}(n,k).$$

Now, we give a Spivey-type formula for r-Whitney-type numbers.

Theorem 3.11. *If* $t, n, k, r, s \ge 0$*,* $k \le t+n$ *and* $m, l \ge 1$*, then*

$$\begin{aligned} l^n m^k w_{m,r}(t+n,k) = & \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} w_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \\ & \cdot w_{l,s}(j,k-i) (mlt + lr - ms|ml)^{\overline{n-j}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^n m^k W_{m,r}(t+n,k) = & \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} W_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \\ & \cdot W_{l,s}(j,k-i) (mli + lr - ms)^{n-j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^n m^k WL_{m,r}(t+n,k) = & \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} WL_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \\ & \cdot WL_{l,s}(j,k-i) (ml(t+i) + 2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}}. \end{aligned}$$

If we choose $t = 0$ in the theorem, then we immediately obtain connections between r-Whitney-type numbers with m colours and s-Whitney-type numbers with l colours.

Corollary 3.12. *If* $0 \leq k \leq n$, $r, s \geq 0$ *and* $m, l \geq 1$, *then*

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} w_{l,s}(j,k) (lr - ms|ml)^{\overline{n-j}},$$

$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} W_{l,s}(j,k) (lr - ms)^{n-j},$$

$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} WL_{l,s}(j,k) (2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}}.$$

Remark. By special choices of the parameters, we can express r-Whitney numbers with m colours by s-Whitney numbers with m colours, r-Whitney numbers with l colours, Whitney numbers with l or m colours, s-Stirling numbers, r-Stirling numbers, and ordinary Stirling numbers, and it holds similarly for r-Whitney–Lah numbers.

In case of $t = 1$, $l = m$ and $s = r$ in the Spivey-type formula, we obtain the recurrence relations below.

Corollary 3.13. *If* $1 \leq k \leq n+1$, $r \geq 0$ *and* $m \geq 1$, *then*

$$\begin{aligned} w_{m,r}(n+1,k) = {} & r \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k) m^{n-j} (n-j)! \\ & + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k-1) m^{n-j} (n-j)!, \end{aligned}$$

$$W_{m,r}(n+1,k) = r W_{m,r}(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} W_{m,r}(j,k-1) m^{n-j},$$

$$\begin{aligned} WL_{m,r}(n+1,k) &= 2r\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}WL_{m,r}(j,k)\,m^{n-j}(n-j)! \\ &\quad+\sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}WL_{m,r}(j,k-1)\,m^{n-j}(n-j+1)!. \end{aligned}$$

In the next theorem, we show further connections between r-Whitney-type numbers with m colours and s-Whitney-type numbers with l colours.

Theorem 3.14. *If* $0 \leq k \leq n$, $r,s \geq 0$ *and* $m,l \geq 1$, *then*

$$l^{n-k}w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}w_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(lr-ms)^{j-k},$$

$$l^{n-k}W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}W_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(lr-ms|ml)^{\underline{j-k}},$$

$$l^{n-k}WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}WL_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(2lr-2ms|ml)^{\underline{j-k}}.$$

Now, we give a binomial convolutional identity for r-Whitney-type numbers with m colours and s-Whitney-type numbers with l colours.

Theorem 3.15. *If* $n,k,h,r,s \geq 0$, $k+h \leq n$ *and* $m,l \geq 1$, *then*

$$\begin{aligned} \binom{k+h}{k}w_{ml,lr+ms}(n,k+h) &= \sum_{j=k}^{n-h}\binom{n}{j}l^{j-k}m^{n-j-h}w_{m,r}(j,k) \\ &\quad\cdot w_{l,s}(n-j,h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{k+h}{k}W_{ml,lr+ms}(n,k+h) &= \sum_{j=k}^{n-h}\binom{n}{j}l^{j-k}m^{n-j-h}W_{m,r}(j,k) \\ &\quad\cdot W_{l,s}(n-j,h), \end{aligned}$$

$$\binom{k+h}{k} WL_{ml,lr+ms}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} WL_{m,r}(j,k) \\ \cdot WL_{l,s}(n-j,h).$$

In the following theorem, we present the generalized orthogonality relations of r-Whitney-type numbers.

Theorem 3.16. *Let* $0 \le k \le n$, $r,s \ge 0$ *and* $m,l \ge 1$. *Then*

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr-ms|ml)^{\overline{n-k}},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) w_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr-ms)^{n-k},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (2lr-2ms|ml)^{\overline{n-k}}.$$

Next, we show additional connections between r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers.

Theorem 3.17. *Let* $0 \le k \le n$, $r,s \ge 0$ *and* $m,l \ge 1$. *Then*

$$w_{ml,2lr-ms}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j) w_{l,s}(j,k)$$

if $2lr \ge ms$,

$$W_{ml,2ms-lr}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k)$$

if $2ms \ge lr$,

$$WL_{ml,\frac{lr+ms}{2}}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k)$$

if lr *and* ms *have the same parity.*

Remark. If we assume that $l = m$ and $s = r$ in the last formula, then we obtain equation (3), which is the original definition of r-Whitney–Lah numbers by G.-S. Cheon and J.-H. Jung [9].

The r-Whitney-type numbers can be expressed with the help of symmetric polynomials.

Theorem 3.18. *If* $0 \le k \le n$, $r \ge 0$ *and* $m \ge 1$, *then*

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n-1} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_{n-k} \le k} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_{n-k} \le k} \prod_{j=1}^{n-k} ((2i_j + j - 1)m + 2r),$$

in other words, $w_{m,r}(n,k)$ *is the* $(n-k)$*th elementary symmetric polynomial of* $r, m+r, \ldots, (n-1)m+r$, *and* $W_{m,r}(n,k)$ *is the* $(n-k)$*th complete symmetric polynomial of* $r, m+r, \ldots, km+r$.

It is known that the finite sequences of r-Whitney numbers of the first and second kinds are log-concave for fixed n. The same property can be proved also for the r-Whitney–Lah numbers.

Theorem 3.19. *Let* $n, m \ge 1$ *and* $r \ge 0$. *Then the sequence* $(WL_{m,r}(n,k))_{k=0}^{n}$ *is strictly log-concave, therefore it is unimodal.*

In the following theorem, we describe the connection between r-Whitney transformations of the first and second kinds, r-Whitney–Lah transformation and their inverses.

Theorem 3.20. *Let* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *be sequences of complex numbers and let* $r \ge 0$, $m \ge 1$. *Then*

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, a_k \;\; (n \geq 0)$ *if and only if*
  $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, W_{m,r}(n,k)\, b_k \;\; (n \geq 0)$,

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\, a_k \;\; (n \geq 0)$ *if and only if*
  $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, w_{m,r}(n,k)\, b_k \;\; (n \geq 0)$,

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, a_k \;\; (n \geq 0)$ *if and only if*
  $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, WL_{m,r}(n,k)\, b_k \;\; (n \geq 0)$.

The following theorem states that r-Whitney-type transformations preserve the log-convexity of sequences.

Theorem 3.21. *The r-Whitney transform of both kinds and the r-Whitney–Lah transform of a log-convex sequence of nonnegative real numbers are also log-convex.*

4 r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials

M. Benoumhani [2], [3] introduced the Dowling numbers $D_{n,m}$ as the sums of Whitney numbers of the second kind, and the Dowling polynomials $D_{n,m}(x)$ in connection with them. The definition of r-Dowling polynomials, as the common generalization of r-Bell and Dowling polynomials, are due to G.-S. Cheon and J.-H. Jung [9].

Now, we introduce the Dowling-type generalization of r-Lah polynomials with r-Whitney–Lah numbers as coefficients. We will call these polynomials r-Dowling–Lah polynomials.

4.1 Definitions and combinatorial interpretations

Definition 4.1. Let $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$. Then we call the polynomial

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)x^k$$

an r**-Dowling polynomial**.

Definition 4.2. Let $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$. Then we call the polynomial

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k$$

an r**-Dowling–Lah polynomial**.

If we assume that $n + r \geq 1$, then the following interpretation can be given for r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials based on the results of the previous section: $D_{n,m,r}(c)$ and $DL_{n,m,r}(c)$ give the number of r-Whitney and r-Whitney–Lah coloured partitions of $\{1, \ldots, n + r\}$ with m colours, where the smallest elements of those blocks and ordered blocks which contain no distinguished element are additionally coloured with c colours, respectively ($c \geq 1$).

If $c = 1$ in the interpretation above, then the additional colouring with only one colour is essentially equivalent to omitting the colouring. In this case, we call $D_{n,m,r} = D_{n,m,r}(1)$ an r-Dowling number and $DL_{n,m,r} = DL_{n,m,r}(1)$ an r-Dowling–Lah number.

Obviously,

$$D_{n,m,1}(x) = D_{n,m}(x), \quad D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x), \quad D_{n,1,0}(x) = B_n(x),$$

and similar connections hold for r-Dowling–Lah polynomials.

4.2 Properties and identities

The following theorem is used in several proofs in this section.

Theorem 4.3. *If $n, r \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then*

$$D_{n,ml,lr}(lx) = l^n D_{n,m,r}(x),$$

$$DL_{n,ml,lr}(lx) = l^n DL_{n,m,r}(x).$$

Now, we give a Spivey-type formula for r-Dowling-type polynomials in its most general form.

Theorem 4.4. *If $t, n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then*

$$\begin{aligned} l^n D_{t+n,m,r}(mx) &= \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} W_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx) \\ &\quad \cdot (mli + lr - ms)^{n-j} (mx)^i, \\ l^n DL_{t+n,m,r}(mx) &= \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx) \\ &\quad \cdot (ml(t+i) + 2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}} (mx)^i. \end{aligned}$$

For $t = 0$ in the formula, we obtain a connection between r-Dowling-type polynomials with m colours and s-Dowling-type polynomials with l colours.

Corollary 4.5. *If $n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then*

$$l^n D_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx)(lr - ms)^{n-j},$$

$$l^n DL_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx)(2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}}.$$

Remark. Special choices of the parameters would allow us to express r-Dowling polynomials with m colours by s-Dowling polynomials with m colours, r-Dowling polynomials with l colours, Dowling polynomials with l or m colours, s-Bell polynomials, r-Bell polynomials, and Bell polynomials, and it holds similarly for r-Dowling–Lah polynomials.

By choosing $t = 1$, $l = m$ and $s = r$, the Spivey-type formula implies a recurrence relation.

Corollary 4.6. *If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$D_{n+1,m,r}(x) = rD_{n,m,r}(x) + x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_{j,m,r}(x)\,m^{n-j},$$

$$\begin{aligned} DL_{n+1,m,r}(x) = {} & 2r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}(x)\,m^{n-j}(n-j)! \\ & + x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}(x)\,m^{n-j}(n-j+1)!. \end{aligned}$$

Finally, we obtain a Carlitz-type formula.

Corollary 4.7. *If $t, n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$D_{t+n,m,r}(x) = \sum_{i=0}^{t} W_{m,r}(t,i)\,D_{n,m,r+mi}(x)\,x^{i},$$

and if we additionally assume that m is even, then

$$DL_{t+n,m,r}(x) = \sum_{i=0}^{t} WL_{m,r}(t,i)\,DL_{n,m,r+\frac{mi+mt}{2}}(x)\,x^{i}.$$

Now, we give a second-order recurrence relation for r-Dowling–Lah polynomials.

Theorem 4.8. *If $r \geq 0$ and $n, m \geq 1$, then*

$$DL_{n+1,m,r}(x)$$
$$= (x + 2mn + 2r) DL_{n,m,r}(x) - mn(mn + 2r - m) DL_{n-1,m,r}(x).$$

In the following addition formula, a binomial convolutional identity is given for r-Dowling-type polynomials with m colours and s-Dowling-type polynomials with l colours.

Theorem 4.9. *If $n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then*

$$D_{n,ml,lr+ms}(ml(x+y)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} D_{j,m,r}(mx) D_{n-j,l,s}(ly),$$

$$DL_{n,ml,lr+ms}(ml(x+y)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} DL_{j,m,r}(mx) DL_{n-j,l,s}(ly).$$

Now, we give a Dobiński-type formula for r-Dowling-type polynomials.

Theorem 4.10. *If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$D_{n,m,r}(x) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mj+r)^n}{m^j j!} x^j,$$

$$DL_{n,m,r}(x) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mj+2r|m)^{\overline{n}}}{m^j j!} x^j.$$

In the following theorem, we present the exponential generating function of the sequences of r-Dowling-type polynomials.

Theorem 4.11. *If $r \geq 0$ and $m \geq 1$, then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(ry + \frac{\exp(my) - 1}{m} x\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1 - my}\right) (1 - my)^{-\frac{2r}{m}}.$$

It is known that the roots of r-Dowling polynomials are real. According to the following theorem, the same assertion is true for the roots of r-Dowling–Lah polynomials.

Theorem 4.12. *Let $r \geq 0$ and $n, m \geq 1$. Then $DL_{n,m,r}(x)$ has simple real roots. If $r \geq 1$, then all the roots are negative, and if $r = 0$, then one of the roots is 0 and the others are negative.*

The next theorem describes connections between r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials.

Theorem 4.13. *Let $n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$. Then*

$$D_{n,ml,2ms-lr}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^j W_{m,r}(n,j) DL_{j,l,s}(lx)$$

if $2ms \geq lr$,

$$DL_{n,ml,\frac{lr+ms}{2}}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) D_{j,l,s}(lx)$$

if lr and ms have the same parity.

Finally, we show that the sequences of r-Dowling-type numbers are log-convex.

Theorem 4.14. *Let $r \geq 0$ and $m \geq 1$. Then the sequences $(D_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ and $(DL_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ are log-convex.*

5 s-associated r-Dowling-type numbers

Although, the s-associated Bell numbers $B_n^{\geq s}$ are discussed in several papers, the s-associated r-Bell numbers $B_{n,r}^{\geq s}$ occur only in the article of F. T. Howard [27], but simply for the case $s = 2$.

The s-associated factorials $A_n^{\geq s}$ defined as the permutational variant of associated Bell numbers are called generalized subfactorials in the literature. A certain r-generalization of them was studied recently in [62] and [43].

The s-associated summed Lah numbers $L_n^{\geq s}$ and s-associated summed r-Lah numbers $L_{n,r}^{\geq s}$ can be defined analogously, but were not studied yet.

5.1 The r-compositional formula

In the following theorem, we give the r-compositional formula for exponential generating functions. ($\mathbb{N}_0$ denotes the set of nonnegative integers, while $\mathbb{K}$ is a field of characteristic 0.)

Theorem 5.1. *Let $f_1, f_2, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ be functions such that $f_2(0) = 0$ and $g(0) = 1$, and denote their exponential generating functions by $F_1(x), F_2(x), G(x)$, respectively. Define the function $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ as follows: $h(0) = 1$, and for $n \geq 1$ let*

$$h(n) = \sum f_1(|Y_1|) \cdots f_1(|Y_r|) f_2(|Z_1|) \cdots f_2(|Z_k|) g(k),$$

where the sum is taken for all partitions of the form $\{Y_1 \cup \{1\}, \ldots, Y_r \cup \{r\}, Z_1, \ldots, Z_k\}$ of $\{1, \ldots, n+r\}$. Then the exponential generating function of h is

$$H(x) = (F_1(x))^r G(F_2(x)).$$

5.2 Combinatorial definitions

Definition 5.2. Let $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ and $s, m \geq 1$. Denote by $D_{n,m,r}^{\geq s}$ the total number of r-Whitney coloured partitions of $\{1, \ldots, n+r\}$ with m colours, where each block containing no distinguished element has at least s elements. In addition, let $D_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. We call these numbers **s-associated r-Dowling numbers**.

Definition 5.3. Let $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ and $s, m \geq 1$. Denote by $DA_{n,m,r}^{\geq s}$ the total number of r-Whitney coloured permutation in S_{n+r} with m colours, where each cycle containing no distinguished element has length at least s. In addition, let $DA_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. We call these numbers **s-associated r-Dowling factorials**.

Definition 5.4. Let $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ and $s, m \geq 1$. Denote by $DL_{n,m,r}^{\geq s}$ the total number of r-Whitney–Lah coloured partitions of $\{1, \ldots, n + r\}$ with m colours, where each ordered block containing no distinguished element has at least s elements. In addition, let $DL_{0,m,0}^{\geq s} = 1$. We call these numbers **s-associated r-Dowling–Lah numbers**.

Obviously,

$$D_{n,m,r}^{\geq 1} = D_{n,m,r}, \quad D_{n,1,r}^{\geq s} = B_{n,r}^{\geq s}, \quad D_{n,1,0}^{\geq s} = B_{n}^{\geq s},$$

and similar connections exist for s-associated r-Dowling factorials and s-associated r-Dowling–Lah numbers.

5.3 Properties and identities

With the help of the r-compositional formula, we can derive the exponential generating functions of the sequences of s-associated r-Dowling-type numbers.

Theorem 5.5. *If $r \geq 0$ and $s, m \geq 1$, then*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = \exp\left(rx + \frac{\exp(mx) - 1}{m}\right) \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j!} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DA_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = (1 - mx)^{-\frac{r+1}{m}} \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL^{\geq s}_{n,m,r}}{n!} x^n$$
$$= (1-mx)^{-\frac{2r}{m}} \exp\left(\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1-mx}-1\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s-1}(mx)^j\right).$$

Below, we give recurrence relations for s-associated r-Dowling-type numbers.

Theorem 5.6. *If $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ and $n \geq s-1$, then*

$$D^{\geq s}_{n+1,m,r} = rD^{\geq s}_{n,m,r} + \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j},$$

$$DA^{\geq s}_{n+1,m,r} = r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)!$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)!,$$

$$DL^{\geq s}_{n+1,m,r} = 2r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)!$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j+1)!.$$

Recurrence relations of fixed order can be proved for s-associated r-Dowling factorials and s-associated r-Dowling–Lah numbers.

Theorem 5.7. *If $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ and $n \geq s-1$, then*

$$DA^{\geq s}_{n+1,m,r} = (mn+r)\, DA^{\geq s}_{n,m,r} + (mn|m)^{\underline{s-1}}\, DA^{\geq s}_{n-s+1,m,r}.$$

If $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ and $n \geq s$, then

$$DL^{\geq s}_{n+1,m,r} = (2mn + 2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r}$$
$$- mn\,(mn - m + 2r)\, DL^{\geq s}_{n-1,m,r} - (s-1)\,(mn|m)^{\underline{s}}\, DL^{\geq s}_{n-s,m,r}.$$

In the following theorem, we give connections between s-associated r-Dowling- and s-associated r'-Dowling-type numbers.

Theorem 5.8. *If $n \geq 0$, $r \geq r' \geq 0$ and $s, m \geq 1$, then*

$$D^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r'} \left(r - r'\right)^{n-j},$$

$$DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r'} \left(r - r'|m\right)^{\overline{n-j}},$$

$$DL^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r'} \left(2r - 2r'|m\right)^{\overline{n-j}}.$$

Next, we show the Dobiński-type formula for the s-associated r-Dowling-type numbers.

Theorem 5.9. *If $n, r \geq 0$ and $s, m \geq 1$, then*

$$D^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} \left(mk + r\right)^l \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j!}\right)^{i_j},$$

$$DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{*} \frac{n!}{l!} \left(r + 1|m\right)^{\overline{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j}\right)^{i_j},$$

$$DL^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} \left(mk + 2r|m\right)^{\overline{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-m^{j-1}\right)^{i_j},$$

where the sums indicated with a star symbol are taken over all s-tuples $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, l)$ of nonnegative integers satisfying $i_1 + 2i_2 + \cdots + (s-1)\, i_{s-1} + l = n$.

As an interesting consequence of the above, we can obtain that 2-associated r-Dowling numbers coincide with $(r-1)$-Dowling numbers.

Corollary 5.10. *If $n \geq 0$ and $r, m \geq 1$, then $D_{n,m,r}^{\geq 2} = D_{n,m,r-1}$.*

Irodalomjegyzék/References

[1] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, *Translated Whitney and r-Whitney numbers: a combinatorial approach*, J. Integer Seq. **16** (2013), Article 13.8.6.

[2] M. Benoumhani, *On Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **159** (1996), 13–33.

[3] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 106–116.

[4] M. Benoumhani, *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. **22** (1999), 186–189.

[5] M. Bóna and I. Mező, *Real zeros and partitions without singleton blocks*, European J. Combin. **51** (2016), 500–510.

[6] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241–259.

[7] T. C. Brown, Affine and combinatorial binary m-spaces, *J. Combin. Theory Ser. A* **39** (1985), 25–34.

[8] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 147–162.

[9] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **312** (2012), 2337–2348.

[10] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On the maximum of generalized Stirling numbers*, Util. Math. **86** (2011), 241–256.

[11] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On generalized Bell polynomials*, Discrete Dyn. Nat. Soc. (2011), Article 623456.

[12] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r, β)-Stirling numbers*, Ars Combin. **81** (2006), 81–96.

[13] C. B. Corcino, R. B. Corcino, I. Mező and J. L. Ramírez, *Some polynomials associated with the r-Whitney numbers*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **128** (2018), Article 27.

[14] E. Damiani, O. D'Antona and F. Regonati, *Whitney numbers of some geometric lattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **65** (1994), 11–25.

[15] H. Davenport and G. Pólya, *On the product of two power series*, Canad. J. Math. **1** (1949), 1–5.

[16] G. Dobiński, *Summirung der Reihe $\sum \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$*, Arch. Math. Phys. **61** (1877), 333–336.

[17] T. A. Dowling, *A class of geometric lattices based on finite groups*, J. Combinatorial Theory Ser. B **14** (1973), 61–86; erratum, **15** (1973), 211.

[18] E. A. Enneking and J. C. Ahuja, *Generalized Bell numbers*, Fibonacci Quart. **14** (1976), 67–73.

[19] E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, közlésre benyújtva/submitted.

[20] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Math. **105** (2017), 137–139.

[21] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Math. **92** (2018), 515–527.

[22] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Appl. Math. **255** (2019), 222–233.

[23] E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, közlésre benyújtva/submitted.

[24] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 222–229.

[25] F. T. Howard, *Numbers generated by the reciprocal of* $e^x - x - 1$, Math. Comp. **31** (1977), 581–598.

[26] F. T. Howard, *Associated Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 303–315.

[27] F. T. Howard, *Weighted associated Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **22** (1984), 156–165.

[28] L. C. Hsu and P. J.-S. Shiue, *A unified approach to generalized Stirling numbers*, Adv. in Appl. Math. **20** (1988), 366–384.

[29] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australas. J. Combin. **58** (2014), 264–274.

[30] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Bol. Inst. Actuár. Port. **9** (1954), 7–15.

[31] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsbl. Math. Statist. **7** (1955), 203–212.

[32] L. L. Liu, *Linear transformations preserving log-convexity*, Ars Combin. **100** (2011), 473–483.

[33] L. L. Liu and Y. Wang, *On the log-convexity of combinatorial sequences*, Adv. in Appl. Math. **39** (2007), 453–476.

[34] M. M. Mangontarum, A. P. Macodi-Ringia and N. S. Abdulcarim, *The translated Dowling polynomials and numbers*, Int. Scholarly Res. Not. (2014), Article 678408.

[35] T. Mansour, J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A generalization of the r-Whitney numbers of the second kind*, J. Comb. **8** (2017), 29–55.

[36] T. Mansour and M. Schork, Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers, CRC Press, 2016.

[37] M. Merca, *A note on the r-Whitney numbers of Dowling lattices*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 649–655.

[38] R. Merris, *The p-Stirling numbers*, Turkish J. Math. **24** (2000), 379–399.

[39] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, Results Math. **58** (2010), 329–335.

[40] I. Mező, *The r-Bell numbers*, J. Integer Seq. **14** (2011), Article 11.1.1.

[41] I. Mező, *A kind of Eulerian numbers connected to Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **328** (2014), 88–95.

[42] I. Mező and J. L. Ramírez, *The linear algebra of the r-Whitney matrices*, Integral Transforms Spec. Funct. **26** (2015), 213–225.

[43] I. Mező, J. L. Ramírez and C.-Y. Wang, *On generalized derangements and some orthogonal polynomials*, Integers **19** (2019), Article A6.

[44] M. Mihoubi and M. Rahmani, *The partial r-Bell polynomials*, Afr. Mat. **28** (2017), 1167–1183.

[45] V. H. Moll, J. L. Ramírez and D. Villamizar, *Combinatorial and arithmetical properties of the restricted and associated Bell and factorial numbers*, J. Comb. **9** (2018), 693–720.

[46] N. Nielsen, Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, 1923.

[47] G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Math. **338** (2015), 1660–1666.

[48] G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, közlésre benyújtva/submitted.

[49] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, publikálás alatt/under publication.

[50] G. Pólya and G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Volume I, Springer-Verlag, 1972.

[51] G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Math. Hungar., DOI: 10.1007/s10474-019-00925-6.

[52] M. Rahmani, *Some results on Whitney numbers of Dowling lattices*, Arab J. Math. Sci. **20** (2014), 11–27.

[53] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *Generalized r-Whitney numbers of the first kind*, Ann. Math. Inform. **46** (2016), 175–193.

[54] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A (p,q)-analogue of the r-Whitney-Lah numbers*, J. Integer Seq. **19** (2016), Article 16.5.6.

[55] J. B. Remmel and M. L. Wachs, *Rook theory, generalized Stirling numbers and (p,q)-analogues*, Electron. J. Combin. **11/1** (2004), Article R84.

[56] A. Ruciński and B. Voigt, *A local limit theorem for generalized Stirling numbers*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **35** (1990), 161–172.

[57] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*, J. Integer Seq. **11** (2008), Article 08.2.5.

[58] R. P. Stanley, *Acyclic orientations of graphs*, Discrete Math. **5** (1973), 171–178.

[59] J. R. Stonesifer, *Logarithmic concavity for a class of geometric lattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **18** (1975), 216–218.

[60] B. Voigt, *A common generalization of binomial coefficients, Stirling numbers and Gaussian coefficients*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Suppl. No. 3 (1984), 339–359.

[61] D. G. L. Wang, *On colored set partitions of type B_n*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 1372–1381.

[62] C. Wang, P. Miska and I. Mező, *The r-derangement numbers*, Discrete Math. **340** (2017), 1681–1692.

Publikációs lista/List of publications

1. E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on Golomb's method and the continued fraction method for Egyptian fractions*, Ann. Math. Inform. **42** (2013), 129–134.

2. E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Math. **105** (2017), 137–139.

3. E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Math. **92** (2018), 515–527.

4. E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Appl. Math. **255** (2019), 222–233.

5. E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, közlésre benyújtva/submitted.

6. E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, közlésre benyújtva/submitted.

Előadáslista/List of talks

1. *Racionális számok előállítása egységtörtek összegeként*, Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia, 2014. január 24–26., Eger.
2. *Log-convexity of combinatorial sequences*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2014. március 27–30., Malenovice (Csehország).
3. *Kombinatorikus sorozatok log-konvexitása*, Komáromi Számelméleti és Kriptográfiai Napok, 2014. május 24., Komárom (Szlovákia).
4. *A new combinatorial interpretation of r-Whitney numbers*, 5th Polish Combinatorial Conference, 2014. szeptember 22–26., Będlewo (Lengyelország).
5. *A new combinatorial interpretation of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, 33. Kolloquium über Kombinatorik, 2014. november 7–8., Ilmenau (Németország).
6. *Recent results on r-Whitney numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2015. április 23–26., Kočovce (Szlovákia).
7. *Combinatorial study of r-Whitney and r-Dowling numbers*, 8th Slovenian Conference on Graph Theory, 2015. június 21–27., Kranjska Gora (Szlovénia).
8. *On properties of the r-Dowling polynomials*, 29th Journées Arithmétiques, 2015. július 6–10., Debrecen.
9. *The r-Dowling numbers and polynomials (poszter)*, 2nd Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2015. július 27–31., Hagenberg (Ausztria).

10. *The r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials*, 27th 3in1 Workshop on Graph Theory and Combinatorics, 2018. november 21–24., Stryszawa (Lengyelország).

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/152/2019.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Szabó-Gyimesi Eszter
Neptun kód: E5J2BS
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10038119

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney-Lah numbers. *Discret Appl. Math. 255*, 222-233, 2019. ISSN: 0166-218X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2018.08.020
   IF: 0.932 (2017)

2. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A comprehensive study of r-Dowling polynomials. *Aequ. Math. 92* (3), 515-527, 2018. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-017-0538-z
   IF: 0.644 (2017)

3. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers. *Util. Math. 105*, 137-139, 2017. ISSN: 0315-3681.
   IF: 0.267

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

4. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A note on Golomb's method and the continued fraction method for Egyptian fractions.
   Ann. Math. et Inf. 42, 129-134, 2013. ISSN: 1787-5021.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,843
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 1,843

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2019.04.09.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/152/2019.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Eszter Szabó-Gyimesi
Neptun ID: E5J2BS
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10038119

List of publications related to the dissertation

<u>Foreign language scientific articles in international journals</u> (3)

1. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney-Lah numbers.
   Discret Appl. Math. 255, 222-233, 2019. ISSN: 0166-218X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2018.08.020
   IF: 0.932 (2017)

2. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A comprehensive study of r-Dowling polynomials.
   Aequ. Math. 92 (3), 515-527, 2018. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-017-0538-z
   IF: 0.644 (2017)

3. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers.
   Util. Math. 105, 137-139, 2017. ISSN: 0315-3681.
   IF: 0.267

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRAY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

4. **Gyimesi, E.**, Nyul, G.: A note on Golomb's method and the continued fraction method for Egyptian fractions.
   Ann. Math. et Inf. 42, 129-134, 2013. ISSN: 1787-5021.

Total IF of journals (all publications): 1,843
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,843

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

09 April, 2019