



Geometria mozgásban

Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Szeredi Éva

Témavezető: Vásárhelyi Éva

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2011.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola matematika didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Budapest, 2011. március 16.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Szeredi Éva doktorjelölt 2008-2011. között a fent megnevezett Doktori Iskola matematika didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Budapest, 2011. március 16.

a témavezető aláírása

GEOMETRIA MOZGÁSBAN

AZ EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK TANÍTÁSÁNAK EGY ÚJ MÓDSZERE

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika didaktika tudományágban

Írta: Szeredi Éva főiskolai docens

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori
iskolája (matematika didaktika programja) keretében

Témavezető: Vásárhelyi Éva

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	

A doktori szigorlat időpontja: 200... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 2011.

"Be van fejezve a (nagy) mű, igen."

(Madách után)

Köszönet érte sok-sok segítőmnek:

az egyetemi és főiskolai hallgatóimnak, akiken kipróbáltam a módszert,

a tanároknak, akik kipróbálták és szerették a módszert;

Török Juditnak, Kovács Marának, akik segítségével az ötletből tankönyvek születtek;

Jakucs Erikának, Birloni Szilvinek, akik a maguk ötleteivel továbbfejlesztették,
gazdagították a meglévő anyagokat.

Köszönet érte kollégáimnak, akik meghallgattak, tanácsot adtak, bátorítottak;

családtagjaimnak, akik eltűrték, hogy semmire sem érek rá.

És végül köszönet érte Vásárhelyi Évának, aki segített felismerni az intuitív gondolatok
mögött meghúzódó mélyebb összefüggéseket.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS.....	1
1.1 A TÉMAVÁLASZTÁS INDOKLÁSA	1
1.1.1 A kutatás közvetlen előzményei	2
1.2 KUTATÁSI CÉLOK.....	3
1.3 KUTATÁSI MÓDSZEREK	3
1.4 FŐBB KUTATÁSI KÉRDÉSEK.....	4
1.5 A KUTATÁS HIPOTÉZISEI	4
1.6 A KUTATÁS FOLYAMATA	5
1.7 A VIZSGÁLATOK EREDMÉNYEI	7
2. AZ ELMÉLETI ALAPOK.....	9
2.1 MATEMATIKAI HÁTTÉR.....	9
2.1.1 Egybevágósági transzformációk	9
2.1.2 Egybevágó alakzatok	9
2.1.3 Az egybevágóságfogalom axiomatikus megalapozása	10
2.1.4 Egybevágósági axiómák Hilbert rendszerében	11
2.1.5 Az elemi geometria Hjelmslev–Bachmann-féle megalapozásáról .	12
2.1.6 A mozgás és a mérés axiómái Hajós axiómarendszerében	12
2.1.7 A sík egybevágóságai.....	14
2.2 TANULÁSPSZICHOLÓGIAI ÉS DIDAKTIKAI HÁTTÉR.....	15
2.2.1 A fogalomalkotás.....	16
2.2.2 Reprezentációk	20
3. ELŐZMÉNYEK.....	25
3.1 FOGALOMALKOTÁSI ZAVAROK.....	25
3.2 A „ZÁSZLÓS MÓDSZER” ISKOLAI TANÍTÁSÁNAK TAPASZTALATAI.....	29
3.2.1 Általános iskola, felső-tagozat	29
3.2.2 Kísérleti kipróbálás.....	30
3.3 TANÁRKÉPZÉS	30
4. TRANSZFORMÁCIÓTANÍTÁSI MÓDSZEREK	32
4.1 A TRANSZFORMÁCIÓTANÍTÁS TÖRTÉNETE MAGYARORSZÁGON, TANTERVEK ALAPJÁN	32
4.2 A GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK MEGADÁSA.....	33
4.2.1 Transzformációtanítás az alsó-tagozaton	34
4.2.2 Transzformációtanítás a felső-tagozaton és a középiskolában	34
4.3. AZ EGYBEVÁGÓSÁG SZEMLÉLTETÉSE	36
4.3.1 Szemléltetés nélkül	36
4.3.2 Szemléltetés méréssel	37
4.3.3 Szemléltetés mozgatóással	37

Tartalomjegyzék

4.4 EGY ANGOL TRANSZFORMÁCIÓTANÍTÁSI MÓDSZER	38
4.5 A „ZÁSZLÓS MÓDSZER”	39
4.5.1 A zászlós módszer születése	40
4.5.2 Mozgás megadása zászlók segítségével.....	40
4.5.3 A zászlós szemléltetésre alapozott transzformáció-tanítás	43
4.6 A BEMUTATOTT MÓDSZEREK FŐBB JELLEMZŐI.....	44
5. A MÓDSZER ELEMZÉSE	46
5.1 AZ EGYBEVÁGÓSÁGFOGALOM MEGALAPOZÁSA – A MOZGATÁS SZEREPE	46
5.1.1 A mozgatás szerepe a transzformáció tanítás korai példáiban	46
5.1.2 A mozgatás megítélése a hatvanas évek reformtörekvéseiben	47
5.1.3 Mozgatásra alapozott transzformációtanítás, a „zászlós módszer”	50
5.2 A TRANSZFORMÁLT KÉP – MOZGATÁS ÉS/VAGY KÖRZŐ-VONALZÓS SZERKESZTÉS.....	51
5.2.1 Nézetek az egybevágósági transzformációk szemléltetéséről	52
5.2.2 Az egybevágóság mint a körzős-vonalzós szerkesztési eljárásokhoz kötődő „procept”	54
5.2.3 Az egybevágóság mint a zászlókkal megadott mozgatáshoz kötődő „procept”	57
5.3 A TRANSZFORMÁCIÓTULAJDONSÁGOK TANÍTÁSA	58
5.4 A „ZÁSZLÓS MÓDSZER” HELYE A MAGYAR TRANSZFORMÁCIÓTANÍTÁSBAN.....	62
6. AZ EGYBEVÁGÓSÁG ÁLTALÁNOS FOGALMA FELÉ.....	63
6.1 TRANSZFORMÁCIÓK MEGADÁSA PONTONKÉNT.....	63
6.2 TRANSZFORMÁCIÓK EKVIVALENCIÁJA	67
6.3 ÁLTALÁNOS TRANSZFORMÁCIÓTULAJDONSÁGOK	68
7. ÖSSZEGZÉS	71
7.1 ALAPOZÁS	71
7.1.2 A különböző módszerek összehasonlító elemzése	72
7.1.3 A „zászlós módszer”-en alapuló transzformációtanítás.....	74
7.2 KONZEKVENCIÁK	74
8. SUMMARY OF THE THESIS	76
PART I. FOUNDATION.....	76
PART II. COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DIFFERENT METHODS	77
PART III. CONCEPT BUILDING ON THE BASE OF THE “FLAG METHOD”	79
CONCLUSIONS	80
IRODALOMJEGYZÉK.....	81
FÜGGELÉK	86

1. BEVEZETÉS

1.1 A témaválasztás indoklása

„... a geometria tanításában, komoly nézeteltérések vannak a célok, a tartalom és a módszerek tekintetében ...”.

(Villani et al. 1996)

A geometriai transzformációk tanításának szükségessége és mikéntje fontos és vitatott kérdés, ami több ország tantervelőkészítő munkájában és nemzetközi didaktikai fórumokon is megjelenik, gyakran szélsőséges formában is. Egyike azoknak a kérdéseknek, melyeket Villani (1996) felvetett 1996-os ICMI konferencia előtt. Válaszként többen is érveltek a transzformációtanítás bevezetése, megerősítése mellett, például a Cseh Köztársaságban Frantisek Kurina (1995), Olaszországban Nicolina Malara (1995), Finnországban George Malaty (1995), az Egyesült Államokban Gary Martin (1995) – elképzeléseik azonban jó néhány dologban homlokegyenest ellenkeztek egymással.

Dolgozatom a sík egybevágósági transzformációinak tanításával foglalkozik, elsősorban annak magyarországi helyzetével.

Magyarországon a középiskolai tankönyvekben majd száz éve – igen különböző mélységben – szerepel a transzformációk tanítása. Az 1970-es évek tantervreformjában az általános iskolai tananyagnak is része lett ez a témakör.

A témával azért kezdtem el foglalkozni, mert a tanárképző főiskola hallgatóival dolgozva a transzformációk alapjait érintő, nehezen megragadható, és még nehezebben javítható hibákkal találkoztam. Néhány jellegzetes példát részletesen is ismertetek a 3.1 szakaszban (Fogalomalkotási zavarok 25. o.). Ezeknek a hibáknak a megértését és okait kutatva arra a feltételezésre jutottam, hogy a fogalmi zavarok eredete az egybevágósági transzformációk szemléltetésével kapcsolatos módszertani problémákban kereshető.

Az általam megvizsgált tananyagok mindegyikében megjelenik az a dilemma, hogy az egymásra mozgathatóság szemléletes, ám pontatlan fogalmára, vagy pedig absztrakt definíciókra, alapvető tételekre alapozzuk az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk tanítását. Általános iskolás szinten egyik felépítés sem hagyhatja el az egymásra mozgathatóságot, mert az egybevágósági transzformációk invariáns tulajdonságait – szögtartás, távolságtartás stb. – csak így tudja érzékeltetni. Van, aki a szemléletes bevezetést fokozatosan összeépíti a matematikai megalapozással, de van olyan is, aki egyszerűen (vagy túl gyorsan) elhagyja a szemléltetést. Több olyan felépítés is létezik, melyben a transzformált kép előállítására szinte kizárólagosan körzős-vonalzós szerkesztéseket használnak.

A főiskolai és egyetemi tanárképzésben egy eléggé általánosan használt könyv „Hajós György: Bevezetés a geometriába” című műve. Ez a könyv a mozgást egzakt, axiomatikusan megalapozott fogalomként használja. Ám az a mozgatás, mozgás, amivel a hallgató a korábbi években találkozott, távol van a Hajós-féle axiómákban leírt mozgásfogalomtól.

Ezekből a tapasztalatokból kiindulva kezdtem gondolkodni egy olyan módszertani feldolgozáson, mely megfelel az általános és középiskolás diákok gondolkodási szintjének, mindennapi tapasztatainak, s mindeközben összhangban áll a geometria axiomatikus felépítésével.

Kutatás közben P. Collier: *Geometry for teachers* c. könyvében az egybevágósági transzformációk szemléltetésének egy olyan módjával találkoztam, amely egy lényeges ponton különbözött az általam korábban megismert eljárásoktól. Ezt a szemléltetési módot részletesebben is bemutatom a 4.4 szakaszban (Egy angol transzformációtanítási módszer 38. o.).

1.1.1 A kutatás közvetlen előzményei

Az új módszer megalkotásának talán első lépése az volt, amikor rájöttem, hogy Collier módszere összeegyeztethető a Hajós-féle mozgási axiómákkal. Ez a felfedezés lehetővé tette, hogy a módszert kiindulásként használjam. Többéves fejlesztés és kipróbálás eredményeként olyan eljárást dolgoztam ki, amely matematikai elvárásaimnak (a később bevezetendő absztrakt fogalommal való összhang) és didaktikai célkitűzéseimnek (egyszerűen végrehajtható) is megfelel.

Az eljárás matematikai alapja, hogy a sík egybevágósági transzformációi tekinthetők térmozgások megszorításainak. A *tér mozgásait* Hajós két egymásnak megfeleltetett „zászlóval” (egy felsík határán egy félegyenessel) adja meg. A síkbeli egybevágósági transzformációk szemléletes értelmezésének alapötlete az, hogy *egy (fehér) zászlót egy vele alakra és méretre egyforma (fekete) zászlóba mozgatunk*. A mozgatás tényleges elvégzéséhez és a „referencia” megőrzéséhez meg kell kettőzni a mozgatandó (zászlóval ellátott) síkot. Tehát egy alakzat képének előállításához először egy átlátszó papírra átmásoljuk az alakzatot a fehér zászlóval együtt (megkettőzzük), majd az átlátszó papírt felemeljük, és (tetszőleges közbülső állapotokon keresztül mozgatva) úgy helyezzük le, hogy a fehér zászló a fekete zászlóra kerüljön. Erre az eljárásra a továbbiakban a „zászlós módszer” elnevezéssel hivatkozom.

Az elméleti és gyakorlati kutatás első eredménye egy kísérleti középiskolás tankönyv (Szeredi, Török, 1981), mely a középiskolai tanárok meglehetősen egységes elutasításával találkozott. Néhány általános-iskolai tanárnak azonban felkeltette az érdeklődését, és elkezdtek ezt a módszert használni felső, sőt alsó tagozaton is. A munkámat sok tapasztalattal és új ötletekkel gazdagította Kovács Csongorné, aki elsőik között kezdett ennek alapján tanítani. Sok éves csiszol-

gatás után vele együtt két tankönyvben és tanári segédkönyvekben (Kovács, 1996; Csahóczy, 2003–2005) is ennek a programnak a szellemében készítettük el a transzformációtanításhoz kapcsolódó fejezeteket.

Az Apáczai Kiadónál megjelent Matematika 5–8. oszt. tankönyvsorozatot 100 tanár rendszeres továbbképzés mellett kipróbálta és részletesen véleményezte.

A végleges változat az ő visszajelzéseik alapján készült el, a tankönyvekhez részletes tanári útmutatók készültek. A 3.2.2 szakaszban (Kísérleti kipróbálás 30. o.) kitérek a tankönyvek kipróbálásakor összegyűjtött tapasztalatokra.

A Sulinova Kht. fejlesztésében készült kompetencia alapú programcsomagokban a felsőtagozatos és a középiskolás anyagokban is erre a módszerre alapoztuk a transzformációk tanítását.

1.2 Kutatási célok

Dolgozatom elsődleges célja a térbeli mozgásra alapozott, taneszközökben már kidolgozott, kipróbált koncepciónak – a „zászlós módszernek” – átfogó elemzése a didaktikai kutatások legújabb eredményeinek tükrében.

Ez az elemzés többféle – egymással összeszővődő – szempont figyelembe vételét kívánja.

- Szükséges hozzá a transzformáció-tanítással kapcsolatos dokumentumok alapos áttekintése. Annak pontos tisztázása, hogy a vizsgált módszer hol és miben tér el a korábban kidolgozott módszerektől. Elemzéseim fókuszában a téma tanításában használt tárgyi tevékenységek és egyéb szemléltetési módszerek állnak.
- Szükséges továbbá hozzá a tanuláspszichológia fogalomépítéssel, fogalomreprezentációval, szemléltetéssel kapcsolatos tudományos elméleteinek, valamint a matematika egybevágósággal és transzformációkkal kapcsolatos területeinek átgondolása. Célom az, hogy az egybevágósági transzformációk tanításának különféle koncepcióit összevegyem ezekkel az elméletekkel, különös tekintettel a különböző szemléltetési módoknak a fogalomalkotásban játszott szerepére.

1.3 Kutatási módszerek

A fent vázolt célok elérése érdekében a következő módszereket alkalmaztam:

- Számos geometriai felépítést elemeztem az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk szempontjából. Az iskolai tananyag háttéraxiómáiként szolgáló felépítések közül három rendszerre ki is térek az elméleti háttér ismertetésekor.

- Tanulmányoztam az elvont (elsősorban geometriai) fogalmak kialakításával, a fogalmi zavarok kezelésével kapcsolatos szakirodalmat.
- Tantervek, taneszközök és szakmódszertani tanulmányok alapján áttekintettem a transzformációtanítás magyarországi történetét.
- Behatóan tanulmányoztam a közelmúlt és a jelen transzformáció-tanítási koncepcióit, különös tekintettel a zászlós módszerre.
- Gyűjtöttem és elemeztem a főiskolai és egyetemi hallgatóim körében tapasztalt – egybevágósággal, transzformációkkal kapcsolatos – fogalomalkotási zavarokat.

1.4 Főbb kutatási kérdések

Dolgozatom középponti kérdése a sík egybevágósági transzformációinak a tér mozgásaként való kezelése és az azt szemléltető mozgítás didaktikai szerepének vizsgálata az egybevágóság- és általánosabban a transzformációfogalom tanításában. Ez az általános kérdés sok kisebb kérdést foglal magába:

- Melyek azok az élmények, tapasztalatok, matematikai fogalomcsírák, amelyekre az egybevágósági transzformációk tanítása során építhetünk?
- Milyen szerepe van a szemléltetésnek az egybevágósági transzformációkkal kapcsolatos fogalmak alakulásában?
- Mi a szerepük a transzformált kép előállítására szolgáló eljárásoknak (mozgítás, illetve körzős vonalzó szerkesztés)?
- Milyen hibák keletkezhetnek az érintett fogalmakról alkotott, nem-verbális, „belső” képekben?
- Melyek ezek közül azok, amelyeket a szemléltetés, illetve a szerkesztési eljárás megválasztása különösen érint?
- Eredményes-e a „zászlós módszer”, és miben ragadhatóak meg az eredményei?
 - Milyen általánosabb didaktikai elvek állnak a „zászlós módszer” eredményeinek hátterében?
 - Hogyan változik a tanár szerepe, feladata a „zászlós módszer” bevezetésével?
- Milyen konzekvenciákat fogalmazhatunk meg a tanárképzéssel kapcsolatban?

1.5 A kutatás hipotézisei

Alaphipotézis

- Az egybevágóság, illetve az egybevágósági transzformációk szemléltetésére, a transzformált kép előállítására, valamint bizonyos az ősképek rekonstrukciójára szolgáló eljárások zavarokat okozhatnak néhány alapvető geometriai fogalom, például az „egybevágóság”, „szimmetria”, „transzformáció” fogalmak kialakulásában.
- A „zászlós módszer” egy olyan szemléltetés, illetve eljárás, amely gyerekek által is könnyen végrehajtható; matematikailag legitim, tehát az általa indukált fogalomképzet semmilyen részletében nincs ellentmondásban a matematikai (háttér-) elmélettel; ugyanakkor összhangban áll a tanuláspszichológia fogalomépítésre, fogalomreprezentációra, szemléltetésre vonatkozó elméleteivel is.

Részhipotézisek

A „zászlós módszer” segítségével

- folyamatosan, törés nélkül építhetjük (többek között) a transzformáció, egybevágóság, szimmetria, függvény, halmaz fogalmát;
- párhuzamosan fejleszthetjük ezeknek a fogalmaknak a jobb és bal agyféltekés komponenseit;
- kiküszöbölhetünk néhány gondolkodási hibát, amit a pontatlan szemléltetés és a körzős-vonalzós szerkesztések túlsúlya a nem verbális szinten eredményez;
- komoly segítséget adunk a tanulóknak a deduktív gondolkodás felé vezető úton;
- egyaránt hatékonyan fejleszthetjük a tehetséges és kevésbé tehetséges gyerekeket;
- átjárhatóbbá válik a kapcsolat az egyetemi és az iskolai geometria között, könnyebbé válik az ismeretek transzferálása.

1.6 A kutatás folyamata

A kutatásom az alábbi fő irányokban folyt és folyik:

- a transzformációtanítás irodalmának megismerése

Itt elsősorban a magyarországi vonatkozások érdekeltek. Utánanéztem, hogyan jelent meg a transzformációk tanítása a tantervekben, tankönyvekben, didaktikai tanulmányokban. A transzformációtanítás csíráit sikerült még egészen korai, az 1900-as évek elején készült, tankönyvrészletekben is megtalálni. A téma szempontjából az 1960-as évek fordulata különösen érdekes volt, amikor a transzformációkra alapozott geometria-tanítás gondolata nemzetközi szinten aktuális témává vált (Jaglom, 1962; Jaeger, 1966), ugyanakkor kiváló magyar

matematikusok, didaktikai szakemberek és gyakorló pedagógusok egész sora foglalkozott nagyon komolyan ezzel a témával, és alakította ki a máig élő „magyar hagyományt” ezen a területen. Ezekkel a kérdésekkel a dolgozat 4. fejezetében (Transzformáció-tanítási módszerek 32. o.) foglalkozom részletesen.

- a transzformációtanítás iskolai gyakorlata és a megfelelő matematikai elmélet közötti kapcsolat átgondolása

A taneszközöket vizsgálva úgy találtam, hogy egy bizonyos szint felett ez a kapcsolat nagyon gondosan át lett gondolva, ki lett dolgozva. Az alapvető fogalmak szintjén azonban – itt elsősorban az egybevágóság és transzformáció-fogalomra, valamint az egybevágósági transzformációk invariáns tulajdonságaira gondolok – nem sikerült olyan megoldást találni, ami ideális lenne mind a matematika, mind a didaktika szempontjából.

Engem a dolgozatomban éppen ez a kevésbé kidolgozott szint érdekel, az itt keletkező szemléletes, nem verbális, nem definiált fogalmak, ezek kapcsolata a tiszta matematikai fogalommal.

Mivel az egybevágóság fogalma a geometria különböző axiomatikus felépítéseinek középponti kérdése, ezért utánajártam a különféle módszertani megközelítések mögött meghúzódó axiomatikus vagy axióma-közei elméleti állításoknak. Hajós axiómarendszerét az iskolai tanítás szemszögéből különösen fontosnak találtam.

A 2.1 szakaszban (Matematikai háttér 9. o.) összefoglalást adok mindarról, amit ebben a témakörben a témám szempontjából fontosnak gondoltam.

- a tanuláselméletek fogalomalkotással kapcsolatos eredményeinek a megismerése

Bár ezeknek a kutatásoknak jelentős része a – a duál-kód elmélet, a concept image, a procept fogalma, stb. – az 1900-as évek első kétharmadában nem volt ismert, a cselekvés, a szemléltetés fontossága elfogadott didaktikai alapelv volt a korszak minden haladó szellemű pedagógusa és didaktikatudósa számára. Fontos eszköznek gondolták a fogalomépítés kezdeti stádiumaiban, annak a célnak az elérése érdekében, hogy segítse a diákokat eljutni egy tiszta, absztrakt fogalomig. Azt azonban csupán a későbbi vizsgálatok világították meg, hogy fogalmainknak a „tiszta, absztrakt tudás” – a logogenek (Paivio, 2006) – csak egyik komponense, emellett rejtve, ott van egy másik oldal is, – az imagenek világa –, mely nem tudatosul, de hat a gondolkodásunkra. Segíti, ha összhangban van a formális ismeretekkel, súlyosan gátolja, ha ellentmondásban van velük. Ami azt jelenti, hogy a cselekvéshez, szemléltetéshez használt eszközök jelentősége sokkal nagyobb, mint korábban gondoltuk. Megválasztásuk perdöntő hatással lehet a matematikai fogalomalkotásra.

A 2.2 szakaszban (Tanuláspszichológiai és didaktikai háttér 15. o.) összefoglalom a dolgozatom szempontjából alapvetőnek gondolt elméleti didaktikai és módszertani elveket.

- az előbb felsorolt vizsgálati eredmények összevetése a „zászlós módszerrel” és a rá épülő transzformációtanítási koncepcióval.

Dolgozatom elsődleges célja annak megvizsgálása, hogy indokolt-e a szemléltetés szokásos módszereinek megváltoztatása, és hogy mennyiben támasztja alá a matematikai és didaktikai elmélet a zászlós módszer alkalmasságát.

1.7 A vizsgálatok eredményei

- A módszer összevetése a fogalomalkotás pszichológiájának újabb eredményeivel:

Az elméleti eredmények sokoldalúan igazolják, hogy a tanulás nem verbális, jobb agyféltekés gondolkodást erősen érintő elemei, a tárgyi tevékenységek és a szemléletes tapasztalatok nagyon fontos részét képezik a fogalomalkotásnak. Így döntő jelentősége van annak, hogy az általuk közvetített nem verbális képek támogatják-e az absztrakt fogalmat és ezen keresztül az elvont matematikai gondolkodást, vagy éppen ellenkezőleg, tartalmaznak-e ellentmondást a szabatosan definiált fogalommal. Ez utóbbi esetben a fogalomcsírák konfliktus-faktorokká válnak és blokkolják az érintett fogalmak helyes kialakulását.

Ezen eredmények szem előtt tartásával elemeztem a transzformált kép előállítására szolgáló eljárásokat és megállapítottam, hogy a módszertanilag nem következetesen átgondolt szemléltetés, illetve a körzős vonalzós szerkesztések életkornak és fogalmi fejlettségnek nem megfelelő egyeduralma kiindulópontja lehet a hibás fogalomképzetek kialakulásának.

Egyik fő hibaforrás, hogy a mozgatással való szemléltetés hagyományos módjaiban a mozgatás pályája kötött (a tengelyes tükrözésnél rögzített a tengely, forgatásnál a forgáscentrum, stb.). A sík egybevágóságairól kialakított szemléletes képzet ezért elsősorban az egyes pontoknak a mozgatás során leírt pályájához kötődik. Ez azonban ellentmondásban van a szabatos definícióval, miszerint két transzformáció ekvivalenciája csupán a pontok kezdő és véghelyzetének megegyezésén múlik.

Másik fontos és gyakori hibaforrás a transzformált képnek szinte kizárólagos körzős-vonalzós szerkesztése. Ez egyrészt nehézkes, pontatlan és korlátozott eljárás, amellyel csak néhány speciális alakzat képe állítható elő, másrészt egyes pontok kitüntetett szerepet kapnak az eljárásban, például a szakaszok végpontjai, sokszögek csúcsai, körök középpontja stb. Emiatt sok esetben nem az összetartozó pontokra, egymásnak megfelelőetett, illetve szimmetrikus alakzatok

összetartozó részleteire irányul a figyelem. Ennek következtében nem alakul ki globális szemléletes kép az egybevágóságról (a transzformációról).

Az elmélettel történő összevetés azt mutatta, hogy a zászlós módszer nem indukál sem kompromisszumokat, sem potenciális konfliktusfaktorokat. Olyan eszközt ad a tanár és a gyerek kezébe, mely egyszerre összhangban van a bennük élő intuitív egybevágóság-fogalommal és a szabatos matematikai felépítéssel. Az eszközt mindaddig érdemes használniuk, amíg az egybevágósággal kapcsolatos matematikai elmélet annyira kiépül a gondolkodásukban, hogy ezt szükségtelenné teszi, de később is kényelmesen visszanyúlhatnak hozzá, ha valamilyen zavar támad a fogalomépítésben.

A matematikai elmélettel összhangban, „zászlós módszer” alkalmazása során, mind a térbeli mozgás, mind az azt szemléltető mozgatás megadásában csupán a kezdő és véghelyzet számít. A mozgatás során nincs korlátozás, a sík egybevágóságait a térbe beágyazva, elemi mozgásélményként érzékelik a gyerekek.

Paivio duál-kód elmélete szerint az eljárások – tárgyi tevékenységek, szemléltetések – kettős kódja akkor segíti hatékonyan a tanulást (különösen gyengébben teljesítő gyerekek esetében), ha azok megismerésére, begyakorlására és alkalmazására elegendő időt biztosítunk.

A „zászlós módszer”-ben a transzformált képet előállító eljárás, egyszerű és nem korlátozódik diszkrét pontokból, egyenesekből és körökből felépíthető alakzatokra. Így nincs akadálya, hogy a gyerekek annyit használják az eszközt, és olyan helyzetekben, amennyire és amikor annak szükségét érzik. Így bőséges – nem verbális – tapasztalatanyagot szerezhetnek a különböző egybevágósági transzformációk működéséről, tulajdonságairól, a szimmetrikus alakzatokról, azok összetartozó részleteiről.

- A deduktív gondolkodás fejlesztése

A szemléletnek és az elméleti ismereteknek ez a szoros összekapcsolása lehetővé teszi egyszerű érvelések alkotását, szimmetrián alapuló következtetések levonását. Így a gyengébb képességű gyerekeknek is komoly segítséget adunk a deduktív gondolkodás felé vezető úton, őket is el tudjuk juttatni a geometriai gondolkodás magasabb szintjeire. Ugyanakkor a szemlélettel is megalapozott egybevágóság-fogalom – mint például otthonosság a szimmetrián alapuló okoskodásokban – jelentős szerepet játszhat a tehetséges gyerekek feladatmegoldó készségének fejlesztésében.

- Kapcsolat a matematika elmélettel:

A „zászlós módszer” Hajós mozgási axiómáinak közvetlen implementációja az iskolai matematika számára. Az erre alapozott egybevágóság-, illetve transzformációfogalom törés nélkül építhető az iskolától az egyetemig.

2. AZ ELMÉLETI ALAPOK

2.1 Matematikai háttér

Az egybevágóság fogalma a geometriában alapvető fontosságú. Annak igazolására, hogy két alakzat egybevágó-e alapvetően kétféle stratégiát kínálunk az iskolai tananyagban.

Az egyik stratégia a háromszögek egybevágóságának alapeseteit (vagy az ezekből levezethető, sokszögek, poliéderek egybevágóságára vonatkozó tételeket) felhasználva igazolni az egybevágóságot.

A másik stratégia olyan egybevágósági transzformáció keresése, ami egyik alakzatot a másokba viszi.

2.1.1 Egybevágósági transzformációk

„Két alakzatnak, vagy egy alakzat két részének az összehasonlítása, egybevetése a geometriában állandóan jelentkező szükséglet; ez a szükséglet alakította ki a geometriai transzformációk fogalmát.”

(Reimann: A geometria határterületei)

Az egybevágósági transzformációk azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy minden szakaszt vele egyenlőbe visznek. Ebből következik, hogy ezek a transzformációk rendelkeznek az egyenes-, félegyenes-, sík- és szögtartás tulajdonságaival is, ilyen módon alapvető segítséget nyújtanak abban, hogy „egyforma” részleteket, egyenlő szakaszokat, szögeket stb. keressünk.

2.1.2 Egybevágó alakzatok

Két alakzatot akkor nevezünk egybevágónak, ha pontjaik között létesíthető egy távolságtartó megfeleltetés, azaz ha valamely egybevágósággal egymásba vihetők.

E szerint a definíció szerint két egybevágó alakzat összes megfelelő pontpárjának egyenlő távolságra kell lennie egymástól, tehát az egybevágóság eldöntéséhez – ha az egybevágósági transzformációkat ki akarnánk kerülni – az összes megfelelő pontpár összehasonlítására lenne szükség. Szerencsére ennél sokkal kevesebb megfelelő részlet egyenlősége is elég az egybevágósághoz, erről szólnak azok a tételek, melyekre a „háromszögek egybevágóságának alapesetei”-ként, vagy a „háromszögek egybevágóságának elégséges feltételei”-ként szoktunk hivatkozni.

2.1.3 Az egybevágóságfogalom axiomatikus megalapozása

„Lélektani szempontból talán a mozgás, sőt még inkább a szimmetria (tükrözés) a primitívebb (az egybevágóságfogalomnál), s az egybevágóság ebből származtatott fogalom. Ez adja azt az ötletet, hogy állítsunk össze olyan axiómarendszert, mely a tükrözést vagy a mozgást mint alapfogalmat meghatározza, s arra építsük fel a geometriát.”

(Kárteszi: A geometria-tanítás korszerűsítéséről)

Bár Magyarországon az általános és középiskolákban nem szigorú, axiomatikus felépítésben tanítjuk a geometriát, a tantervek törekszenek arra, hogy a geometria anyag struktúrája minél szisztematikusabban épüljön, lehetőséget kínálva a deduktív gondolkodás fokozatos fejlesztésére. Az egybevágóságfogalom mindegyik felépítésben középponti szerepet játszik, tehát a matematikai háttér vizsgálatakor döntő, hogy vázlatosan áttekintsük, hol van ennek a fogalomnak a helye a különböző axiomatikus felépítési lehetőségekben.

Reimann István: „A geometria határterületei című” könyvének bevezető részében világosan megfogalmazza az iskolai geometria-tanítás háttérében meghúzódó két legfontosabb felépítési lehetőséget. *„A szemléletes síkban annak a kijelentésnek, hogy két alakzat egybevágó, jól érzékelhető tartalma van, ugyanis egy olyan „mozgás” létezésére utal, amely az egyik alakzatot a másikba viszi át. A geometriának a szemlélettől független, logikai megalapozásnál két szakasz vagy két szög egybevágóságát a Hilbert-i axiómarendszer alapfogalomnak tekinti, melyet csak a rá kirótt axiómák értelmeznek. A mozgásnak alapfogalomként való elfogadása, egy szintén lehetséges – a Hilbertitől eltérő – axiomatikus tárgyalási mód.”* (Reimann, 1986).

Ilyen, a mozgásra mint alapfogalomra épített axiómarendszert dolgozott ki Hajós György. (Hajós, 1971)

Kárteszi (1972, 173-174. o.) „A geometriatanítás korszerűsítéséről” című könyvében a hilberti rendszer mellett szintén felveti az egybevágóság fogalmának mozgásra alapozott felépítését, ezeken felül azonban egy harmadik lehetőséget is kínál: *„Ha a tükrözést választjuk alapfogalomnak, akkor, amiként az Hjelmslev, Thomsen, Bachmann nyomán ma már tudjuk, az euklideszi geometria egy a mai matematikába szervesebben beillő felépítésének alapjául fogadhatjuk.”* (Kárteszi, 1972, 174. o.)

Az egybevágósági transzformációk tanításának háttérében mind a három féle, fent említett axiomatikus felépítésnek megtaláljuk a nyomait – indirekten, nem formálisan –, amint azt a későbbiekben látni fogjuk.

A következő szakaszokban ismertetem, hogyan épülnek egymásra Hilbert és Hajós axiómarendszerében azok az egybevágósággal kapcsolatos fogalmak és tételek, melyek az iskolai tananyagban is szerepelnek. Vázlatosan bemutatom a harmadik felépítési lehetőséget is.

2.1.4 Egybevágósági axiómák Hilbert rendszerében¹

Ebben az axiómarendszerben szakaszok és szögek egybevágósága alapfogalom.

Szakaszok és szögek halmazában tekintsünk egy-egy kétváltozós relációt, melynek tulajdonságait az egybevágósági axiómák rögzítik. Két relációban levő szakaszt vagy szöget egyaránt kongruensnek (egybevágónak) nevezünk. Jelölésekkel: $|AB| \equiv |A'B'|$, illetve $hk \simeq h'k' \simeq$

„III1: Ha adott egy CD szakasz és egy AB félegyenes, akkor van ezen a félegyenesen egyetlen olyan M pont, hogy $CD \equiv AM$. Minden szakasz kongruens önmagával.

III2: Ha $AB \equiv A'B'$ és $AB \equiv A''B''$, akkor $A'B' \equiv A''B''$.

III3: Ha AB és BC egy e egyenes közös belső pont nélküli szakaszai, továbbá $A'B'$ és $B'C'$ ugyanazon, vagy egy másik e' egyenes olyan közös belső pont nélküli szakaszai, amelyekre $AB \equiv A'B'$ és $BC \equiv B'C'$, akkor $AC \equiv A'C'$.

III4: Legyen egy α síkban egy hk valódi szög, továbbá ugyanabban az α , vagy egy másik α' síkban egy δ' félsík, s ennek határvonalán egy O' kezdőpontú h' félegyenes. Ekkor a δ' félsíkban van egyetlen olyan O' kezdőpontú k' félegyenes, melyre $hk \equiv h'k'$. Minden szög önmagával kongruens.

III5: Ha két, ABC és $A'B'C'$ háromszögre teljesülnek az $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ és $BAC \simeq B'A'C' \simeq$, akkor $ABC \simeq A'B'C' \simeq$.”

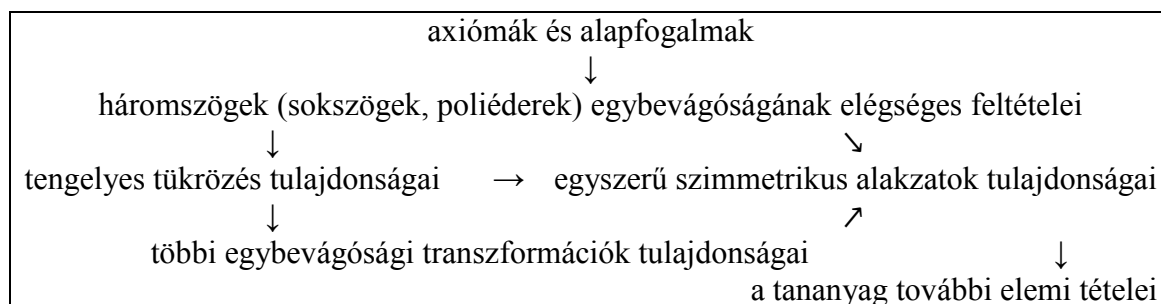
A háromszögek, sokszögek, poliéderek egybevágóságának alapesetei közvetlenül levezethetők Hilbert III5. axiómájából (természetesen használva a többi axiómát is).

A sík egybevágósági transzformációiról ebben a felépítésben bizonyítani kell, hogy valóban távolságtartóak. Ennek egy lehetséges módja az, hogy a tengelyes tükrözésről – a sokszögek egybevágóságára kapott elégséges feltételek alapján belátjuk, hogy távolságtartó, majd megmutatjuk, hogy a sík minden egybevágósága előáll tengelyes tükrözések szorzataként.

A szimmetrikus alakzatok alapvető tulajdonságai akár a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeiből, akár az egybevágósági transzformációk tulajdonságaiból levezethetők. Ilyen módon eljuthatunk az egyszerű szimmetrikus alakzatok, a szakaszfelező merőleges, a szögfelező, a kör és érintője, a szimmetrikus háromszögek és a paralelogramma tulajdonságainak megállapításához, ezek ismeretében pedig az iskolai anyag összes elemi tétele néhány következtetési lépéssel levezethető.

¹ Az axiómák megadásakor Reimann István megfogalmazásait használtam. (Reimann, 1986)

A felépítés tehát vázlatosan így ábrázolhatjuk:



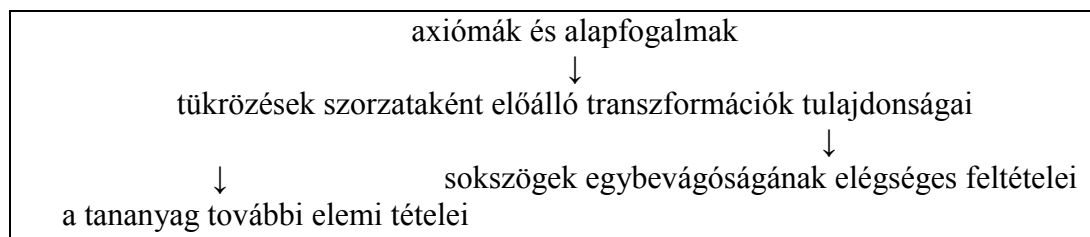
2.1.5 Az elemi geometria Hjelmslev–Bachmann-féle megalapozásáról

Kárteszi Ferenc a geometriatanítás korszerűsítéséről írott könyvében (1972, 170–175. o.) bemutatja ennek a felépítésnek az alapjait. Az ő anyaga alapján állítottam össze a következő vázlatos ismertetőt.

Ebben a felépítésben az involúció (másodrendű transzformáció vagy tükrözés) fogalma az, amelyet olyan axiómarendszerrel kell meghatározni, hogy az ezek szorzataként előálló transzformációk az egybevágóság-fogalom származtatására alkalmasak legyenek.

Ennek módját, egydimenziós esetben, részleteiben bemutatja, majd az egyenest a síkba beágyazva a rendszert kiegészíti három hagyományos illeszkedési axiómával, amelyhez mindössze még két axiómát kell hozzátennie, hogy az euklideszi geometriához hasonló, metrikus geometriát nyerjen.

A felépítés vázlatosan így ábrázolható:



2.1.6 A mozgás és a mérés axiómái Hajós axiómarendszerében

Ebben a felépítésben nem az egybevágóság fogalma, hanem a mozgás és a távolság tekintendő alapfogalomnak.

„VII. A mozgás két pont összekötő szakaszát a két elmozgatott pont összekötő szakaszába, az egyenest egyenesbe, a síkot síkba viszi.

VIII. Egy és csak egy olyan térmozgás van, amely egy adott félsíkot és ennek határán adott félegyenest megadott helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenestbe visz át. (Ha a térmozgás nem változtatja meg egy félsík és egy ennek határán elhelyezkedő félegyenest helyzetét, akkor nem változtatja meg a tér egyetlen pontját sem.)

A mérésről szóló axiómák azokra az osztályokra vonatkoznak, amelyeket a mozgással egymásba átvihető pontpárok alkotnak. Ezeknek az osztályoknak mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy pozitív valós szám, amelyet az osztályba tartozó pontpárok távolságának mondunk, s amely rendelkezik az axiómákban kimondott tulajdonságokkal.

IX. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza. (Akkor is igaz, ha véges sok szakaszra való felbontásról van szó.)

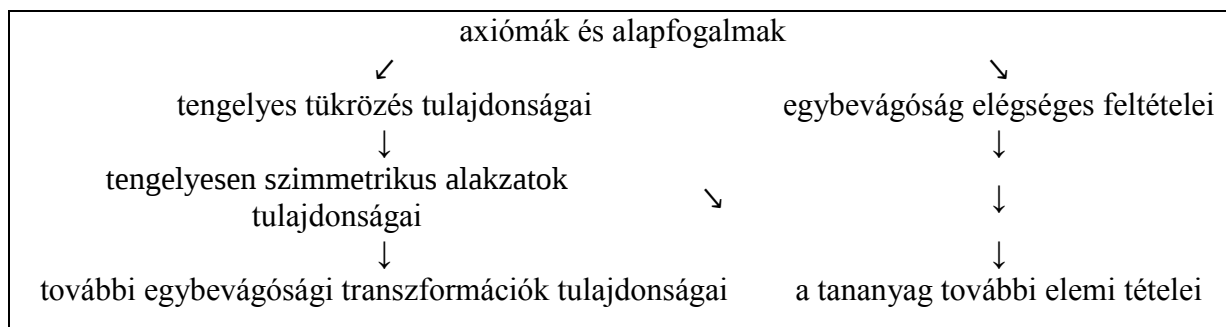
X. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, amelyre nézve az AB távolság egy adott pozitív valós szám.” Hajós, 1971, 11. o.)

A mozgások geometriai transzformációk, hozzárendelést létesítenek a tér pontjai között. Szakaszok és szögek egyenlőségét az egymásra mozgathatósággal definiáljuk. Ennek alapján természetes, hogy a mozgások távolságtartó transzformációk. Definíció szerint a távolságtartó transzformációkat egybevágóságoknak nevezzük, tehát ebben a felépítésben a mozgások az egybevágóságok „prototípusai”.

Hajós a sík tengelyes tükrözését térbeli mozgásként definiálja. A mozgás távolság- és szögtartó tulajdonságából vezeti le a tengelyes tükrözés tulajdonságait, valamint a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeit.

Fontos még számunkra az a tény, hogy a sík minden egybevágósága tekinthető térbeli mozgás síkra való leszűkítésének. Ez következik abból, hogy a sík minden egybevágósága előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként. Azt is fontos megmutatni, hogy a tér egybevágóságai nem mind mozgások.

A felépítés vázlata:



A Hajós-féle és a Hilbert-féle rendszerre alapozott felépítések között a döntő különbség abban van, hogy Hajósnál az egybevágóság definíciója és a róla szóló tételek jelentős része közvetlenül a mozgás fogalmára épül. A sík egybevágóságainak, így speciálisan a tengelyes tükrözésnek a tulajdonságairól szóló állítások igazolásához nincsen szükség a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeire.

Az azonban nem magától értetődő ebben a felépítésben, hogy hogyan lehet a sík egybevágóságait a mozgási axiómákra alapozva definiálni. Ezek a definíciók természetesen különböznek azoktól, melyek a sík egybevágóságait pontonként megadott hozzárendelési szabályként definiálják. Meg kell tehát még azt is mutatni, hogy a mozgással megadott definíciók megegyeznek a „megszokott” – hozzárendelési szabállyal megadott – transzformáció-definíciókkal.

2.1.7 A sík egybevágóságai

Tengelyes tükrözés: Adott t tengely. A tengelyes tükrözés olyan mozgás, ami a tengely minden pontját önmagába viszi és a határolt félsíkokat felcseréli.

A tengelyes tükrözés inverze önmaga.

Belátható, hogy ennél a transzformációnál egy tetszőleges, a tengelyre nem illeszkedő P pontra és P' képre igaz, hogy a t tengely a PP' felező merőlegese.

Bizonyítás:

Ha P pont nem illeszkedik a t tengelyre, akkor P' , definíciónk szerint, a tengely másik félsíkjában van, ezért az összekötő szakasz, az illeszkedési axiómák szerint, metszi a t tengelyt egy M pontban. P képe P' , M képe önmaga, tehát PM képe $P'M$, amiből a távolságok egyenlőségének definíciója alapján következik, hogy $PM = P'M$. Tehát beláttuk, hogy a tengely felezi az összekötő szakaszt.

Jelöljük ki a tengelyen egy M -től különböző X pontot, és tekintsük a PMX $\sphericalangle$ szöget. PM félegyenest képe $P'M$, XM félegyenest képe önmaga, tehát a PMX $\sphericalangle$ képe a $P'MX$ $\sphericalangle$. A szögek egyenlőségének definíciója alapján tehát PMX $\sphericalangle = P'MX$ $\sphericalangle$, mivel pedig ezek együtt teljesszöget alkotnak, azért ez azt jelenti, hogy MX merőleges PP' . Ezzel tehát beláttuk, hogy a tengely merőleges az összekötő szakaszra.

Középpontos tükrözés: Adott egy O középpont. A középpontos tükrözés olyan mozgás, ami egy az O -ból induló félegyenest ugyanazon egyenes másik, szintén O -ból induló félegyenesébe viszi és a határolt félsíkokat felcseréli.

A középpontos tükrözés inverze önmaga.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez a mozgás egy tetszőleges P pontot olyan P' pontba visz, hogy O pont a PP' szakasz felezőpontja.

Forgatás: Adott O pont és az α irányított szög, melynek szárai az O -ból indulnak. A forgatás egy olyan mozgás, ami az α irányított szög kezdőszárát a másik szára viszi, a kezdőszárát határoló, a másik szarat tartalmazó félsíkot pedig a másik szarat határoló, a kezdő szarat nem tartalmazó félsíkba viszi.

Inverze az ugyanazon pont körüli, ellenkező irányú irányított szöggel való elforgatás. A középpontos tükrözés, olyan speciális forgatás, ahol $\alpha = 180^\circ$.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy a forgatás egy olyan hozzárendelés, amely a P pontot P' pontba viszi úgy, hogy az $OP=OP'$ és POP' irányított szög $= \alpha$.

Eltolás: Adott egy AB irányított szakasz. Az eltolás egy olyan mozgítás, ami az AB félegyenest a B -ből induló ugyanolyan irányú félegyenesbe, a határolt félsíkot önmagába viszi.

Inverze az ellenkező irányú BA irányított szakasz által meghatározott eltolás.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez olyan hozzárendelés, amely P pont képét olyan P' pontba viszi, hogy a PP' által megadott vektor megegyezzen az AB irányított szakasz által megadott vektorral. Ennek igazolásához már szükség van a párhuzamossági axiómára is.

Csúszástükrözés: Adott egy AB irányított szakasz. A csúszástükrözés egy olyan mozgítás, ami az AB félegyenest a B -ből induló ugyanolyan irányú félegyenesbe viszi, és a határolt félsíkokat felcseréli.

Inverze egy ellenkező irányú irányított szakasszal megadott csúszástükrözés.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez olyan hozzárendelés, amely P pont képét olyan P' pontba viszi, amelyet úgy kapunk, hogy a P pontot először tükrözzük az AB irányított szakasz által meghatározott egyenesre, majd eltoljuk az AB irányított szakasz által megadott vektorral.

Identitás: Az az egybevágóság, amelyben minden pont képe önmaga.

Érdemes rámutatni, hogy a tengelyes tükrözéshez és a csúszástükrözéshez mozgatóskor feltétlenül ki kell lépni a térbe, míg a többi mozgítás a síkon belül maradva is elvégezhető (síkbeli mozgások).

2.2 Tanuláspszichológiai és didaktikai háttér

„Az emberi elme nem egy tisztán logikai valóság. Működésének komplexitása gyakran ellentmondásban van a matematika logikájával. Nem mindig a tiszta logika az, amiből a tisztánlátásunk születik, és nem a véletlenek okozzák a hibákat, amiket vétünk. Hogy megértsük, mi történik ezekben a folyamatokban, mind a sikeres, mind a hibás esetekben, világosan kell látnunk a különbséget a matematikai fogalmak formális definiálása és azon kognitív folyamatok között, melyek által a fogalom kialakult.”

(Tall 1981)

Dolgozatom fő tézise az, hogy a transzformáció-tanításban alkalmazott szemléltetési módoknak kulcsszerepük van az egybevágóság-fogalom alakulásában. Ennek alátámasztását a fogalomalkotással, ezen belül is a szemléltetésnek, valamint az alkalmazott eljárásoknak a fogalomalkotásban játszott szerepével kapcsolatos elméletekre alapozom.

2.2.1 A fogalomalkotás

A matematikai fogalomalkotás az értelem igen magas szintű működésének eredménye. A dolgozatom szempontjából nagyon fontosnak érzem, hogy bemutassam azokat az elméleti megállapításokat, melyek ennek a folyamatnak mélyebb megértését szolgálják.

2.2.1.1 Asszimiláció és akkomodáció

Először Skemp elméletét ismertetem. Skemp, Piaget elgondolásait továbbfejlesztve, kidolgozott egy modellt, amelyet az utóbbi évek kutatásai még tovább finomítottak.

Piaget az értelem működését alkalmazkodásként és újra-alkalmazkodásként definiálja és a külvilággal való „*cserefolyamatokként*” értelmezi. Piaget (1993, 19–21. o.) szerint „...*az alkalmazkodást a szervezetnek a környezetre gyakorolt tevékenysége és a visszaható cselekvések, ...az asszimiláció és a hozzáidomulás közti egyensúlyként, vagyis a pszichikum és a tárgyak közt fennálló csere-folyamatok egyensúlyaként határozhatjuk meg.*”

Miközben a külvilágból érkező tapasztalatokat asszimiláljuk, ezeket osztályokba soroljuk, fogalmakat alkotunk. A fogalomalkotásnak alapvetően két, lényegileg különböző, útja van. Az induktív – példákon alapuló – és a deduktív – definíción alapuló fogalomalkotás. Ez a két út általában ötvöződik egy-egy konkrét fogalom fokozatos kialakulásában.

Skemp modellje szerint legegyszerűbb fogalmainkat közvetlen érzéketi tapasztalatok alapján alkotjuk meg, melyek az absztrakció legalsó emeletét képezik. Ezeket a fogalmakat ismét osztályokba sorolva az absztrakció második emeletén elhelyezkedő fogalmakat nyerünk.

Meglévő fogalmainkból példák és ellenpéldák megfigyelésén át, a hasonlóságok és különbségek intuitív megragadásán keresztül juthatunk egyre magasabb szintű fogalmakhoz. Ilyen módon fogalmaink hierarchikus rendszert alkotnak, ahol egy A fogalom magasabb rendű, mint B fogalom, amennyiben a B az A fogalom egy példája.

Már meglévő fogalmainkból azok példáiból új halmazokat hozhatunk létre, definícióval alkothatunk belőlük új fogalmakat. A definíció valójában egy „szabály”, melynek alapján minden dologról eldönthető, hogy hozzátartozik-e az újonnan létrehozott halmazhoz.

Összefoglalva, *„nagyon sok olyan fogalmat használunk, amelyeknek nincs formális definíciójuk, felismerésüket tapasztalat alapján, a megfelelő kontextusban való használat során tanuljuk meg. Később ezeknek a fogalmaknak a jelentéstartalma finomodhat, és növekvő pontossággal értelmezhetjük őket a precíz definíció kényelmével, vagy akár anélkül.”* (Tall és Vinner, 1981, 2. o.)

Egyre bővülő fogalmaink az alá és fölérendeltség mellett sok egyéb szállal kapcsolódnak egymáshoz, – átfedik, kiegészítik, felidézik egymást –, összetett struktúrákba, *szkémákba* rendeződnek.

Skemp –Piaget metaforáját továbbfejlesztve – az új fogalmak alkotása során két alapvető műveletet különböztet meg, az asszimiláció és az akkomodáció műveletét.

Egy új fogalom *asszimilálása* Skemp (2005) terminológiájában azt jelenti, hogy a tanulás során a fogalmat – minél több szállal – hozzákapcsoljuk korábbi ismereteinkhez, beleágyazzuk egy már meglévő struktúrába. A megértés élménye ezeknek a kapcsolatoknak a felismerésével és gazdagságával függ össze. Előfordulhat azonban, hogy az új fogalom nem illik bele, vagy akár ellentmondásban van már meglévő szkémáink valamelyikével, és az új fogalom befogadásához a szkémát meg kell változtatni. *„Egy állandó, növekvő szkéma helyett, melynek segítségével az egyén megszervezi múltbeli tapasztalatait és asszimilálja az új adatokat, a szkémának akkomodálódni kell az új helyzethez.”* (Skemp, 2005, 59. o.)

2.2.1.2 Fogalomképzet - Concept image

A fogalomalkotás folyamatában a fogalomhoz egy idő után egy vagy több szimbólumot – nevet, jelet, esetenként képet – is társítunk, ami lehetővé teszi a fogalom kommunikálását, és segíti annak szellemi manipulálását. Ennek az eddig felvázolt képnek, egy alapvető hiányosságára mutat rá Tall, amikor ezt mondja: *„De a teljes kognitív struktúra, ami színezi a fogalom jelentését, lényegesen bővebb, mint egyetlen szimbólum felidézése. Több mint bármilyen mentális kép, legyen az bár képi, szimbolikus, vagy más egyéb. Egy fogalom felidézésének és manipulálásának a mentális folyamatai során sok asszociált folyamat is életbe lép, tudatosan és nem tudatosan befolyásolva a jelentést és a használatot.”* (Tall, 1981, 1–2. o.) Ezt a teljes kognitív struktúrát nevezték el röviden „concept image”-nek, fogalomképzetnek.

Magát a „concept image” – fogalomképzet – kifejezést Schlomo Vinner alkotta meg 1980-ban. Rövid definícióját David Tall-lal együtt adták meg (Tall, 1981): *„A fogalomképzet az elmének azokból a kognitív struktúráiból tevődik össze, amelyek egy bizonyos fogalommal asszociációs kapcsolatban vannak.”*

Tall és Gray (1994) azt állítja, hogy bizonyos fogalmak megalkotásában a tevékenységek és eljárások meghatározó szerepet játszhatnak.

2.2.1.3 Procept elmélet

„Tekintetbe véve azon fogalmak fontosságát, melyek egyszerre folyamatok (processes) és termékek (products), furcsának találtam, hogy ezeknek nincs nevük.”

Tall (1991)

Sfard (1987, in Meissner, 2001) különbséget tesz két fajta matematikai definíció között: vannak definíciók, melyek az absztrakt fogalmakra úgy hivatkoznak, mintha azok konkrét tárgyak lennének, és vannak fogalmak, melyek folyamatokra és tevékenységekre vonatkoznak – mint összeadás, szorzás, kerekítés, deriválás, stb.

Az utóbbi fogalom-típus számára alkotja meg Tall a *procept* fogalmát, amire Gray-vel közösen (Gray, Tall, 1994) a következő definíciót adják: *„Egy elemi procept három összetevőnek az ötvöze: egy eljárás (process), ami egy matematikai tárgyat (object) eredményez, és egy szimbólum, amely az eljárást és a tárgyat egyaránt képviseli. Egy procept olyan elemi proceptek együttese, melyeknek a tárgya közös.”*²

2.2.1.4 Konfliktusok a fogalomépítésben

A szkémák szerinti tanulás előnyeit és hátrányait Skemp (2005, 59-60. o.) így foglalja össze: *„Ha szkémák szerint tanulunk – ami ebben az összefüggésben azonos az értelmes tanulással –, akkor nem csupán hatásosabban tudjuk megtanulni azt, amivel éppen foglalkozunk, de egyszersmind olyan szellemi eszközt dolgozunk ki a magunk számára, amellyel megkönnyíthetjük az adott területen a későbbi tanulást. És ami talán még ennél is fontosabb: ha következetesen használjuk ezt az eszközt, akkor egyszersmind a szkéma korábban elsajátított részeit is megszilárdítjuk.”*

„Pillanatnyilag viszont úgy tűnik, hogy éppen a szkémák rendkívüli ereje jelenti a legnagyobb hátrányokat is, minthogy a meglevő szkémákban igen erős az önfenntartás iránti tendencia. Ha tehát olyan helyzetek jönnek létre, amelyekben ezek a szkémák már nem megfelelőek, akkor a szkémának ez a stabilitása az alkalmazkodóképesség gátjává válik. ... Az egyén számára a szkéma olyan értéket jelent, hogy mindenfajta megváltoztatásával szemben rendkívüli ellenállást fejthet ki.”

Ilyenfajta akkomodációra a legkörültekintőbb matematikai nevelés mellett is szükség van időről időre (pl. gondoljunk a negatív, vagy a törtszámokkal végzett műveletek bevezetésére).

²Tall szimbólum fogalma különbözik a szimbolikus leképezés Bruner által megalkotott fogalmától. Az indoklást lásd a 2.2.2.1 szakaszban. (Bruner reprezentáció elmélete 21. old)

(A matematikai nevelés egyik igen fontos haszna lehet, hogy csökkenti a meglévő gondolati struktúrák megváltoztatásától való félelmet, nyitottabbá tesz az elő látásra idegen gondolatok felé, csökkenti a gondolkodás előítéletességét.)

Tall és Vinner (Tall, 1981) is nagy fontosságot tulajdonít a fogalomalkotás során keletkező konfliktusoknak, Szerintük egy fogalomképzet, miközben fokozatosan fejlődik, nem szükségszerűen koherens elemekből áll, tartalmazhat egymásnak ellentmondó elemeket. Ezek meg is férhetnek egymás mellett, ugyanakkor későbbi konfliktusok forrásaivá is válhatnak.

Ezt azzal magyarázzák, hogy egy időben a fogalomképzetnek csak egy része aktiválódik. Különböző időpontokban előhívhatunk egymásnak kisebb-nagyobb mértékben ellentmondó részleteket anélkül, hogy az ellentmondást észlelnénk. Ilyenkor *„potenciális konfliktus faktorokról”* beszélünk. Ezek akkor válnak *„kognitív konfliktus faktorokká”*, amikor az egymásnak ellentmondó aspektusok egyszerre jelennek meg.

„Bizonyos körülmények között ezek a kognitív konfliktus faktorok nem tudatosan idéződnek fel, és a konfliktus maga csupán az értetlenség halvány érzésében mutatkozik meg. ... A potenciális konfliktus faktorok egy súlyosabb típusa, amikor a fogalomképzet egyik része magával a formális fogalom-definícióval van ellentétben. Az ilyen faktorok komolyan gátolhatják a formális elmélet tanulását” (Tall, 1981, 4. o.)

Ezeknek a konfliktusoknak a feloldása egyszerűbb, ha az ellentmondás verbalizálható, racionálisan végiggondolható. Amennyiben azonban a gondolkodásunk nem-verbális elemeit, „láthatatlan szkémáit” kell módosítani, különösen nehéz a dolgunk, hiszen az sem tudatos, hogy mivel van az új fogalom ellentmondásban, sőt még az ellentmondás ténye sem válik világossá. Ami a felszínen látható, az annyi, hogy egy gyerek sikeres, számára szellemi játék a matematika, vagy éppen ellenkezőleg, kudarcos, teljesen irracionális módon képtelen egyszerű dolgok megértésére is.

2.2.1.5 A geometria fogalmai

Mivel a dolgozatom az egybevágóságfogalom tanításának a problémáival foglalkozik, ehhez szükségem van a fogalomépítés pszichológiájának speciálisan geometriára vonatkozó megállapításaira is.

A térbeli gondolkodás szintjei

Különböző modelljei vannak a térbeli gondolkodás fejlődésének. Ennek szintjeivel kapcsolatosan vannak viták. Jelen dolgozatban az alábbi, van Hiele házaspár által kidolgozott, széles körben elfogadott kidolgozott modellt találtam leghasznosabbnak (van Hiele, 1959).

Vizuális szint: az alakzatokat a látvány alapján különbözteti meg.

Analitikus szint: az alakzatokra az alkotórészeiket is figyelembe véve tekint, és az alakzatok osztályaiban képes közös tulajdonságokat felfedezni.

Informális következtetések szintje: a korábban felfedezett tulajdonságokat logikailag is képes összekapcsolni.

A dedukció szintje: képes tételeket deduktívan bizonyítani

A szigorú matematika szintje: a tételeket axiómarendszerre alapozza.

A gyerekek térbeli gondolkodásának szintjeit a későbbiekben összevetjük az egybevágósági procept kialakulásának a különböző fázisaival.

Tall et al (2000a) mutatnak példákat *procept*-ekre az algebra, analízis, stb., területéről, de geometriából nem. Az a felfogásuk, hogy azon a területen nincsenek *procept*-ek, mivel „...a gondolkodás fejlődése a geometriában nagyon más.”³ Meissner (2001) másként gondolkodik erről, és némileg módosítja a *procept*-ek kialakulásáról alkotott korábbi képet, úgy, hogy a geometriai fogalomalkotás is beleférjen az elméletbe.⁴

A magam részéről azt gondolom, hogy az egybevágóság fogalma *procept* a fogalom eredeti értelmezése szerint is. Itt nem csak arra gondolok, hogy a mi megközelítésünk szerint az egybevágóság egy függvény, és a függvényfogalom fontos eleme Tall eredeti listájának is. A transzformációtanítás bármelyik felépítési módszerét elemezve egészen nyilvánvaló, hogy a tanítási gyakorlatban az egybevágóság fogalma tevékenységek és eljárások elvégzése során alakul ki.

2.2.2 Reprezentációk

A tanítás során az ismeretek átadásához, kommunikálásához különböző típusú szemléltetési módokat, külső reprezentációkat használunk. Ezek befolyásolják azt, hogy az ismeret hogyan képeződik le, hogyan reprezentálódik a gyerekek gondolkodásában, hogyan épül be a már meglévő ismeretek rendszerébe. Bruner (1974, 72. o.) terminológiájával: mennyire lesz „gazdaságos”, mekkora lesz a tényleges „kifejező értéke”.

³ Úgy vélik, hogy vannak olyan észlelések, melyekben (a gyerekek) a valóságos tárgyakat egységes formaként (gestalt) és prototípusok osztályaként érzékelik. Ahhoz, hogy az alakzatokat ne fizikai, hanem mentális objektumokként fogják fel a korábbi látásmód rekonstrukciójára, az alakzatok hierarchiába rendezésére van szükség.

⁴ Meissner egyetért Struve-val (1987), aki úgy látja, hogy az általános iskolában a gyerekek a geometriát úgy tanulják, mint a természettudományokat, leírják, magyarázzák és általánosítják a jelenségeket. Így, számukra a geometria egy tapasztalati tudománnyá válik. Meissner (2001) véleménye szerint „egy elemi *procept* Tall (Tall et al. 2000a) szerint a tapasztalati szintről az elméleti szintre történő átmenet (shift). Ezt az interpretációs lehetőséget figyelembe véve semmi komoly akadálya sincs annak, hogy a geometriában is találjunk *procept*-eket.

2.2.2.1 Bruner reprezentációelmélete

Bruner osztályozásának megfelelően a reprezentációk három fő típusba sorolhatók: „*A tudás bármely területe (vagy a területen belül bármely probléma) háromféle módon képezhető le: egy bizonyos eredmény elérésére alkalmas cselekvések sorozatával (enaktív leképezés); olyan összegező képek vagy vázlatok sorozatával, amelyek valamely fogalmat jelölnek anélkül, hogy azt teljesen meghatároznák (ikonikus leképezés); és olyan szimbólumrendszerből származtatott szimbolikus vagy logikai ítéletek sorozatával, amelyet ítéletek alkotására és átalakítására vonatkozó szabályok és törvények határoznak meg (szimbolikus leképezés).*” (Bruner, 1974, 72. o.)

A szimbolikus leképezés fogalma Bruner terminológiájában és a szimbólum, mint egy procept egyik összetevője Tallnál, nem feltétlenül fedi egymást. A leglényegesebb különbség az, hogy míg Brunernél a szimbolikus leképezés a fogalom absztrakt, – racionális, verbális – komponensét jelenti, Tall (1995) a szimbólumot egy olyan mechanizmusnak (pivot) tekinti, ami kétféle működést indíthat be, vagy egy eljárás végrehajtását, vagy egy fogalomról való gondolkodást. Ennek alátámasztására egyrészt Piaget-ra hivatkozik – „*cselekedetek és műveletek a gondolkodás, vagy asszimiláció tematikus tárgyaivá válnak*” (in Tall 1995, 1. o.) másrészt Dubinsky-t idézi: „*...a konstrukció, ami talán a legfontosabb a matematika számára és a legnehezebb a diákoknak ...*” nem más, mint „*... egy (dinamikus) eljárás bekebelezése (encapsulation) vagy átalakítása egy (statikus) dologgá.*” (Dubinsky, 1991, in Tall 1995, 1. o.)

2.2.2.2 Duál-kód elmélet

Paivio duál kód elmélete tovább finomítja Bruner modelljét. „*A DCT (Dual Code Theory) szerint a megismerés két különálló alrendszer működését kívánja meg, egy verbális rendszer – ami közvetlenül a nyelvre – és egy non-verbális rendszer (imagery) – ami a nem-nyelvi (nonlinguistic) dolgokra és eseményekre specializálódott.*” (Paivio, 2006, 3. o.)

A rendszerek belső reprezentációs egységei – melyek mindannyiszor aktíválódnak, amikor tárgyakat vagy szavakat felismerünk, manipulálunk, vagy éppen csak gondolunk rájuk – a „logogen”, illetve „imagen” elnevezést kapták. Paivio kísérletei azt bizonyítják, hogy ezek „*modalitás-specifikusak, tehát különböző logogenjeink és imagenjeink vannak a tárgyak illetve a nyelv képi, hallási, érzelmi (haptic) és mozgásos jellemzőinek megfelelően.*” (Paivio, 2006, 3. o.).

Piaget és Skemp elmélete, az új információnak egy szkémába történő asszimilációjáról illetve akkomodációjáról, abban különbözik a duál kód elmélettől, hogy az utóbbiban alapvető fontossága van a nem-verbális és verbális komponenseknek. (Paivio, 2006, 31–32. o.).

Tall és Vinner meghatározását Paivio elméletével összevetve, egy fogalomhoz tartozó képzet – „concept image” – mindazokat a verbális és nem-verbális komponenseket, *logogeneket* és *imageneket* tartalmazza, melyek a fogalommal asszociációs kapcsolatban vannak. Más megfogalmazásban a *concept image* egy fogalom belső reprezentációinak az együttese.

2.2.2.3 A reprezentációk szerepe a megértésben

„A mélyebb megértéssel járó jutalom sokkal erősebb indíték az erőfeszítésre, semmint annak mostanáig tudatában voltunk.”

(Bruner, 1974)

A szkémák, fogalmi rendszerek a megértésben alapvető szerepet játszanak. Skemp szerint (2005, 63. o.) *„valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába.”*

Vásárhelyi Éva (2007) tovább finomítja Skemp gondolatát: *„A belső reprezentációk közötti kapcsolat az ismeretek egy hálózatát adja, és ezek a kapcsolatok teszik lehetővé az egyik ismeretről a másik ismeretere való áttérést. A fogalmak mentális képét a tárgyi, képi és szimbolikus reprezentációk rendszere alkotja. ... Egy elvet, fogalmat akkor értünk meg, ha annak belső reprezentációja a belső reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megértés fokát a kapcsolatok száma, erőssége és stabilitása jellemzi. Tehát a megértés nem más, mint a fogalmak, elvek közötti kapcsolatok létrejötte.”*

A kapcsolatrendszerekben történő fogalomalkotás előnyeire világít rá Hiebert & Carpenter (Hiebert & Carpenter, 1992, in Tall, 1995, 6. o.). *„Egyik előnye annak a hajlandóságnak, hogy kapcsolatokat létesítsünk egy új fogalom és a már meglévők között, hogy a kapcsolatba ágyazott tudásra jobban emlékszünk. Ennek talán két magyarázata is van. Először is, a tudásnak egy teljes hálózata kisebb valószínűséggel hibásodik meg, mint egy izolált információ. Másodszor pedig, az információ visszakeresése esélyesebb, ha az hozzákapcsolódik egy nagyobb hálózathoz. Egyszerűen több útja van a felidézésnek.”*

2.2.2.4 Külső reprezentáció – szemléltetés

„... a dolgok lényegesek, a szavak csak esetlegesek; a dolgok a test, a szavak csak ruha; a dolgok a mag, a szavak a héj és kéreg. Mindkettőt meg kell egyszerre jeleníteni az értelem számára, de főképpen a dolgokat, mert azok épp annyira tárgyai a megértésnek, mint a nyelv.”

(Comenius)

Láttuk, hogy a formális definíciók mellett a fogalomképzet nem verbális, nem tudatos elemeinek, kulcsfontosságú szerepe van a megértésben, a matematikai gondolkodásban. Ezek alakulása pedig szorosan összefügg a külső reprezentációkkal – a fogalom különböző szemléltetési módjaival.

Ambrus András (2008) szerint a külső reprezentációk alkalmasak arra, hogy befolyásuljunk a belső reprezentációk között kialakuló összefüggések alakulását. *„Egy fogalom, koncepció külső és belső reprezentációi között kapcsolat van. A belső reprezentációk között is kapcsolatok vannak. A belső reprezentációkat befolyásolja a külső reprezentáció jellege. A belső reprezentációk közötti kapcsolat szimulálható a megfelelő külső reprezentációk közötti kapcsolatok létrehozásával.”*

Dolgozatom középponti témája a szemléltetés szerepe az egybevágósági transzformációk transzformációk tanításában, ezért, számomra a külső reprezentációk szerepe a fogalomépítésben különösen fontos. Emiatt szeretném külön is kihangsúlyozni a felvázolt elméletnek néhány idetartozó, különösen fontos tényezőjét.

- A sorrend

A belső reprezentációs rendszerek alakulása függ attól is, hogy a diák mikor, milyen sorrendben, milyen formában találkozik annak külső reprezentációival.

Bruner (1974, 78–79. o.) szerint: *„a sorrend, amelyben a tanuló az ismeretek valamely területén szembekerül az egyes anyagrészekkel, hatással van arra, hogy az anyagot milyen nehézségek árán fogja elsajátítani.”* ... *„Ha igaz az, hogy az értelmi fejlődés általában az enaktív leképezéstől az ikonikuson keresztül a valóság szimbolikus leképezése felét tart, akkor valószínű, hogy az optimális sorrend ugyanebben az irányban fog haladni. De ez nyilvánvalóan konzervatív doktrína. Mert ha a tanuló már valamiféle fejlett szimbolikus rendszerben gondolkodik, akkor lehetséges az első két szakasz megkerülése. Ám ez azzal a kockázattal jár, hogy a tanuló esetleg majd nem rendelkezik olyan megfelelő képzetrendszerrel, amelyre visszatérve támaszkodhatna, ha a szimbolikus átalakításaival nem sikerül a problémát megoldania.”*

- A külső reprezentációk, a konkrét szemléltetési módok megválasztása

Az, hogy egy konkrét tanulási szituációban melyik reprezentáció a legalkalmasabb, sok mindentől függhet – életkortól, személyiségtől, neveltetéstől, képzettségtől, továbbá magától az érintett műveltségterülettől, és ezen belül a szűkebb témáktól is.

Az előbbiekben láttuk, hogy az ikonikus és még inkább az enaktív reprezentációk igen erős hatással lehetnek a gyerekek gondolkodásában kialakuló nem verbális fogalomképzetekre. Amennyiben ezek ellentmondásban vannak a formális elmélettel akkor nehezen detektálható és nehezen kijavítható kognitív konfliktus faktorok forrásaivá válhatnak. Ennek fordítottja is igaz, eszközül is szolgálhatnak ilyen típusú konfliktus faktorok módosítására.

- A szemléltető eszközök használatának módja, időtartama

A szemléltető eszközöket használhatjuk demonstrációként, vagy a gyerekek által használt manipulációs eszközként, rövidebb, ideig, bevezető jelleggel, vagy hosszabb ideig, munkaeszközként. Paivio a szemléltető eszközök használatát duál kódú eljárásoknak nevezi (dual-coding processes).

Azt állítja, hogy nem elég ezeket a fogalmak bevezetésére használni, komoly sikereket úgy lehet elérni, ha elegendő ideig, szisztematikusan használjuk őket. (Paivio, 2006, 13. o.).

3. ELŐZMÉNYEK

3.1 Fogalomalkotási zavarok

Az alábbi esettanulmányok az ELTE TTK Tanárképző Főiskolai Karán szerzett tapasztalataim alapján készültek. Geometria gyakorlaton a sík egybevágóságainak témakörével foglalkoztunk. Előadáson már megismerték annak elméletét, hogyan lehet a tengelyes tükrözések szorzataként a sík többi egybevágóságait megkapni, milyen algebrai struktúrákat alkotnak ezeknek a transzformációknak különböző részhalmazai. A diákok látszólag tudták és értették az elméletet, tudták például hogy két tengelyes tükrözés egymásutánja egy eltolás vagy egy forgatás a tengelyek helyzetétől függően, és még be is tudták ezeket a tételeket bizonyítani. Hamarosan kiderült azonban, hogy nagyon könnyen el lehet őket bizonytalanítani, hogy a tudásuk mechanikus és megalapozatlan.

Lássunk erre néhány példát:

1. eset:

A hallgató elmondja annak bizonyítását, hogy két párhuzamos tengelyre történő tükrözés egymásutánja egy eltolás a két tengely irányított távolságának a kétszeresével.

„Legyenek a sík egy tetszőleges P pontjából az a egyenesre, illetve a vele párhuzamos b egyenesre bocsátott merőleges talppontjai A , illetve B . Nevezzük a P pont a -ra vonatkozó tükörképét P' -nek, a P' b -re vonatkozó tükörképét pedig P'' -nek. A tengelyes tükrözés tulajdonságaiból következik, hogy az irányított szakaszokra felírt

$$PA = AP' \text{ valamint a } P'B = BP''$$

egyenlőségek teljesülnek. Az irányított szakaszokra továbbá fennáll, hogy

$$PP'' = PP' + P'P'' = PA + AP' + P'B + BP''$$

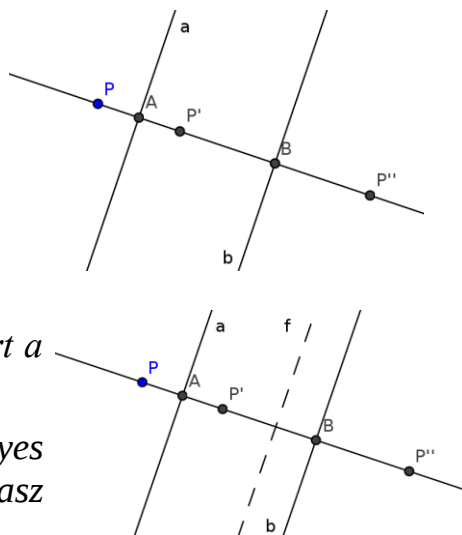
amit az előző egyenlőségekkel egybevetve azt kapjuk, hogy

$$PP'' = 2AP' + 2P'B = 2(AP' + P'B) = 2AB$$

tehát a P pontot a P'' pontba egy $2AB$ vektorral való eltolás viszi át.”

Kicsit gyanús nekem az okoskodás befejezése, ezért a következő kérdést teszem fel:

– Én P -t át tudom vinni P'' pontba egyetlen tengelyes tükrözéssel is – és ekkor berajzolom a PP'' szakasz



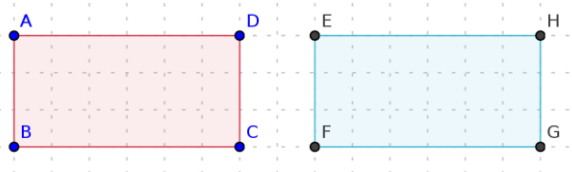
felező merőlegesét. – Vajon mondhatjuk-e ezután, hogy a két tengelyes tükrözés egymásutánja helyettesíthető egyetlen tengelyes tükrözéssel?

Először meglepődtem, később megszoktam, hogy a csapda működik, a hallgatók nem kis százaléka - bár bizonytalanul - igent válaszol erre a kérdésre.

2. eset:

Két téglalapot egymás mellé rajzolok, négyzethálós alapon, hogy világos legyen az egymáshoz viszonyított helyzetük.

A kérdés az, hány különböző egybevágósági transzformáció viszi a rózsaszín téglalapot a világoskékbe?



Az első válasz általában az, hogy három. Egy tengelyes és egy középpontos tükrözés, valamint egy eltolás.

Kérdezem, hogy biztos-e, hogy nincsen több.

Erre általában felvetődik a kérdés, hogy szabad-e több transzformációt is végezni egymás után. Miután azt válaszolom, hogy természetesen szabad, akkor sokan arra szavaznak, hogy végtelen sok egybevágóság viszi egyiket a másikba.

A következő kérdés persze az, hogy vajon biztosak lehetünk-e abban, hogy ezek mind különbözőek.

Ezután természetesen tisztáztuk, hogy mi a helyes válasz, de úgy tűnt, hogy ez nem igazán meggyőző a hallgatók egy részének, analóg kérdésekre a továbbiakban is nehezen tudnak válaszolni.

Mindkét esetben a transzformációk összetételével kapcsolatos egyszerű kérdés kapcsán derül világosság valami alapvető bizonytalanságra a transzformáció-fogalommal kapcsolatban. A hibák implicit módon rávilágítanak a diákok fejében élő fogalomképzet néhány standard vonására.

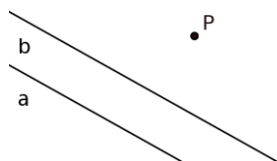
Az első esetben egy tételt kell bizonyítani, itt a fogalomképzetnek inkább a formális, verbális oldala aktiválódik. A probléma az, hogy ez a verbális ismeretrendszer pontatlan, a hibásan gondolkodó diák számára a transzformáció különálló pontok transzformációját jelenti, nem látja, hogy az egész sík minden pontja együtt transzformálódik. A transzformációk egyenlőségéről szóló bizonyítást verbálisan tanulta meg, ráadásul úgy, hogy nem tisztázódott a fejében, hogy mit jelent két transzformáció egyenlősége. A transzformációról alkotott fogalomképzet szemléletes, nem verbális oldala nem segít a tisztánlátásban ebben a helyzetben.

A második eset azt mutatja, hogy amikor két egybevágó alakzathoz kell egy olyan transzformációt találni, amelyik az egyiket a másikba viszi, akkor inkább a transzformációkról szerzett intuitív képhez folyamodnak, a transzformációra mint mozgásra gondolnak. A probléma az, hogy ebben az intuitív képben két transzformáció azonosítása erősen kötődik az úthoz, amelyen a pontok, az

alakzatok a végső helyzetükbe kerülnek. Ha tehát más úton jut az alakzat a végső helyzetébe, akkor a diákok hajlamosak azt hinni, hogy más transzformációról van szó. A transzformációk összetételéről szerzett tudás ugyan megvan a fejekben, lexikális tudásként, de nem segít.

A két eset együtt arról árulkodik, hogy bár a transzformáció-fogalom képzete gazdag szemléletes és formális elemekben is, ezek között szinte semmi kapcsolat nincs, nem segítenek egymásnak a hibás részletek felismerésében, tisztázásában.

3. eset:



Egy 8. osztályos tankönyvből való feladatot adok fel a tanárjelölteknek.

„Szerkessz olyan egyenlőszárú derékszögű háromszöget, melynek derékszögű csúcsa P és átfogójának egyik csúcsa az a, a másik pedig b egyenesen van!” (Imrecze et al., 1981, 218. o.)

A hallgatók egy rövid idő után elkezdnek kísérletezni a jól bevált heurisztikus módszerrel – „ha túl sok a megkötés egy feladatban, hagyjunk el egy feltételt”. Olyan egyenlőszárú, derékszögű háromszögeket rajzolnak, vázlatosan, melyeknek P a derékszögű csúcsa, az A csúcsát pedig önkényesen választják az a egyenesen. P és A már meghatározzák a háromszöget, tehát a harmadik, a B csúcs helyét is. Megpróbálják megsejteni, hogy ha A végigfut az a egyenesen, mi lehet a B csúcsok mértani helye. Ha ezt megtalálnák, akkor a b egyenes és a mértani hely közös pontja megadná a megoldást.

Szabad kézzel rajzolnak, és változatos sejtéseket hoznak: a mértani hely kör, ellipszis, talán egyenes... Egy idő után persze rájönnek, hogy a B pontok egy a' egyenesre illeszkednek, melyet az a egyenes C pont körüli, 90 fokos elforgatásával kaphatunk.

Ez a felismerés nem jön könnyen, ami feltehetőleg azzal magyarázható, hogy az egyenes elforgatásáról kevés tapasztalatuk van. Ha egy olyan pont körül forgatunk, amely nem illeszkedik az egyenesre, nem tudják elképzelni, mi lesz a képe, nincs róla „belső képük”.

A feladat diszkutálása azonban mélyebb téveszmékre is rávilágít.

A feladat alapos megbeszélése után azt kérem, hogy gondolkodjanak el azon, biztos-e, hogy mindig van megoldás, és mennyi a megoldások lehetséges száma.

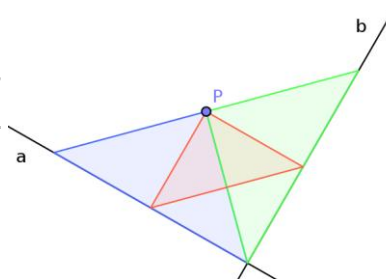
Ez a kérdés, megfelelő előkészítés után nem szokott gondot okozni. Látják, hogy az egyik egyenes elforgatott képe mindig metszi a másikat, és mivel két irányban is forgathatunk, a megoldások száma minden esetben kettő.

A következő kérdés az, hogy mi a helyzet akkor, ha az a és b egyeneseket nem párhuzamosan vesszük fel.

Erre a kérdésre is könnyen jön a válasz. Ilyenkor is két megoldás van, feltéve, hogy az a és b nem merőlegesek. Hiszen az egyik egyenes elforgatott képe biztosan metszi a másik egyenest. Ha merőlegesek, akkor általában nincs megoldás, hiszen ebben az esetben az egyik egyenes elforgatott képe párhuzamos lesz a másik egyenessel. Akkor van mégis megoldás, ha az egyik egyenes elforgatás után éppen egybeesik a másikkal.

Ekkor azt javasolom, hogy vegyék fel először az a és b egyeneseket, egymásra merőlegesen, majd próbálják a C pontot hozzájuk képest úgy elhelyezni, hogy legyen megoldás. Hamar rájönnek, hogy a C -t a két merőleges egyenes szögfelezőjén kell felvenni.

Ezután megkérem a hallgatókat, hogy válasszanak ki egy tetszőleges C pontot a szögfelezőn, és rajzoljanak vázlatosan az ábrájukba néhány lehetséges megoldást. Ekkor az a meglepő dolog történik, hogy a diákok egy része csak a szögfelezőre szimmetrikus megoldást találja meg (piros háromszög), néhányan emellett még észreveszik azokat az eseteket is, amikor az egyik csúcs a két egyenes metszéspontjába kerül (kék és zöld háromszögek), teljesen elfeledkezve arról, hogy úgy hozták létre, ők maguk, ezt a helyzetet, hogy végtelen sok megoldás legyen. Több hallgató azonban még akkor sem ismeri fel a többi megoldást, mikor mások már rájönnek, és mondják, hogy végtelen sok van.



A jelenség alig hihető, minden esetben meglepett.

A hiba mögött világosan felismerhető az az eljárás, ahogyan a körzős- vonalzó szerkesztések során egy külső pont körül elforgatott egyenes képét előállítják. Ez általában abból áll, hogy merőlegest állítanak a forgáscentrumból az egyenesre, a talppontot a forgáscentrummal összekötő szakaszt elforgatják az adott szöggel, majd a talppont elforgatott képében az elforgatott szakaszra merőlegest állítanak. Ennek a talppontnak a képe tehát az, amiről belső képük van. Nincs azonban képük arról, hogy az egyenes többi pontjaival – külön-külön – mi történik, nincsen belső képük arról, hogy elforgatáskor az egyenes minden pontja külön-külön is elfordul az adott irányban az adott szöggel.

Az eljárás során, ahogyan egy egyenes, szakasz stb. képét körzővel-vonalzóval megszerkesztik, bizonyos pontok – a merőleges talppontja, szakaszvégpontok, stb. – a többi pontokhoz képest kitüntetett szerepet kapnak. Ez pedig meggyőző érv amellest is, hogy a transzformáció-fogalom egy procept, alakulása nagyon szorosan összefügg a transzformált kép előállítására szolgáló eljárásokkal.

Ezek a példák, és még sok más tapasztalat világosan mutatja, hogy az egybevágósági transzformációkról nincsen világos fogalmuk a diákoknak, esetenként még az egyetemi, főiskolai hallgatóknak sem. Vagy a megtanult

szabályok, technikák alapján dolgoznak, vagy pedig olyan nem-verbális belső képek, eljárások alapján, amelyek gyakran félrevezetőek. Felmerül, hogy ennek háttérében az áll, hogy a fogalomképzet szemléletes komponense ellentmondásban van a formális elmélettel, potenciális konfliktus faktort jelent annak számára.

3.2 A „zászlós módszer” iskolai tanításának tapasztalatai

A fenti problémák indították el azt a folyamatot, mely elvezetett egy a korábbiaktól több fontos ponton eltérő transzformáció tanítási módszer megalkotásához, amelyre a későbbiekben „zászlós módszer” néven fogunk hivatkozni. A zászlós módszer lényege, hogy a sík egybevágósági transzformációinak tanításában a transzformált kép előállítására, a körző és vonalzó használata mellett, az átlátszó papír mozgatását is legitim szerkesztési eljárás-ként használja. A módszert részletesen ismertetem a 4.5 szakaszban (39. o.).

De ezelőtt röviden szeretném bemutatni azt a munkát, ami a dolgozat megírását megelőzte, melynek során – tanárkollégákkal, tankönyvszerző-társakkal együttműködve – elkezdődött a zászlós módszerre alapuló transzformációtanítás kidolgozása, kipróbálása, terjesztése.

3.2.1 Általános iskola, felső-tagozat

A zászlós módszerre alapozott transzformációtanítás több tankönyvsorozatba belekerült. Ezek közül az első tankönyv 1981-ben íródott egy, az OPI által vezetett, kísérlet számára. (Szeredi É. és Török J., 1981), ezt követte egy hatosztályos gimnáziumok számára készült tankönyv (Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera és Szeredi Éva, 1996), majd az Apáczai Kiadónál megjelent tankönyvsorozat (Csahóczi E., Csatár K., Kovács Cs., Morvai É., Széplaki G., Szeredi É., (2001–2004): *Matematika 5.–8. osztály*. Apáczai Kiadó, Celldömölk), a sort a Sulinova Kht. kompetencia alapú programcsomagjai zárják (Sulinova Educatio Kht., 2008), melynek keretében a felső tagozatos matematika programcsomagjai az én irányítással készültek, és melyben a középiskolás fejlesztők is átvették a „zászlós módszert” a transzformáció tanításról szóló anyagaikban.

1981–2008-ig – az első megvalósítástól a kompetencia alapú programcsomagok elkészüléséig – a módszer komoly fejlődésen ment keresztül. A kezdeti anyag kedvezőtlen fogadtatása után a tanárok hozzáállása, visszajelzései fokozatosan egyre pozitívabbak lettek.

Ennek háttérében két okot látok. Az egyik az, hogy a tankönyvi feldolgozások egyszerűsödtek, finomodtak és gazdagodtak, egyre „tanárbarátabbak és gyerekbarátabbak” lettek. A másik fontos ok az, hogy a tanárok, akiknek ez a módszer nagyon új volt, tanártovábbképzéseken segítséget kaptak az újszerű szemléltetési módszer megértésében, használatában. Ma már az általános iskolai

tanároknak legalább 20%-a ismeri és használja ezt a módszert részben az Apáczai Kiadó tankönyveinek, részben a Sulinova Educatio Kht. anyagainak köszönhetően.

3.2.2 Kísérleti kipróbálás

Az Apáczai Kiadónál megjelent tankönyvsorozatot 100 tanár rendszeres – évente négy egész napos – továbbképzés mellett megismerte, kipróbálta, értékelte. Tapasztalataikról részletes visszajelzést adtak. Előre elkészített kérdéssorozat megválaszolásával, továbbá a tapasztalatok kötetlen megfogalmazásával.

A kiadott kérdéssorozatok arról szóltak, hogy egy-egy tankönyvi fejezet tanítása során melyik részletre mennyi időt fordítottak, a tankönyvi példák közül melyeket oldottak meg, a tankönyv szövegét, a gyakorló illetve a gondolkodtató feladatok mennyiségét milyennek találták. A Függelékben (91–92. o.) meg lehet tekinteni mintaként egy-egy kitöltött kérdőívet.

A vélemények sok esetben ellentmondóak. Összességében a tankönyv szövegét elegendőnek találták. A gyakorló feladatokat néhány területen kevésnek, a gondolkodtató feladatokat soknak tartották. A mozgatással való tükrözésről és a tükrözés tulajdonságairól szóló részekkel a tanárok nagy része elégedett volt. A tanárok többsége a továbbképzésen, a személyes kipróbálás előtt, idegenkedett a módszertől. A kipróbálás után azonban nagy részük véleménye pozitívan változott. Visszajelzéseik sok esetben összeesengtek az elméleti módszertani vizsgálatok eredményeivel.

Sok levelet kaptunk a másolópapír használatáról, melyekben, nagyon kevés kivétellel, igen jó tapasztalatokról számolnak be. (A Függelékben bemutatunk néhány jellemző részletet ezekből a levelekből is.)

Hasonló eredményekről számoltak be a továbbképzéseken a sulinovás programcsomagokat kipróbáló tanárok is.

3.3 Tanárképzés

A „zászlós módszer” kicsiszolásának fontos része volt az is, hogy a Tanárképző Főiskolán, geometria előadásokon az egybevágósági transzformációk tanításakor a mozgás fogalmára a korábbinál nagyobb hangsúlyt helyeztem, Hajós György könyvének megfelelő részeivel mélyebben és részletesebben foglalkoztam.

Ezzel párhuzamosan a főiskolás diákokkal a gyakorlatokon kipróbáltuk az átlátszó papír használatát is.

A tapasztalataim egyértelműen jók voltak, a hallgatók a korábbinál jobban értették és szerették ezt a témát, a korábbinál nagyobb biztonsággal oldottak meg nehezebb feladatokat is ebben a témakörben.

Az egyetemen a módszertan kurzusokon ismertettem meg a zászlós módszert a diákokkal. Azok a hallgatók, akik ezzel itt találkoztak először, kezdetben idegenkedéssel fogadták azt. Ez azonban minden esetben megváltozott azoknál, akik általános vagy középiskolában, a tanítási gyakorlatuk során is megtapasztalták ezt a tanítási módszert.

Mind a főiskolán, mind az egyetemen több szakdolgozat született a vezetéssel az egybevágósági transzformációk mozgásra alapozott tanításának témakörében.

4. TRANSZFORMÁCIÓTANÍTÁSI MÓDSZEREK

Ebben a fejezetben azt szeretném áttekinteni, hogy a magyar iskolai gyakorlatban hogyan jelent meg az egybevágósági transzformációk tanítása a különböző tanítási segédanyagokban – tantervekben, tankönyvekben, módszertani útmutatókban, szakköri füzetekben, tanítási kísérletekről szóló kiadványokban – hogyan gondolkodtak erről a témáról a matematika tanítással foglalkozó legjobb szakemberek.

A fejezet elején a tantervek tükrében áttekintem, hogy a transzformációk tanítása hogyan vált itthon a geometria tanítás középponti gondolatává.

4.1 A transzformációtanítás története Magyarországon, tantervek alapján

„Ez a szó (curriculum) olyan pályát jelent, amelyet meg kell futni. Ezt a szót talán helytelenül használjuk. A curriculumnak olyan készségek tökéletes elsajátítását kell tartalmaznia, amelyek viszont még nagyobb teljesítményképességű készségek birtoklásához vezetnek”

(Bruner, 1974)

A geometria az 1700-a években kezdett megjelenni a magyarországi matematika-tanításban.

Maróthi György debreceni professzor (1743) ezt írja Aritmetikájában: *„Nem lehet pedig kimondani, mely igen hasznos a gyermeki elmének élesítésére az Aritmetica és ha lehet a Geometria.”* Tankönyvében a geometriát csak néhány példán keresztül érinti, de ez így is egy nagy előrelépést jelent, hisz korábban a geometria tanítása egyáltalán nem került szóba.

Tantervi szinten a geometria a kiegyezés után jelenik meg a magyar oktatásban, akkor is inkább a gimnáziumokban és a polgári megfelelő osztályaiban. Mértan címen a speciális sokszögek és testek tulajdonságai (szemlélet alapján), egybevágóság, hasonlóság, terület- felszín- és térfogatszámítás, szerkesztések, mérések az az anyag, aminek a tanítását a tanterv javasolja. (Cser Andor, 1963)

Az 1924-es középiskolás tantervbe már bekerül az idomok szimmetriájának témaköre az I. (mai számozással 5.) osztály anyagába. *„Az idomok egybevágósága, hasonlósága és szimmetriája szemléleti alapokon.”* (Tanterv a középiskolák számára. 1924)

Az 1946-os tantervben *„a mérsékelt mértani anyag (speciális alakzatok kerülete, területe, felszíne, térfogata, szimmetria, egybevágóság, hasonlóság) rendszeresen felépítésű, teljesen szemléletre alapul.”* (dr. Iker János 1989)

Az 1950-ben megjelenő középiskolás tantervben – a „reális tagozat I. osztály”-ban – a transzformációk témaköre minden eddiginél nagyobb szerepet kap:

„A tengelyes tükrözés tulajdonságai és alkalmazása, tengelyesen tükrös idomok. Középpontos tükrözés tulajdonságai és alkalmazásai. Parallelogrammák tulajdonságai.” (Tanterv a középiskolák számára, 1950)

„Az 1950-es „Számтан és mértan” tanterv célkitűzései között először szerepel a valóság és a matematika kapcsolatainak feltárása, a felismert törvényszerűségek dialektikus materialista szempontú alkalmazása. További új és előremutató cél a függvényszerű gondolkodás alapjainak lerakása. Azonnal hozzá kell tennünk, hogy az új célok megvalósítása a gyakorlatban – részletes útmutatások és kellő tapasztalatok hiányában – nem vagy csak sematikusan történt meg.” – írja dr. Iker János (1989).

Mindenesetre új tankönyvek készülnek, *„melyek felvették a harcot a statikus geometriai szemlélet ellen: először jelennek meg a 6. osztálytól átdarabolások, mozgások, transzformációk.”* (dr. Iker János 1989).

Az 1958-as tantervben már az általános iskolában is szerepel a transzformációk tanítása, de nem válik az anyag szerves részévé. Míg végül az 1962-es középiskolai, majd a hetvenes évek átfogó általános iskolai tantervreformjában (1974 ideiglenes, 1978 új komplex matematikatanítási tanterv) a szemléletes és a rendszeres geometriatanítás igényével megjelennek az egybevágósági transzformációk.

4.2 A geometriai transzformációk megadása

Az egymást követő tantervreformokhoz mindannyiszor újabb tankönyvek születtek, melyek általában felhasználták a hazai és külföldi didaktikai kutatások eredményeit.

A függvény- és transzformáció-középpontú oktatás egyre jobban foglalkoztatja a tanítás megreformálását kívánó tanárokat, módszertani szakembereket, sőt matematikusokat is. A 60-as évektől egyre több, a geometria tanítás korszerűsítését célzó oktatási kísérlet indul, amelyek fő célja, hogy a transzformációkat a geometria tananyag középponti, szervező elvévé tegyék és tanításának módszerét kidolgozzák. A tankönyvek mellett a népszerűsítő matematikai irodalomban és a különböző módszertani kiadványokban is szép számmal találunk a transzformációk tanításának témakörével foglalkozó írásokat.

Ezekben az anyagokban két törekvés világosan megfigyelhető. Az egyik a törekvés arra, hogy szisztematikus, matematikailag minél tisztább felépítésben tárgyalják a geometriát. A másik az, hogy a feldolgozás szemléletes legyen, minél közelebb a gyerekek élményvilágához.

4.2.1 Transzformációtanítás az alsó-tagozaton

Az 1978-as tanterv bevezetése óta a transzformációkkal már az alsó-tagozaton is elkezdünk foglalkozni.

Az alsóbb osztályokban az alakzatok egybevágóságának fogalma az összeilleszthetőséggel, egymásra fektethetőséggel, egymás helyére mozgathatósággal kapcsolatos természetes és ésszerű tapasztalatokon alapszik. Egy síkbeli alakzat átmásolása egy átlátszó papírra és egy másik alakzattal való összeillesztése magától értetődő módszer annak eldöntésére, hogy két alakzat egybevágó-e vagy sem. Amennyiben egybevágóak, akkor a mozgó átlátszó papír egy természetes hozzárendelést valósít meg a két alakzat pontjai között.

4.2.2 Transzformációtanítás a felső-tagozaton és a középiskolában

Az összeilleszthetőség, a másolat egymásra, illetve egymás helyére mozgathatósága természetesen pontatlan eljárás az egybevágóság megállapítására. A felsőbb osztályokban ennél egzaktabb egybevágóságfogalomra van szükség. (Annál is inkább, mert alakzatok lehetnek úgy is egybevágóak, hogy nem mozgathatók egymás helyére – mint például egy jobb és egy bal cipő.) Emellett azonban a matematikatanítási szakemberek a szemléletességtől sem akarnak elszakadni, különösen az általános iskolásoknak szóló anyagokban...

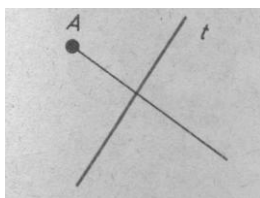
Ennek megfelelően a transzformációk tanításának kezdetén két különböző úton adják meg a sík egybevágóságait.

(1) A transzformációkat meg tudjuk egy olyan **hozzárendelési szabállyal** adni, ami a sík minden egyes pontjához megmondja, hogyan kapjuk meg a hozzátartozó képpontot. Ez a megadási mód egy precíz utasítást ad arra, hogy a sík egyes pontjainak hol a képe.

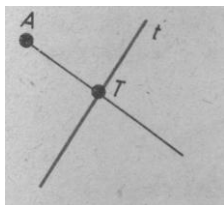
Ezek a definíciók valójában egy egyértelmű szerkesztési eljárást adnak a kép előállítására abban az esetben, ha az eredeti alakzat pontokból, illetve egyenesek és/vagy körök részhalmazaiból épül fel.

1. példa: (Eglesz et al. 1981, 244. o.)

“Ha adott a síkon egy egyenes, a tükörtengely (t -vel jelöljük), akkor a sík bármely pontjának a tükörképéhez eljuthatunk többféleképpen is. Például így:



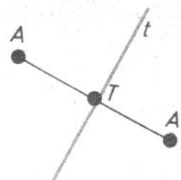
Merőlegest állítunk a pontból a tengelyre.



Ez a tengelyt T pontban metszi.

TA távolságot a tengely másik partján, a T ponttól kezdve is felmérjük a merőlegesre. Így jutunk az A' ponthoz.

Az A' pontot az A pont képének nevezzük.

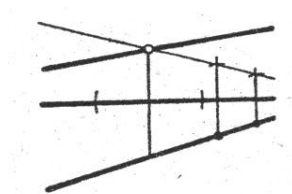


- (2) A sík mindegyik egybevágóságát meg tudjuk valósítani egy papír mozgatásával – ami a síkot (vagy a síknak egy részét) szemlélteti. Ez a mozgatás minden pontot a neki megfelelő képbe visz, egy olyan utasítást alapján, ami azt mondja meg, hogy hogyan kerülnek az egyes pontok a képükbe. Ez a megadási mód szemléletesebb, közelebb áll az intuitív egybevágóságfogalomhoz.

A mozgatás egy általában pontatlannak tekintett, nehézkes eljárás, amellyel azonban nem csak pontok, egyenesek és körök képét tudjuk előállítani. Előnye, hogy természetes módon magában hordozza az egybevágósági transzformációk több fontos tulajdonságát.

2. példa: (Gallai–Péter 1952, 298. o.)

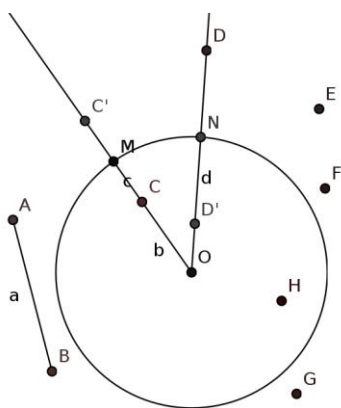
„Tükörrel való tükrözés helyett úgy is megkaphatjuk a tükröképet, hogy a tükrözés tengelye mentén ráhajtjuk a papiros rajzos felét a másikra, és ceruzánkat erősen megnyomva, még egyszer végigvezetjük a rajzon; így a papiros másik felére átvésződik bármelyik tükrözönivaló egyenes és pont nyoma.



Szabályszerű szerkesztésben persze sem tükröt, sem hajtogatást nem alkalmazhatunk. E helyett úgy adjuk meg feladatunkat, hogy megszerkesztjük az (alsó) egyenes két tetszős szerinti pontjának tükröképét (merőlegeseket bocsátva a vízszintesig, és ugyanannyival meghosszabbítva őket); és megrajzoljuk a két tükröképen átmenő egyenest. Így kapjuk az (alsó) egyenes tükröképét;”

A legtöbb felépítésben mindkét megadási mód szerepel egymás mellett.

A “kockás könyvek”-hez tartozó munkalapokban találhatunk egy különlegesebb hozzárendelést is.



3. példa: (Csahóczi et al., 1986. 19. o.)

a) Keress egyszerű szabályt, és ennek alapján szerkeszd meg az adott körön kívül levő A pont képét, a B pont képét, az E, az F, a G és a H pont képét!

Rajzold meg az AB szakasz minél több pontjának képét!

Mit gondolsz, milyen vonal lesz az AB szakasz képe?

Ez a furcsa transzformáció nem adható meg mozgattással, körre tükrözésnek is nevezhetjük.

A tengelyes tükrözést megadhatjuk pontonkénti hozzárendelési szabállyal és mozgattással is. Távolsgártartó, szögtartó, egyenestartó transzformációk. A körre tükrözés (szabályát lásd később, a 6.1 szakasz 10. példájában, 65. o.) nem egybevágóság, eltorzítja (el is szakítja) az egyeneseket, megváltoztatja a távolsgágot, szögeket (bár akad néhány kivételes eset), ráadásul kör középpontjának nincs képe.

4.3. Az egybevágóság szemléltetése

“A geometria tanulása kezdetén a tapasztalatból, szemléletből való kiindulásnak sokkal nagyobb szerepet kell kapnia, mint az eddigi, hagyományos iskolai oktatásban. A szemlélet sokoldalú és erős foglalkoztatása nélkül a geometria magasabb szintű tanítása és tanulása hamarosan mesterkéltté, formálissá torzul. Az intuitív források fejletlensége és erőtlensége folytán az absztrahálásra és általánosításra, a problémalátásra és a probléma megoldására való készség nem fejlődik ki valójában.”

(Kárteszi, 1966)

A fenti példák közül a körre tükrözés példája különösen világosan mutatja, hogy ez a fajta „pontonkénti hozzárendelési szabály” nem garantálja az egybevágóságot. Ilyenfajta definíció esetén tehát ezt „hozzá kell tanítanunk” az egybevágósági transzformációkhoz. Erre a többféle megoldást látunk a különböző anyagokban.

4.3.1 Szemléltetés nélkül

Van, főleg a középiskolás tankönyvek között olyan, amelyben a szerző egyszerűen közli ezeket a tulajdonságokat. Különösebb indoklás nélkül leszögezi, hogy bizonyos transzformációk rendelkeznek a távolsgártartás tulajdonságával.

Hajnal Imre speciális matematika osztályok számára írott tankönyvében először megadja a távolságtartás definícióját, majd felsorolja a távolságtartó transzformációkat és megadja a megfelelő hozzárendelési utasításokat. (Függelék I./A)

Természetesen lehet a tiszta Hilbert-féle utat követni, és az egybevágósági axiómákból, a háromszögek egybevágóságának alapesetei segítségével bizonyítani a távolságtartást. Erre a tankönyvirodalomban nem találtam példát, feladatgyűjteményben igen. (Függelék I./B)

4.3.2 Szemléltetés méréssel

Vannak olyan példák is, ahol a módszer kidolgozói törekednek a szemléltetésre, de a mozgáson alapuló okoskodásokat el akarják kerülni. Erre példa az a kísérlet, amit az Egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán dolgoztak ki dr. Pelle Béla vezetésével. (dr. Jakab Albert et al. (1972, 1980). Ebben a felépítésben a tengelyes tükrözés tulajdonságait egy kibővített axióma-rendszernek tekintették. Erre az alapra építve a sík többi egybevágóságáról bizonyították, hogy előállnak tengelyes tükrözések egymásutánjaként, tehát távolság és szögtartó transzformációk.

Ennek a kísérletnek a matematikai háttérében feltehetőleg a Hjelmslev–Bachmann-féle felépítés áll. Az axiomatikus alapozást a tervezők azzal próbálják megkerülni, hogy a tengelyes tükrözés tulajdonságait szemlélet alapján megállapítják, alaptételekbe foglalják.

Erre a célra egy sablont használtak, melynek segítségével előállították egy négyszög tengelyes tükröképét, majd képen és tükröképen összehasonlító méréseket végeztek. (Függelék I/C).

A leggyakoribb megoldás azonban mégis az, hogy szerzők a mozgatással való szemléltetéshez folyamodnak a sík egybevágósági transzformációinak a bevezetéséhez, illetve azok tulajdonságainak alátámasztásához.

4.3.3 Szemléltetés mozgatással

A tanítási gyakorlatban a sík egybevágóságait sok esetben egy darab papírral szemléltetjük. Ez a darab papír jelképezi a mozgó síkot, (esetleg annak csak egy részét), amit a mozgatással önmagába, mégis egy új helyzetbe vihetünk.

Ez a módszer, elsősorban az általános iskolások számára íródott anyagokban teljesen általános, de több kiváló középiskolás könyv is van, amelyik ezt az utat követi. Vannak azonban különbségek, abban is, hogy hogyan adják meg ezeket a mozgásokat és abban is, hogy hogyan használják fel azokat az egybevágóság alátámasztására.

A mozgatással való szemléltetés már egészen korán szerepel, mellékes, komolytalan szemléltetésként, olyan, háború előtti tankönyvekben is, ahol a

geometriai transzformációknak a szerepe még meglehetősen jelentéktelen. (Függelék I./E)

A Gallai Tibor–Péter Rózsa-féle híres középiskolai tankönyvcsaládban a transzformációk mozgatással való szemléltetése már fontos szerepet kap az egybevágóságfogalom alakításában. (Függelék I./F)

Az 1962-es tantervben először jelent meg az egybevágósági transzformációk tanítása a szemléletes és a rendszeres geometriatanítás igényével.

Az 1962-es tantervhez új középiskolás tankönyvsorozat is készült, melynek szerzői – Pálmai Lóránt és Horvay Katalin – mindketten szakértői a geometriai transzformációk tanításához kapcsolódó hazai és külföldi kutatásoknak. A sík egybevágósági transzformációit mozgatással vezetik be. Erre a szemléletes bevezetésre alapozva fogalmazzák meg a távolság és szögtartást, valamint a hozzárendelési szabályt, amely a képek szerkesztését a továbbiakban lehetővé teszi. (Függelék I./H)

A függelékben bemutatunk egy részletet Gádor Endréné (1971) tanári segédkönyvéből is (Függelék I./I), amit a 62-es tanterv alapján íródott általános iskolás tankönyvcsaládhoz készített, speciálisan a geometriai transzformációk tanításáról. Gádorné felfogása számomra különösen fontos, több szempontból is. Egyrészt, nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a gyerekek maguk tevékenykedjenek. Ez eddig összhangban van a Pelle-féle kísérlettel is, ahol a kísérlet irányítói szintén fontosnak tartják az egyéni tapasztalatszerzést, de abban a mérésekre helyezik a hangsúlyt. Gádorné azonban a mozgatással való kísérletezést állítja a középpontba.

A „kockás” könyvek és az utánuk következő, dr. Hajdú Sándor által szerkesztett, tankönyvsorozat a Pálmay–Horvay-féle feldolgozáshoz hasonló szemléletben tárgyalja a transzformációkat, természetesen az általános iskolások életkorának megfelelő szinten. (Függelék I./J)

4.4 Egy angol transzformációtanítási módszer

“ Síkidomok egybevágóságára úgy gondolhatunk, hogy ha az egyiket lemásoljuk, akkor a másolat a másakra illeszthető.”

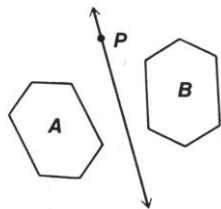
(Collier, 1976)

A magyar példák mellé a sok külföldi módszerből egyet szeretnék bemutatni, ami fontos segítség volt az általunk kidolgozott módszer megalkotásában.

A következő részletek egy tanárképzési céllal írott geometria könyvből valók. Collier (1976) a transzformációval kapott képeket átlátszó papír mozgatásával nyeri. A képek előállításához a sík minden egybevágóságára részletes mozgatási utasítást ad, módszere azonban több szempontból is eltér a Magyarországon megszokottaktól. Ezért két síkbeli egybevágóságnak – a tengelyes tükrözésnek

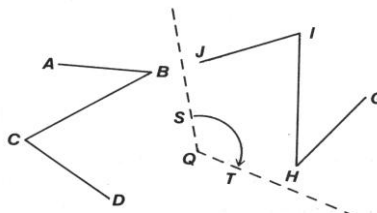
és a pont körüli forgatásnak – részletesen megadom a könyvbeli leírását, hogy a későbbiekben hivatkozhatunk rájuk.

4. példa (Collier 1976. 123. o.)



Tengelyes tükrözés: “Tegyük fel, hogy adott az A alakzat és azt kell tükrözni az adott l egyenesre. A következő módszerhez átlátszó papírra van szükséged, és a következő lépéseket kell követned: (1) Helyezd az átlátszó papírt az A alakzat és az l egyenes fölé; másold át az A alakzatot, az l egyenest és a P segédpontot. (2) Emeld fel a másoló-papírodat és fordítsd át úgy, hogy az l egyenes másolata egybeessék az eredeti l egyenessel és a P pont másolata egybeessék a P ponttal. (3) Az A alakzat “tükrképe” átlátszik az átlátszó papírlap másik oldaláról. Ha szeretnél maradandó képet kapni a tükrképről, akkor indigó segítségével visszakopírozhatod az eredeti mellé. Ezeknek az utasításoknak a végrehajtása előállítja az ábra B alakzatát, mint az A alakzat tengelyes tükrképét az l egyenesre. Vigyázzunk, hogy a tengelyt és a P segédpontot is lemásoljuk. Ha elhagyjuk a segédpontot, akkor nem biztos, hogy a valódi tengelyes tükrképet kapjuk. Lehet, hogy „csúszás tükrözés”-t végzünk tengelyes tükrözés helyett.”

Forgatás: „Adott egy egyszerű, nyitott görbe, ABCD, amint az ábrán látható, és tegyük fel, hogy neked el kell ABCD-t forgatnod a Q pont, mint a forgatás középpontja körül, ST irányított szöggel. A következő eljáráshoz átlátszó papírra van szükséged, és a következő lépéseket kell követned: (1) Helyezd az átlátszó papírt az alakzat fölé (beleértve a Q, S és T pontokat is) és másold át az ABCD görbét valamint az ST ívet. (2) Tartsd a ceruzádat úgy, hogy a Q másolata rajta maradjon a Q ponton. (3) Miközben Q pontnál együtt tartod az eredeti lapot és a másolópapírt fordítsd el a másolópapírt (ne az eredetit) addig, amíg az S pont másolata találkozik a T ponttal. (4) A lemásolt alakzat a keresett elforgatott kép. Ha szeretnél egy maradandó képet kapni az elforgatott képről, akkor indigó segítségével visszakopírozhatod az eredeti mellé.”



4.5 A „zászlós módszer”

Ebben a részben a sík egybevágósági transzformációinak egy újfajta szemléltetésével foglalkozom, és azzal hogy erre alapozva hogyan adhatjuk meg a sík egybevágóságait, úgy, hogy az ne csak egy rövid ideig használt szemléltetés legyen, hanem legitim eleme az egybevágósággal kapcsolatos ismereteiknek.

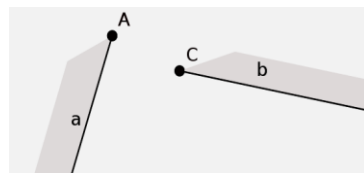
4.5.1 A zászlós módszer születése

A főiskolai tanításomban tapasztalt gondolkodási hibák (melyeket a dolgozat előzményeként már bemutattam), a saját középiskolás – tanulóként és tanárként szerzett – tapasztalataim, továbbá a Hajós-féle, mozgásokra alapozott egybevágóság-fogalom mélyebb megértése voltak azok a hatások, melyek egy eddigiektől eltérő szemléltetési módszer keresésére ösztönöztek. Egy olyan módszertani megoldás keresésére, mely egyszerre megfelel az általános és középiskolás gyerekek képességeinek, gondolkodási szintjének, mindennapi tapasztatainak, s mindeközben összhangban áll a geometria axiomatikus felépítésével. Fokozatosan egyre világosabb lett, hogy a mozgás fogalma kulcsfontosságú ezekben a problémákban is, és a probléma megoldásában is.

Két fontos példa állt előttem, egyik a Hajós axiómákban megadott mozgásfogalom, a másik pedig az előző fejezetben ismertetett angol módszer, amelyik a szemléltetésnek sokkal fontosabb szerepet ad a transzformáció tanításban, mint a magyar hagyomány, és amelyik a tengelyes tükrözésnél elszakad a kötött pályával való mozgatástól. Olyan módszert kerestem, amely összeegyezteti az átlátszó papír segítségével történő, kisgyerekekhez közelálló szemléltetést és a Hajós-féle, félsíkkal-félegyenessel való egységes, tiszta megadási módot.

Első lépésként a főiskolai tanításomban elkezdtem használni az átlátszó papírt a mozgás szemléltetésére úgy, hogy a mozgást két félegyenes és határolt félsík segítségével adtam meg.

Ezzel sikerült a főiskolás hallgatók számára a mozgási axiómákat érthetőbbé tenni, de ugyanakkor egyértelmű volt, hogy ez a módszer, ebben a formában, az iskolai gyakorlatban nem használható.



A félegyenes által határolt félsík szokatlan alakzatához valami egyszerű szemléltetést kellett még találnom. Ebben az segített, hogy Hajós György ezt az alapalakzatot – félsík határán egy félegyenessel – az előadásában mindig zászlónak nevezte. Ebből született az iskolás gyerekek számára a fehér és a fekete zászló, amit egy mozgatás során fedésbe kell hozni egy átlátszó papír segítségével.

4.5.2 Mozgás megadása zászlók segítségével

„Ha az alakzat mozog, akkor pontjai új helyzetbe kerülnek, de lehetnek közöttük helyben maradó pontok is. Mozgás közben az alakzat alakja nem változik meg. Szó lehet az egész tér, azaz a tér valamennyi pontjának együttes mozgásáról is. Egy alakzat mozgását mindig kiegészíthetjük az egész tér mozgásával. Úgy gondolhatjuk tehát, hogy egy alakzat mozgásakor a mozgó tér viszi az alakzatot új helyzetbe. Nem gondolunk arra, hogy a mozgó alakzat pontjai milyen helyzetet foglalnak el, hanem csak arra,

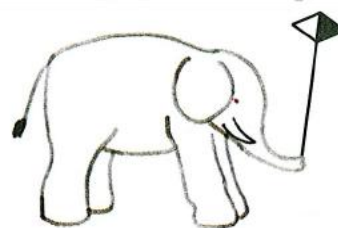
hogy a mozgás révén milyen kezdő helyzetből milyen véghelyzetbe jutottak.”

(Hajós, 1971 10. o.)

A dolgozatban tárgyalandó új módszerben a sík egybevágósági transzformációit mozgatással szemléltetjük. Olyan utasításokat adunk, melyek könnyen megjegyezhetőek, végrehajtásuk pedig egyszerű, segítségükkel gyorsan, és elég jó pontossággal előállítható a transzformált kép.

A transzformáció megadásában a mozgatás pályája semmi szerepet nem játszik, kizárólag a kezdő és véghelyzet határozza meg.

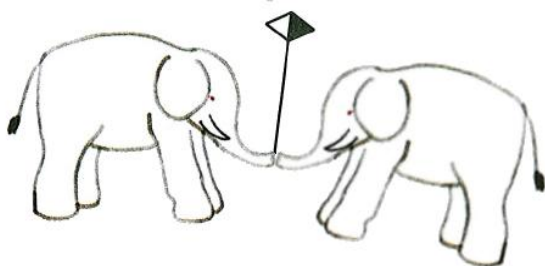
A transzformáció elvégzéséhez szükségünk van átlátszó papírra. A mozgatást két zászló segítségével adjuk meg, egy fehér és egy fekete zászlóval. Mindegyik zászló egy szakaszból (a zászlórúd), és egy hozzáillesztett háromszögből áll. A két zászló egyforma alakú és méretű, az egyik fehér, a másik pedig fekete. Az ábra egy ilyen példát mutat: (Példánkban a két zászlórúd egybeesik.)



A gyerekek a következő utasítást kapják:

5. példa (Szeredi, Kovács, 2003, 56. o.)

„Másold át a megadott ábrát [alakzatot] a fehér zászlójú mutatóval együtt az átlátszó papírra! Ezután emeld fel a másolatot, majd tedd le úgy, hogy a fehér zászlójú mutató pontosan fedje a fekete zászlójút! (Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásolod az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.)”



Ennek az eljárásnak a „zászlós módszer” nevet adtam.

Lássuk, hogyan lehet a sík különböző egybevágóság típusait ilyen módon definiálni az általános iskolás gyerekek szintjén.

A) Tengelyes tükrözés

Először gondosan megmagyarázzuk az eljárást, ahogyan a tengelyes tükrökép előállítható.

6. példa (Szeredi, Kovács, 2004, 31. o.)

„Tegyük a másolópapírt az ábrára, másoljuk át a rajzot és az egyenest is, majd a másolópapírt emeljük fel és tegyük le úgy, hogy a tükrötengely pontjai önmagukra kerüljenek, de a tengely két oldala felcserélődjön!”



Ahhoz, hogy a tengely pontjait pontosan egymásra tudjuk illeszteni, meg kell jelöl-nünk rajta egy pontot.

Ha ezután az eredeti rajzot újra átmásoljuk a másolópapírra, megkapjuk együtt az eredeti rajzot és tükörképét.

Ezen az eljáráson alapul a definíció:

„Adott egy t egyenes, a tengely. Ha a síkot úgy mozgatjuk el, hogy a tengely pontjai önmagukra kerülnek, és a tengely által határolt két félsík helyet cserél, akkor a tengelyes tükörképet kapjuk.” (Szeredi, Kovács, 2004, 31. o.)

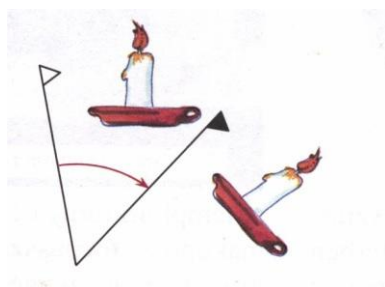
Ezt a definíciót 6. osztályos gyerekek nyelvén fogalmaztuk meg, ugyanakkor szinte szó szerint megegyezik a tengelyes tükrözés Hajós által megadott, egyetemistáknak szóló, definíciójával (Hajós, 1971, 43 o.).

Nehezebb a helyzet a sík többi egybevágóságainak az esetében.

B) Forgatás

A forgatást, eltolást, csúszástükrözést a matematikai háttér című fejezetben már definiáltuk térbeli mozgásként is.

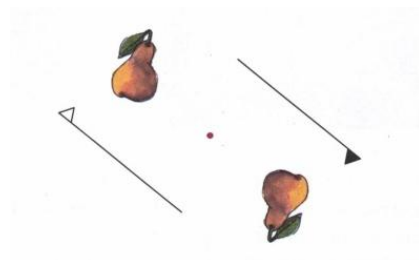
Az ott adott, precíz matematikai definíciókat nehéz lenne megérteni egy iskolás gyereknek. Helyette két zászló segítségével adjuk meg a transzformációt az ábrákon látható módon.

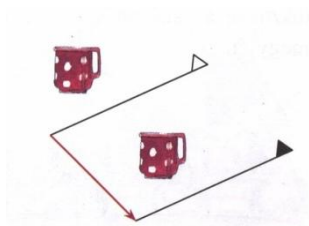


A forgatást egy középponttal és egy irányított szöggel adjuk meg. Ha az irányított szöget a forgatás középpontjába tesszük, és az ábrának megfelelően rátesszük a zászlókat, akkor ezzel pontosan, és minden gyerek számára világosan megadtuk a forgatást.

C) Középpontos tükrözés

Ez természetesen a forgatás egy speciális esete, például így is megadhatjuk:



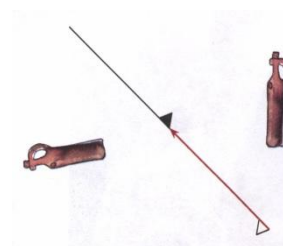


D) Eltolás

Hasonlóan egyszerű az eltolás zászlókkal történő megadása is. Az eltolást egy irányított szakasszal adhatjuk meg. Ha arra az ábrának megfelelően zászlókat illesztünk, megadtuk az eltolást.

E) Csúszástükrözés

Ezzel a módszerrel a csúszástükrözést is könnyűszerrel megadhatjuk.



A csúszástükrözéssel való foglalkozást a tankönyvek amúgy gondosan elkerülik, mert nehéz elhíttetni róla a gyerekekkel (sőt a tanárokkal is), hogy az nem két egybevágóság egymásutánja, hanem egyetlen transzformáció. Ezzel a módszerrel a gyerekek számára természetes, hogy ez egyetlen transzformáció, ami egyszerre rokona az eltolásnak és a tengelyes tükrözésnek is. A zászlórúd helye úgy változik, mint az eltolásnál, a zászló háromszöge pedig két ellentétes fésíkba mutat, mint a tengelyes tükrözésnél.

4.5.3 A zászlós szemléltetésre alapozott transzformáció-tanítás

A megtanított anyag tartalmában nincs számottevő különbség a korábbi feldolgozási módszerekhez képest, a sorrendben és a hangsúlyokban azonban igen. Ezért ebben a részben röviden felvázolom ennek a mozgásra alapozott felépítésnek a menetét.

Ennek az útnak azokat az állomásait, melyeket a fogalomépítés szempontjából különösen fontosnak tartok, a következő fejezetekben, a „zászlós módszer” mélyebb elemzésében részleteiben is bemutatom.

A tantervnek megfelelően 6. osztályban bevezetjük a tengelyes tükrözést, 7. osztályban a középpontos tükrözéssel és 8. osztályban az eltolással foglalkozunk részletesebben.

Ezek mindegyikét először mozgatóként vezetjük be, azaz a gyerekek megtanulnak egy egyszerű eljárást a transzformált kép előállítására átlátszó papír segítségével. A másolópapír használatára alapozzuk a transzformáció-tulajdonságok felismerését. Ennek a módszernek a használata során sokféle tapasztalatszerzési lehetőséget kínálunk az alakzat és kép megfigyelésére, összetartozó részletek keresésére, a közöttük lévő kapcsolatok vizsgálatára.

Eközben lehetőség nyílik arra, hogy az egyes transzformációk minél több tulajdonságát a gyerekek tudatosítsák, megfogalmazzák, továbbá, hogy, a pont és képe között felismert összefüggések alapján, a pontonkénti hozzárendelési szabályokat megfogalmazzák, valamint hogy megismerjék azokat a körzős-vonalzós eljárásokat, melyekkel egy pont képét előállíthatják.

A másolópapírt a körzős vonalzós szerkesztések mellett a korábbiaknál sokkal tovább használják feladatmegoldásra, szimmetrikus alakzatok, vagy egybevágó alakzatpárok összetartozó részleteinek vizsgálatára, érvelések alátámasztására.

4.6 A bemutatott módszerek főbb jellemzői

A bemutatott anyagok alapján megfogalmazhatunk néhány általános megállapítást.

Láttuk, hogy nem minden felépítés törekszik a szemléltetésre.

A legtöbb esetben azonban a szemléltetés fontos szerepet kap.

Az angol módszer a magyar hagyományoktól elsősorban abban tér el, hogy

- térbeli mozgással definiálja az egyes egybevágóságokat;
- ezekre építi az egyes egybevágóságok tárgyalását, nemcsak illusztrációként használja ezeket;
- nem hagyja ki a csúszástükrözést a sík egybevágóságai közül;
- egyetlen esetben – a tengelyes tükrözésnél – úgy adja meg a mozgatási utasítást, hogy csak a kezdő és véghelyzetet rögzíti.

A „zászlós módszer” a magyar transzformáció-tanítási hagyományoktól elsősorban abban tér el, hogy az egybevágóságok megadására pontos és könnyen megvalósítható, egyszerű módszert kínál, melyben csupán a kezdő és véghelyzet számít. Ez maga után von egy sor további, kisebb-nagyobb változást is a fogalomépítésben, amit az alábbi táblázatban foglaltam össze.

<i>A magyar hagyomány főbb jellemzői</i>	<i>A zászlós módszer főbb jellemzői</i>
A szemléltetéshez a legtöbb esetben a mozgatást használják – egy kivágott, vagy megrajzolt alakzatot tartalmazó papír meghatározott úton történő mozgását;	A szemléltetéshez a legtöbb esetben egy átlátszó papír mozgatását használja, mely a transzformálandó alakzat mellett tartalmaz egy zászló is, melyet egy másik, rögzített zászlóba mozgatva kapjuk meg az alakzatunk képét;
A mozgatások pont vagy tengely körüli forgatásokhoz, eltolásokhoz kapcsolódó mindennapi tapasztalatokon alapszanak. Azoknak is prototipikus változataihoz, amikor a mozgatás kötött pályán – egy rögzített pont, vagy tengely körül, eltolásnál pedig egy párhuzamos sínpar mentén – történik;	A mozgatások nem kapcsolódnak szorosan a forgatásokról, eltolásokról szerzett mindennapi tapasztalatok prototipikus változataihoz. A pontok pályája akármilyen lehet, egy-egy transzformáció meghatározásában csak a mozgó sík kezdő és véghelyzete számít;
A hangsúly mindeközben az alakzatok mozgásán van, a papírdarab – bár szimbolikusan reprezentálhatná a mozgó síkot – inkább csak az alakzat hordozója marad;	A hangsúly az átlátszó papír mozgásán van, a papírdarab szimbolikusan reprezentálja a mozgó síkot, miközben az alakzatot is a transzformált képébe viszi;
A szemléltetés kiindulási alapot ad a vizsgált transzformáció invariáns tulajdonságainak megállapításához, ezeket a tulajdonságokat a gyerekek intuitív egybevágóság fogalmára alapozza;	A zászlókkal megadott mozgatás lehetőséget ad az összetartozó részletek alapos megfigyelésére, így egyrészt a transzformáció invariáns tulajdonságainak megállapítására, másrészt a szimmetriákon alapuló okoskodásokra, szimmetrikus alakzatok tulajdonságainak leolvasására, bizonyítására;
Az a tanítási fázis, amelynek során mozgatással szemléltetjük az egyes egybevágóságokat, szinte minden esetben egy rövid bevezető időszakot jelent;	A sík egybevágósági transzformációinak térbeli mozgással való megadása, megvalósítása része marad a tanítási folyamatnak, akár az érettségiig;
Erre a szemléltetésre alapozva megalkotják a hozzárendelési szabályt, mely a későbbiekben átveszi a precíz definíció szerepét, ami egy pontonkénti hozzárendelési szabályt jelent, és melynek segítségével a transzformált kép körzővel, vonalzóval megszerkeszthető.	A szemléltetésre alapozva megalkotják a hozzárendelési szabályt, melyet a későbbiekben a mozgás-definícióval párhuzamosan, ekvivalens definícióként használnak a diákok. Ennek segítségével megtanulják a megfelelő eljárásokat egy pont transzformált képének körzővel, vonalzóval való szerkesztésére, amit párhuzamosan használnak a megfelelő átlátszó papíros eljárásokkal;

5. A MÓDSZER ELEMZÉSE

Ennek a fejezetnek a témája az általam elgondolt, kollégákkal közösen kifejlesztett módszer részletes elemzése. Az elemzést a dolgozat elején összefoglalt matematikai és tanuláselméleti háttérre fogom alapozni.

Az elemzésben emellett a transzformációtanítás hagyományaihoz is vissza fogok nyúlni. Azt remélem, hogy ezek fényében pontosabban látszik, mi az a „zászlós módszer”-ben, ami a hagyományok szerves folytatása, mi az, ami a hagyományokban meglevő gondolatok továbbfejlesztése, és mi az, ami újnak nevezhető benne.

A módszer elemzésekor a téma szempontjából legfontosabbnak talált elméleti szempontok mentén fogunk haladni.

5.1 Az egybevágóságfogalom megalapozása – a mozgatás szerepe

„... a hatékony matematikai nevelés az absztrakt szimbólumok és relációk megfelelő konkretizációján alapszik.”

(Skemp, 2005).

Mivel a mozgatásnak a zászlós módszerben középponti szerepe van, ezért fontos volt számomra, hogy megismerjem és megértsem, hogyan vélekedtek erről korábban a didaktikusok. Itt egy rövid összeállításban megpróbáltam összegyűjteni a legfontosabb idevágó gondolatokat.

Az alapkérdésem az, hogy az egybevágóság fogalom alakulását mennyire mélyen érinti az iskolai tanításban az, hogy a mozgatás:

- közvetetten, vagy közvetlenül vesz részt a fogalomépítésben,
- összhangban van-e a megfelelő precíz fogalmakkal, vagy bizonyos pontokon ellentmond azoknak,
- legitimnek tekintik-e.

5.1.1 A mozgatás szerepe a transzformáció tanítás korai példáiban

Az 1960-as éveket megelőzően az egybevágóság fogalmát szinte kizárólagosan a háromszögek egybevágóságának alapeseteire építették.

Azonban, ha figyelmesen megnézzük ezt a fajta felépítést, látjuk, hogy a fogalomépítés háttérében ott áll a mozgatás gondolata. Ebben az időszakban a tankönyvek az egybevágóságra vagy nem adnak külön definíciót, vagy a mozgatás gondolatát felhasználva határozzák meg, például így:

„két idom egybevágó, ha úgy fektethetők egymásra, hogy egymást teljesen fedik.” (dr. Veress 1930). „Két alakzatot akkor nevezünk egybevágónak, ha azok egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.” (Faragó, 1963).

Horvay bírálja ezt a fajta meghatározást, részben azért, mert csak síkbeli alakzatokra alkalmazható, részben pedig azért mert síkbeli alakzatok esetén is pontatlan.

Az egybevágósági alapesetek indoklásai is érdekesek a témánk szempontjából, mivel a mozgatás itt is szinte kihagyhatatlannak látszik.

A függelékben található szemelvénygyűjteményben szerepel erre három példa dr. Veress Pál 1930-ban, Gallai–Péter 1952-ben, Faragó 1963-ban kiadott tankönyvéből, ahol a szerzők mind egy kicsit különböző módszerrel oldják meg ezt a tanítási feladatot (Függelék I./E,F,G). Míg Gallai és Péter Rózsa a tankönyvben világosan szétválasztja a szemléltetést és a deduktív érvelést, a másik két szerzőnél ezek nem válnak szét.

Horvay Katalin szerint az ilyenfajta, mozgatásra alapozott, okoskodás (mint Veress és Faragó bizonyítása) *„nem tekinthető igazán bizonyításnak. Ha ugyanis a „ráhelyezést” összes tulajdonságával együtt alapfogalomként kezeljük, akkor egyszerűbb az egybevágósági alapeseteket bizonyítás nélkül elfogadni. Ha jól utánagondolunk, rájövünk, hogy lényegében ezt is tettük. Az un. bizonyítással csak azt magyarázgattuk, hogy a szemlélet alapján nyilvánvaló e tételek állítása.”*

5.1.2 A mozgatás megítélése a hatvanas évek reformtörekvéseiben

A kérdés tisztázása égetően fontossá válik, amikor hatvanas évek geometria-tanítást korszerűsítő törekvései a transzformációkra alapozott geometria-tanítást tűzik ki célként. *„...az egybevágósági alapesetekre épülő tárgyalásról áttérünk az egybevágósági transzformációkból kiinduló feldolgozásra. A geometriai transzformációk segítségével elérhető, hogy a tanulók figyelme az alakzatok közötti összefüggésekre, kapcsolatokra irányuljon, fejlődjék a térszemléletük.”* – írja Horvay Katalin (1978)

Ennek az időszaknak a vezető pedagógusai, elméleti szakemberei nagy gondot fordítanak arra, hogy a transzformáció tanítás bevezetését elméletileg – mind a matematika mind a didaktika oldaláról – minél körültekintőbben megalapozzák. Sok tanulmány születik ezzel kapcsolatban, itt most azokat a gondolatokat emelem ki, melyek az egybevágóság, a térbeli fizikai mozgás és az axiomatikusan definiált geometriai mozgás kapcsolatát érintik.

Horvay Katalin a korábbi egybevágóság-meghatározás helyett Hajós definícióját javasolja, mely szerint *„Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át.”* (Hajós, 1971). Ezt a definíciót sokkal jobbnak tartja a korábbiaknál, egyrészt mivel térben is működik, másrészt mivel az egybevágósági transzformációk

tulajdonságaira alapozva korrekten bizonyítani lehet az egybevágósági alapeseteket.

Röviden felvázolja a cikkében, hogy Hajós hogyan alapozza meg – a mozgásra mint alapfogalomra építve – a fenti definíciót, azonban az iskolai alkalmazásról ezt írja: *„Az általános és középiskolában nem követhetjük az előbb vázolt utat.”*

Tankönyvük (Horvay–Pálmay 1966) koncepcióját pedig így foglalja össze: *„A tengely körüli forgatással kezdtük a tárgyalást. A szereplő olvasmányokban lényegében megmutattuk, hogy minden további transzformáció ebből származtatható.”* *„Minden transzformáció legegyszerűbb tulajdonságait közvetlenül a szemlélet alapján, bizonyítás nélkül elfogadtuk.* (Ez, mint a Függelék I./H példájában látható, mozgatással való szemléltetést jelent.) *Magasabb fokon azonban nem nehéz ezt a tárgyalást szigorítani. Ha ugyanis a tengely körüli elforgatás néhány alaptulajdonságát axiómának tekintjük, akkor további tulajdonságai és a többi egybevágósági transzformáció minden tulajdonsága ezek segítségével bizonyítható.”*

Felfogása összecseng az Egri Tanárképző Főiskola kísérletének koncepciójával (Pelle és Jakab, 1972) (bár a konkrét megvalósításban gyökeresen eltérő megoldásokat választanak).

Pelle és Jakab ezt írják: *„... a transzformációs alapon történő tárgyalás közelebb áll az általános iskolás tanulók értelmi fejlettségéhez, pszichológiai adottságaihoz, mint pl. a mozgásra vagy egybevágósági axiómákra alapozott tárgyalás.”* Olyan felépítésre törekszenek, *„amely a sík önmagára való leképezéseinek, a transzformációknak központibb helyet igyekszik biztosítani. Ennek alapjául egy olyan axiómarendszer szolgál, amely bizonyos változtatásokkal a hilbertiből keletkezik. ...az egybevágósági axiómákat olyan tükrözéssel helyettesítjük, amelyek szorzatával mozgásokat nyerünk.”*

Pelle és Jakab a tengelyes tükrözés fogalmát, annak invariáns tulajdonságait választja a felépítése alapjául. Ezeket a tulajdonságokat méréssel igazolt tapasztalatokra alapozza. Ha megvizsgáljuk a Pelle-féle kísérletből kiválasztott részleteket (Függelék I./C), akkor látjuk, hogy bár a mozgatást elutasítják, az mégis nagyon erőteljesen jelen van a módszerükben. Nem csak abban, hogy egy sablon átfordításával állítják elő a tengelyes tükröképet, hanem abban is, hogy a mérés maga is az elmozgatott merev test távolságtartó tulajdonságán alapszik, a merev lapnak tekintett papírdarab helyett a vonalzót, vagy a szögmérőt mozgatják a gyerekek.

Figyelemre méltó, hogy mindezekben az elméleti meggondolásokban felvetődik a mozgatás gondolata, és mindegyik elveti azt a lehetőséget, hogy matematikailag a térbeli mozgásra építsen. A mozgatást a deduktív felépítéshez szükséges alapállítások megfogalmazására szolgáló illusztrációnak szánják, nem

tekintik legitim matematikai eszköznek, amint lehet, félreteszik – szinte „megszabadulnak tőle”.

Mi az oka ennek az ellenérzésnek? Feltehetőleg az, hogy magát az eszközt – sablont, vagy átlátszó papírt –, valamint magukat a mozgatással való érveléseket (Függelék I./E, F, G), pontatlannak és homályosnak tartották. Ez az érzés indokolt, hiszen az eszköz maga, és a mód, ahogyan a transzformált képet előállították a segítségével valóban problémás.

A fő probléma az, hogy a mozgatás megadása a pontok pályájának megadásával történik, ami ellentmond annak, hogy a transzformáció megadásban csak a kezdet és véghelyzet számít. Ezért is mondanak le hamar a szemléltetésről, térnek át arra, hogy mozgatásból leszűrt tulajdonságokat és a hozzárendelési szabályt használják az érvelésekhez, s ennek alapján a körzős-vonalzós szerkesztéseket a kép előállításához.

Miért okoz mégis fogalmi torzulásokat a szemléltetés, ha ilyen gyorsan elhagyják? A fogalomalkotással kapcsolatos legújabb kutatások válaszolnak erre a kérdésre.

A gyerekek egybevágóságfogalmának nem verbális részében a mozgatásnak alapvető szerepe van. A mindennapi tapasztalatok az elmozduló merev testekről, síkbeli figurákról az egybevágóság-fogalom jobb agyféltekés komponensének erőteljes részét képezik. Ebben a hétköznapi tapasztalatanyagban sok esetben csak a mozgatás kezdő és véghelyzete lényeges, sok esetben azonban fontos szerepet játszik a mozgó test pályája is. A fizikában, a dinamikában kitüntetett szerepük van a helyváltoztatás bizonyos kötött-pályás „prototípusainak” – forgatás rögzített tengely körül, eltolás rögzített sínpálya mentén, stb. –, ezekhez kötődnek a különböző mozgástípusok elnevezései is. A rövid ideig alkalmazott szemléltetések, továbbá az elnevezések ezt a „kötött pályás” belső képet felerősítik, legalisan hozzákapcsolják a matematikai fogalomhoz. Ennek a fogalomalkotásban két fontos hatása is van:

- magától értetődővé teszi az alakzatok invariáns tulajdonságait;
- a mozgásokról alkotott prototipikus képekhez tévesen kapcsolja a mozgó pont pályáját.

Az első hatás alapvető fontosságú, ez teszi a mozgatással való szemléltetést elhagyhatatlanná, az egybevágósággal kapcsolatos alapismereteink alapját adja.

A második hatás láthatatlan, nem tudatos konfliktusfaktorként van jelen, s áll a háttérben többféle megértési nehézségnek. Leginkább talán a transzformációk ekvivalenciájának megértésében okozhat gondot. Két transzformáció egyformaságának, vagy különbözőségének megállapításában döntő fontosságúvá válhat, hogy hogyan – milyen úton, vagy milyen szabály szerint – jutnak el a pontok a transzformált képeikhez. Ezáltal háttérbe szorul az, hogy két transzformáció egyenlősége csak azon múlik, hogy minden ponthoz ugyanazt a

képpontot rendelik-e. Ez komoly akadályt jelenthet a transzformáció-szorzásokról szóló állítások megértésében (itt megértésre, és nem tételek megjegyzésére gondolok), nem kis részben ez lehet a felelős a dolgozat elején ismertetett hibás gondolatok egy részéért.

Az is kiderül, hogy ezt a problémát, amit a „kötött-pályás mozgásfogalom” jelent, már a transzformációra alapozott geometriatanítás bevezetése idején is világosan felismerték a didaktikusok, és látták, hogy a tanításban szükség lenne ennek a képnek a módosítására.

Hollai Márta (1975) ezt írja: „*A szimmetriák vizsgálatával arra is rámutathatunk, hogy a matematikában sokszor csak a kezdő- és véghelyzetre vagyunk tekintettel. Ha a kiinduló helyzetből úgy is el tudok jutni a véghelyzetbe, hogy egy merev testet (lapot) mozgatok, akkor biztosan egybevágóságról (speciális egybevágóságról, azaz matematikai értelemben is mozgásról) beszélünk. Ha a testet (lapot) úgy is el tudom mozgatni a kezdő helyzetből, a véghelyzetbe, hogy pontjai körpályán mozognak, akkor forgatásról; ha egyenesen tudtuk mozgatni, akkor eltolásról van szó. Azt, hogy egy alakzat és forgatottja, eltoltja egybevágó, a merev test fizikai fogalma biztosítja. A merev test mozgásában lévő változatlanság lesz a speciális egybevágóság modellje.*”

Az hogy Hajós György – klasszikus tankönyvében (Hajós, 1971) – a mozgás fogalmát választja alapfogalomnak, számomra az ő kiváló pedagógiai érzékéről tanúskodik. Hiszen a mozgásélmény valóban az egybevágóságról alkotott szemléletes fogalmaink alapja, s Hajós axiómarendszere éppen ezt legalizálja.

Nagy szerencsének érzem, hogy ezt az elméletet „készen megkaptam” és így az egybevágóság szemléltetését közvetlenül a mozgás matematikailag is tisztázott fogalmára építhettem.

5.1.3 Mozgatásra alapozott transzformációtanítás, a „zászlós módszer”

Horvay az egybevágóság „fedésbe hozhatóság”-on alapuló definícióját a „távolságtartó hozzárendelhetőség”-gel szeretné helyettesíteni.

Az ilyen típusú definíciókat:

„*Két alakzatot akkor nevezünk egybevágónak, ha azok egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.*” (Faragó, 1963).

ezzel a pontosabb definícióval szeretné helyettesíteni:

„*Két alakzat egybevágó, ha van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át.*” (Hajós, 1971).

A zászlós módszer által épített egybevágóságfogalom e két definíció szintézise.

Ebben a módszerben a mozgatás pályája nincsen meghatározva, csupán a mozgó sík kezdő és véghelyzete. Az átlátszó papír – amennyiben nem hajtjuk, gyűrjük, nyújtjuk, tépjük stb., azaz egy merev lapnak tekinthetjük – egy mozgatható sikként viselkedik, így természetes szemléltetése Hajós VII. axiómájának. A zászló egy félsíkot szemléltet egy félegyenessel a határán. Ha vesszük a zászló rúdja által meghatározott félegyeneseket és azokat a félsíkokat, amelyeket a zászlók háromszögei határoznak meg, akkor két félsíkot kapunk határukon egy-egy félegyenessel, melyek, Hajós VIII. axiómája szerint, pontosan egy mozgást határoznak meg.

Ennek eredményeképpen a mozgásról szerzett élményanyag, már meglévő szemléletnek, azokat az elemeit erősítjük és kapcsoljuk hozzá az alakuló egybevágóság és transzformáció fogalomhoz, melyekben a pálya nem számít, csak a kezdő és véghelyzet. A zászlópárokkal megadott mozgatások a transzformált kép előállítására olyan eljárásokat engednek meg, melynek során a sík pontjai kimozdulhatnak a térbe, a gyerekek a sík egybevágóságait a térbe ágyazva tapasztalhatják meg.

Az átlátszó papír mozgatása tehát legitim matematikai eszközzé válik ebben a rendszerben. Korrekt, ugyanakkor a gyerekek számára könnyen érthető definíciókat adunk a leképezésre, melyek segítségével könnyen előállítható a transzformált kép.

Hajós felépítésében két távolság, két szög akkor egyenlő, ha van olyan mozgás, amely egymásba viszi őket. Ez teljesen megfelel a kisgyerek „egyformaságról”, egybevágóságról alkotott képének, aki két alakzat egybevágóságát úgy tudja megállapítani, hogy egymásra mozgatja azokat, és akinek eközben a mozgatás pályája nem fontos.

A „zászlós módszer”-ben találkozunk a mozgásfogalom axiomatikus megalapozása a kisgyerek intuitív egybevágóságról szerzett tapasztalataival. A formálódó fogalomképzetben a jobb agyféltekés, képi, motorikus reprezentációk nincsenek ellentmondásban, a bal agyféltekés, verbális, szimbolikus reprezentációkkal, sőt gazdagítják, támogatják azokat. Alapot szolgáltatnak a későbbi, magasabb szintű ismeretek számára is.

Ugyanakkor a zászlós módszernek is megvan az a hibája, hogy alkalmazásával aránytalanul nagy hangsúly tevődik a sík egybevágóságaira, síkidomok egybevágóságára, amit Horvay Katalin joggal hibáztatott a korai felépítésekben.

5.2 A transzformált kép – mozgatás és/vagy körző-vonalzós szerkesztés

A geometriai transzformációkra alapozott tanításban a transzformáció-tulajdonságok, és ezek között elsőként a tengelyes tükrözés tulajdonságainak a

szemléltetése az egybevágóságfogalom építésének kulcsfontosságú eleme. Ez a kérdés szorosan összefügg azzal, hogy a tanítás során a gyerekek maguk milyen módszert, vagy módszereket, használnak a transzformált kép előállítására.

Ennek a fejezetnek az egyik kérdése az, hogy a sík egybevágóságainak szemléltetésére használt átlátszó papírdarabnak mi a jelentéstartalma és mik a fő funkciói:

- az átlátszó papír (mozgatható sablon stb.) csupán tanári demonstrációra, vagy tanulói tapasztalatszerzésre is használt eszköz;
- fő feladata a transzformáció egybevágósági tulajdonságainak illusztrálása, vagy a transzformált kép előállítására is alkalmas, legális eszköz;
- rövid ideig, vagy hosszabb időn át szerepel a tanítási folyamatban?

A másik kérdés arra vonatkozik, hogy a körző-vonalzó eszközkészlet szinte kizárólagos használata milyen hatással lehet az egybevágóság fogalom alakulására.

5.2.1 Nézetek az egybevágósági transzformációk szemléltetéséről

“A geometria tanulása kezdetén a tapasztalatból, szemléletből való kiindulásnak sokkal nagyobb szerepet kell kapnia, mint az eddigi, hagyományos iskolai oktatásban. A szemlélet sokoldalú és erős foglalkoztatása nélkül a geometria magasabb szintű tanítása és tanulása hamarosan mesterkéltté, formálissá torzul. Az intuitív források fejletlensége és erőtlensége folytán az absztrahálásra és általánosításra, a problémalátásra és a probléma megoldására való készség nem fejlődik ki valójában.”

(Kárteszi, 1966)

A transzformációtanítás fontosságát illetően elég nagy az egyetértés a 60-as évek matematika tanítással kapcsolatos anyagaiban. A szemléltetés kérdésében azonban több nézetkülönbség is van.

Dr. Pelle Béla ezt írja: *„Fokozatosan kell legyőzni a szemléletes és fizikai elképzelésnek a geometriai tartalommal való erős kapcsoltságát, hogy a tények geometriai magja felé haladjuk előre.”* (Pelle és Jakab, 1972)

Horvay Katalin az 1966-ban megjelent tankönyvükről ezt mondja:

„Megismertethetjük azonban a tanulókat a különböző egybevágósági transzformációkkal. Ezek egyszerűbb tulajdonságait fogadjuk el a szemlélet alapján bizonyítás nélkül. További tulajdonságait az előbbiekre támaszkodva bizonyíthatjuk. ... Így erősen szemléletes bázisból kiindulva állandóan a konstruktív utat járva eljuthatunk a magasabb fokon is megfelelő definícióhoz.”

Tehát egyetértés van abban, hogy a bevezetéskor szükség van a szemléltetésre, amitől fokozatosan el kell szakadni. Abban azonban már nagy külön-

ségek vannak, hogy mit és hogyan szemléltetnek, hogy milyen szerepet szánnak a szemléltetésnek a fogalomépítés folyamatában.

A dr. Pelle Béla által vezetett kísérlet (Függelék I./C) megtervezői fontosnak tartották, hogy a gyerekek maguk meggyőződjenek valahogyan a kiinduló állítások igazáról, addig a pontig, ameddig már bizonyítani tudunk. Úgy tűnik, hogy itt a szemléltetésnek az a fő szerepe, hogy a bizonyítás hiányában a meggyőzést szolgálja. Nagy erénye ennek a módszernek, hogy a gyerekek figyelmét ráirányítják az összetartozó részletekre. (A mérést mint szemléltetést azonban teljesen elhibázottnak látom, mivel maga a mozgatás – mind intuitíven, mind matematikai szempontból – tisztább és meggyőzőbb érv a mérésnél a távolság és szögtartás alátámasztására.)

A Horvay-Pálmai szerzőpáros hozzáállása a szemléltetéshez ennek sok tekintetben éppen az ellenkezője (Függelék H). A bemutatott részlet alapján is jól látszik, hogy a szemléltetést a szerzők nagyon komolyan veszik.

A tankönyvben levő képek valódi fotók, és a gyerekek arra vannak felszólítva, hogy ők maguk is végrehajtsák azt, ami az ábrán látnak. A gondolatmenet, ami a szemléltetéshez kapcsolódik csak annyit fogad el a szemléletből, hogy két szakasz, illetve két szög megegyezik egymással amennyiben az összehajítás során fedésbe kerültek. Ennek alapján korrekt következtetésekkel jutnak el a többi transzformáció tulajdonságokig. A szemléltetés tehát matematikailag tiszta gondolatmenetekkel kapcsolódik össze. Néhány megfigyelés után azonban, miután a kívánt következtetéseket levonták, elhagyják a kísérletezést, áttérnek az elméleti okoskodásokra, illetve a körzős-vonalzós szerkesztésekre. A szemléltetés csak rövid ideig szerepel, pusztán a legalapvetőbb tulajdonságok megállapítására szolgál.

Mindkét koncepcióról megállapíthatjuk, hogy a szemléltetésnek alantasabb, másodlagos szerepet szán, átmenetet ahhoz a fázishoz, ahol már kényelmesen tud bizonyítani, elvont szinten dolgozni.

Vannak azonban ebben az időszakban is olyanok, akik a mozgatásnak fontosabb szerepet tulajdonítanak a transzformáció tulajdonságok pusztá illusztrálásánál.

Gádorné (1971) írja az transzformáció-tanításhoz készített tanári útmutatóban (Függelék I./I).

“Nem lehetünk biztosak abban, hogy a transzformációk lényegét közelebb hozza a tanulókhoz az, ha a tanár alkalmas szemléltetéssel vezeti be az új fogalmakat. A szemléltetést, magyarázatot a tanuló csak mint külső – tehát lényegében passzív – szemlélő követi, az így nyert benyomásai nem elég mélyek, nem eléggé személyesek. A fogalmak kialakulásához neki magának kell „kísérleteznie”, „felfedezéseket” tennie, meg kell próbálnia megfogalmazni a tapasztalatait.”

Véleménye összhangban van a tanuláspszichológia legújabb eredményeivel (pl. Paivio, 2006).

Hollai Márta is fontosabb szerepet szánt a mozgásoknak a pusztá illusztrációnál. A geometriai gondolkodás és a transzformációs szemlélet szintjei (1972) című cikkében írja: „A II. szint.⁵ akkor kezdődik, ha az összehasonlítás alapja, a figyelem az egyes pontok mozgására irányul. ... A III. szinten már a mozgó pontoknak a kezdő és véghelyezeteit hasonlítjuk össze. Hatodik osztálytól elérhető, hogy a tanulók közvetlenül a mozgások segítségével megvizsgálják az alapvető transzformációkat, azok tulajdonságait. Ezek segítségével kezdetünk a III/a megvalósításához: az alakzatok egyes tulajdonságai közti kapcsolatok feltárása, a definiáló tulajdonságok kiválasztása, az alakzatok rendszerezése. Ekkor sokat kell ténylegesen átforgatni, hajtogatni, csúsztatni, szerkeszteni, hogy a tapasztalati kísérletből logikai kísérlet válhassék, ...”

Sajnálatos módon Gádorné és Hollai Márta elképzelései nem épültek be a tanítási gyakorlatba.

Ennek okát egyrészt abban kereshetjük, hogy a tevékenység, mint tanítási-tanulási módszer a tanárok között, egy szűk kör kivételével, nem volt elfogadott, különösen a felső-tagozaton, és még inkább a középiskolában. A másik ok az lehet, hogy a javasolt tevékenységek kényelmetlenek és pontatlanok voltak.

Vegyük tehát közelebbről is szemügyre a transzformált képek előállítására szolgáló tevékenységeket. A következő fejezetekben megmutatom, hogy az egybevágóságfogalom egy geometriai procept, melynek alakulásában ezek az eljárások meghatározó szerepet játszanak. (A következő elemzésekben a tengelyes tükrözésre fókuszálok. Az megállapítások azonban általánosak, elmondhatók a többi egybevágóságra is.)

5.2.2 Az egybevágóság mint a körzős-vonalzós szerkesztési eljárásokhoz kötődő „procept”

Az elméleti bevezetőben láttuk, hogy a procept három összetevő – az *eljárás* (process), a *tárgy* (object) és a *szimbólum* – ötvözete.

Megmutatom, hogy a bemutatott felépítések mindegyike magában foglalja a procept formálás minden elemét:

az eljárások:

- (a) az alakzat tükrözése egy mozgó papírdarab segítségével
- (b) a tükörkép szerkesztése körző és vonalzó segítségével;

⁵Elemzésében a transzformációs gondolkodás fejlődését követi végig, a geometriai gondolkodás van Hiele szintjeire illetve azoknak az orosz pedagógus, Пышкало (Püskalo), által módosított változataira támaszkodva. A római számok a van Hiele szinteket, az I/a, II/a, a Пышкало-féle szinteket jelölik.

a tárgy:

a tengelyes tükrözés és tulajdonságai;

a szimbólum:

vagy az adott t tengely maga, vagy a kép és tükörkép szimmetrikus együttese. (Később az R_t matematikai szimbólumot is használjuk a t tengelyre történő tükrözés formális lejegyzésére.)

Az eljárások és a végrehajtásuk során keletkező vizuális képek a jobb agyféltekés belső reprezentációk kialakulásában döntő szerepet játszanak. Az (a) eljárással már részletesen foglalkoztunk. A hagyományos felépítésekben ezt csak rövid ideig használják. A tükörképet körzős-vonalzós szerkesztéssel állítják elő. Az egybevágóság mint procept ebben a felépítésben erre a (b) típusra, a körzős-vonalzós szerkesztésekre épül. Ez az eljárás többféle szempontból korlátozott, és természetesen hatással van a fogalomalkotásra.

A körzős-vonalzós szerkesztési eljárás kizárólagos használata által indukált fogalomképzet több ponton is ellentétbe kerülhet az egybevágóság és általánosan a transzformáció matematikai fogalmával. A matematikai és didaktikai elemzés során az alábbi problémák fogalmazódtak meg: az eljárás során a síknak csak bizonyos pontjai, ponthalmazai transzformálódnak és a transzformált kép előállítása során a pontok nem egyenrangúak; ezért nem alakul ki a szimmetrián alapuló következtetések képessége, általában nem alakul ki „belső kép” a transzformáció működéséről. A következőkben ezeket az észrevételeket részletesebben is kifejtem és alátámasztom.

- A síknak csak bizonyos pontjai, ponthalmazai transzformálódnak.

A geometriai transzformációk tanításakor a feladatmegoldások megadott pontok, alakzatok transzformált képének előállítását kívánják meg. Nem természetes az a gondolat, hogy a transzformációban az egész sík minden pontja részt-vesz, azok is, amelyeknek nem szerkesztjük meg a képét.

- A transzformált kép előállítása során a pontok nem egyenrangúak.

A körzős-vonalzós szerkesztések bizonyos pontoknak, ponthalmazoknak kiemelt szerepet adnak. (Egy szakasz, egy háromszög vagy bármilyen sokszög képét úgy állítjuk elő, hogy a csúcsok képét megszerkesztjük, majd a képeket összekötjük. A kör képét a középpont tükörképe köré azonos sugarú kör szerkesztésével, az egyenes képét egy vagy két pont képének megszerkesztésével kapjuk meg.) A szerkesztésekben a szakaszvégpontok, sokszögcúcsok, kör középpontok, esetleg egy egyenesen egy merőleges talppontja speciális fontosságot nyer. Mindez azt eredményezi, hogy egy-egy gyerek fejében az egyenestartás is csak félig-meddig megértett, pontatlan fogalom, amint ez a hibás gondolat a 3. esettanulmányban (27. o.) implicit módon megjelenik.

- Nem alakul ki a szimmetrián alapuló következtetések képessége

A szimmetria-okoskodások természetessé válásához az szükséges, hogy a szimmetrikus alakzatok belső reprezentációjában az összetartozó részletek világosan megjelenjenek. Mivel pedig a kép előállításakor a gyerekek csak néhány pont képét szerkesztik meg közvetlenül, nincs élményük a többi összetartozó pontokról, vagy komplexebb összetartozó részletekről. Az egymásnak megfelelő részletek sok esetben nem jelennek meg a „belső képben”.

Az összetartozó részletek megtapasztalásának hiánya talán a fő ok amögött, hogy a diákok nagyobb része nem igazán képes arra, hogy következtetésekben, feladatmegoldásokban az egybevágósági transzformációkat használja. Matematikai megfontolásokban – a transzformációs felépítés bevezetése ellenére is – elsősorban a háromszög-egybevágósági alapesetekre támaszkodnak.

- Nem alakul ki „belső kép” a transzformáció működéséről

A körzős-vonalzós szerkesztési eljárások csupán különálló pontokból, egyenes és kördarabokból álló alakzatok tükörképének szerkesztését teszik lehetővé, ugyanakkor pedig elég bonyolultak (a forgatás különösen komplikált), túl sok erőfeszítés kell a transzformált kép előállításához.

A szerkesztési eljárás nem kapcsolódik szervesen az egybevágóságról szerzett korábbi tapasztalatanyaghoz, ugyanakkor az ikonikus szimbólum – az alakzat és a megszerkesztett kép szimmetrikus együttese – gyakran nem elég pontos, és a szerkesztés segédvonalai miatt nem is elég világos ahhoz, hogy meggyőző képet adjon kép és tükörkép egybevágóságáról;

Mindez azt eredményezi, hogy a gyerekek túl kevés tapasztalatot szereznek az egybevágó alakzatokról, azok egymásnak megfelelő részleteiről. Sokkal kevesebbet annál, mint amennyi ahhoz kellene, hogy egy stabil belső képet alakítsanak ki ezekről a fogalmakról.

Davis (1984) azt mondja az eljárásokról: *„Eleinte, amikor egy eljárást megtanulunk, szinte mindegyik lépést külön tapasztaljuk meg; az egésznek a mintázatát és a teljes tevékenység folyamatát nem érzékeljük. De ahogyan az eljárást egyre jobban begyakoroljuk, a folyamat maga egy egységgé válik – dolog lesz belőle.”*

A körzős-vonalzós szerkesztési eljárások nehézsége miatt előfordulhat, hogy ebben a tanítási folyamatban nem kapcsolódik össze az eljárásokkal a *dolog*, az egybevágóság fogalom maga.

5.2.3 Az egybevágóság mint a zászlókkal megadott mozgathoz kötődő „procept”

A korábbi hagyományokkal ellentétben, a „zászlós módszerben” a mozgathat megadása egyszerű és pontos, a kép előállítására szolgáló eljárásaként sokkal hangsúlyosabb szerepet kap. Mindvégig párhuzamosan jelen van a körzős-vonalzós szerkesztési eljárások mellett.

Ez az eljárás kompenzálja azokat a hiányokat és hibákat, amelyeket – a korábbi elemzésünk szerint – a körzős-vonalzós szerkesztési eljárások kizárólagos alkalmazása eredményez.

Ennek az eljárásnak a végrehajtása során a mozgó alakzat (sőt a teljes síkot szimbolizáló papírlap) összes pontjai egyenrangúak, az egész egyetlen mozzanatban a helyére kerül. Ily módon egy tiszta, erőteljes belső kép keletkezhet a transzformáció működéséről, alakzatok transzformált képéről.

Alakzat és szimmetrikus párja gazdag változatosságban, zavaró segédvonalak nélkül jelenik meg az eljárás során, bőséges tapasztalatanyagot nyújtva a geometriai gondolkodás vizuális szintjén – a van Hiele felosztásnak megfelelően.

Ezeknek a tevékenységeknek a végrehajtása során, van idő és lehetőség arra, hogy az eljárás „egy egységgé – *dologgá* váljon” (Davis, 1984).

Miután a gyerekek gyakorlatot szereztek egy alakzat elmozgatott képének előállításában, maga a mozgással létrehozott hozzárendelés lesz a vizsgálat tárgya, ahogy azt Davis a procept képzés folyamatáról megállapítja. Elkezdhetnek egymásnak megfelelő részleteket keresni az alakzaton és képen. Nem csak megfelelő pontokat, hanem megfelelő szögeket, szakaszokat, megfelelő íveket, háromszögeket stb. A kiválasztott részletekről könnyen ellenőrizhető átlátszó papír segítségével, hogy valóban egymásnak megfelelő párok-e.

A megfelelő részletekről magától értetődően születnek azok a megállapítások, hogy egyformák, ugyanolyan a méretük – akár elkezdhetjük azt a kifejezést használni, hogy egybevágóak.

Ebben a fázisban a gyerekek a van Hiele osztályozás szerinti analitikus szinten dolgoznak.

7. példa: (Szeredi, Kovács, 2004, 33. o.)

A képen egyforma színnel egyforma részleteket jelöltünk meg.

A képe A' és A' képe A .

Ezt így jelöljük: $A \rightarrow A'$ és $A' \rightarrow A$.

A és A' egymásnak megfelelő pontok,

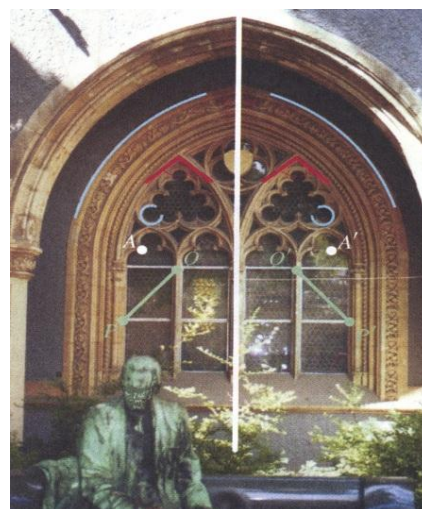
röviden: $A \leftrightarrow A'$

PQ és $P'Q'$ egymásnak megfelelő szakaszok, röviden:

$PQ \leftrightarrow P'Q'$.

Pirossal megfelelő szögeket jelöltünk. A kék részletek is megfelelő alakzatpárok.

Az egyforma színű részletek egymás tükörképei. Átlátszó papírral egymásra mozgathatjuk őket.



Az egybevágóság-fogalom természetes módon épülhet erre a tevékenységre. Az, hogy az összetartozó, mozgással fedésbe hozható részletek egybevágóak egyaránt összhangban van a kisgyerek intuitív egybevágóság-fogalmával és az egybevágóság egzakt definíciójával.

5.3 A transzformációtulajdonságok tanítása

Ha elérjük, hogy a gyerekek elkezdenek a megfelelő részletekre figyelni, azokat le tudják jegyezni, fel tudják következtetésekben használni, akkor nagyot léptünk az egybevágóságfogalmuk fejlesztésében. Ez egy olyan csomópont, amelyhez nagyon sok fontos fogalmat tudunk hozzákapcsolni, illetve ráépíteni.

Erre alapozva a transzformáció tulajdonságok kényelmesen összegyűjthetők.

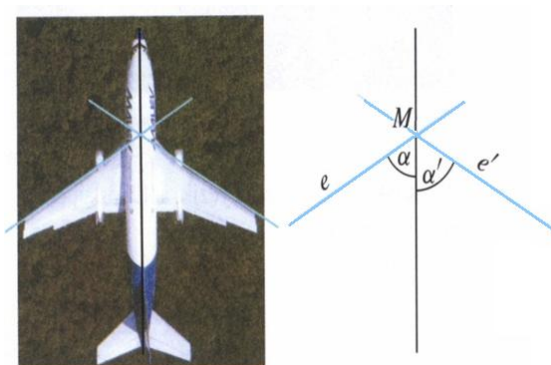
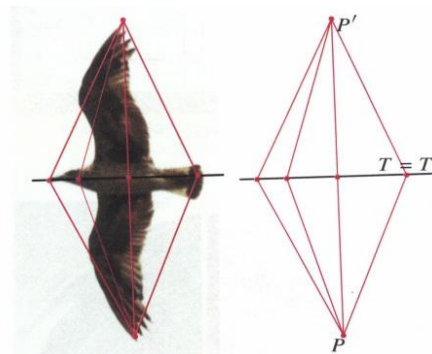
Nézzünk meg néhány példát, hogyan történik ez a gyakorlatban:

Tekintsünk egy szakaszt, melynek egyik végpontja a tengelyen van. Ennek a képe egy olyan szakasz, ami a másik félsíkban van, de amelynek a tengelyen levő végpontja a megegyezik az eredetivel. Ezenkívül a szakasz és a tengely által bezárt szög képe éppen az a szög, amelyet a szakasz képe zár be a tengellyel. Tehát ezek a szakaszok és szögek egybevágóak. Ebből a megfigyelésből könnyen leszűrhetők az alábbi állítások:

8. példa (Szeredi, Kovács, 2004, 34. o.):

„Mivel a tengely pontjai helyben maradnak, ezért, ha P pont képe P' , és T a tengely tetszőleges pontja, akkor PT és $P'T'$ egymásnak megfelelő szakaszok, vagyis egyenlőek.

Pont és tükörképe a tengely bármely pontjától egyenlő távol vannak.”



„Ha az e egyenes metszi a tengelyt – az M pontban – akkor az e egyenes e' tükörképe is metszi a tengelyt, még hozzá ugyanabban az M pontban. Mivel M pont képe önmaga, ezért az e egyenes és a t tengely hajlásszöge megegyezik az e' egyenes és a t tengely hajlásszögével, hiszen ezek a szögek egymás tükörképei.

Egyenes és tükörképe ugyanolyan hajlásszöget zárnak be a tengellyel. A tengely tehát szögfelezője a kép és a tükörkép által bezárt szögnek.”

Esetleírás:

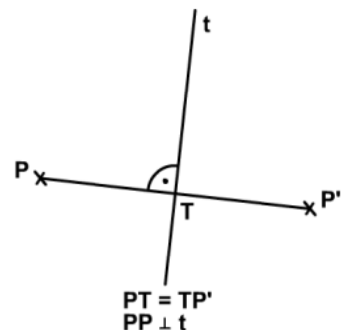
Ha ezek az észrevételek beépülnek a gyerekek gondolkodásába, akkor nem fog nekik gondot okozni, hogy stratégiákat találjanak ki arra, hogyan szerkesszék meg körzővel-vonalzóval egy tetszőleges pont képét.

A következő két példa ilyen, gyerekek (nem is igazán jól teljesítő gyerekek) által kitalált szerkesztési stratégia egy P pont P' képének előállítására.

- Az egyik gyerek felvesz két pontot tetszőlegesen a tengelyen, A -t és B -t, és köríveket rajzol, A körül AP sugárral, B körül BP sugárral. A két körív metszéspontja lesz a P pont P' képe.
- A másik gyerek összeköti P -t a tengely egy tetszőleges A pontjával. Az AP szakasznak a tengellyel bezárt szögét átmásolja az A csúctól a tengely másik oldalára. A kapott félegyenesre rámérve az AP távolságot megkapja a P pont P' képét.

Az előbb megfogalmazott észrevételek más fontos állításokhoz is elvezetnek.

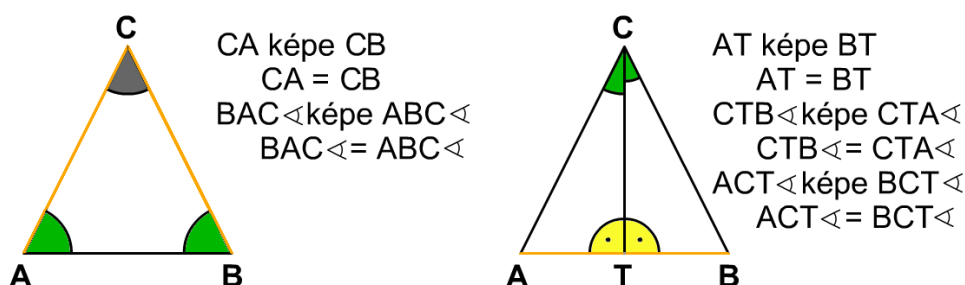
Kössük össze a pontot és a képét – P -t és P' -t (P ne illeszkedjen az egyenesre)! Az összekötő szakasz metszi a tengelyt egy pontban, amit az ábrán T -vel jelöltünk. Ha az ábrán megfelelő részleteket keresünk, és elég ügyesek vagyunk, akkor látjuk, hogy a P -től a tengelyig terjedő PT szakasz megfelel a P' -től a



tengelyig tartó szakasznak, $P'T$ -nek. Tehát a tengelynek feleznie kell a szakaszt.

A T csúcsnál elhelyezkedő egyik szögnek megfelel egy másik T csúcsú szög a tengely túloldalán, amellyel együtt egyenesszöget tesznek ki. Így mindkettőnek 90° -nak kell lennie. Tehát, egy tetszőleges pontot és tükörképét összekötő szakaszt a tengely merőlegesen felezi.

Ezt az állítást összevetve azzal, hogy pont és képe a tengely minden pontjától egyenlő távolságra van, eljutunk egy már korábbról is ismert, fontos tudnivalóhoz, miszerint egy szakasz felező merőlegesének minden pontja egyenlő távol van a szakasz végpontjaitól.



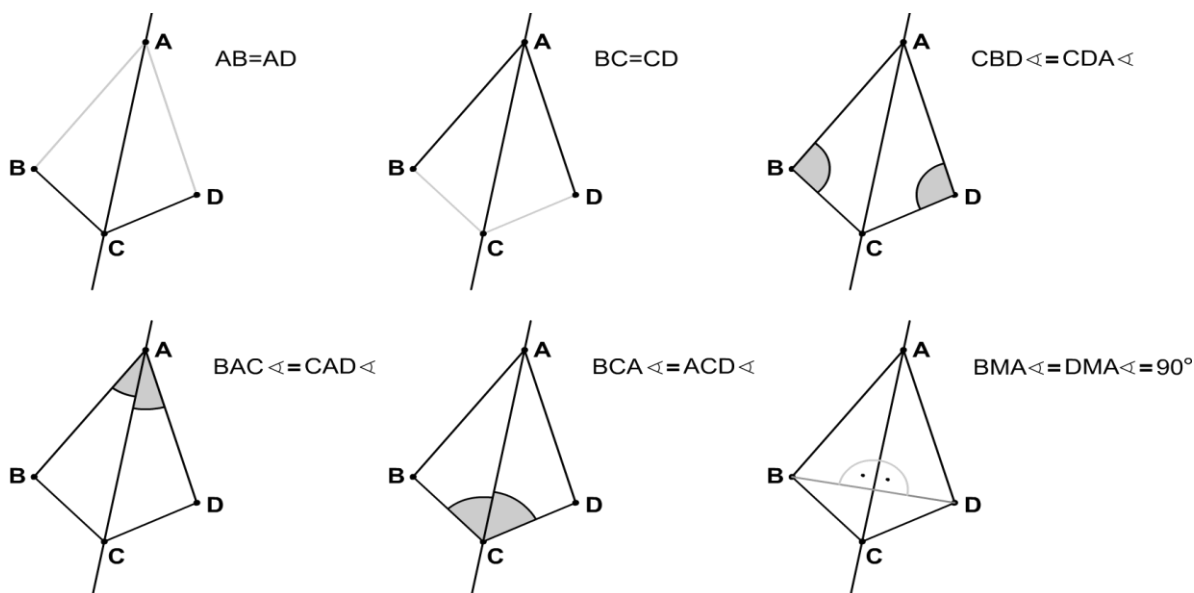
Ha adott egy tengely, és három pontot úgy választunk, hogy kettő közülük egymás tükörképe legyen, a harmadik a tükörtengelyre essék, de ne essenek egy egyenesre, akkor ezek egy olyan háromszöget csúcsai, ami szimmetrikus az adott tengelyre.

Amennyiben a gyerekeknek már van gyakorlatuk az összetartozó részletek keresésében, könnyen meg tudják fogalmaznia az egyenlőszárú háromszögek speciális tulajdonságait.

Hasonló megfontolások működnek a tengelyesen szimmetrikus négyszögek – deltoid, húrtrapéz, rombusz, téglalap és négyzet – esetén is. Ha a gyerekek képesek felismerni a megfelelő részleteket egy szimmetrikus alakzatban, akkor az ilyen alakzat többi tulajdonságait könnyen ki tudják következtetni.

A következő ábra mutatja, hogy az ilyen módon kiolvasott tulajdonságok hogyan írhatók le tömör, szimbolikus formában.

A módszer elemzése



A szimmetrikus négyszögek témaköre nem tartozik a könnyű anyagrészek közé, pedig a tengelyesen szimmetrikus esetekben a gyerekek számára még viszonylag egyszerű megfelelő részleteket találni. A helyzet sokkal nehezebb a többi egybevágóság, például középpontos- vagy egyéb forgásszimmetria esetén. Ezért tanítása még problémásabb, noha például a paralelogramma tulajdonságok ismerete alapvető segítség a deduktív geometriai következtetésekben.

Mivel a zászlós módszerben rendelkezésre áll az átlátszó papír, mint egy egyszerű és hatékony eszköz a megfelelő részletek megkeresésére, a középpontosan szimmetrikus négyszög, a paralelogramma tulajdonságainak tanítása természetes folytatása lehet a tengelyes tükrözésről szerzett korábbi – verbális és nem verbális – ismereteknek.

Amint a példák mutatják, ez a fajta bevezetés lehetővé teszi, hogy a gyerekek korán, már 11–12 éves kortól kezdve képesek legyenek egyszerű következtetésláncok alkotására, eljussanak az informális dedukció van Hiele szintjére.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ez a fajta, szimmetriára alapozott okoskodás nem működik az állítások megfordításának igazolásakor, vagyis amikor azt szeretnénk igazolni, hogy bizonyos oldalak és szögek egyenlősége maga után vonja egy alakzat szimmetriáját. Ilyen fajta érvelésekre csak később kerülhet sor, és akkor is csak tehetségesebb gyerekekkel.

Vásárhelyi Éva (2007) részletesen elemzi, hogy milyen hatással van ez a fajta, szimmetriára alapozott bevezetés a sokszögfogalom fejlődésére, kezdve az általános iskolától egészen az egyetemi tanulmányokig. A négyszögek osztályozásának három szintjét különbözteti meg: a szimmetria tulajdonságok, a metrikus tulajdonságok és az axiomatikus megközelítés szintjét. Megmutatja, hogy a fogalom kiterjesztése nem vezet ellentmondásra az egyes szintek közötti váltás során.

5.4 A „zászlós módszer” helye a magyar transzformáció-tanításban

Módszerünk szerves folytatása az elődök munkájának.

Teljes összhangban vagyunk Hollai Mártának a fejezet elején idézett megfogalmazásával abban, hogy a kezdeti fázisban sokat kell a mozgatással kísérletezni, hogy a tulajdonságokat feltárjuk.

Az összetartozó részletek fontosságát illetően Gádornénak a fejezet elején idézett gondolataihoz állunk legközelebb. Az az elgondolás, hogy a gyerekeknek kell kísérleteznie, hogy a tapasztalat elég „személyessé” váljék, hogy nekik kell a tapasztalataikat megfogalmazni a teljesen megfelel annak, amit Paivio a duál-kódú eljárások hosszan tartó alkalmazásáról állít.

Látható az is, hogy a tengelyes tükrözés tulajdonságainak összegyűjtésében a mi módszerünk és a Pálmai-Horvay tankönyv szinte teljesen ugyanazt a logikát követi. Ez a következtetéslánc sok ponton egyezik azzal, ahogyan Hajós György a térbeli mozgásként definiált síkbeli tükrözés tulajdonságait, az egyszerű szimmetrikus alakzatokról szóló tételeket levezeti. (Hajós, 1971, 51–52. o.).

A mi módszerünk a mozgatásos szemléltetést legalizálja és könnyen végrehajthatóvá teszi. Ezáltal olyan helyzetet teremt, amelyben ezeket a következtetéseket a gyerekek maguk fedezhetik fel és fogalmazhatják meg. Ezek a tulajdonságok beépülnek a gondolkodásukba, aktív és segítő részévé válnak a tengelyes tükrözésről, illetve a többi egybevágósági transzformációról kialakított fogalomképzetnek.

6. AZ EGYBEVÁGÓSÁG ÁLTALÁNOS FOGALMA FELÉ

Ebben a fejezetben szeretném röviden megmutatni, hogy hogyan folytatjuk tovább az egybevágósági transzformációk tanítását; válaszolni Malara (1995, 166. o.) kérdésére, hogy „vajon lehetséges-e, és milyen mértékig, felülemelkedni a *transzformáció mint cselekvés (action)* a fogalmán, és eljutni a *transzformáció mint hozzárendelés fogalmához?*”

A mozgásoktól tovább kell lépnünk, hogy eljussunk az általános egybevágóságfogalomhoz, már csak azért is, mert a térbeli mozgások a tér egybevágóságainak csak egy részhalmazát (részcsoportját) alkotják. El kell jutnunk oda, hogy az egybevágóságok a tér önmagára történő távolságtartó leképezései. Ennek az útnak három fontos állomása:

- a mozgásként megadott transzformációk pont-pont hozzárendelési szabállyal való megadása;
- a transzformációk ekvivalenciájának kérdése;
- a távolság és szögtartás és egyéb transzformáció tulajdonságok általános vizsgálata.

6.1 Transzformációk megadása pontonként

Amíg a mozgás többé-kevésbé egy mellékes⁶, vagy éppen szükséges, de nem igazán kívánatos⁷, esetleg kifejezetten nemkívánatos eleme volt a transzformáció-tanításnak, addig természetes volt a törekvés, hogy a mozgatással való szemléltetést minél hamarabb felváltsa a hozzárendelések pontonkénti, szabatos megadási módja.

A zászlós módszerben a tengelyes tükrözés pontonkénti hozzárendelési szabályát csak akkor vezetjük be, amikor a tükörkép mozgatással való előállításában, összetartozó részletek keresésében, a tulajdonságok megfigyelésben már gyakorlatot szereztek a gyerekek. Fontosnak tartottuk az anyag felépítésében, hogy az egybevágóságok szög- és távolságtartó tulajdonságai természetes módon fejlődjenek tovább az egybevágóságról szerzett gyerekkori tapasztalatokból.

A tengelyes tükrözés pontonkénti hozzárendelési szabályának bevezetését elképzelt (vagy akár valódi) tornaórai játékhoz kapcsoltuk⁸. A feldolgozás-

⁶ Lásd az úgynevezett Kockás sorozatot (Kovács, Szeredi et al. 1980)

⁷ Lásd például Pelle Béla által vezetett kísérletet (Pelle et al. 1972)

⁸ A feladat a Kockás sorozat 7. osztályos tankönyvéből (Kovács, Szeredi et al. 1980) kölcsönzött ötlet továbbfejlesztése.

módnak több érdekes tanulsága is van, ezért részletesen idézem a megfelelő tankönyvi részletet.

9. példa: (Szeredi, Kovács, 2004, 37. o.)

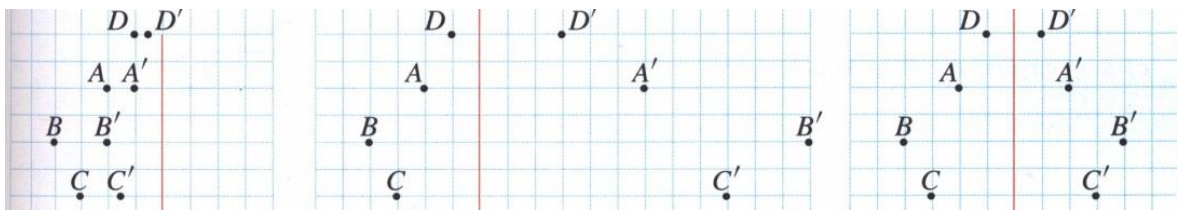
„Tükrözés pontonként

A gyerekek tornaünnepélyre készülődnek. A tornatanár segítségül négyzethálót festett fel a pályára. A pálya közepén egy egyenest pirossal megjelölt. Ilyen gyakorlatokat végeztetett a gyerekekkel:

- Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána tovább még ugyanannyit!
- Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána vissza feleannyit!
- Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána tovább még háromszorannyit!

Párosítsd össze a szabályokat a képekkel! (A képeken Anna helyét A, az új helyét pedig A' jelöli. B és B' Bélát, C és C' Csabát, D és D' Danit jelöli.)

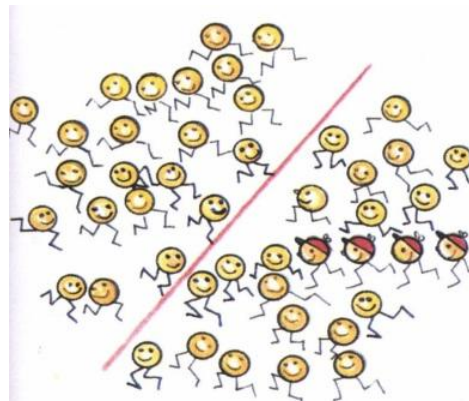
Melyik szabálynál kerülnek a gyerekek a piros egyeneshez képest a tükörképek helyére?”



„Az a) szabály éppen a tengelyes tükröképébe juttatja a gyerekeket. Elképzelhetjük az egész síkot úgy, mint egy végtelenbe nyúló, hatalmas sportpályát, aminek a pontjai – akár a gyerekek – át tudnak rendeződni különböző szabályok szerint. Például, ha a síkon adott egy egyenes akkor a pontok ilyen utasítást kaphatnak:

Sík pontjai figyelem!

Mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és onnan tovább még ugyanannyit!



Ez az utasítás a tengelyes tükröképükbe juttatja a sík pontjait. Ilyen módszerrel minden ponthoz hozzápárosítunk, vagyis hozzárendelünk egy másikat. Ezt az eredeti pont képének nevezzük. Az eredeti pont betűjelével, és még egy vesszővel jelöljük őket.

Ha meg van adva a t egyenes, akkor a sík bármelyik pontjának tengelyes tükröképét úgy kaphatjuk, hogy a P pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, majd ennek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, ami a tengelytől ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont. Ez a P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükröképe.”

Ennek a megadásnak egy fontos momentuma a tréfásan megfogalmazott hozzárendelési utasítás, és a hozzátartozó ábra a futkározó pontokkal.

A tanári útmutató azt javasolja, hogy beszéljünk a gyerekekkel az ábráról, arról, hogy valójában a sík minden pontjára vonatkozik az utasítás, de mi csak néhány pontra, például egy szakasz pontjaira, és a képükre vagyunk kíváncsiak. Azokat megjelöljük, úgy is képzelhetjük, mintha sapkát adnánk rájuk, és csak azt figyeljük meg, hogy azok hová kerülnek.

Ez összecseng a másolópapír használatával, ami a teljes mozgó síkot jelképezi a rajta kijelölt alakzattal együtt, és segíti annak a képnek a kialakulását, hogy egy geometriai transzformáció során az alaphalmaz minden pontja részt vesz a transzformációban.

Ugyanakkor az összehasonlítás rávilágít a feldolgozásmód egy hibájára is. Hozzárendeléshez ugyanis itt is hozzákapcsoltuk a mozgás képzetét. Itt a pontok külön-külön mozognak, és míg a „zászlós módszer”-nél nagy hangsúlyt tettünk arra, hogy a mozgás pályája ne számítson, itt minden egyes pont mozgását előírtuk.

Annak köszönhetően, hogy a mozgással való megadás egyenrangú a pontonként megadott hozzárendelési szabállyal, természetes módon vetődik fel az, hogy támpontokat keressünk a különböző transzformációk összehasonlításához.

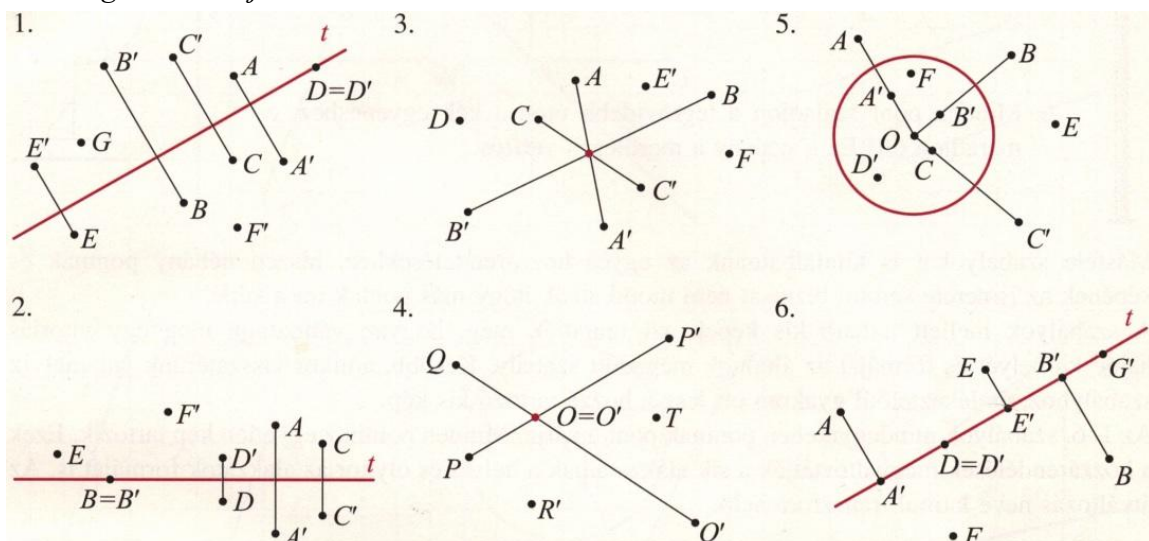
Ehhez szolgáltató kiindulási alapot a következő feladat.

10. példa (Szeredi, Kovács, 2003, 53. o.):

Pont-pont hozzárendelések

“Játsszunk szabályjátékot pontokkal!

Az alaphalmaz elemei a lap síkjának pontjai legyenek. Megadtunk néhány pontot és némelyiknek a párját is. Mi lehet az egyes hozzárendelések szabálya? Amelyik pontnak nem adtuk meg a képét, annak keresd meg! Amelyiknek pedig csak a képét adtuk meg, annak keresd meg az eredetijét!”



Az egybevágóság általános fogalma felé

A feladathoz a tankönyv közöl egy-egy lehetséges megoldást is, (a lehetséges szó itt nagyon fontos, hangsúlyt fektetünk arra, hogy ez a néhány adott pár nem határozza meg a hozzárendelést), méghozzá kicsi képekkel együtt, amelyek szemléletesebben is megmutatják, hogyan változtatják meg az alakzatokat az egyes hozzárendelések.

- 1 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton (vagyis az egyenesre merőleges irányban) a piros egyeneshez, majd fusson tovább kétszerannyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.)*



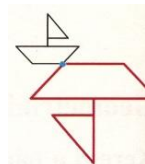
- 2 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros egyeneshez, majd fusson tovább ugyanannyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.) Szabályunk éppen a **tengelyes tükrözés**. A tengelyes tükrözést egy egyenessel adjuk meg.*



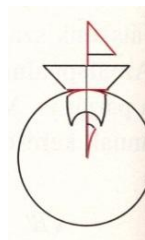
- 3 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros ponthoz, majd fusson tovább ugyanannyit! Ez a szabály a **középpontos tükrözés**. A középpontos tükrözést egy ponttal adjuk meg.*



- 4 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros ponthoz, majd fusson tovább kétszerannyit! Ez egy **középpontos nagyítás**, egy ponttal és a nagyítás arányával adjuk meg.*



- 5 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros körhöz, (vagyis a kör középpontja felé mutató irányban), majd tovább ugyanannyit!*



- 6 *Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros egyeneshez, és maradjon ott! Ez a szabály a **merőleges vetítés**.*



Ez a feladat sokféle összehasonlítási lehetőséget kínál, így alkalmas a különböző transzformációtulajdonságok összehasonlítására, a transzformációk csoportosítására. Erre a feladatra alapozva vezettük be az egybevágóság fogalmának általánosítását, és transzformációk egyenlőségének fogalmát.

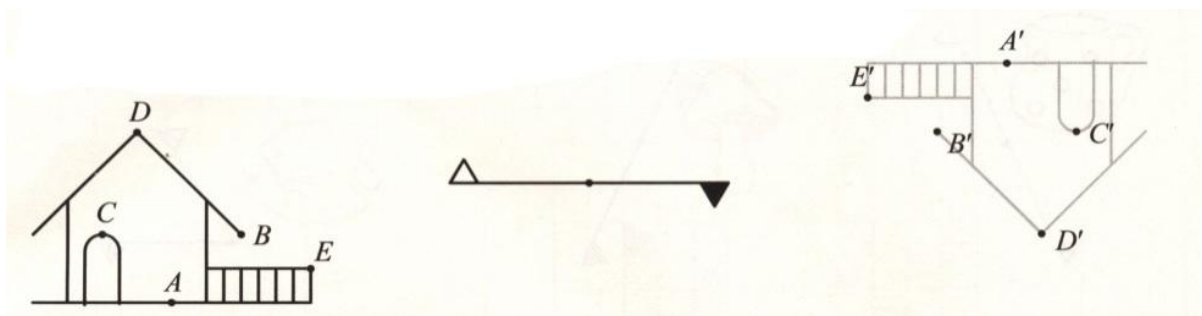
6.2 Transzformációk ekvivalenciája

A kétféle – mozgással és pontonkénti hozzárendelésként való – megadás hátterében ott áll a transzformációk ekvivalenciájának a kérdése. A zászlós módszer nagy előnyének látom, hogy ez a kérdés ebben a felépítésben természetes módon, a gyerekek számára érthetően, mégis precízen tárgyalható.

11. példa (Szeredi, Kovács, 2003, 59. o.)

A 3. szabály (ld. a 10. példát, 65. o.) szerint szerkesztettük meg a házikó kijelölt pontjainak a képét. Középpontunk az O pont volt.

Átlátszó papír segítségével mozgassuk el a házikót a zászlók szerint!



Azt tapasztaljuk, hogy a megadott pontokhoz mindkét eljárás ugyanazokat a képpontokat rendeli. A 3. szabály és a megadott mozgítás valóban ugyanazt a transzformációt adja meg.

Látjuk, hogy ugyanazt a hozzárendelést több különböző módon is megadhatjuk.

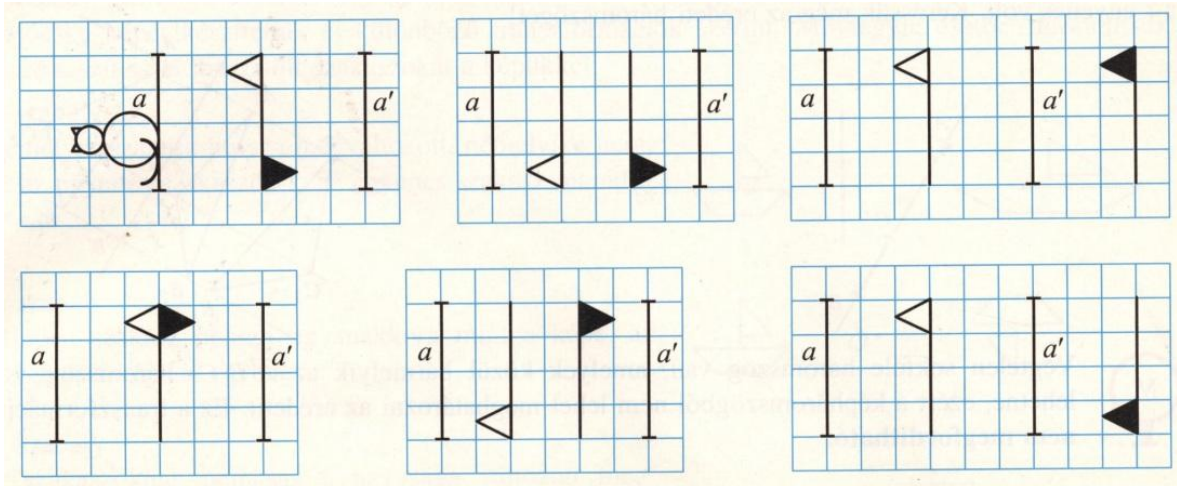
Ha két transzformáció olyan, hogy az egyik transzformáció bármely ponthoz ugyanazt a képpontot rendeli mint a másik, akkor a két transzformáció egyenlő.

A sík egybevágóságait úgy adjuk meg térbeli mozgásokkal, hogy csak a kezdő és véghelyzet számít. Ez a szemléltetés nagyon jó alapot ad annak a megértéséhez, hogy a sík két transzformációja – vagy két akármilyen függvény – megegyezik, ha minden ponthoz ugyanazt a képpontot rendelik – általánosabban, ha az alaphalmazuk megegyezik és minden elemhez ugyanazt az elemet rendeljük hozzá.

Ez egy nehéz definíció, Skemp fogalmi hierarchiájában meglehetősen magasan helyezkedne el. Ennek a fogalomnak az alakulásában nagyon sokat számít az, hogy, hogy a gyerekek fejében kialakuló belső kép összhangban van-e ezzel a definícióval. Lássunk néhány tankönyvi részletet arra is, hogyan segíthetjük a zászlós módszerben ezen a területen is a fogalomalkotást. (A következő feladatnak külön érdekessége az, hogy egyaránt jól tudtam használni az általános iskolában és egyetemi geometria kurzuson is).

12. példa (Szeredi Kovács, 2003, 61. o.)

Melyik ugyanaz, melyik más? A zászlópárokkal mozgásokat adtunk meg, melyek mindegyike az a szakaszt az a' -be mozgatja. A megadott mozgások közül melyek azonosak, melyek különböznek?



Ellenőrizheted magad, ha ráülteted a cicát a szakaszra, és megfigyeled, hogy hova kerül. A megegyező mozgások ugyanoda viszik a cicát, a különbözőek nem.

6.3 Általános transzformációtulajdonságok

A transzformáció tulajdonságok összeválogatásakor legfontosabb megfigyelési szempontjaink a távolság-, szög- és egyenestartás voltak. Ehhez a korábbi 10. példa (64. o.) kiváló kiindulási alapot biztosít: a felsorolt transzformációk között találunk olyanokat, melyekben némelyik szakasz hossza, és némelyik szög nagysága is megváltozik (1. szabály), továbbá olyanokat, melyekben minden szakasz és minden szög ugyanakkora, mint a képe (3. szabály), valamint olyanokat is, melyekben minden szög ugyanakkora, mint a képe és minden szakasz hossza kétszeresére nő (4. szabály). Azt is észrevehetjük, hogy az utóbbi két esetben egyenesek képe biztosan egyenes marad, egyébként azonban lehet, hogy némelyik egyenes képe „elgörbül”.

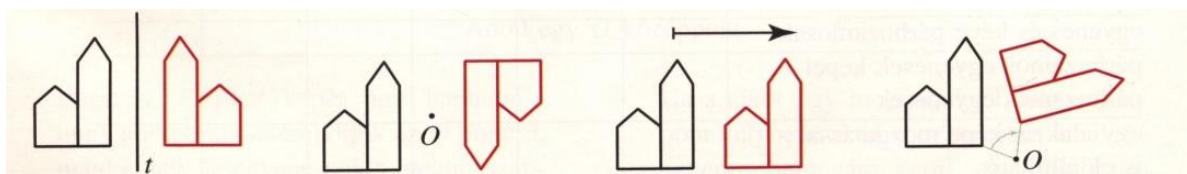
Mindezen megfigyelések alapján a feladatban adott hozzárendeléseket felhasználhatjuk a transzformációk három nagy osztályának a reprezentálására:

13. Példa (Szeredi, Kovács, 2003, 63. o.)

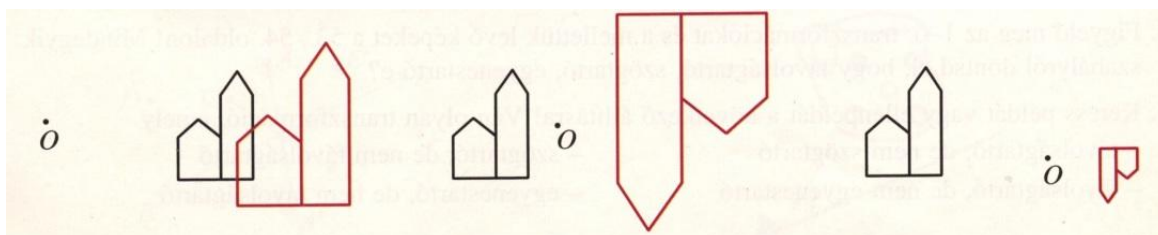
„Tulajdonságaik alapján a transzformációkat három nagy csoportba sorolhatjuk:

A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a távolságokat és a szögeket változatlanul hagyják. Egyenest egyenesbe visznek. Ilyenek például a tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, ilyen minden mozgás. Ezeket **egybevágósági transzformációknak** nevezzük.

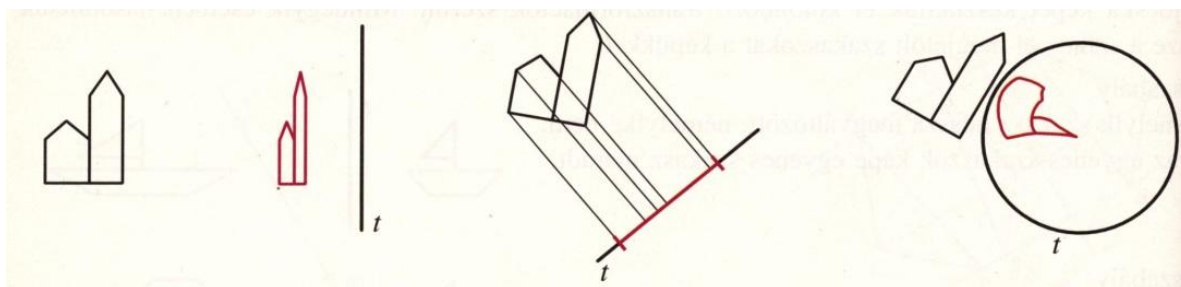
Az egybevágóság általános fogalma felé



A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a szögeket nem változtatják meg. A távolságok megváltoznak ugyan, de az arányaik megmaradnak, azaz minden távolság ugyanannyiszorosára változik. Egyenest egyenesbe visznek. A kép hasonlít az eredetire, annak nagyított, vagy kicsinyített mása. Ezeket **hasonlósági transzformációknak** nevezzük.



A transzformációk között vannak olyanok, amelyekben a távolságok, a távolságok arányai és a szögek is megváltoznak. Lehet, hogy az egyenesek képe sem egyenes. A kép az eredetinek eltorzított változata. Ezeket **torzító transzformációknak** nevezzük.



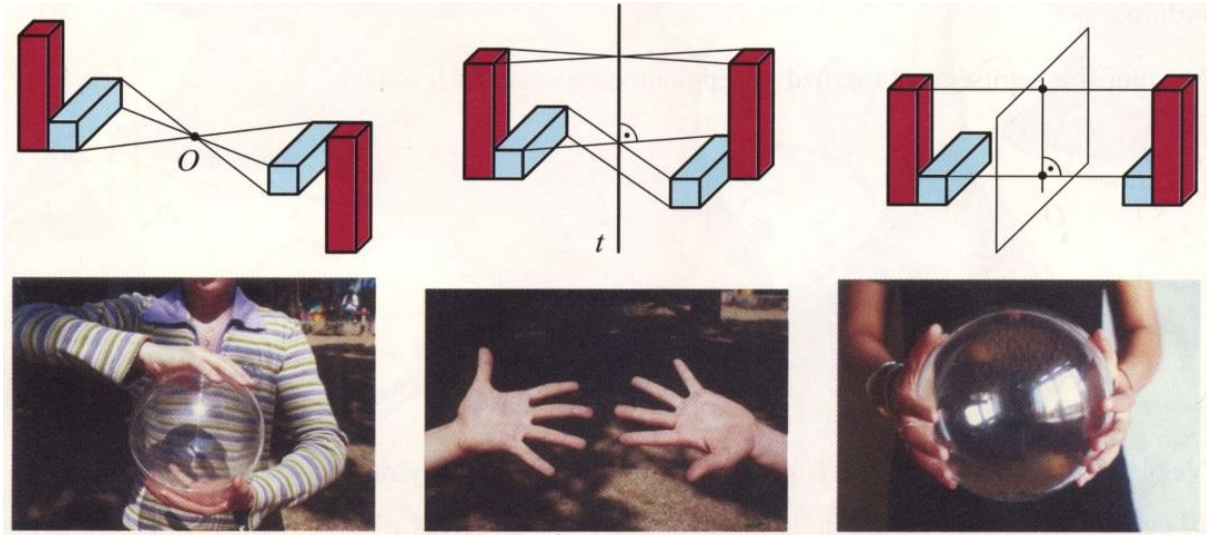
Ehhez a gondolatsorhoz kapcsolódva röviden kitérünk néhány térbeli egybevágóságra is – a térbeli pontra, egyenesre és síkra való tükrözéshez – példákat gyűjtünk, alakzatpárokat építünk. Ezekre a tapasztalatokra alapozva megállapítjuk, hogy a térben vannak olyan egybevágó alakzatok, melyek mozgással nem vihetők egymásba.

14. Példa (Szeredi, Kovács, 2003, 67. o.):

Síkban eddig egyenesre és pontra tükröztünk, térben pontra, egyenesre és síkra is lehet tükrözni.

Tükrözés pontra	Tükrözés egyenesre	Tükrözés síkra
Adott egy O tükröközéppont.	Adott egy t tükrörtengely.	Adott egy T tükrőrsík.
<i>Tér pontjai figyelem!</i>	<i>Tér pontjai figyelem!</i>	<i>Tér pontjai figyelem!</i>
Fussatok a legrövidebb úton a tükröközépponthoz, majd onnan egyenesen tovább ugyanannyit.	Fussatok a legrövidebb úton a tükrörtengelyhez, majd onnan egyenesen tovább ugyanannyit.	Fussatok a legrövidebb úton a tükrőrsíkhöz, majd onnan egyenesen tovább ugyanannyit.

Az egybevágóság általános fogalma felé



Amint a példa látványosan mutatja, ez a felépítés kedvez az analógiás gondolkodás fejlesztésének is, rámutat a sík és tér szoros rokonságára.

Amennyiben az óraszám ezt megengedi, az itt ismertetett példa jó kiindulás lehet az egybevágósági transzformáció és a mozgás fogalma közötti különbség tisztázására is.

7. ÖSSZEGZÉS

A dolgozat három fő részre tagolódik. Az első, alapozó részben áttekintést adok a kutatás elméleti, történeti és az iskolai gyakorlattal kapcsolatos háttéréről. A második rész a disszertáció fő része, amelyben összevetem az egybevágósági transzformációk különböző szemléltetési módjait az elméleti háttérrel. Ebben a részben kerülnek bizonyításra a kutatásom fő hipotézisei. A harmadik részben megmutatom, hogy a „zászlós módszer” hatékonyan segítheti a geometria néhány középponti fogalmának építését.

7.1 Alapozás

Dolgozatom bevezetőjében ismertetem a kutatás főbb kérdéseit, a hipotéziseimet és az eredményeket, emellett vázolom annak néhány egyéb fontos jellemzőjét: az előzményeket, a célokat, a módszereket, a kutatás folyamatát.

Ezután a vizsgálataimhoz közvetlenül kapcsolódó elméleti – matematikai és pszichológiai-didaktikai – tényeket és tételeket fejtem ki az Elméleti alapok című 2. fejezetben.

Matematikából elsősorban az egybevágóságfogalom axiomatikus megalkotásával, az egybevágósági transzformációk bevezetési módjaival, az elemi felépítésben játszott szerepükkel foglalkozom. Érdeklődésem fókuszában a Hajós György által kidolgozott, mozgásra alapozott bevezetés állt.

Kutatásaimhoz nélkülözhetetlenek a tanuláspszichológia és didaktika fogalomalkotással kapcsolatos elméleti eredményei. Röviden ismertetem Piaget Skemp által tovább finomított modelljét a fogalmak asszimilációjáról és akkomodációjáról. Tall és Vinner ezt a modellt még tovább fejlesztik.

A továbbiakban az általuk definiált fogalomképzetekkel (concept image), továbbá a szintén Tall nevéhez fűződő „procept”-ekkel foglalkozom. Bruner reprezentáció-elmélete szorosan kapcsolódik a fogalomalkotás egyéb elméleteihez, amennyiben a fogalomképzeteket a belső reprezentációk analógiájának tekintjük. Paivio duál-kód elmélete tudományosan alátámasztja, továbbfejleszti, ugyanakkor számomra össze is kapcsolja a reprezentációs illetve asszimilációs-akkomodációs fogalomképzetként való megközelítéseket. Alátámasztja a szemléltetés fontosságát, feltárja a belső reprezentációk – fogalomképzetek – és külső reprezentációk – szemléltetés – közötti szoros kapcsolatokat, ezeknek a megértésben játszott szerepét.

Összegzés

Dolgozatom 3. fejezetében a „zászlós módszer” mai formájának megalakulásáig vezető elméleti és gyakorlati kísérletezés folyamatát tekintem át. Néhány példán keresztül bemutatom azokat a fogalmi zavarokat, amelyekkel oktatói gyakorlatom során főiskolás hallgatók körében találkoztam, s amelyek a téma kutatásának kiindulópontjául szolgáltak. Ismertetem azokat a forrásokat, amelyek a „zászlós módszer” alapötletéhez elvezettek. Felsorolom a kidolgozás főbb állomásait, taneszközöket, iskolai kísérleteket és visszajelzéseket, főiskolai és egyetemi oktatásban szerzett tapasztalatokat.

A transzformáció-tanítás különféle módszereit ismertetem a 4. fejezetben. Először áttekintést adok a transzformáció-tanítás magyarországi történetéről, majd tankönyvi példákon keresztül bemutatom az egybevágósági transzformációk tanításának néhány jellegzetes aspektusát. A hangsúlyt a definiálásnak és az invariáns tulajdonságok megindoklásának különféle módjaira helyeztem, elsődlegesen arra, hogy mindeközben a különböző felépítések milyen szerepet adnak a szemléltetésnek. A példákat néhány 1945 előtti, az 1945 és 1990 között kiadott, illetve a jelenleg forgalomban levő általános és középiskolás tankönyvekből válogattam. Egy angol főiskolai tankönyvből is bemutattam egy részletet. A példák egy része a Függelékben szerepel, a dolgozatba csupán azokat illesztettem bele, melyeket feltétlenül szükségesnek éreztem a mondanivalóm kifejtéséhez. Itt adom meg a „zászlós módszer” részletes leírását is. A fejezet végén egy táblázatban összefoglalom a transzformáció-tanítás legfontosabb jellemzőit. Azokat az elemeket emeltem ki, amelyekben a „zászlós módszer” eltér a korábbiaktól.

7.1.2 A különböző módszerek összehasonlító elemzése

A 2. és 4. fejezetek elsődleges célja a módszerek elemzésének megalapozása. Hipotéziseim szempontjából az 5. fejezet a dolgozat leglényegesebb része, itt történik meg a korábban ismertetett módszerek, valamint a mögöttük álló didaktikai elképzelések elemzése, összevetése a matematika és didaktika elméleti megállapításaival.

Első lépésként a mozgatásnak a különféle transzformáció-tanítási módszerekben betöltött szerepét vizsgáltam. A vizsgálat során szembetűnő volt a mozgatással való szemléltetés kétarcú kezelése: egyrészt elengedhetetlennek tartották, világosan látták az előnyeit, másrészt azonban nem tartották legitim módszernek. Szinte minden felépítésben használták demonstrációs céllal, de nem használták tartósan, a kép előállítására szolgáló eszközként, mert mind matematikai, mind módszertani szempontból nehézkesnek és pontatlannak tartották a mozgatásos eljárásokat.

Összegzés

A tanuláspszichológia elméleteivel való összevetés megerősítette azt a hipotézist, hogy a mozgatások mély nyomokat hagynak a gyerekek gondolkodásában, mivel szervesen benne gyökereznek az élményvilágukban. Rövid idő is elég ahhoz, hogy ezek a demonstrációk erőteljes belső képet eredményezzenek. A kötött pályás mozgatás és a zászlós módszer közös pozitív hatása, hogy hatékonyan támasztja alá az egybevágósági transzformációk izometrikus tulajdonságait. A kizárólag kötött pályán történő mozgatás hatása negatív abban az értelemben, hogy az általa indukált nem verbális fogalom sokkal erősebben kötődik az egyes pontok által követett pályához, mint a pontok kezdő és véghelyzetéhez. Ezáltal potenciális konfliktus faktort hordoz a módszer, komolyan gátolhatja a transzformációk ekvivalenciájának megértését.

Nem törvényszerű, de gyakori és természetes következmény, hogy transzformált kép előállítására szinte kizárólag körzős vonalzós eljárással történik. A körzős vonalzós szerkesztést fenntartás nélkül legitimnek tekintik, holott az maga is pontatlan és korlátozott eljárás, amellyel csak néhány speciális alakzat képe állítható elő. Miközben egyes pontok (szakaszok végpontjai, sokszögek csúcsai, körök középpontja, stb.) kitüntetett szerepet kapnak, mivel csak ezek képeit szerkesztjük meg, a többi pont képét az eredetitől elszakadva, a kitüntetett képekre illeszkedő alakzatok (egyenesek, körök, stb.) szerkesztésével nyerjük. Az összetartozó pontokról, egymásnak megfeleltetett, illetve szimmetrikus alakzatok összetartozó részleteiről hiányos és esetenként torz képzet alakul ki. Néhány erre utaló példát részletesen is ismertettem a dolgozatban.

Az eljárásra épülő „*procept*” nem ad elég biztos alapot a szimmetriákon alapuló következtetésekhez, mert nem alakul ki globális szemléletes kép az egybevágóságról (a transzformációról).

Dolgozatom legfőbb eredményének azt érzem, hogy a „zászlós módszernek” az elméleti megállapításokkal történt összevetése azt mutatta, hogy ez a módszer összhangban van mind a matematika, mind a didaktika szemszögéből a fogalomalkotás követelményeivel.

Szervesen építi tovább a gyerekekben két alakzat egyformaságáról korábban kialakult képet, emellett – mivel a „zászlós módszer” közvetlen interpretációja Hajós mozgási axiómáinak – a későbbiekben az erre alapozott egybevágóság-, ezen túlmenően az általánosabb transzformáció-fogalom, törés nélkül építhető tovább az egyetemmel bezárólag. Az általa indukált belső kép nincs ellentmondásban a hozzá kapcsolódó verbális definíciókkal.

Összegzés

A transzformált kép előállítására szolgáló másolópapíros eljárás mellett szól, hogy:

- egyszerű;
- korlátlanul használható a körzős-vonalzós eljárások mellett is;
- az eljárásban nincsenek kitüntetett pontok, egy egész alakzat, sőt a teljes sík egyes pontjai egyetlen mozzanatban, szimultán kerülnek a képükbe;
- az eljárás során bőséges tapasztalatanyagot szerezhettek a tanulók az egybevágóságon, szimmetriákon alapuló deduktív érvelések megalkotásához a transzformáció egészéről, a kiindulási és transzformált alakzatok kapcsolatáról.

7.1.3 A „zászlós módszer”-en alapuló transzformációtanítás

Az elemzés során a továbbiakban már csak a „zászlós módszer” vizsgálatára szorítkozom. A 6. fejezetben nem csak azt mutatom meg, hogyan lehet *„felülemelkedni a transzformációnak cselekvésként (action) való felfogásán, és eljutni a hozzárendelésként értelmezett transzformáció fogalomhoz”* (Malara, 1995), hanem azt is, hogy ezek egyazon fogalom aspektusai és együtt adnak jó alapot a transzformáció-tanításhoz.

Erre alapozva már az általános iskolában is elkezdhetjük elvontabb fogalmak építését – a transzformációk ekvivalenciája, a szögtartás, távolságtartás, stb. –, lehetőséget adhatunk az invariáns tulajdonságok és a köztük fennálló összefüggések megtapasztalására, amivel a transzformációknak az invarianciák alapján történő osztályozását is előkészítjük.

7.2 Konzekvenciák

A téma irodalmának átfogó elemzése egybehangzóan igazolja azt, hogy a transzformáció-tanításban a transzformált kép szemléltetésére és előállítására használt eljárások megválasztása erős – kedvező vagy káros – hatással lehet a fogalomalkotásra. A matematikai és didaktikai elmélet alátámasztotta, hogy a mozgással való szemléltetésnek lehetnek veszélyei, azonban a geometriai mozgás zászlókkal való megadása olyan, nem-verbális fogalomképzetek kialakítását eredményezi, amelyek összhangban vannak az absztrakt fogalmakkal, s amelyekre alapozva a gyerekek tudása és geometriai szemlélete is hatékonyan fejleszthető.

Összegzés

Az ismertetett eredmények felvetik annak szükségességét, hogy a pedagógusok és a tanárjelöltek mélyebben megismerkedjenek a mozgásfogalomnak a transzformációtanításban betöltött szerepével, matematikai és didaktikai hátterével.

A problémák egy másik típusa a pedagógusoknak a konkrét-manipulatív szintű fogalomépítéssel és a tartós eszközhasználattal kapcsolatos beállítódása, az ezektől való idegenkedés. A másolópapírt nem tekintik igazi matematikai eszköznek, legfeljebb motivációs értéket tulajdonítanak neki, használatát időpazarlásnak, játéknak tartják. Ezzel szemben a körzöt és a vonalzót legitim eszközöknek fogadják el. A zászlós módszerre épülő tananyagot kipróbáló tanáraink körében ez a nézet – néhány elszórt kivételtől eltekintve – megváltozott, amint a függelékben idézett vélemények ezt híven tükrözik.

A vizsgálatok során fontos problémaként jelentkezett a sík szerepének túlságos hangsúlya. Ezen a területen szükség van a tananyag, tanterv és a szemléltetés további finomítására, a síkbeli és térbeli egybevágóságok összekapcsolásának szemléletes, a gyerekek számára megközelíthető feldolgozására.

A módszernek magának is vannak továbbfejlesztendő részletei.

Célszerű lenne olyan oktatást segítő programok kidolgozása, melyek egy síkbeli zászlópárral megadott mozgás esetén lehetővé tennék a síkban elhelyezkedő alakzatok térbeli mozgásának számítógépes szimulálását is.

Fontos lenne többet foglalkozni a tér egybevágóságainak a szemléltetésével. Mélyebben rávilágítani a sík és tér egybevágóságai között az analógiákra és a különbségekre.

Ehhez szükséges lenne a síkbeli eszközök megfelelő térbeli változatainak kidolgozása. Például a zászlóval ellátott átlátszó papírt, mely az elmozgatandó alakzatot magával viszi, egy merev, átlátszó lappal helyettesíthetjük, melyhez hozzáerősíthetjük az elmozgatandó térbeli alakzatot.

Ennek hátránya, hogy csak olyan alakzatok mozgására alkalmas, mely a mozgást megadó zászló síkjához van rögzítve.

Ezt a problémát kiküszöbölhetjük a számítógép segítségével, amennyiben az előbb vázolt oktatóprogram kibővíthető térbeli alakzatok mozgásának szimulálására. Ekkor a mozgatható félegyenest és határolt félsíkot – vagyis a mozgatható zászlót – ki kell bővítenünk egy, valamelyik határolt félteret is jelző egyszerű objektummá.

8. SUMMARY OF THE THESIS

The thesis consists of three main parts. In the first part I give an overview of the – theoretical, historical and practical – background of my research. The second part is the main body of the thesis, in this part I confront the different methods of demonstrating isometries by moves with the theoretical background. I prove the main hypothesis of the research in this part. In the third part I show that the „flag method” can play an essential role in the creation of some central concepts of geometry.

Part I. Foundation

In the introduction of the dissertation I give a survey of the research.

In Chapter 2, Theoretical foundation, I give an overview of the theoretical background of my work, both from the field of mathematics and psychology.

Within mathematics I deal with the axiomatic foundation of the concept of congruence, the different possibilities to introduce planar isometries, and the connection of these with other geometrical concepts. The axiomatic system of György Hajós stands in the focus of my interest.

The theoretical results of didactics and of psychology of learning played a very important role in my research. I briefly introduce Piaget's model, refined further by Skemp, about the assimilation and accomodation of concepts. This model was developed further by Tall and Vinner. They introduced and defined the notion of concept images, and Tall created the idea of procepts. I give a short description of this notion as well. Bruner's representation theory is closely connected to these theories of concept building too, considering that the concept images and inner representations are analogous notions. Paivio's dual-code theory scientifically supports, develops and, in my view, unites these approaches.

This theory proves the importance of demonstrations, clarifies the close connections between inner representations – concept images – and outer representations – demonstrations – and the role they play in understanding.

In Chapter 3 I give a brief survey of the previous theoretical and practical work, leading to the recent form of the “flag-method”. First I introduce three case studies revealing those confusions about the concept of isometries which became starting points of the recent reasearch. I give a list of those sources which led to my main result, to the basic idea of the “flag-method”, and of the main stages of its development – teaching materials, school

experiments and their feedback, experiences gained in the college- and university teaching.

In Chapter 4 I give a review of different methods of teaching transformations, as used in the Hungarian practice.

First I give a brief summary of the curricular aspects, then I quote some examples from different textbooks, to show some characteristic properties of the teaching of transformations.

I focused on the role played by demonstrations in building definitions and in the justification of the invariant properties for the case of planar isometries. Amongst the examples there are some from textbooks written before 1945, some from textbooks being used currently, and from all of the textbooks used between 1945 and 1990.

I quote some examples from an English college textbook as well. The examples appearing in this chapter are those which I found most important in supporting my arguments. Some further examples are given in the Appendix.

In the Section 4.5 I describe the „flag-method” in details. At the end of the chapter I present a table with a comparative summary of some important characteristics of teaching transformations. Those characteristics are chosen in which the „flag-method” differs from the others.

Part II. Comparative analysis of the different methods

The main aim of the preceding chapters was to create a foundation for the analysis of the different methods. In Chapter 5 – which is probably the most important in the exposition of my hypothesis – I give a detailed analysis of methods for teaching transformations. I confront the previously introduced methods and their didactical background with the mathematical theory and the theoretical results of the psychology of learning.

My main area of interest is the role geometrical moves play in the different methods. In this study it was striking to observe the ambiguous treatment of the demonstration by moving: on one hand it is a substantial, advantageous, unavoidable part of the different methods, on the other hand it is not considered legitim. For demonstrative purposes moving is used as a tool to construct the transformed image in almost every method, but it is used only for a brief period, because this process is considered to be awkward and incorrect.

Confrontation with the theory of psychology of learning confirmed the hypothesis that experiences about moving have a deep effect on the thinking

of children, as they are rooted organically in their daily life. That is why, even if used only for a short time, these demonstrations may create strong inner images. Therefore moving both along a predetermined track and moving freely with the help of flags supports efficiently the recognition of congruence properties of planar isometries. However, if only moving along a predetermined track is used, then this can have negative effects as well. This is because the track of the movement of the points becomes more emphatic in the induced non-verbal concept than the starting and finishing position of the points.

This way the method includes a potential conflict-factor, seriously hindering the children's ability to grasp the equivalence of transformations.

Another important source of problems is the method of constructing the transformed image almost solely with ruler and compass. However, this method is inaccurate and limited in its scope, usable only in the case of a few special shapes. Meanwhile some of the points (endpoints of segments, vertices of polygons, centres of circles, etc.) acquire a more important role, because only the images of these are constructed, we obtain the images of the rest of the points by drawing lines and circles determined by the previously constructed, discriminated points.

For this reason the mental concept being formed about the correlated points or other corresponding details is incomplete and sometimes even false. Some detailed examples about this phenomenon are presented in this chapter as well.

The concept built in the above described way does not provide a foundation firm enough to support symmetry-based deductive reasoning for average children.

I believe that the main achievement of my thesis is that the “flag method”, analysed from many aspects, proved to be in accordance with the theoretical results of both mathematics and didactics.

While it is a direct interpretation of Hajós's axioms of moves at the same time it is organically connected to young children's mental image about congruent shapes.

The concept of congruence, and a more general concept of transformation, built on this foundation, later can be continuously developed up to the university level. The mental image induced by this method is not in any way in conflict with the correct, verbal definitions belonging to it.

There are several reasons supporting the use of tracing paper for producing the transformed image of shapes:

- it is simple;
- it can be used without restriction together with the ruler-compass constructions;
- there are no discriminated points, all the points of a whole shape, moreover of the whole plane, get into their place simultaneously in one momentum;
- practising this procedure the students can gain an abundance of experiences about the global properties of the isometric transformations, the connection between the starting shape and its transformed image, forming a firm foundation for deductive congruence and symmetry based reasonings.

Part III. Concept building on the base of the “flag method”

In the 6. chapter I restrict my analysis to the “flag-method”. I answer in the affirmative Malara's question⁹: “whether and up to which point it is possible to overcome the concept of *transformation as action on a figure* passing to the concept of *transformation as correspondence* among all the points of the plane?”, and prove that these are two sides of the same concept, both being very important in providing firm base for teaching isometries.

Based on this foundation we can start the building of more abstract concepts – such as equivalence of transformations, preservation of angles, distances, etc. – we can provide possibilities to experience these invariant properties and the relations between them, thus preparing the notion of classification of transformations.

⁹ Malara, 1995

Conclusions

The importance of the concept of moves and the role they play in the teaching of transformations is not always accepted amongst teachers. The results described above raise the necessity of making teachers and trainee teachers acquainted with the deeper mathematical and didactical background of geometric moves.

A different kind of problem is the negative attitude of quite a lot of teachers towards using activities, or manipulative tools in teaching for a longer time. Many of them does not accept tracing paper as a legitimate mathematical tool, in the best case they value it as a motivating tool, for them it is rather a toy, they feel that using it for a longer period is a waste of time. Only the ruler and the compass are accepted by them as legitimate tools. (This opinion changed – with a few exception – amongst the teachers in a teaching experiment where the transformations were taught using “flag method”.) Working out software where the computer would simulate the moves of planar shapes given by a pair of flags could be a help in changing this negative attitude.

An important problem of the “flag-method” itself is that it puts excessive emphasis on the plane. There is a need of further refinement of the content of teaching and the methods of demonstration. It would be important to deal more with the demonstration of the spatial isometries, to create a closer connection between the isometries of the plane and the space, to give more attention to the analogies and to the differences between them.

It would be very useful to create somehow the spatial version of the “flag method”.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Ambrus, A. (1995): *Some trends in Hungarian geometry teaching*. In: Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceedings for Catania Conference. Department of Mathematics – University of Catania.
2. Ambrus, A. (2008): *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban* In: Képzés és gyakorlat Konstantin Filozófus Egyetem Nyitra, 19-32 old.
3. Szeredi, É., Török, J. (1995): Teaching polygons in secondary school: A four country comparative study.
4. Andrews, P., Carillo, J., Clement, N., De Corte, E., Depaepe, F., Fried, K., Hatch, G., Malaty, G., Op't Eynde, P., Pálfalvi, S., Sayers, J., Sorvali, T., Szeredi, É., Török, J., Verschaffel, L. (2004) *International comparisons of mathematics teaching: searching for consensus in describing opportunities for learning*, paper presented to discussion group 11, international comparisons of mathematics education, of the 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10) Copenhagen, Denmark
5. Andrásy, T., Czegléd, T., Czegléd, I., Hajdu, S., and Novák, L. (1994): *Matematika 7. osztály*. (Mathematics textbook, grade 7). Calibra Kiadó, Budapest.
6. Bölcskei A., Kaposiné Pataky K., Dr. Szabadi L., Szokol Á. és Dr. Vancsó Ö. (2000): *Matematika 5-6. osztályosok számára*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
7. Bruner, J. S. (1974): *Új utak az oktatás elméletéhez*. (Toward a Theory of Instruction) Gondolat Kiadó, Budapest.
8. Collier, C. P. (1976): *Geometry for teachers*. Houghton Mifflin Company, Boston.
9. Cotrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., and Vidakovich, D. (1996): *Understanding the limit concept. Beginning with a coordinated process schema*. Journal of mathematical behaviour, vol. 15.
10. Csahóczi E., Halmos I., Novák L., Varga K. (1986): *Matematika munkalapok, általános iskola 7. osztály*. Tankönyvkiadó, Budapest.
11. Cser Andor, (1963): *A hazai matematikatanítás vázlatos története*. in: Tantárgytörténeti tanulmányok II. Tankönyvkiadó. Budapest.

12. Davis, R. B. (1984): *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. Ablex, Norwood, NJ.
13. Eglesz Istvánné, Kovács Csongorné és Sztrókeyné Földvári Vera (1979): *Matematika, Általános Iskola 6.* („Kockás sorozat”). Tankönyvkiadó, Budapest
14. *Euklidesz: Elemek (Elements)*. Translation of Szabó Árpád (1983). Gondolat, Budapest.
15. Gádor Endréné (1971): *A geometriai transzformációk tanítása az általános iskolában*. Tanári segédkönyv. Tankönyvkiadó, Budapest.
16. Gallai, T. and Péter, R. (1952): *Matematika a középiskolák I. osztálya számára. (Mathematics for the grade I of secondary schools)*. Tankönyvkiadó, Budapest.
17. Gray, E. M. and Tall, D. O. (1994): *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. In: *Proceedings of PME-XV*. vol. 2. Assisi, Italy.
18. Hajnal Imre (1986): *Matematika a speciális matematika I. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.
19. Hajós György (1971): *Bevezetés a geometriába (Introduction to geometry)*. Tankönyvkiadó, Budapest.
20. dr.Hajdu Sándor, dr. András Tiborné, dr. Czegléd István and dr. Czegléd Istvánné (1994): *Matematika 7*. Calibra Kiadó, Budapest.
21. Hollai Márta (1972): *A geometriai gondolkodás és a transzformációs szemlélet szintjei*. ELTE TTK Szakmódszertani Közlemények V.
22. Hollai Márta (1975): *A transzformációra alapozott geometriai fogalmak fejlődése és kapcsolataik a matematika más területeivel*. ELTE TTK Szakmódszertani Közlemények VIII.
23. Horvay Katalin (1968): *Geometriai transzformációk az általános és középiskolai tanításban*. TTK Szakmódszertani Közlemények I. kötet
24. Horvay Katalin és Pálmay Lóránt (1966): *Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák I. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.
25. dr. Iker János (1989): *A matematikatanítás fejlődése*. in: *A matematika tanítása I*. Szerkesztette: Ács Pál, Tankönyvkiadó, Budapest.
26. Imrecze Zoltánné, Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera és Szeredi Éva (1981): *Matematika, Általános Iskola 8.* („Kockás sorozat”). Tankönyvkiadó, Budapest

27. Jaglom, I. M. (1962): Geometric transformations. Random House, New Mathematical Library, Stanford University. Stanford, California.
28. Dr. Jakab Albert, dr. Jakab Albertné, dr. Pelle Béla és dr. Rados Mihály (1980) *Egerben a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén végzett geometriatanítási kísérletek összegezése*. In: Néhány hazai és külföldi kísérlet. Új utak a matematika tanításában I. Tankönykiadó, Budapest
29. Jeger, M. (1966): *Transformation geometry*. George Allan and Unwin Ltd.
30. Kárteszi, Ferenc (1966): *Szemléletes geometria*. Gondolat Kiadó, Budapest
31. Kárteszi Ferenc (1972): *A geometriatanítás korszerűsítéséről*. Tankönykiadó, Budapest.
32. Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera és Szeredi Éva (1980): *Matematika, Általános Iskola 7.* ("Kockás sorozat"). Tankönyvkiadó, Budapest
33. Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera és Szeredi Éva (1996): *Matematika a hatosztályos gimnáziumok I. osztálya számára*. Calibra Kiadó, Budapest
34. Kurina, Frantisek (1995): Didactical structure of geometry. In: ICMI Study, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceeding for Catania Conference. University of Catania.
35. Malara, Nicolina (1995): Didactical innovations in geometry through the use of computer: some results of a research on the plane isometries. In: ICMI Study, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceeding for Catania Conference. University of Catania.
36. Malaty, George (1995): Geometric education yesterday, today and tomorrow. One geometry or ten geometries. In: ICMI Study, Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceeding for Catania Conference. University of Catania.
37. Maróthi György (1743): *Arithmetica, vagy számvetésnek mestersége, melyet írt és közönséges haszonra, főképen a Magyar Országban előfordulható dolgokra alkalmaztatván kiadott.* - Debretzen: Margitai István. In: A matematika tanítása I. Szerkesztette: Ács Pál (1989), Tankönyvkiadó, Budapest.
38. Martin, Gary (1995): Using transformational geometry to support the development of students' level of geometric thinking. In: ICMI Study,

- Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceeding for Catania Conference. University of Catania.
39. Meissner, H. (2001): *Procepts in geometry*. In: European Research in Mathematics Education II.
 40. Paivio, A. (2006): *Dual coding theory and education*. Draft chapter for the conference on "Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children", University of Michigan School of Education.
 41. Paivio, A. (2006): *Mind and its evolution; A dual coding theoretical interpretation*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
 42. Pelle, B. és Jakab, A. (1972): *Egy lépés a geometriatanításunk korszerűsítésének útján*. In: Új utak a matematika tanításában 1. Tankönyvkiadó, Budapest.
 43. Piaget, J. (1993): *Az értelem pszichológiája (La psychologie de l'intelligence)*. Gondolat Kiadó, Budapest.
 44. Reimann, I. (1986): *A geometria határterületei*. Gondolat Kiadó, Budapest.
 45. Reimann, I. és Horvay, K. (1970): *Geometriai feladatok gyűjteménye I.* Tankönyvkiadó, Budapest.
 46. Dr. Rédling Elemér (1980): *Geometriai transzformációk*. In: A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában II. Tankönyvkiadó, Budapest
 47. Sfard, A. (1987): *Two conceptions of mathematical notions: operational and structural*. In: Proceedings of PME-XIII. vol. 3. Montreal, Canada
 48. Skemp, R. R. (2005): *A matematikatanulás pszichológiája (The Psychology of Learning Mathematics)*. Edge 2000 Kiadó, Budapest.
 49. Sulinova Educatio Kht (2008): Packages of materials for teaching mathematics.
<http://www.sulinovadatbank.hu/index.php>
 50. Szeredi, É. és Kovács, Cs. (2004): *Geometriai transzformációk*. In: Csahóczy E., Csatár K., Kovács Cs., Morvai É., Széplaki G., Szeredi É.: *Matematika 6. osztály*. Apáczai Kiadó, Celldömölk.
 51. Szeredi É. és Kovács Cs. (2003): *Geometriai transzformációk*. In: Csahóczy E., Csatár K., Kovács Cs., Morvai É., Széplaki G., Szeredi, É.: *Matematika 7. osztály*. Apáczai Kiadó, Celldömölk, Hungary.
 52. Szeredi É. és Török J. (1981): *Geometriai transzformációk*. Kísérleti Tankönyv.

53. Szeredi, É., Török, J. (1995): *Teaching polygons in secondary school: A four country comparative study*. TMCS, Debrecen.
54. Tall, D. O. and Vinner, S. (1981): *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, vol. 12.
55. Tall, D. O. (1991): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, NL.
56. Tall, D. O. (1995): *The psychology of symbols & symbol manipulators: What are we doing right?* Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching, Accison-Wesley.
57. Tanterv a középiskolák számára 1924.
58. Tanterv a középiskolák számára 1950.
59. Varga T. és Faragó L. (1963): *Matematika a gimnáziumok I. osztálya számára*. Tankönyvkiadó, Budapest.
60. Vásárhelyi, É. (2007): *Fogalomalkotás és reprezentációk (Concept formation and representations)*
61. Vásárhelyi, É. (2006): *Problem solving with the help of different representations*. In: Learning in Europe, Jena.
62. dr. Veress Pál (1930): *Elemi mennyiségtan (algebra és geometria) a gimnáziumok és reálgimnáziumok IV. és V. osztályai számára*. Királyi Magyar Egyetemi Nyomda, Budapest
63. Villani V. et al. (1996). Perspectives on the teaching of geometry fo the 21st century. Discussion Document for an ICMI study. The International Commission on Mathematical Instruction.

FÜGGELÉK

I. Tankönyvi példák

A. Hajnal Imre (1986) 270 o.

„Definíció: Azokat a geometriai transzformációkat nevezzük távolságtartó vagy egybevágósági transzformációknak, amelyeknél,

ha $P \rightarrow P'$ és $Q \rightarrow Q'$, akkor $d(P;Q) = d(P';Q')$

Ilyen tulajdonságú transzformációnak ismertük meg a tengelyes tükrözést, a középpontos tükrözést, egy pont körüli elforgatás, az eltolást, a síkra vonatkozó tükrözést. Egybevágósági transzformáció az identitás is, melyet a az előző pontban vezettünk be.”

B. Reiman, Horvay, 1970, I. kötet 26 o.

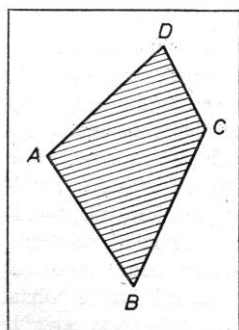
„334. Mutassuk meg, hogy az egyenes és tükröképe a tengellyel ugyanakkora szöget zár be.

335. Mutassuk meg, hogy egy pontnak és tükröképének a tengely egy tetszőleges pontjától mért távolsága ugyanakkora.”

A feladat megoldása nem szerepel a gyűjtemény végén, azonban a közölt feladatmegoldásokban elég alapvető módszernek látszik a háromszög-egybevágósági alapesetekre való hivatkozás, tehát feltehetőleg ennek alkalmazására gondoltak a szerzők.

C. Pelle és Jakab, 1972, 109–131 o.

Először hajtogatással fedésbe hozható alakzatokat keresnek, ezeket szimmetrikus idomoknak nevezik. Átszúrással megjelölik azokat a pontokat, amelyek átfordításnál egybeesnek.



„Egy tengelyesen szimmetrikus idom két pontját, amelyek a szimmetria tengely körül történő átfordításnál egybeesnek, szimmetrikus helyzetű pontoknak nevezzük.”

Ezután a tulajdonságok leolvasásához egy sablont használnak. Ez egy téglalap alakú karton (méretei 5 és 7 cm), amelyből kivágtak egy négyszöget. A gyerekek a következő instrukciót kapják:

„Rajzoljunk a füzetbe egy t szimmetriatengelyt. A sablont a 7 cm hosszú élével helyezzük a t tengely mellé.

Függelék

Húzzuk ki a kivágott négyszöget, jelöljük a csúcsait A, B, C, D-vel! Fordítsuk át a sablont és helyezzük pontosan t-hez. Rajzoljuk meg az így kapott négyszöget! Vegyük el a sablont, azt látjuk, hogy az A, B, C, D pontoknak lesz egy megfelelője, jelöljük ezeket A', B', C', D'-vel! “

“A rajz elkészítése után megkezdjük a következő tételek tapasztalati megállapítását. Mérjük meg az AB és az A'B' szakaszt! Azt tapasztaljuk, hogy a két szakasz egyenlő. Tisztázzuk, hogy tapasztalatunk a többi szakaszunkra is igaz.

1. tétel: Ha A'B' az AB szakasznak szimmetrikus képe, akkor a két szakasz egyenlő.”

„Hosszabbítsuk meg a négyszög CB oldalát! Egy egyenest kapunk. C-nek a képe C', B-nek a képe B'. Húzzuk meg ezt az egyenest is!

3. tétel: Egy egyenes szimmetrikus képe szintén egyenes.

Mérjük meg az A'B'C' háromszög B'-nél levő szögét (szögmérővel), majd az ABC háromszög B-nél levő szögét!

Mit tapasztalunk?

A szögmérés és a helyes következtetés megállapítása után:

4. tétel: Ha az A'B'C' háromszög az ABC háromszögnek szimmetrikus képe, akkor a megfelelő szögei egyenlők....”

Miután a kísérlet során a tengelyes tükrözés tulajdonságait szemlélet alapján megállapították, ezeket a tulajdonságokat egy kibővített axiómarendszernek tekintették. Erre az alapra építve a sík többi egybevágóságáról bizonyították, hogy előállnak tengelyes tükrözések egymásutánjaként, tehát távolság és szögtartó transzformációk.

D. Bölcskei, A. et al. 2000, 258 o.

„a) Vegyél elő egy írólapot és egy ceruzát! A papírlapot hajtsd félbe! Tegyél a lap egyik felére egy pöttyöt! Hajtsd megint össze, és satírozd át a ceruza tompa végével a pontnál! Ha kinyitod a lapot, most két pontot látsz, az eredetit és a lenyomatát.

b) Illeszd a tükröt a hajtásvonalra, és nézd meg az eredeti pontod tükörképét! Mit tapasztalsz?

c) Mérd le a két pont távolságát! Mérd le a pontok és a hajtásvonal távolságát!

Kösd össze a két pontot egy egyenessel! Mérd le, hogy az egyenes mekkora szöget zár be a hajtásvonallal!

Függelék

Ezekre a tapasztalatokra alapozva egy szerkesztési eljárást ad meg a könyv egy pont tükörképének megszerkesztésére. Ez egyben a hozzárendelés deifiníciója is. A továbbiakban erre épít.

E. dr. Veress Pál, 1930 . 47–48, 66 o.

“két idom egybevágó, ha úgy fektethetők egymásra, hogy egymást teljesen fedik.

Az ábrán feltüntetett kongruens idomok fedik egymást, ha az ábra lapját a szaggatott egyenes mentén összehajtjuk. Az ilyen idomokat szimmetrikus idomoknak nevezzük.”

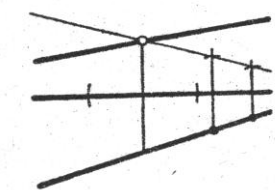
A szimmetriának ezt a kissé elnagyolt fogalmát felhasználja arra, hogy a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeiről szóló állításokat alátámassza.

“... a háromszöget úgy szerkeszthetjük meg: egyik oldalt az 'a'-t lemérjük, a két végpontja a keresett háromszög két csúcsa. Ezekből a 'b', illetve a 'c' oldalakkal kört rajzolunk. E körök mértani helyei azon potoknak, melyek 'a' végpontjaitól 'b', illetve 'c' távolságra vannak. A harmadik csücsnek mindkét feltételt ki kell elégítenie, tehát mindkét mértani helyen rajta kell lennie, ezért az azoknak a közös pontja. A körök egymást két pontban metszik, így két háromszöget kapunk. De a két háromszög az 'a' tengelyre szimmetrikus, tehát egybevágó is. Az alsó háromszög ugyanaz mint a felső, csakhogy más helyzetben van. Mondhatjuk tehát: a háromszöget három oldala meghatározza. Két háromszög egybevágó, ha oldalaik egyenlők.”

F. Gallai–Péter 1952, 298. o.

„Tükörrel való tükrözés helyett úgy is megkaphatjuk a tükörképet, hogy a tükrözés tengelye mentén ráhajtjuk a papiros rajzos felét a másikra, és ceruzánkat erősen megnyomva, még egyszer végigvezetjük a rajzon; így a papiros másik felére átvésődik bármelyik tükrözni való egyenes és pont nyoma.

Szabályszerű szerkesztésben persze sem tükröt, sem hajtogatást nem alkalmazhatunk. E helyett úgy oldjuk meg feladatunkat, hogy megszerkesztjük az (alsó) egyenes két tetszés szerinti pontjának tükörképét (merőlegeseket bocsátva a vízszintesig, és ugyanannyival meghosszabbítva őket); és megrajzoljuk a két tükörképen átmenő egyenest. Így kapjuk az (alsó) egyenes tükörképét;”



Függelék

Ebben a szemléltetésben egy félsík pontjai a három dimenziós térben mozognak meghatározott pályákon - a tengely pontjai körül, félköríveken, a tengelyre merőleges síkokban.

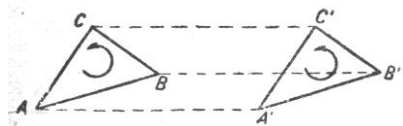
A tükrözés tulajdonságait a mozgítás alapján a szerzők így vezetik le:

“Minthogy papírhajtogatással és a rajz átvésésével is előállíthatjuk egy idom tükörképét, világos, hogy egyenesnek egyenes, körnek kör a tükörképe, és a tükörkép méretei megegyeznek az eredeti idom méreteivel: a tengelyes tükrözés távolság- és szögtartó. A tengelyen, melynek mentén behajtjuk a páirost, minden pont a régi helyén marad, Ezért egy egyenes a tengelyen találkozik a saját tükörképével, és az egyenes elhajlása a tengelytől ugyanakkora marad a papiros behajtása után is, tehát minden egyenes ugyanakkora szöget zár be a tengellyel, mint a tükörképe.”

A középpontos tükrözést két merőleges tengelyre történő tükrözés egymásutánjaként vezeti be, a szimmetrikus négyszögek tulajdonságait a megfelelő egybevágósági transzformációk tulajdonságaira vezeti vissza. Háromszögek egybevágóságának alapeseteit az egybevágósági transzformációkra alapozza.

G. Faragó L. 1963. 172. o.

„... párhuzamos eltolásról akkor beszélünk, ha valamely alakzatot úgy mozgatunk el a síkban, hogy minden pontját egy adott irányban ugyanakkora távolságra visszük át.



... Mivel az eltolás szakaszok és szögek nagyságát nem változtatja meg, nyilvánvaló, hogy az eltolás útján nyert síkidom az eredetivel egybevágó és azonos körüljárású.”

Ebben az esetben a pontok benne maradnak a síkban, egy adott irányban egymással párhuzamosan, egyenlő távolságokkal mozdulnak el.

Mozgatásnak csupán az eltolásokat és elforgatásokat tekinti a szerző, a tengelyes tükrözést nem, mert ez nem valósítható meg anélkül, hogy kilépjünk a síkból. Azt így határozza meg:

„A sík két pontját akkor mondjuk a sík valamely egyenesére (a szimmetriatengelyre) nézve tengelyesen szimmetrikusnak, ha a rajz síkját a szimmetriatengely mentén összehajtva, a két pont fedi egymást. Ebből következik, hogy ha két pont szimmetrikus a sík valamely egyenesére nézve, akkor ez az egyenes merőlegesen felezi a két pontot összekötő szakaszt, és megfordítva: a szakaszfelező merőleges a szakasz két végpontjának szimmetriatengelye.”

Függelék

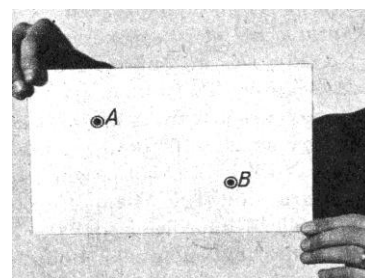
Az egybevágóságot így definiálja:

„Két alakzatot akkor nevezünk egybevágónak, ha azok egymásra helyezve kölcsönösen fedik egymást.”

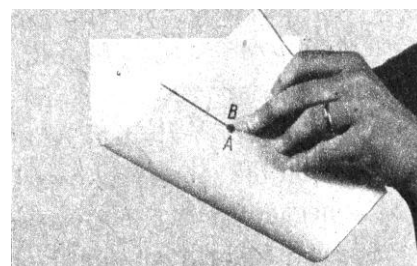
Ezekután az egymásra mozgathatóság gondolatára építve bizonyítja a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeit.

H. Horvay–Pálmay 1966. 217. o.

„1. Keressük meg a síkon a sík két adott pontjától egyenlő távolságra levő pontok halmazát!



Egy papírlapon jelöljük ki az A és B pontokat (ábra)! Hajtsuk össze a papírlapot úgy, hogy éles hajtási él keletkezzen! A megadott A és B pont egyértelműen meghatározza a hajtási élt.



Összehajtáskor az AB szakasz két fele egymásra kerül, ezért a hajtási él átmegy az AB szakasz F felezőpontján. Az A és B csak úgy kerülhet fedésbe, ha a hajtási él felezi az AFB egyenesszöget, azaz merőleges AB-re. A hajtási élt az AB szakasz felező merőlegesének nevezzük.

Az összehajtásból az is következik, hogy a hajtási él minden pontja A-tól és B-től egyenlő távolságra van, mert a hajtási él egy pontját A-val és B-vel összekötő szakaszok összehajtáskor fedik egymást.”

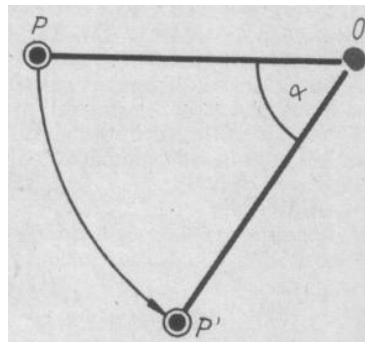
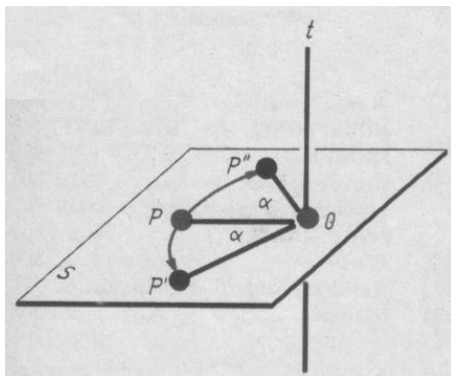
Erre az alapra építik rá a tengelyes tükrözés pontról-pontra való megadását, tulajdonságait és a tükörkép megszerkesztésének módszerét.

A középpontos tükrözésről megmutatják, hogy két tengelyes tükrözés egymásutánjaként áll elő. Ezek a könyvek a szimmetrikus három- és négyszögek tulajdonságait a szimmetria alapján tárgyalják. A forgatásról kitekintésként elmondják, hogy két tengelyes tükrözés szorzataként is előállítható, a normál tananyagban azonban „kötőtpályás mozgás”-ként vezetik be azt is. Ez a kötőtpályás egyben megadja a kép körzős-vonalzós szerkesztési módját is.

Függelék

„A t egyenes az S síkot az O pontban metszi. A P pont az elforgatás közben az O középpontú OP sugarú körön mozog. A P pont t tengely körüli elforgatottja tehát az S síkban szerkeszthető.

Az elforgatás végrehajtását az ábráról leolvashatjuk:

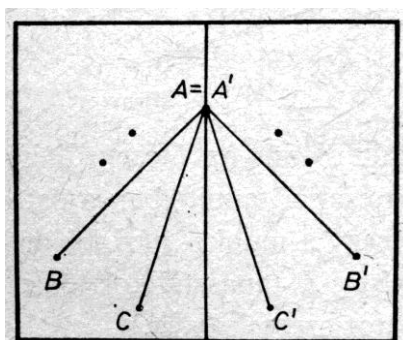


A leírt származtatásból következik, hogy pont körüli elforgatással az eredeti alakzattal egybevágó alakzatot nyerünk.”

I. Gábor Endréné, 1971. 14–16 o.

„Még mielőtt szó lenne a tengelyes tükrözésről, ismerkedjenek az idomok mozgásával.” “Ha már elég sok ilyen (egymásra mozgatható alakzatot) láttak, használhatjuk a kifejezést, hogy “egybevágóak”. Azonban egyelőre ez csak annyit jelent számukra, hogy az egybevágó idomok fedésbe hozhatók egymással; az alkotórészek egyezését ne vizsgálgassák.”

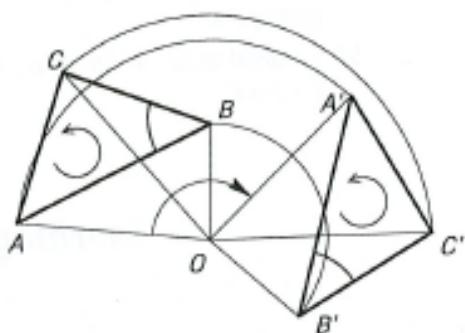
A tengelyes tükröképet egy papírlapnak a tengely mentén való félbehajtásával állítja elő, és hamarosan olyan kísérleteket javasol, amelyekben már az összetartozó alkotórészeket figyelik meg a gyerekek.



„Szúrjanak most ki pontokat magán a tengelyen, és állapítsák meg, hol van ezeknek a tükröképe! Ezután szúrjanak ki olyan idomot, amelynek van pontja a tengelyen is (ld ábra). Kössenek össze egy ilyen pontot az alakzat valamelyik másik nem a tengelyre eső – pontjával, majd ennek a tükröképével (az ábrán az AB , illetve az AB' szakasz).

Összehajtáskor az AB és az AB' szakasz egymásra került, ez mutatja az A -nál keletkezett két szög egyenlőségét.”

J. Hajdu et al. 1994



„Adott egy irányított ' α ' szög és egy O pont, a forgatás középpontja. Az alakzat O körüli, az adott szöggel való elforgatásához helyezz rá egy átlátszó papírt, másold át az alakzatot amit el akarsz forgatni, és a középpontot rögzítve (például a körző hegyének beszúrásával) forgasd el a másolópapírt az ' α ' irányított szöggel.”

Ebben az esetben a sík pontjai a síkban maradnak, az O pont körüli íveken mozognak, ' α ' középponti szöghöz tartozó íveken.

II. A kísérleti kipróbálás - kérdőívek és levelek

1. 3. fejezet - TENGELYES TÜKRÖZÉS

Kovács Csongorné
Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium
1082 Budapest, Horváth Mihály tér 8.
vagy:
Szeredi Éva
ELTE Tanárképző Főiskolai Kar, Matematika Tanszék
1055 Budapest, Markó u. 29/31.

Képek és tükörképek

Tankönyv: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Feladatgyűjtemény: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Ennyi órát fordítottam rá: 1

Tükrözés mozgatással

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

Ennyi órát fordítottam rá: 1

A tengelyes tükrözés tulajdonságai

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 17, 18

Ennyi órát fordítottam rá: 1

Tükrözés pontonként

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

Ennyi órát fordítottam rá: 1

Szimmetrikus alakzatok

Feladatgyűjtemény: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40

Ennyi órát fordítottam rá: 2

Szimmetrikus pontthalmazok készítése

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

Ennyi órát fordítottam rá: 1

Tükörkép szerkesztése

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 41, 42, 43, 44

Ennyi órát fordítottam rá: 2

Szimmetriatengelyek szerkesztése

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78

Ennyi órát fordítottam rá: 2

Szimmetrikus háromszögek

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 79, 80, 81, 82

Ennyi órát fordítottam rá: 2

Négyszögek

Tankönyv:

Feladatgyűjtemény: 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94

Ennyi órát fordítottam rá: 2

Függelék

2.

TENGYEYES TÜKRÖZÉS

Ehhez az anyagrészhöz	Tankönyv szövege			Gyakorló feladatok			Gondolkodtató feladatok		
	elég	kevés	túl sok	elég	kevés	túl sok	elég	kevés	túl sok
Képek és tükörképek	X			X					X
Tükrözés mozgással	X			X			X		
A tengelyes tükrözés tulajdonságai	X			X			X		
Tükrözés pontonként	X			X					X
Szimmetrikus alakzatok	X			X			X		X
Szimmetrikus pontthalmazok készítése 1, 2, 3, 4... pontból	X			X			X		
Tükörkép szerkesztése	X			X			X		
Szimmetriatengelyek szerkesztése	X			X					X
Szimmetrikus háromszögek	X				X				
Négyszögek	X			X			X		

Tisztelt Szerezők!

Gyönyörű volt az a fejezet esztétikai és matematikai értelemben is. Nem csak a szemnek megfigyelt nagy életmű, hanem a lelkemnek is. En még nem önttem így matematika tankönyvben látható fényképeknek, rajzoknak, geometriai ábráknak. Természetesen komoly tanulási és módszertani célt szolgálunk, igen aktívalál a gyakorlat is csak az oldalak. Szeretném előre dolgoztam benne. Kedveztük a másolópapírral való foglalkoztatást, sokat segít a tengelyes tükrözés tulajdonságainak megértésében. A gyönyörű népi művészetek, történelmi tárgyakon lévő rajzokhoz megfigyeltésem bizonyos ismeretterjesztés. A természet miniatúrájának újabb csodái, régatról ismert formái, az ezekről felgyűjtött benyomásokkal környezetvédelmi nevelési célokat szolgálunk.

Nagyon-nagyon szeretjük az ilyen sokféle témával rendelkező koncentrációt!

Tisztelettel Lőrincz Fehér

3.

Tisztelt Szeredi Éva kolléganő!

Először is elnézést kérek, hogy egyéb problémáim miatt még csak most küldöm az értékelésemet.

Az év elejei továbbképzés után el sem tudtam képzelni, hogyan fogom tanítani a tengelyes tükrözést. Tartottam tőle, hiszen a feldolgozás teljesen újszerű. Nagy csalódás ért, de kellemes! Nagyon tetszett a tanulóknak a pauszpapíros megoldás. S amitől félttem, hogy macerás lesz, nem jött be. A leggyengébb tanulóknak is volt sikerélményük. A 39. o. 4-es feladata is megnyerte tetszésünket. Sok érdekes feladványt kaptam a gyerekektől is.

Eddig a tengelyes tükrözést tanítottuk meg, utána a tulajdonságait. Furcsa volt fordítva tanítani, de megérte. A tulajdonságok rögzítésénél sokat segítettek a képek. De igazán mégis akkor értették meg a tanulók, amikor már ők is tengelyesen tükröztek. A tükrökép szerkesztésének "új" módjától tartottam a legjobban. De semmi gondot nem okozott. A gyengébb tanulók, igaz mechanikusan tanulták meg, de sikerült nekik.

Az 52.o alján lévő vicc nagyon jó szolgálatot tett. Egy-egy "új" feladat előtt elég volt csak a szlogént elmondani: Hogyan forral vizet a matematikus? S a gyerekek már is próbálták az előző feladat segítségével megoldani az új feladatot. A szerkesztések lépéseinek színessel való ábrázolása nagyon sokat segített a munkánkban. Sok segítséget adott az otthoni tanuláshoz és a feladatok megértéséhez is.

A háromszögek oldalak szerinti csoportosításánál én az általános Δ -et is felvettem a csoportosításhoz. A továbbképzésen már beszéltünk erről, ennek ellenére én úgy érzem, hogy ha nem is vesszük külön, egy halmazába erejéig fel lehetne rajzolni.



A ha....., akkor állítások segítségével sokat gyakoroltunk, s velük elmélyítettük a tudást.

4.

Először benyomáson a tanítás közben az volt, hogy a +eng. tükr. ilyen felfogásban való tanítása során „szétfolyik” a tananyag, csak játszódunk, milyen ismeret rögzül a tanulóknál.
Közben a véleményem megváltozott pozitív irányban, egyetlen kérdőjel maradt, hogy a javasolt órarend-mal elvégezhető-e a tananyag.
A bevezető képek és ötletes feladatok mind segítettek elmélyíteni a kép és tükörkép felismerését, eredeti és tükörkép elhelyezkedésének megfigyelését, a tulajdonságok felismerését,

5. Rövid válogatás további tanári levelekből

- Az év eleji továbbképzés után el sem tudtam képzelni, hogyan fogom tanítani a tengelyes tükrözést. Tartottam tőle, hiszen a feldolgozás teljesen újszerű. Nagy csalódás ért, de kellemes! Nagyon tetszett a tanulóknak a pauszpapíros megoldás. S amitől félttem, hogy macerás lesz, nem jött be. A leggyengébb tanulóknak is volt sikerélményük.
- A „Mozgások” részt nagyon élvezték a gyerekek. Az ábrák elnyerték a tetszésüket. Itt érzem úgy, hogy a gyerekek egy kicsit elvesztek a játék örömeiben, s nem ragadták meg a lényegét.
- A gyerekeknek különösen a „Mozgások, transzformációk egyenlősége” fejezetek tetszettek, hisz itt rejtett ábrákból varázsolhattak képeket, tehát játékosan tanultak. A zászlós feladatokat mind megoldották maguktól, azokat is, amiket én nem adtam fel.
- Rengeteg mozgatót hajtottunk végre. A gyerekek élvezték és otthon a szorgalmi feladatokat szívesen másolták papírral. Ügyesen állapították meg a transzformáció típusát. A tulajdonságok vizsgálata kissé nehezebbnek tűnt.
- A középpontos tükrözés másolópapírral történő végrehajtása lehetővé tette a leggyengébb tanulóknak is a transzformáció helyes végrehajtását.

Függelék

- A másolópapíros feladatokat szeretik a gyerekek, bár időigényes, de javítja a geometriai látásmódot.
- A másolópapírral még a leggyengébb gyerekek is el tudták végezni a középpontos tükrözést és a forgatást.
- Még a leggyengébb gyerekeket is érdekelték a másolópapíros feladatok. A középpontos tükrözés definíciójának megértése, a középpontos tükörkép szerkesztése, a tulajdonságok összegyűjtése semmi problémát nem okozott.
- A célunkat elértük, még a leggyengébb gyerekek is jobb dolgozatot írtak, mint máskor.
- Másolópapírral ügyesen dolgoznak. Vannak ugyan lassúbbak, velük kevesebbet másoltatok. A transzformációk tulajdonságait a gyerekek maguk fogalmazzák meg.
- Az átlagosnál gyengébb képességű az az osztály, melyben az Apáczai Kiadó matematika könyvét kipróbálom. Nagy segítséget nyújt számukra a tankönyven található sok színes ábra, a gyakorlatorientáltság. Ez a fejezet is a szemléletet, a manipuláltatást helyezi előtérbe, ami alátámasztja a fogalmak tisztázását.
- Befejeztük a középpontos tükrözés témakörét, és a gyerekekkel együtt állíthatom, hogy nagy gyönyörűségünkre szolgált. Nagyon tetszett a mozgatószoros bevezető, és az ebből leolvasható transzformációs tulajdonságok. A zászlócskák „trükkjét” azonnal megértették, és szívesen alkalmazták. Alig kellett segítenem, maguktól jöttek rá a középpontos tükrözés tulajdonságaira, összevetve a tengelyes tükrözéssel. A jobbak nemcsak szóban megfogalmazva, de jelekkel is ügyesen jegyezték le észrevételeiket.
- Nagyon jó a fejezetben, hogy sokféle transzformációval megismerkednek a gyerekek a középpontos tükrözés előtt. Sokkal könnyebb így a középpontos tükrözés. A zászlós mutatók szenzációs élményt nyújtottak a gyerekeknek. Nagyon élvezték ezeket az órákat.