

DR. HABIL. CSIPKÉS MARGIT
Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar
Statisztika és Módszertani Intézet

A SPORT- ÉS REKREÁCIÓSZERVEZÉS,
VALAMINT A SPORTSZERVEZŐ SZAKOS HALLGATÓK
STATISZTIKA PÉLDATÁRA MEGOLDÁSSAL

DUPress e-jegyzetek

DR. HABIL. CSIPKÉS MARGIT
Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar
Statisztika és Módszertani Intézet

A SPORT- ÉS
REKREÁCIÓSZERVEZÉS,
VALAMINT A SPORTSZERVEZŐ
SZAKOS HALLGATÓK
STATISZTIKA PÉLDATÁRA
MEGOLDÁSSAL



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press

2020

Lektor: Dr. Debrenti Edit, PKE egyetemi adjunktusa

© Csipkés Margit
© Debreceni Egyetemi Kiadó

DUPress e-jegyzetek

ISBN 978-963-318-848-4 (pdf)
ISBN 978-963-318-849-1 (epub)
ISBN 978-963-318-850-7 (mobi)

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének a tagja
dupress.unideb.hu

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

TARTALOM

1. ÁLTALÁNOS ISMERETEK · 9

1.1. A statisztika fogalma, tárgya, szerepe	9
1.2. A statisztikai sokaság, a statisztikai ismerv, a mérési skálák rövid ismertetése	10

2. A VISZONYSZÁMOK · 15

2.1. A viszonyszámokról általában	15
2.2. Az egynemű adatokból számított viszonyszámok	16
2.2.1. A megoszlási viszonyszám	16
2.2.2. Az összehasonlító viszonyszámok	16
2.2.2.1. A dinamikus viszonyszámok	17
2.2.2.2. A területi összehasonlító viszonyszámok	19
2.2.3. A teljesítmény viszonyszámok	19
2.2.4. A koordinációs viszonyszám	20
2.3. A különmemű adatokból számított viszonyszámok	21
2.4. A viszonyszámok gyakorlati példái	22
2.4.1. A megoszlási viszonyszám – Példa 1	22
2.4.2. A megoszlási viszonyszám – Példa 1 megoldása	22
2.4.3. A megoszlási viszonyszám – Példa 2	24
2.4.4. A megoszlási viszonyszám – Példa 2 megoldása	24
2.4.5. A koordinációs viszonyszám – Példa 1	25
2.4.6. A koordinációs viszonyszám – Példa 1 megoldása	25
2.4.7. A koordinációs viszonyszám – Példa 2	29
2.4.8. A koordinációs viszonyszám – Példa 2 megoldása	29
2.4.9. A bázis- és láncviszonyszámok – Példa 1	30
2.4.10. A bázis- és láncviszonyszámok Példa 1 megoldása	30
2.4.11. A bázis- és láncviszonyszámok – Példa 2	34
2.4.12. A bázis- és láncviszonyszámok Példa 2 megoldása	35
2.4.13. A bázis- és láncviszonyszámok – Példa 3 („lukas tábla”)	36
2.4.14. A bázis- és láncviszonyszámok Példa 3 („lukas” tábla) megoldása ...	37
2.4.15. A bázis- és láncviszonyszámok – Példa 4 („lukas” tábla)	38
2.4.16. A bázis- és láncviszonyszámok Példa 4 („lukas” tábla) megoldása ...	39
2.4.17. A területi összehasonlító viszonyszámok – Példa 1	39
2.4.18. A területi összehasonlító viszonyszámok – Példa 1 megoldása	40

2.4.19. A területi összehasonlító viszonyszámok – Példa 2	40
2.4.20. A területi összehasonlító viszonyszámok – Példa 2 megoldása	41
2.4.21. A teljesítmény viszonyszámok – Példa 1	42
2.4.22. A teljesítmény viszonyszámok – Példa 1 megoldása	42
2.4.23. A teljesítmény viszonyszámok – Példa 2	43
2.4.24. A teljesítmény viszonyszámok – Példa 2 megoldása	44
2.4.25. Az intenzitási viszonyszámok – Példa 1	46
2.4.26. Az intenzitási viszonyszámok – Példa 1 megoldása	47
2.4.27. Az intenzitási viszonyszámok – Példa 2	50
2.4.28. Az intenzitási viszonyszámok – Példa 2 megoldása	51

3. A KÖZÉPÉRTÉKEK · 55

3.1. A középértékek elméleti alapjai	55
3.1.1. A számított középértékek	55
3.1.2. A helyzeti középértékek	63
3.2. A középértékek alkalmazásának bemutatása	63
3.2.1. Súlyozatlan (egyszerű) számtani átlag – Példa 1	63
3.2.2. Súlyozatlan (egyszerű) számtani átlag – Példa 1 megoldása	64
3.2.3. Súlyozatlan (egyszerű) számtani átlag – Példa 2	64
3.2.4. Súlyozatlan (egyszerű) számtani átlag – Példa 2 megoldása	65
3.2.5. Súlyozott számtani átlag – Példa 1	65
3.2.6. Súlyozott számtani átlag – Példa 1 megoldása	66
3.2.7. Súlyozott számtani átlag – Példa 2	66
3.2.8. Súlyozott számtani átlag – Példa 2 megoldása	67
3.2.9. Súlyozott számtani átlag – Példa 3	67
3.2.10. Súlyozott számtani átlag – Példa 3 megoldása	68
3.2.11. Súlyozott számtani átlag – Példa 4	70
3.2.12. Súlyozott számtani átlag – Példa 4 megoldása	70
3.2.13. Egyszerű (súlyozatlan) harmonikus átlag – Példa 1	71
3.2.14. Egyszerű (súlyozatlan) harmonikus átlag – Példa 1 megoldása	71
3.2.15. Egyszerű (súlyozatlan) harmonikus átlag – Példa 2	72
3.2.16. Egyszerű (súlyozatlan) harmonikus átlag Példa 2 megoldása	73
3.2.17. Súlyozott harmonikus átlag – Példa 1	73
3.2.18. Súlyozott harmonikus átlag Példa 1 megoldása	74
3.2.19. Súlyozott harmonikus átlag – Példa 2	75
3.2.20. Súlyozott harmonikus átlag Példa 2 megoldása	75
3.2.21. Kronológikus átlag – Példa 1 (a hónap első napjai adottak)	76
3.2.22. Kronológikus átlag – Példa 1 megoldása (a hónap első napjai adottak)	77
3.2.23. Kronológikus átlag – Példa 2 (a hónap első napjai adottak)	83
3.2.24. Kronológikus átlag Példa 2 megoldása (a hónap első napjai adottak)	84
3.2.25. Kronológikus átlag – Példa 3 (a hónap utolsó napjai adottak)	85

3.2.26. Kronológikus átlag – Példa 3 megoldása (a hónap utolsó napjai adottak)	86
3.2.27. Súlyozatlan mértani átlag – Példa 1.....	87
3.2.28. Súlyozatlan mértani átlag Példa 1 megoldása	87
3.2.29. Súlyozatlan mértani átlag – Példa 2	90
3.2.30. Súlyozatlan mértani átlag – Példa 2 megoldása	90
3.2.31. Súlyozatlan négyzetes átlag – Példa 1.....	91
3.2.32. Súlyozatlan négyzetes átlag – Példa 1 megoldása	92
3.2.33. Súlyozatlan négyzetes átlag – Példa 2	92
3.2.34. Súlyozatlan négyzetes átlag Példa 2 megoldás	93
3.2.35. Medián és Módusz – Példa 1	93
3.2.36. Medián és Módusz Példa 1 megoldása	94

4. A SZÓRÓDÁSI MUTATÓK • 97

4.1. A szóródási mutatók elméleti alapjai (súlyozott, súlyozatlan).....	97
4.2. A szóródási mutatók alkalmazásának bemutatása	101
4.2.1. Egyszerű (súlyozatlan) szóródási mutatók – Példa 1	101
4.2.2. Egyszerű (súlyozatlan) szóródási mutatók Példa 1 megoldása	102
4.2.3. Egyszerű (súlyozatlan) szóródási mutatók – Példa 2	107
4.2.4. Egyszerű (súlyozatlan) szóródási mutatók – Példa 2 megoldása	108
4.2.5. Súlyozott szóródási mutatók – Példa 1	111
4.2.6. Súlyozott szóródási mutatók – Példa 1 megoldása.....	112
4.2.7. Súlyozott szóródási mutatók – Példa 2	117
4.2.8. Súlyozott szóródási mutatók – Példa 2 megoldása.....	118

5. AZ INDEXEK • 123

5.1. Az indexek elméleti alapjai	123
5.2. Az abszolút számokból számított indexek alkalmazásának bemutatása	132
5.2.1. Példa 1	132
5.2.2. Példa 1 megoldása	133
5.2.3. Példa 2	137
5.2.4. Példa 2 megoldása	138
5.2.5. Példa 3.....	140
5.2.6. Példa 3 megoldása	141

FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM • 147

1. ÁLTALÁNOS ISMERETEK

1.1. A statisztika fogalma, tárgya, szerepe

A „statisztika” kifejezést több formában is használhatjuk, mivel többféle értelmezési formája létezik. Fontos, hogy a statisztika minden esetben bizonyos szempontok szerint rendezett számokat, adatokat jelent, melyek egy adott területet vagy témát jellemeznek. Ezen adatok akkor használhatók megfelelően, ha az adatok valamilyen gyakorlati tevékenységből származnak (begyűjtik, összegyűjtik, lemérik, stb.) és ezeket valamilyen tulajdonság alapján rendszerezik (például egy futóversenyen az adott számban elindult versenyzők adatainak az összegyűjtése), majd feldolgozzák, később elemzik és végül valahol ezeket hivatalosan is publikálják.

Ezen információk alapján a **statisztika** olyan tudományos módszertani és gyakorlati tevékenység, melynek célja a valóság tömör, illetve számszerű jellemzése.

A statisztika a tömegesen előforduló jelenségek egyedeit vizsgálja, amely vizsgálat alapján azok egészéről ad számszerű elemzést.

A statisztika módszertanán belül a következő csoportokat különíthetjük el:

- ♦ a **leíró statisztika**: mely az adatok összegyűjtését, csoportosítását, elemzését, illetve az eredmények áttekinthető megjelenítését foglalja magába;
- ♦ az **általános statisztika**: mely általános elméleti kérdésekkel és különböző vizsgálatokban alkalmazott módszerekkel foglalkozik;
- ♦ a **szakstatisztika**: mely egyes konkrét területekre és ágazatokra alkalmazható, és minden esetben egy részterület sajátosságait foglalja magába (például: sport, népesség, ipar, kereskedelem, pénzügy, mezőgazdaság, stb.). Ezen statisztika alkalmazása akkor valósulhat meg, ha az elemző ismeri az adott szakterület sajátosságát.

A statisztikai sokaság elemeinek számát vagy a sokaság valamilyen másféle számszerű jellemzőjét (mérési eredményét) **statisztikai adatnak** hívjuk. A statisztikai adatok tehát számértékek. Pl.: Debrecenben 2019. évben 2450 fő sportoló élt.

A statisztikai adat lehet abszolút szám és leszámaztatott szám egyaránt. Az **abszolút számokat** közvetlen számlálás vagy mérés eredményeként kapjuk meg, míg a **leszámaztatott számokat** az elemzés során az abszolút számokból számítjuk ki (pl. viszonyszámok, az átlagok, a szóródási mutatók mindegyike, illetve az indexek).

1.2. A statisztikai sokaság, a statisztikai ismerv, a mérési skálák rövid ismertetése

A statisztikai sokaság és az ismerv is olyan alapfogalomnak tekinthető, melyek a statisztikai munkafolyamat elejétől a végéig fontos szerepet töltenek be.

A **statisztikai sokaság** (továbbiakban a sokaság) a megfigyelés tárgyát képező egyedek összességét jelenti. A szakirodalom egyes esetekben a sokaságot populáció megnevezésben is alkalmazza.

A statisztikai sokaság egyedei a **statisztikai egységek**. Ezek az egységek lehetnek élő és nem élő egységek is (úszóbajnokságon az úszók (emberek), a sportversenyen a különböző akadályoknak a típusai (darab), az egyes sportversenyek díjazása (Ft), stb.). Látható tehát, hogy minden esetben a vizsgálat célja határozza meg a sokaság típusát.

A statisztikai sokaságoknak sokféle csoportosítása létezik. Ezek közül a legfontosabbak a következők:

1. **álló sokaság:** csak *egy adott időpontra* (pillanatra) értelmezhető, és valamilyen állapotot fog tükrözni. Pl.: 2020. január 08.-a 12.00 óra, a vizsgán részt vett hallgatók száma; 2020. február 12.-én 10.00 órakor megjelent focisták száma a Kabai műfüves pályán.
2. **mozgó sokaság:** csak valamely időtartamra értelmezhető. Pl.: 2019. év 2. félévében lejátszott kézilabda meccsek száma a Hajdúszoboszlói Sportcsarnokban (július 1 – december 31 = 2. félév); 2020. év februárjában szerzett aranyérmek száma a lovas versenyeken (február 1-28).
3. **diszkrét sokaság:** elkülönült egységekből épül fel. Pl.: a Hajdú Bihar megyében működő sportszervezetek.
4. **folytonos sokaság:** önkényesen elkülönített egységei vannak Pl.: a szervezetek forgalma egy adott félévben.
5. **véges sokaság:** megszámlálható a sokaság elemszáma. Pl.: kézilabda csapatban játszó játékosok száma; súlylökő versenyzők száma az olimpián, stb.
6. **végtelen sokaság:** elemszáma nem határozható meg, azaz végtelen az elemszáma. Pl.: a foci mezőn a fűszállak száma; a homokugráshoz használt homokugró területen lévő homokszemek száma.

A statisztikai sokaság az egységek tulajdonságainak felsorolásával írható le. Ezen tulajdonságokat **statisztikai ismérvek**nek hívjuk, melyek a sokaság egységeit jellemzik azon tulajdonságukkal, amelyek a statisztikai vizsgálat szempontjából fontosak lehetnek. Az ismerv lehetséges kimenetelei az **ismervváltozatok**. Egy sportversenyt alapul véve az ismerv lehet például a versenyző különböző tulajdonságai: neme, életkora, foglalkozása, iskolai végzettsége, jövedelme, magassága, testsúlya, versenyeken való részvételének a száma, stb. Ezen ismérvek ismervváltzata például, hogy a nemen belül nő vagy férfi-e; az életkor esetében, hogy 18-20 év között vagy 21-25 év közötti vagy 25 év feletti e a versenyző; a foglalkozás esetén, hogy fizikai vagy szellemi foglalkozású-e, stb. Az egyes ismervváltzathoz tartozó

értéket ismérvértéknek nevezzük. Pl.: Kovács Béla futó, 27 éves, férfi, sportszervező Bsc végzettsége van.

Azon ismérvek, melyek csak két változattal rendelkeznek, azokat **alternatív ismérveknek** nevezzük. Pl: nem: férfi vagy nő; eldöntendő kérdésnél: az igen-nem válaszok, stb.

Az ismérvek esetén természetesen az alapján is tudunk különbséget tenni, hogy mennyiben azonosak, vagy különbözőek azok. Az adott sokaságnál azokat az ismérveket, melyek az egységek egyformaságát mutatja, közös ismérveknek tekintjük. Azokat az ismérvváltozatokat, melyek eltérnek egymástól megkülönböztető ismérveknek nevezzük. Pl. a megfigyelt sokaság a debreceni sportolók: közös ismerv, hogy Debrecenben laknak, megkülönböztető ismerv a hajszín, az életkor, a cipőméret, a nem, az iskolai végzettség, a sporttevékenység, stb.

Ezen ismeretek után célszerűnek látom megismernedni az ismérvek négy típusával:

1. időbeli ismérvek (Kérdése: MIKOR?),
2. területi ismérvek (Kérdése: HOL?),
3. tárgyi ismérvek (Kérdése: MIT?),
 - a) minőségi ismérvek,
 - b) mennyiségi ismérvek,
4. alternatív ismérvek.

Az **időbeli ismérvek** valamely időpont vagy időtartam meghatározásával történik. Pl. a *2020. évben* a foci meccsek száma Debrecenben, *2019. szeptember 25.-én 12.00 órakor* elkezdődő teniszverseny játékosainak a száma, stb.

A **területi ismérvek** a sokaság egységeire nézve valamilyen földrajzi elhatárolást adnak meg (megye, város, ország, falu, község, folyó, régió, ország csoport, stb.). Pl.: *Kaba városában* megrendezésre kerülő futóverseny, *Hajdúböszörményben* rendezett bicikliverseny, stb.

A tárgyi ismerv két típusa a minőségi- és a mennyiségi ismerv. A minőségi ismérvek esetén minőségi szintek különíthetők el. Pl.: a versenyzők családi állapota, a versenyzők foglalkozása, az autóverseny típusa. A **mennyiségi ismérvek** minden esetben számadatokkal leírhatók, melyek valamilyen mérés vagy számlálás eredményei. Pl.: a versenyszámok mennyisége a Debreceni Diákolimpián, a medencék száma az uszodában, a sportoló éves bevétele, stb.

A következőkben a különböző mérési skálákat tanulmányozzuk át (az egyes ismérvtípusok és mérési skálák megkülönböztetésére azért van szükség, mert azok mindegyike más-más elemzési fajtát tesz lehetővé). Megkülönböztetünk:

1. névleges (nominális) skála,
2. sorrendi (ordinális) skála,
3. különbségi (intervallum) skála,
4. arányskála.

A **névleges mérési skála** a legegyszerűbb és legkevésbé informatív skála, mivel a számok kötetlen hozzárendelését jelenti. Ezek a számok kizárólag azonosításra alkalmasak, köztük semmiféle reláció nem értelmezhető. Fontos tulajdonságuk az, hogy ezekkel számtani műveletek nem végezhetők és mértékegységük nincs. Pl.: a futóversenyen a versenyzők rajtszáma, az uszodában az úszóversenyző pálya száma, stb.

A **sorrendi skála** már jelentősebb tulajdonságokkal rendelkezik, valamivel erősebb kategória, mint a névleges skála. Itt már nemcsak az azonosság, vagy az eltérés a fontos, hanem a sorrendiség is értelmezhető. Fontos, hogy a sokaság egységeit egy közös tulajdonság alapján sorba lehet rendezni. Minden esetben tisztázni kell, hogy az egyes számértékek a sorba rendezésben mit jelentenek. Pl.: a sportolók helyezései, a statisztika órán a félév végén elért gyakorlati jegy, stb. Figyelembe kell azonban azt is venni ennél a skálánál, hogy a szintek közötti távolságok nem jellemzik a teljesítmény különbségét. A dobogó felső részén álló versenyző nem egy „fokkal” teljesített jobbat, mint a dobogó lentebbi részen álló versenyző. Tehát fontos tulajdonság, hogy a sorrendi skála számértékei csak a sorrendi információt adja meg (információértékű), számítások nem végezhetők velük.

A **különbségi skála** esetén már értelmezhető a különbségképzés. Ennél a skálánál már a mértékegység fontos, de annak megállapítása sok esetben önkényes (nulla pont is önkényes). Itt sem lehet még az értékek egymás közti arányát értelmezni. A különbségi skálára a klasszikus példa a hőmérséklet (hőmérséklet mérhető Celsius- vagy Fahrenheitfokban is). Még itt sem értelmezhetők a skálaértékek összegei (a különbségek igen). A +5 és +12 Celsius-fokos víz hőmérsékletkülönbsége ugyanannyi, mint a 47 és 54 Celsiusfokosé.

A leginformatívabb skála az **arányskála**, mivel ez nyújtja a legtöbb információt a vizsgált dologról. Ez a legmagasabb mérési szint. A kezdőpont egyértelműen rögzített a skálán, itt már létezik a valódi nullpont (ez a tulajdonság hiányát mutatja). Itt már a skálaértékek egymáshoz viszonyított arányai is meghatározhatók. Az arányskála értékeivel a statisztikai elemzéshez szükséges összes művelet elvégezhető. Pl.: a versenyző árbevétele, a versenyző magassága, a homokugró versenyző ugrási hosszúsága, stb.

A névleges és a sorrendi skálák minőségi vagy területi ismérvek esetén, míg a különbségi és arányskála a mennyiségi ismérvek esetén alkalmazhatók.

A számítások elkészítése előtt fontos tisztáznunk azt is, hogy csoportosítással, illetve összehasonlítással statisztikai sorokat lehet képezni. A statisztikai adatok valamilyen szempont szerinti felsorolását **statisztikai sornak** nevezzük. Az egy ismerv szerinti osztályozás eredménye a csoportosító sor, mely azonos fajta adatokból épül fel, és a fő sokaságot és a részsokaságokat adja meg. A statisztikai soroknál a következőket különböztetjük el:

1. leíró sor,
2. minőségi sor,
3. mennyiségi sor.
4. területi sor,
5. idő sor,

A **leíró sorok** a statisztikai sorok speciális típusa, amely különböző fajta adatokból épül fel, és sok esetben ezen adatok még mértékegységben is különböznek. Annyi közös tulajdonsága van ezen adatoknak, hogy egy adott egységre (jelenségre) vonatkozik. Pl.: egy versenyző különböző tulajdonságai.

A **minőségi sorokat** minőségi ismérvek alapján képezzük csoportosítással, melyek a sokaság összetételéről adnak információt. Az egyes ismerv változatoknak nincs kötött sorrendje itt (logikai vagy fontossági szempontok alapján kerül bemutatásra).

A területi sorok csoportosítás alapja jönnek létre területi ismérvek alapján. Főleg összehasonlításra használják ezt a sort.

Az **idősorok** a vizsgált jelenségek időbeli alakulását (időtartam, időpont), illetve fejlődését mutatják be (összehasonlító sorok alapján). Az időpontra vonatkozó adatok álló sokaságra vonatkoznak és **állapot idősort** (stock típusú) alkotnak (adatai nem összesíthetők). Az időtartamra vonatkozó adatok mozgó sokaságra értelmezhetőek és tartam idősorba (flow típusú) rendezhetőek (adatai összesíthetők).

A **mennyiségi sorokat** mennyiségi ismerv szerint osztályozzuk. Ha az egyes ismervváltozatokhoz (többnyire osztályokhoz, osztályközökhöz) az előfordulások számát (gyakoriságokat) rendeljük, akkor gyakorisági sorról beszélünk. Ha az egyes intervallumokhoz (osztályokhoz, osztályközökhöz) az azokba tartozó ismervértékek összegét rendeljük **értékösszezsor**ot kapunk.

Látható tehát, hogy a statisztikai sorok a sokaságot csak egy szempont (egy ismerv) szerint rendezik. Általában a sorokat ezért csak együttesen célszerű elemezni (soronként nem).

Ha a sokaság egységeit egyszerre több ismerv alapján rendszerezzük, akkor a rendszerezés eredményét statisztikai táblákban jeleníthetjük meg. A statisztikai sorok összefüggő rendszerét **statisztikai táblának** nevezzük. Az adatok közötti összefüggéseket áttekinthető módon jelenítik meg ezek a táblák. A statisztikai táblák a statisztikai adatok feldolgozásának, elemzésének és közzétételének az eszközei. Közérthetően tartalmazzák a szükséges különböző információkat. A táblában minden esetben fel kell tüntetni a megfelelő adatokat, a megnevezéseket (sorokban és oszlopokban) és a magyarázó szövegeket is. Ezen adatokból állítjuk össze a hálózatos rendszert, melyet táblázatnak nevezünk el. A vízszintesen elhelyezkedő sorok adatainak megnevezéseit tartalmazó (a táblázat bal oldalán lévő) rovatokat **oldalrovatok**nak nevezzük. A tábla felső részén található (a táblázat oszlopainak szövege) a **fejrovat**. Az egyes sorok és oszlopok találkozásában vannak a rovatok, melyek összessége az **összesen rovat**. Minden táblázatnak tartalmaznia kell

a címet, az adatok forrásának megjelölését és egyes esetekben a magyarázó szövegek is, melyek az adatok tartalmának megértését segítik. Fontos, hogy a táblázatban üres rovat nem maradhat, mivel úgy az egyes rész/részek nem értelmezhetők megfelelően. Ha hiányzik valamely adat a táblázatból, akkor különböző szimbólumokat lehet alkalmazni.

- ♦ „x”: az adat nem közölhető,
- ♦ „...”: az adat még nem áll rendelkezésre,
- ♦ „0”: a szám értéke nagyobb nullánál, de a tábla mértékegységében nem adható meg,
- ♦ „.”: nincs adat, illetve az adat értéke pontosan 0.

A statisztikai táblánál megkülönböztetünk dimenziószámot is, mely azt jelzi, hogy a tábla egy adata hány statisztikai sorhoz tartozik. A csoportosítás szerepe szerint a statisztikai táblák lehetnek így egyszerű, csoportosító és kombinációs- vagy kontingenciátáblák (1. ábra).

Az **egyszerű táblák** csoportosítást nem tartalmaznak, ezért „összes” rovatuk nincs. Általában leíró és összehasonlító sorokat foglalnak magukban. A **csoportosító táblák** már csoportosítást is tartalmaznak, de kombinatív osztályozást még nem. A csoportosító táblának egy irányban összesen rovata is van (vagy a sorok végén, vagy az oszlopok végén). A csoportosító sorok összehasonlítóval és/vagy leíró sorokkal együtt szerepelnek a táblában.

A **kombinációs vagy kontingenciátáblák** legalább kétféle ismerv szerinti csoportosítást tartalmaznak, ezért minimum két „összes” elnevezés van vagy a sorban vagy/és az oszlopban.

Egyszerű táblázat	
	Leíró sor vagy összehasonlítás
Összehasonlítás	↑ (vagy fordítva)

Kombinációs táblázat		
	Csoportosítás	Összesen
Csoportosítás		
Összesen		

Csoportosító táblázat	
	Leíró sor vagy összehasonlítás
Csoportosítás	↑ (vagy fordítva)
Összesen	

1. ÁBRA: A táblázatok típusai

Forrás: Saját szerkesztés

2. A VISZONYSZÁMOK

2.1. A viszonyszámokról általában

Az első fontos témakörünk a viszonyszámok, melyeket a mindennapi életünkben is használunk. A viszonyszámok esetében két adat hányadosát képezzük. A viszonyszám két egymással logikai kapcsolatban lévő statisztika adat hányadosát jelenti.

Kiszámítása a $V = \frac{A}{B}$ képlettel történik, ahol „V” a viszonyszám értéke, az „A” a viszonyított adatot vagy viszonyítás tárgya, míg a „B” a viszonyítási alapot vagy a viszonyítás bázisát jelenti.

A kiszámításból is jól látszik, hogy a viszonyszám két statisztikai adat arányát fejezik ki. A számítások esetén azt mondhatjuk, hogy a statisztikai elemzések legegyszerűbb, legáltalánosabban használt eszköze ez. Formájukat tekintve mindig hányadosok, kifejezési formájuk százalék (egy kivétel van az intenzitási viszonyszám).

A viszonyszámok megjelenési formája tehát főleg százalékos:

$$\frac{\text{viszonyított adat}}{\text{viszonyítási alap}} \times 100.$$

De lehetőség van együtthatós és ezrelékes formában való megjelenítésre is:

együtthatós forma: $\frac{\text{viszonyított adat}}{\text{viszonyítási alap}}$ (akkor használunk, ha további számítási műveleteket akarunk elvégezni a viszonyszámokkal)

ezrelékes forma: $\frac{\text{viszonyított adat}}{\text{viszonyítási alap}} \times 1000$ (a viszonyított adat és a viszonyítás alapja között jelentős mértékű a nagyságrendi különbség (Szűcs, 2004)).

A viszonyszámok esetén beszélhetünk „egynemű” és „különnemű” adatokból számított viszonyszámokról is. A viszonyszámok csoportosítása a következő:

A) egynemű adatokból számított viszonyszámok

- megoszlási viszonyszám
- összehasonlító viszonyszám
 - ♦ dinamikus viszonyszám
 - bázisviszonyszám
 - láncviszonyszám
 - ♦ területi összehasonlító viszonyszám
- teljesítmény viszonyszám
- koordinációs viszonyszám

- B) különmemű adatokból számított viszonyyszámok
 – intenzitási viszonyyszám

2.2. Az egynemű adatokból számított viszonyyszámok

Az egynemű adatokból számított viszonyyszámok egynemű (azonos mértékegységű) adatokat hasonlítanak össze, ahol az adatok időbeli, térbeli vagy más ismérvek alapján térnek csak el egymástól (Szűcs, 2004). Az eredmény mértékegység nélkül tiszta szám, de kifejezhető százalékos formátumban (Huzsvai, 2019).

2.2.1. A MEGOSZLÁSI VISZONYSZÁM

A statisztikai sokaság egyes részeinek a sokaság egészéhez viszonyított arányát fejezi ki. A vizsgált sokaság összetételének (belső szerkezetének) feltárása határozható meg vele (Nagy, 2019). Kiszámítása mennyiségi és minőségi sorokból lehetséges.

$$\text{Kiszámítása: } V_m = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i} \times 100[\%]$$

V_m : megoszlási viszonyyszám

x_i : részsokaság

$\sum_{i=1}^n x$: teljes sokaság

A teljes sokaság értéke minden esetben 1 (100%), míg a részsokaság értéke minden esetben 0-0,999 (0-99,9%) közötti érték lehet. Az egyes részsokaságok összege adja a teljes sokaság értékét: $\text{rész}_1 + \text{rész}_2 + \dots + \text{rész}_n = \text{egész}$

A megoszlási viszonyyszám értékei az egyes részsokaságoknál csak 100% alatti értéket vehet fel (0%-nál nagyobb vagy egyenlő és 100% alatti).

Értelmezés:

Az adott részsokaság a teljes sokaságból hány százalékot tesz ki.

Pl.: $\text{rész}_1 = 28\%$: a teljes sokaság 28%-át a rész_1 teszi ki.

2.2.2. AZ ÖSSZEHASONLÍTÓ VISZONYSZÁMOK

Az összehasonlító viszonyyszám megmutatják, hogy a vizsgált jelenség térben vagy időben elkülönülő adatai hányszorosát, illetve hányad részét teszik ki a bázisul szolgáló adatnak (Statisztika, 2019). Csoportjai a következők:

- a) dinamikus viszonyyszám
 - ♦ bázisviszonyyszám
 - ♦ láncviszonyyszám
- b) területi összehasonlító viszonyyszám

2.2.2.1. A dinamikus viszonyyszámok

A dinamikus viszonyyszámot csak akkor használhatjuk, ha idősorok valamelyike áll a rendelkezésünkre. Korábban leírtak alapján tehát valamilyen időegységnek kell, hogy a rendelkezésünkre álljanak (hónap, nap, év, perc, óra, másodperc, évszak, stb.). A két időszak adatának, azaz az összehasonlítás tárgyát képező tárgyidőszak és az összehasonlítás alapját képező bázisidőszak adatának a hányadosát kell képezni.

A dinamikus viszonyyszámnak két típusát különböztethetjük meg: a bázisviszonyyszámot és a láncviszonyyszámot.

Az első típus a **bázisviszonyyszám**, melyet más néven *állandó* bázisú viszonyyszámnak is nevezhetünk. Az idősor valamennyi adatát az időszakban bázisnak választott értékéhez kell arányosítani. Abban az esetben, ha nincs megadva a feladatban a bázis értéke, akkor az első időszakot kell bázisnak tekinteni. A bázisviszonyyszám megmutatja, hogy **milyen mértékű** volt a vizsgált jelenség változása a bázishoz képest. A feladat kérdésében tehát, ha az van megadva, hogy határozza meg a változás mértékét egy adott időpontra/időszakra, akkor bázis viszony-

számot kell alkalmazni a megoldáshoz. Kiszámítása: $V_{Bi} = V_{DA} = \frac{x_i}{x_0} \times 100$, ahol $i=1, 2, \dots, n$. A képletben a V_{Bi} a kiszámolandó bázisviszonyyszámot, az x_i a tárgyidőszaki adatot, míg az x_0 a bázis időszaki adatot jelenti.

A bázisul választott időszak értékéhez mindig „1” eredményt kell kapnunk (százalékban 100%). A bázis időszaknak minden esetben olyan adatot célszerű választani, amelynek tükrében reálisan lemérhető a vizsgált jelenség fejlődése.

A kapott eredmény értelmezése:

100% felett: a bázis viszonyyszám növekedést mutat, azaz a bázis időszakhoz képest a vizsgált időszakra növekedés volt (100% feletti rész a növekmény).

100% alatt: a bázis viszonyyszám csökkenést mutat, azaz a bázis időszakhoz képest a vizsgált időszakunkra csökkenés következett be (100% és a kapott eredmény különbsége adja a csökkenés nagyságát).

TEHÁT!!! A bázis időszakhoz képest kapjuk meg a növekedést vagy a csökkenést.

Pl.:

123%-os bázis viszonyyszám: a bázis időszak értékéhez képest a vizsgált időszak értéke 23%-kal magasabb (23%-kal nőtt).

77%-os bázis viszonyyszám: a bázis időszak értékéhez képest a vizsgált időszak értéke 23%-kal alacsonyabb (23%-kal csökkent).

A második típus a **lánviszonyszám**, melyet más néven *változó bázisú* viszonszámoknak is hívunk (mivel minden adatot egy másik értékkel osztunk el, azaz a megelőző időszak adatához kell viszonyítani). Ebben az esetben az idősor egyes adatait a közvetlenül megelőző időszak adatával hasonlítjuk össze. A lánviszonyszám megmutatja, hogy **milyen ütemű** volt a vizsgált jelenség változása az előző időszakhoz képest (Nagy, 2019).

Számítása a $V_{Li} = \frac{x_i}{x_{i-1}} \times 100$ képlettel történik, ahol $i = 2, 3, \dots, n$, a V_{Li} a kapott lánviszonyszámot jelenti, az x_i a tárgyidőszak adatát, míg az x_{i-1} a tárgyidőszakot megelőző időszak adat jelenti.

A számítás elkészítésénél mindig figyelni kell arra, hogy az első időszakhoz tartozó értéket SOHA nem lehet kiszámolni, mivel az első időszak értékénél a megelőző időszak értékét nem ismerjük.

A kapott eredmény értelmezése:

100% felett: a lán viszonszám növekedést mutat, azaz a vizsgált időszakban az előző időszak adatához képest növekedés volt (100% feletti rész a növekmény).

100% alatt: a lán viszonszám csökkenést mutat, azaz a vizsgált időszakban az előző időszak adatához képest csökkenés volt (100% és a kapott eredmény különbsége adja a csökkenés nagyságát).

TEHÁT!!! Az *előző időszakhoz képest* kapjuk meg a növekedést vagy a csökkenést.

Példa:

123%-os lán viszonszám: az előző időszakhoz képest a vizsgált időszakra 23%-os növekedés következett be.

77%-os lán viszonszám: az előző időszakhoz képest a vizsgált időszakra 23%-os csökkenés következett be.

Természetesen a bázisviszonyszámokból számítható lánviszonyszámok, illetve a lánviszonyszámokból számíthatók bázisviszonyszámok is.

Az átszámítás akkor lehetséges, ha ugyanazon idősról számoljuk ki az értékeket.

- ♦ A bázisviszonyszámokból lánviszonyszámot úgy tudunk számítani egy adott időszakra, hogy a vizsgált időszak bázisviszonyszámát elosztjuk a megelőző időszak bázisviszonyszámával. Számítása: $V_{Ln} = \frac{V_{Bn}}{V_{B_{n-1}}} \times 100$
- ♦ A lán viszonszámokból bázis viszonszámot úgy tudunk számolni az adott időszakra, hogy az kezdő időszaktól a tárgyidőszakig kiszámított lánviszonyszámokat összeszorozzuk egymással természetes szám formátumában. Számítása: $V_{Bn} = V_{L_2} \times V_{L_3} \times V_{L_4} \times \dots \times V_{Ln}$. A kapott eredményt 100 értékével meg kell szorozni annak érdekében, hogy százalékos kifejezési formát tudjunk elérni.

2.2.2.2. A területi összehasonlító viszonyyszámok

A területi összehasonlító viszonyyszámokhoz területi adatok szükségesek (város, község, falu, ország, ország csoport, folyó, régió, stb.). Ezen viszonyyszámnál két terület hányadosát kell képezni. Amihez viszonyítani szeretnénk a vizsgált területet, azt a nevezőben helyezzük el. Például, ha a debreceni sportolók számához képest szeretnénk megkapni a hajdúszoboszlói sportolók nagyságát, akkor a hajdúszoboszlói sportolók számát osztjuk a debreceni sportolók számával.

A területi viszonyyszám azt mutatja meg, hogy a vizsgált jelenség térben különböző adatai hányszorosát (hány %-át) teszik ki az alapul választott területi adatnak.

A példák megoldásánál mindig egy területet választunk ki bázisnak, és ehhez az értékhez viszonyítjuk a többi területhez tartozó értéket. A bázisterület helyes megválasztása nagyon fontos minden esetben, mivel ezen mutató segítségével könnyen jellemezhető egy területi adatbázis.

$$\text{Számítása: } V_t = \frac{\text{adott terület értéke}}{\text{bázis terület értéke}} \times 100 \text{ [\%]}$$

A kapott eredmény 100% felett azt jelenti, hogy a kiválasztott (bázis) területhez képest a vizsgált területünk MAGASABB volt (100% feletti résszel). A kapott eredmény 100% alatt azt jelenti, hogy a kiválasztott (bázis) területhez képest ALACSONYABB volt a kiválasztott terület értéke (100% és a kapott érték különbözetével).

Példa:

$V_t = 119\%$: a vizsgált terület értéke a kiválasztott (bázis) területhez képest 19%-kal magasabb.

$V_t = 56\%$: a vizsgált terület értéke a kiválasztott (bázis) területhez képest 44%-kal alacsonyabb.

2.2.3. A TELJESÍTMÉNY VISZONYSZÁMOK

A teljesítmény viszonyyszámok számításához minden esetben terv és tény adatok szükségesek. A teljesítmény viszonyyszámoknak két típusa létezik:

- ♦ **A tervteljesítési viszonyyszám**

Ebben az esetben egy időbeli ismerv (év, hónap, nap, perc, stb.) TERV és TÉNY adatára van szükségünk. Az adott időszak tény adatát szeretnénk megmutatni hogyan alakult az adott időszak terv adatához képest.

$$\text{Számítása: } V_{tt} = \frac{\text{adott időszak TÉNY értéke}}{\text{adott időszak TERV értéke}} \times 100 \text{ [\%]}$$

A kifejezési formája százalékos. Ha a tervteljesítési viszonyyszám 100% alatt van, akkor alul teljesítésről, míg 100% felett túlteljesítésről beszélünk.

Pl:

100% feletti eredménynél: A 120%-os tervteljesítési viszonyszám azt jelenti, hogy a vizsgált időszak terv adatához képest a vizsgált időszak tény értéke 20%-kal magasabb.

100% alatt eredménynél: A 90%-os tervteljesítési viszonyszám azt jelenti, hogy a vizsgált időszak terv adatához képest a vizsgált időszak tény értéke 10%-kal alacsonyabb.

♦ **A tervfeladat viszonyszám**

A tervfeladat viszonyszám kiszámításához az adott időszak terv értéke és a megelőző időszak tény adata szükséges. A kapott tervfeladat viszonyszám azt fejezi ki, hogy a megelőző időszak tény adatához képest, hány százalékos változást (csökkenést vagy növekedést) terveznek a következő (azaz az adott) időszakra.

$$\text{Számítása: } V_{\text{tf}} = \frac{\text{adott időszak TERV értéke}}{\text{megelőző időszak TÉNY értéke}} \times 100 \text{ [\%]}$$

Kifejezési formája százalékos. Amennyiben a tervfeladat viszonyszám 100% alatti van, akkor azt mondjuk, hogy a megelőző időszak tény adatához képest az adott időszak terv adata alacsonyabb. Amennyiben a tervfeladat viszonyszám 100% felett van, akkor azt mondjuk, hogy a megelőző időszak tény adatához képest az adott időszak terv adata magasabb.

Pl.

100% feletti eredménynél: A 109%-os tervfeladat viszonyszám azt jelenti, hogy a megelőző időszak tény adatához képest a vizsgált időszak terv értéke 9%-kal magasabb.

100% alatti eredménynél: A 77%-os tervfeladat viszonyszám azt jelenti, hogy a megelőző időszak tény adatához képest a vizsgált időszak terv értéke 23%-kal alacsonyabb.

Fontos összefüggésnek tekinthető, hogy a tervteljesítési viszonyszám és a tervfeladat viszonyszám szorzataként előállítható a dinamikus viszonyszám (Szűcs, 2004).

2.2.4. A KOORDINÁCIÓS VISZONYSZÁM

A koordinációs viszonyszám esetén ugyanabból a sokaságból származó két érték hányadosát képezzük (azaz két részsokaság egymáshoz viszonyított arányát képezzük). A kapott eredmény azt jelenti, hogy az egyik részsokaság egy egységére, a másik részsokaság hány egysége jut (Csipkés, 2019).

Számítása a $V_k = \frac{x_1}{x_2}$ képlettel történik, ahol V_k a koordinációs viszonyyszámot, az x_1 a viszonyított részsokaság értékét, míg az x_2 a viszonyítás alapjául szolgáló részsokaságot jelenti.

A koordinációs viszonyyszám értékét meg lehet adni az alapadatok mértékegységében, illetve százalékban is.

A koordinációs viszonyyszám értéke, ha százalékban van kifejezve, akkor 100% felett a vizsgált értékünk több a kiválasztott értékhez képest. 100% alatt a koordinációs viszonyyszám értékünk azt jelenti, hogy a vizsgált értékünk kevesebb a kiválasztott értékhez képest.

100% feletti koordinációs viszonyyszám: A 110%-os koordinációs viszonyyszám azt jelenti, hogy az alapértékhez képest a vizsgált értékünk 10%-kal több. A 110%-os érték természetes szám formátuma a 1,05.

100% alatti koordinációs viszonyyszám: A 65%-os koordinációs viszonyyszám azt jelenti, hogy az alapértékhez képest a vizsgált értékünk 35%-kal kevesebb. A 65%-os érték természetes szám formátuma a 0,65.

2.3. A különmemű adatokból számított viszonyyszámok

Ebbe a nagy csoportba egyetlen egy alcsoport tartozik, mely az **intenzitási viszonyyszám**. Az intenzitási viszonyyszám csak különmemű adatok összehasonlításával képezhető, ahol az adatok egymással logikai kapcsolatban állnak. A számításhoz leíró sorra van szükségünk. Az összes viszonyyszám közül az intenzitási viszonyyszám az egyedüli, ahol a kifejezési forma együtthatós és a kapott számnak mértékegysége van. A mértékegység minden esetben a számításban használt adatok mértékegységétől függ.

Az intenzitási viszonyyszám megmutatja, hogy az egyik jelenség a másik jelenséghez képest milyen gyakran fordul elő. A számításnál a nevezőbe az az adat kerül, melynek az egységére vonatkoztatjuk a másik adat mennyiségét (Nagy, 2019).

A számításoknál a leíró sor adatai több intenzitási viszonyyszám meghatározásánál is felhasználható (Csipkés, 2019). A kiszámításához általános képlet nincs, mivel minden esetben a meglévő adatok határozzák meg a képlet felépítését. Annyi biztos, hogy az intenzitási viszonyyszám esetén az egyik adatot arányosítjuk egy másik adathoz.

2.4. A viszonyszámok gyakorlati példái

2.4.1. A MEGOSZLÁSI VISZONYSZÁM – PÉLDA 1

Adott Magyarország összes régiójában a 2019. évben a hivatásos sportolók száma (1. táblázat):

1. TÁBLÁZAT: Magyarország összes hivatásos sportolójának a száma a 2019. évben

Régiók	Hivatásos sportolók száma (fő)
Észak-Magyarország	125
Észak-Alföld	164
Dél-Alföld	109
Közép-Magyarország	110
Közép-Dunántúl	164
Nyugat Dunántúl	170
Dél-Dunántúl	168

Forrás: Saját adatgyűjtés

Számítsa ki Magyarországon, hogy az egyes régióknak mekkora a részaránya a hivatásos sportolókat figyelembe véve.

2.4.2. A MEGOSZLÁSI VISZONYSZÁM – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A feladat megoldásához megoszlási viszonyszámot kell alkalmazni.

$$V_m = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i} \times 100 \quad [\%]$$

A képletben az x_i az egyes régiókhoz tartozó hivatásos sportolók száma (fő). A $\sum_{i=1}^n x_i$ a magyarországi hivatásos sportolók számát jelenti (1010 fő) (2. ábra).

A számolás első lépése, hogy kiszámoljuk a $\sum_{i=1}^n x_i$ értékét (1010 fő). A 1010 fő-t úgy kapjuk meg, hogy a 7 régió sportolóinak a számát összeadjuk (125+164+109+110+164+170+168).

A számolás második lépése, hogy új oszlopot készítünk „Megoszlási viszonyszám” elnevezéssel. Az új oszlopot úgy számoljuk ki, hogy az egyes régiók értékeit elosztjuk a magyarországi (1010 fő) értékkel. A hányados képzést követően a kapott eredményt MINDIG meg kell szorozni 100 értékével (így kapunk százalékos kifejezési formát).

Ha az össze megoszlási viszonyszám értékét összeadjuk, akkor 100%-ot kell kapnunk eredményként.

Régiók	Hívatásos sportolók száma (fő)	Megoszlási viszonyszám (%)		2. lépés
Észak-Magyarország	125	125/1010	12,38%	
Észak-Alföld	164	164/1010	16,24%	
Dél-Alföld	109	109/1010	10,79%	
Közép-Magyarország	110	110/1010	10,89%	
Közép-Dunántúl	164	164/1010	16,24%	
Nyugat-Dunántúl	170	170/1010	16,83%	
Dél-Dunántúl	168	168/1010	16,63%	
Összesen	1010		100,00%	
1. lépés		$(=125+164+109+110+164+170+168=1010)$		

2. ÁBRA: A magyarországi régiók megoszlása a hívatásos sportolók száma alapján a 2019. évben

Forrás: Saját kalkuláció

A kapott megoszlási viszonyszámok jellemzése:

- Észak-Magyarország 12,38%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 12,38% az Észak magyarországi régióban található a 2019. évben.
- Észak-Alföld 16,24%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 16,24% az Észak alföldi régióban található a 2019. évben.
- Dél-Alföld 10,79%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 10,79% a Dél alföldi régióban található a 2019. évben.
- Közép-Magyarország 10,89%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 10,89% a Közép magyarországi régióban található a 2019. évben.
- Közép-Dunántúl 16,24%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 16,24% a Közép dunántúli régióban található a 2019. évben.
- Nyugat-Dunántúl 16,83%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 16,83% az Nyugat dunántúli régióban található a 2019. évben.
- Dél-Dunántúl 16,63%: A magyarországi hívatásos sportolók közül 16,63% a Dél dunántúli régióban található a 2019. évben.

2.4.3. A MEGOSZLÁSI VISZONYSZÁM – PÉLDA 2

Adott a Dél alföldi régió megyék szerinti futópálya száma a 2019. évben (2. táblázat):

2. TÁBLÁZAT: A Dél alföldi régió megyék szerinti futópálya száma

Megye	Futópályák száma (db)
Bács-Kiskun	18
Békés	24
Csongrád	22

Forrás: Saját adatgyűjtés

Számítsa ki a Dél alföldi régió megyék szerinti megoszlását a futópályák számának az ismeretében.

2.4.4. A MEGOSZLÁSI VISZONYSZÁM – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

Megye	Futópályák száma (db)	Megoszlási viszonyszám (%)	2. lépés
Bács-Kiskun	18	28,13%	(18/64)
Békés	24	37,50%	(24/64)
Csongrád	22	34,38%	(22/64)
Összesen	1. lépés 64	100,00%	28,13%+37,5%+34,38%=100%

(18+24+22 = 64)

3. ÁBRA: A megoszlási viszonyszámok kiszámítása a futópályák száma alapján a Dél alföldi régióban

Forrás: Saját kalkuláció

Az első lépés az összesen érték meghatározása, mellyel megkapjuk a Dél alföldi régió értékét. Ezután új oszlopot készítünk, melynek neve a „Megoszlási viszonyszám”. Kiszámítása: adott megye értéke osztva az összesen értékkel (3. ábra).

A kapott megoszlási viszonyszámok jellemzése:

Bács-Kiskun megye 28,13%: A Dél alföldi régió 2019. évi adatai alapján a futópályák 28,13%-a Bács-Kiskun megyében található.

Békés megye 37,50%: A Dél alföldi régió 2019. évi adatai alapján a futópályák 37,50%-a Békés megyében található.

Csongrád megye 34,38%: A Dél alföldi régió 2019. évi adatai alapján a futópályák 34,38%-a Csongrád megyében található.

2.4.5. A KOORDINÁCIÓS VISZONYSZÁM – PÉLDA 1

Ismerjük Debrecen sportcipő és kézilabda forgalmát a 2017–2019. évek között (3. táblázat):

3. TÁBLÁZAT: A debreceni sportcipő és kézilabda forgalmának adatai 2017-2019. évek között

	Forgalom (Ft)	
	Sportcipő	Kézilabda
2017	789 000	468 000
2018	870 000	506 000
2019	1 015 000	768 000

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!
- Határozza meg a sportcipő és a kézilabda koordinációs viszonyszám értékét a vizsgált években. A sportcipőt válassza a bázis értékének.
- Határozza meg, hogy 1000 Ft értékű kézilabda forgalomra mennyi sportcipő forgalom jut.

2.4.6. A KOORDINÁCIÓS VISZONYSZÁM – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

- Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!

A példa megoldásához koordinációs viszonyszámot kell alkalmazni ($V_k = \frac{x_1}{x_2}$).

Az első lépésben a kérdést elolvastva ki kell szűrni, hogy milyen két érték alapján kell számolni (4. ábra). Ez a két érték: a „Sportcipő” és a „Labda”. Ezeket felírjuk egymás mellé, és alá beírjuk az adott év értékeit a táblázatból (tehát Sportcipő 789 000 Ft, Kézilabda 468 000 Ft).

a) Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!

	Forgalom (Ft)	
	Sportcipő	Labda
2017	789 000	468 000
2018	870 000	506 000
2019	1 015 000	768 000

Sportcipő	Kézilabda
789 000	468 000

4. ÁBRA: A koordinációs viszonyszám számítása I.

Forrás: Saját kalkuláció

Ezután a feladatból elolvassuk, hogy mi a kérdés: 1 Ft sportcipőre jutó forgalmat kell meghatározni. A kérdés alapján a 789 000 Ft alá beírjuk az 1 Ft-ot (5. ábra). A 468 000 Ft alá pedig az „x” értéket, mivel ezt szeretnénk eredményként megkapni (5. ábra).

A hiányzó adat számítása $\frac{1}{789\,000} \times 468\,000 = 0,59$. Tehát 1 Ft sportcipő forgalomra jutó kézilabda forgalom 0,59 Ft.

a) Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!

	Forgalom (Ft)	
	Sportcipő	Labda
2017	789 000	468 000
2018	870 000	506 000
2019	1 015 000	768 000

Sportcipő	Kézilabda
789 000	468 000
1	x

$$x = (1/789000) \cdot 468000$$

0,59 Ft

5. ÁBRA: A koordinációs viszonszám számítása II.

Forrás: Saját kalkuláció

A több év kiszámolása (6. és 7. ábra):

a) Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!

	Forgalom (Ft)	
	Sportcipő	Labda
2017	789 000	468 000
2018	870 000	506 000
2019	1 015 000	768 000

Sportcipő	Kézilabda
870 000	506 000
1	x

$$x = (1/870000) \cdot 506000$$

0,58 Ft

6. ÁBRA: A koordinációs viszonszám számítása III.

Forrás: Saját kalkuláció

A hiányzó adat számítása $\frac{1}{870\,000} \times 506\,000 = 0,58$. Tehát 1 Ft sportcipő forgalomra jutó kézilabda forgalom 0,58 Ft.

a) Határozza meg, hogy 1 Ft sportcipő forgalomra mennyi Ft kézilabda forgalom jut az egyes vizsgált években!

	Forgalom (Ft)	
	Sportcipő	Labda
2017	789 000	468 000
2018	870 000	506 000
2019	1 015 000	768 000

	Sportcipő	Kézilabda
2019	1 015 000	768 000
	1	x

$$x = (1/1015000) * 768000$$

$$0,76 \quad \text{Ft}$$

7. ÁBRA: A koordinációs viszonyszám számítása IV.

Forrás: Saját kalkuláció

A hiányzó adat számítása $\frac{1}{1\,015\,000} \times 768\,000 = 0,76$. Tehát 1 Ft sportcipő forgalomra jutó kézilabda forgalom 0,76 Ft.

b) Határozza meg a sportcipő és a kézilabda koordinációs viszonyszám értékét a vizsgált években. A sportcipőt válassza a bázis értékének.

A számítása ugyanolyan módon történik, mint az a) részben, csak százalékra át kell alakítani az értékeinket. Azaz:

2017. évben: $0,59 * 100 = 59\%$. Tehát a 2017. évben tehát a koordinációs viszonyszám értékünk 59%.

2018. évben: $0,58 * 100 = 58\%$. Tehát a 2018. évben tehát a koordinációs viszonyszám értékünk 58%.

2019. évben: $0,76 * 100 = 76\%$. Tehát a 2019. évben tehát a koordinációs viszonyszám értékünk 76%.

c) Határozza meg, hogy 1000 Ft értékű kézilabda forgalomra mennyi sportcipő forgalom jut.

Ezen példát az a) részben leírtak alapján kell megcsinálni, annyi különbséggel, hogy nem 1 Ft-ra kell számolni, hanem 1000 Ft forgalomra. Az egyes évekhez tartozó számításokat a 8., 9. és 10. ábrán mutatom be.

2.4.7. A KOORDINÁCIÓS VISZONYSZÁM – PÉLDA 2

A versenyzők száma nemek szerinti megoszlásban Magyarországon a 2019. évben:

Férfi: 5 460 fő

Nő: 3 990 fő

a) Határozzuk meg, hogy 1 fő férfi versenyzőre hány fő női versenyző jut!

b) Határozzuk meg, hogy 1 nő versenyzőre hány fő férfiversenyző jut!

2.4.8. A KOORDINÁCIÓS VISZONYSZÁM – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

a) Határozzuk meg, hogy 1 fő férfi versenyzőre hány fő női versenyző jut!

A feladat megoldásához koordinációs viszonyyszámot alkalmazunk. Felírjuk, hogy „Férfi (fő)” és „Nő (fő)”. Alá felírjuk a feladatban szereplő adatokat. Mivel az a kérdés, hogy 1 fő férfire hány fő nő jut, ezért az 1 értékét a férfi oszlopba írjuk fel (11. ábra).

Férfi (fő)	Nő (fő)
5460	3990
1	x

$$x = 0,73077$$

11. ÁBRA: A koordinációs viszonyyszám számítása VII.

Forrás: Saját kalkuláció

Az eredményünk: $\frac{1}{5460} \times 3990 = 0,7307$.

Tehát egy fő férfire 0,73 fő nő jut. Nem kell megijedni, hogy 0,73 fő értékét kaptuk. A most kiszámolt érték csak egy mutató, így törtszámot és tizedes jegyes eredményt is kaphatunk eredményül.

b) Határozzuk meg, hogy 1 nő versenyzőre hány fő férfiversenyző jut!

A feladat megoldásához koordinációs viszonyyszámot alkalmazunk. Felírjuk, hogy „Férfi (fő)” és „Nő (fő)”. Alá felírjuk a feladatban szereplő adatokat. Mivel az a kérdés, hogy 1 fő nőre hány fő férfi jut, ezért az 1 értékét a nő oszlopba írjuk fel (12. ábra).

Férfi (fő)	Nő (fő)
5460	3990
x	1

$$x = 1,36842$$

12. ÁBRA: A koordinációs viszonyyszám számítása VIII.

Forrás: Saját kalkuláció

Az eredményünk: $\frac{1}{3990} \times 5460 = 1,3684$.

Tehát egy fő nőre 1,37 fő férfi jut. Nem kell megjedni, hogy 1,37 fő eredményt kaptuk itt is. A most kiszámolt érték csak egy mutató, így törtszámot és tizedes jegyes eredményt is kaphatunk eredményül.

2.4.9. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1

Egy Hajdúszoboszlón működő Sportegyesület utolsó 5 évére vonatkozó gólszámaikat ismerjük 2015. évtől 2019. évig (4. táblázat):

4. TÁBLÁZAT: A vállalkozás ismert adatai a teljes munkaidőben dolgozókra vonatkozóan

Év	Gólok száma (db)
2015	159
2016	150
2017	143
2018	140
2019	133

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Számítsa ki a gólszámok alakulását a 2015. bázisévhez képest!
- Számítsa ki a gólszámok változását az előző évhez képest!
- Mutassa be hogyan számíthatók ki a bázisviszonszámok felhasználásával a láncviszonszámok!
- Mutassa be hogyan számíthatók ki a láncviszonszámok felhasználásával a bázisviszonszámok!

2.4.10. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

a) Számítsa ki a gólszámok alakulását a 2015. bázisévhez képest!

Mivel a feladatban az van benne, hogy a „bázis évhez” képest kell az arányosítást elvégezni, így ezen feladatrészen bázisviszonszámot kell kalkulálni.

$$V_{Bi} = \frac{x_i}{x_0} \times 100 \quad [\%]$$

A képlet számlálója (x_i) az egyes évekhez tartozó gólszámokat jelenti. A nevező (x_0) minden esetben a bázisul választott évhez tartozó érték, esetünkben a 2015. évhez tartozó 159 gól. Tehát egy új oszlopot készítünk el az alap táblázat mellé és felírjuk, hogy „Bázisviszonszám (%)” (13. ábra).

A számításnál figyeljünk arra, hogy minden év értékét a 2015. évhez tartozó értékkel kell elosztani (159 gól).

Év	Gólok száma (db)	Bázisviszonyyszám (%)
2015	159	=159/159 100,00%
2016	150	=150/159 94,34%
2017	143	=143/159 89,94%
2018	140	=140/159 88,05%
2019	133	=133/159 83,65%

13. ÁBRA: A bázisviszonyyszámok számítása a gólszámoknál

Forrás: Saját kalkuláció

Az egyes évekhez tartozó értékek:

2015. év: $(159/159) \times 100 = 100,00\%$

2016. év: $(150/159) \times 100 = 94,34\%$

2017. év: $(143/159) \times 100 = 89,94\%$

2018. év: $(140/159) \times 100 = 88,05\%$

2019. év: $(133/159) \times 100 = 83,65\%$

A kapott értékek jelentése:

- 2015. év 100,00%: A bázis év mindig 100% (ez egy törvényszerűség).
- 2016. év 94,34%: A 2015. bázis évhez képest a 2016. évi gólszám $(94,34\% - 100,00\% = -5,66\%)$ 5,66%-kal alacsonyabb.
- 2017. év 89,94%: A 2015. bázis évhez képest a 2017. évi gólszám $(89,94\% - 100,00\% = -10,06\%)$ 10,06%-kal alacsonyabb.
- 2018. év 88,05%: A 2015. bázis évhez képest a 2018. évi gólszám $(88,05\% - 100,00\% = -11,95\%)$ 11,95%-kal alacsonyabb.
- 2019. év 83,65%: A 2015. bázis évhez képest a 2019. évi gólszám $(83,65\% - 100,00\% = -16,35\%)$ 16,35%-kal alacsonyabb.

A „Bázisviszonyyszám (%)” elnevezésű oszlopban szerepelő eredmények lehetnek 100% alatti és 100% feletti is (példában csak 100% alatti értékek vannak). A 100% alatti eredménynél csökkenésről, 100% felett eredménynél növekedésről beszélhetünk.

b) Számítsa ki a gólszámok alakulását az előző évhez képest!

Mivel a feladatban az szerepel, hogy az „előző évhez” képest kell az arányosítást elvégezni, így ezen feladatrészen láncviszonyyszámot kell kalkulálni.

$$V_{Li} = \frac{x_i}{x_{i-1}} \times 100 \quad [\%]$$

A képlet számlálója (x_j) az egyes évekhez tartozó gólszámokat jelenti. A nevező (x_0) minden esetben a megelőző évhez tartozó gólszámot jelenti. Tehát egy új oszlopot készítettünk el az alap táblázat mellé és felírjuk, hogy „Láncviszonyszám (%)” (14. ábra).

A számításnál figyeljünk arra, hogy minden év értékét az előző év értékével osztjuk el.

Év	Gólok száma (db)	Láncviszonyszám (%)	
2015	159	=159/??	-
2016	150	=150/159	94,34%
2017	143	=143/150	95,33%
2018	140	=140/143	97,90%
2019	133	=133/140	95,00%

14. ÁBRA: A láncviszonyszámok kiszámítása a gólszámok esetén

Forrás: Saját kalkuláció

Az egyes évekhez tartozó értékek:

2015. év: $(159/??) \times 100 = -$

2016. év: $(150/159) \times 100 = 94,34\%$

2017. év: $(143/150) \times 100 = 95,33\%$

2018. év: $(140/143) \times 100 = 97,90\%$

2019. év: $(133/140) \times 100 = 95,00\%$

A kapott értékek jelentése:

- ♦ 2015. év -: Nem ismerjük a 2014. év adatát, így sajnos nem lehet az első értéket kiszámolni (Ezt soha nem lehet kiszámolni).
- ♦ 2016. év 94,34%: A 2015. évhez képest a 2016. évi gólszám $(94,34\% - 100,00\% = -5,66\%)$ 5,66%-kal alacsonyabb.
- ♦ 2017. év 95,33%: A 2016. évhez képest a 2017. évi gólszám $(95,33\% - 100,00\% = -4,67\%)$ 4,67%-kal alacsonyabb.
- ♦ 2018. év 97,90%: A 2017. évhez képest a 2018. évi gólszám $(97,90\% - 100,00\% = -2,1\%)$ 2,1%-kal alacsonyabb.
- ♦ 2019. év 95,00%: A 2018. évhez képest a 2019. évi gólszám $(95,00\% - 100,00\% = -5,00\%)$ 5,00%-kal alacsonyabb.

A „Láncviszonyszám (%)” megnevezésű oszlopban szerepelő eredmények lehetnek 100% alatti és 100% feletti is (példában csak 100% alatti értékek vannak). A 100% alatti eredményről csökkenésről, 100% felett eredményről növekedésről beszélhetünk.

c) Mutassa be hogyan számíthatók ki a bázisviszonyyszámok felhasználásával a láncviszonyyszámok!

Az adott időszak láncviszonyyszám értékét úgy kapjuk meg, hogy az adott időszakhoz tartozó bázis viszonyyszám értékét elosztjuk a megelőző időszak bázis viszonyyszám értékével (15. ábra).

$$V_{Ln} = \frac{V_{B_n}}{V_{B_{n-1}}} \times 100 \quad [\%]$$

Év	Gólok száma (db)	Bázisviszonyyszám (%)	Láncviszonyyszám (%)	Bázisviszonyyszámból számított lánc viszonyyszám (%)		
2015	159	100,0%	-	-	=	100%
2016	150	94,3%	94,34%	=94,3%/100%	=	94,34%
2017	143	89,9%	95,33%	= 89,9%/94,3%	=	95,33%
2018	140	88,1%	97,90%	=88,1%/89,9%	=	97,90%
2019	133	83,6%	95,00%	=83,6%/88,1%	=	95,00%

15. ÁBRA: Láncviszonyyszám számítása bázisviszonyyszámból

Forrás: Saját kalkuláció

2015. év: Mivel az első időszak lánc viszonyyszám értékét nem lehet kiszámolni, így ennek számításával nem kell foglalkozni (nem ismerjük a 2014. évi bázis viszonyyszámot, így nem kell kiszámolni).

$$2016. \text{ év: } \frac{2016. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}}{2015. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}} = \frac{94,30\%}{100,00\%} = 94,30\%$$

$$2017. \text{ év: } \frac{2017. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}}{2016. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}} = \frac{89,9\%}{94,3\%} = 95,33\%$$

$$2018. \text{ év: } \frac{2018. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}}{2017. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}} = \frac{88,1\%}{89,9\%} = 97,90\%$$

$$2019. \text{ év: } \frac{2019. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}}{2018. \text{ évi bázis viszonyyszám értéke}} = \frac{83,6\%}{88,1\%} = 95,00\%$$

d) Mutassa be hogyan számíthatók ki a láncviszonyyszámok felhasználásával a bázisviszonyyszámok!

A láncviszonyyszámok felhasználásával bázis viszonyyszámot úgy tudunk számolni, ha az adott időszakig összeszorozzuk a kezdő időszaktól kezdődően az összes láncviszonyyszámot (16. ábra).

$$V_{Bn} = V_{L_2} \times V_{L_3} \times V_{L_4} \times \dots \times V_{L_n}$$

Év	Gólok száma (db)	Bázis-viszonyyszám (%)	Lánc-viszonyyszám (%)	Láncviszonyyszámból számított bázis viszonyyszám (%)	
2015	159	100,00%	-	100% =	100%
2016	150	94,34%	94,34%	=0,9434	= 94,34%
2017	143	89,94%	95,33%	=0,9434*0,9533	= 89,94%
2018	140	88,05%	97,90%	=0,9434*0,9533*0,9790	= 88,05%
2019	133	83,65%	95,00%	=0,9434*0,9533*0,9790*0,9500	= 83,65%

16. ÁBRA: Láncviszonyyszám számítása bázisviszonyyszámból

Forrás: Saját kalkuláció

2015. év: Az első időszak értéke 100%, mivel az első bázis viszonyyszám értéke mindig szabályszerűen 100%.

2016. év: 2015. évi láncviszonyyszám $\times$ 2016. évi láncviszonyyszám (0,9434)

2017. év: 2015. évi láncviszonyyszám $\times$ 2016. évi láncviszonyyszám $\times$ 2017. évi láncviszonyyszám (0,9434 $\times$ 0,9533)

2018. év: 2015. évi láncviszonyyszám $\times$ 2016. évi láncviszonyyszám $\times$ 2017. évi láncviszonyyszám $\times$ 2018. évi láncviszonyyszám (0,9434 $\times$ 0,9533 $\times$ 0,9790)

2019. év: 2015. évi láncviszonyyszám $\times$ 2016. évi láncviszonyyszám $\times$ 2017. évi láncviszonyyszám $\times$ 2018. évi láncviszonyyszám $\times$ 2019. évi láncviszonyyszám (0,9434 $\times$ 0,9533 $\times$ 0,9790 $\times$ 0,9500)

2.4.11. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2

Összegyűjtöttem, hogy Magyarországon az egyes években 2013. évtől a 2019. évig mennyi kézilabda meccs volt hivatalosan (darabban kifejezve) (5. táblázat).

5. TÁBLÁZAT: A kézilabda meccsek száma Magyarországon 2013–2019 között

Év	Kézilabda meccsek száma (db)
2013	315
2014	264
2015	270
2016	304
2017	318
2018	325
2019	340

Forrás: Saját adatgyűjtés

- a) Számítsa ki a kézilabda meccsek változásának a mértékét (a 2013. évhez képest)!
- b) Számítsa ki a kézilabda meccsek változásának az ütemét!
- c) Mutassa be hogyan számíthatók ki a bázisviszonyyszámok felhasználásával a láncviszonyyszámok!
- d) Mutassa be hogyan számíthatók ki a láncviszonyyszámok felhasználásával a bázisviszonyyszámok!

2.4.12. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

a) Számítsa ki a kézilabda meccsek változásának mértékét (a 2013. évhez képest)!

A változás mértékét a bázisviszonyyszám segítségével tudjuk meghatározni (17. ábra).

Év	Kézilabda meccsek száma (db)	Bázisviszonyyszám (%)
2013	315	$=315/315$ 100,00%
2014	264	$=264/315$ 83,81%
2015	270	$=270/315$ 85,71%
2016	304	$=304/315$ 96,51%
2017	318	$=318/315$ 100,95%
2018	325	$=325/315$ 103,17%
2019	340	$=340/315$ 107,94%

17. ÁBRA: A bázisviszonyyszámok kiszámítása a kézilabda meccsek alakulásának az elemzéséhez

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés például:

2019. évi 107,94%: A 2013. bázis évhez képest a 2019. évi kézilabda meccsek száma ($107,94\% - 100,00\% = 7,94\%$) 7,94%-kal növekedtek meg.

2016. évi 96,51%: A 2013. bázis évhez képest a 2016. évi kézilabda meccsek száma ($96,51\% - 100,00\% = -3,49\%$) 3,49%-kal csökkentek.

b) Számítsa ki a kézilabda meccsek változásának az ütemét!

A változás ütemét a láncviszonszám kiszámításával lehet meghatározni (18. ábra).

Év	Kézilabda meccsek száma (db)	Láncviszonszám (%)	
2013	315	=315/??	-
2014	264	=264/315	83,81%
2015	270	=270/264	102,27%
2016	304	=304/270	112,59%
2017	318	=318/304	104,61%
2018	325	=325/318	102,20%
2019	340	=340/325	104,62%

18. ÁBRA: A láncviszonszámok kiszámítása a kézilabda meccsek számára vonatkozóan

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés például:

2014. év 83,81%: A 2013. évi kézilabda meccsek számához képest a 2014. évi meccsek száma ($83,81\% - 100,00\% = -16,19\%$) 16,19%-kal voltak alacsonyabbak.

2019. év 104,62%: A 2018. évi kézilabda meccsek számához képest a 2019. évi meccsek száma ($104,62\% - 100,00\% = 4,62\%$) 4,62%-kal voltak magasabbak.

2.4.13. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK – PÉLDA 3 („LUKAS TÁBLA”)

Adott egy debreceni vállalkozás árbevétel adatai a 2015–2020 közötti időszakban. Számoljuk ki a hiányzó adatokat a bázis- és láncviszonszámok felhasználásával!

Év	Árbevétel (millió Ft)	A 2015. bázis évhez képest a %-os változás 2015=100%	Az előző évhez képest a %-os változás Előző év=100%	Az előző évhez képest (millió Ft)
2015				
2016			104,0%	
2017		87,0%		
2018				
2019			115,0%	
2020		120,0%		

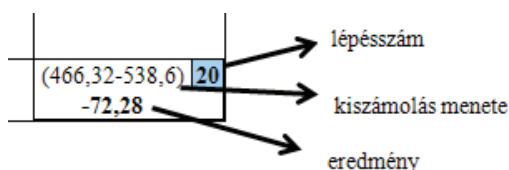
19. ÁBRA: Az üres táblázat felépítése

Forrás: Saját kalkuláció

Kiegészítő információ: 2015. gazdasági évhez képest 2019. évre 38,6%-kal növekedett meg a debreceni vállalkozás árbevétele, ami 150 millió Ft-os árbevétel növekedést jelent a bázisévhez képest (19. ábra).

2.4.14. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYYSZÁMOK PÉLDA 3 („LUKAS” TÁBLA) MEGOLDÁSA

A lukas tábla kitöltéséhez egy egység táblát készítettem el, ahol minden cellában feltüntettem az adott lépés számát (kékkel), a kiszámolt eredményt, illetve az eredmény eléréshez szükséges számszerű levezetést (20. ábra).



20. ÁBRA: A cellák eljelölése az üres táblázat esetén

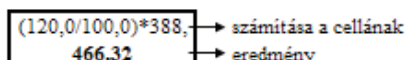
Forrás: Saját összeállítás

A megoldást a következő ábrán találjuk (21. ábra):

Év	Árbevétel (millió Ft)	A 2015. bázisévhez képest a %-os változás 2015=100%	Az előző évhez képest a %-os változás Előző év=100%	Az előző évhez képest (millió Ft)
2015	388,6	Bázisév 100,0%	Nincs előző év	Nincs előző év
2016	(104,0/100,0)*388,6 404,14	V _{DV2006} 104,0%	104,0%	(404,14-388,6) +15,54
2017	(87,0/100,0)*388,6 338,1	87,0%	(338,1/404,14)*10 83,7%	(338,1-404,14) -66,04
2018	468,35	(468,35/388,6)*100 120,5%	(468,35/338,6)*10 138,5%	(468,35-338,1) +130,25
2019	(388,6+150,0) 538,6	(100,0+38,6) 138,6%	115,0%	(538,6-468,35) +70,25
2020	(120,0/100,0)*388,6 466,32	120,0%	(466,32/538,6)*10 86,6%	(466,32-538,6) -72,28

Jelmagyarázat:

adott érték	6. rész megoldása $x \rightarrow 100\%$ $x+150 \rightarrow 138,6\%$	13. rész megoldása $x \rightarrow 100\%$ $538,6 \rightarrow 115,0\%$
számolás sorrendje	$138,6x=100*(x+150)$ $x=388,6$	$115,0x=100*538,6$ $x=468,35$



21. ÁBRA: A lukas tábla kiszámításának a menete

Forrás: Saját kalkuláció

2.4.15. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK – PÉLDA 4 („LUKAS” TÁBLA)

Adott a Debreceni Egyetem egyik hallgatójának a heti zsebpénz értékei a vizsgált időszakban. Számoljuk ki a hiányzó adatokat! Keddről szerdára a zsebpénznövekedés ugyanakkora volt, mint szombatról vasárnapra. Szerdáról csütörtökre 12,5 Ft-tal nőtt a kapott zsebpénz.

Napok	Zsebpénz Ft	Hétfőhöz képest %- ban Hétfő =100%	Az előző naphoz képest a változás %-ban Előző nap =100%	Hétfőhöz képest Ft
Hétfő				
Kedd		102,7%		
Szerda				
Csütörtök			100,50%	
Péntek		96,0%		
Szombat			107,0%	
Vasárnap			113,0%	

22. ÁBRA: A lukas tábla felépítése

Forrás: Saját összeállítás

2.4.16. A BÁZIS- ÉS LÁNCVISZONYSZÁMOK PÉLDA 4 („LUKAS” TÁBLA) MEGOLDÁSA

Napok	Zsebpénz Ft	Hétfőhöz képest %- ban (V_{DA}) Hétfő =100%	Az előző naphoz képest a változás %- ban (V_{DV}) Előző nap =100%	Hétfőhöz képest Ft
Hétfő	$(100/102,7)*2212,4$ 2154,2	Bázisév 100,0%	Nincs előző nap -	Nincs előző -
Kedd	2212,4	102,7%	V_{DAKedd} 102,7%	2154,2-2212,4 +58,2
Szerda	2500	$1,027*1,13$ 116,05%	kiegészítő infó 113,0%	2154,2-2500,0 +345,8
Csütörtök	$2500+12,5$ 2512,5	$(2512,5/2154,2)*10$ 116,6%	100,50%	2154,2-2512,5 +358,3
Péntek	$(96/100)*2154,2$ 2068	96,0%	$(96/116,6)*100$ 82,3%	2154,2-2068,0 -86,2
Szombat	$2068*1,07$ 2212,8	$(2212,8/2154,2)*10$ 102,7%	107,0%	2154,2-2212,8 +58,6
Vasárnap	$2212,8*1,13$ 2500,5	$(2500,5/2154,2)*10$ 116,1%	113,0%	2154,2-2500,5 +346,3

Jelmagyarázat:

 adott érték számolás sorrendje

7. rész megoldása

 $x \rightarrow 100\%$ $x+12,5 \rightarrow 100,5\%$
 $100,5x = 100*(x+12,5)$
 $x = 2500$

9. rész megoldása

 $x \rightarrow 100\%$ $2500 \rightarrow 113,0\%$
 $113x = 250000$
 $x = 2212,4$

23. ÁBRA: A hiányzó adatok kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

2.4.17. A TERÜLETI ÖSSZEHASONLÍTÓ VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1

Adott néhány Hajdú-Bihar megyei város fociplátyáinak a száma a 2019. évben (6. táblázat):

6. TÁBLÁZAT: A fociplátyák száma a vizsgált városokban

Megnevezés	Fociplátyák száma (db)
Kaba	2
Hajdúszoboszló	8
Debrecen	15
Hajdúböszörmény	6

Forrás: Saját szerkesztés

Határozza meg a focipályák számának területi megoszlását a hajdúszoboszlói focipálya számhoz képest!

2.4.18. A TERÜLETI ÖSSZEHASONLÍTÓ VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A feladat megoldásához területi viszonyszámot kell alkalmazni ($V_{\text{terület}} = \frac{x_{A \text{ terület}}}{x_{B \text{ terület}}}$).

Az $x_{A \text{ terület}}$ a vizsgált városok értékeit jelenti, míg az $x_{B \text{ terület}}$ a bázisnak választott terület értékét jelenti. A feladatunkban a bázis terület a hajdúszoboszlói focipályák száma (8 darab).

A feladat megoldása azzal kezdődik, hogy az eredeti táblázat mellé egy új oszlopot készítünk (24. ábra), melynek elnevezése „Területi viszonyszám (%)”.

Megnevezés	Focipályák száma (db)	Területi viszonyszám (%)	
Kaba	2	2/8	25,00%
Hajdúszoboszló	8	8/8	100,00%
Debrecen	15	15/8	187,50%
Hajdúböszörmény	6	6/8	75,00%

24. ÁBRA: A területi összehasonlító viszonyszámok kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Minden területi értéket a 8 darab (hajdúszoboszlói) értékkel kell elosztani.

A kapott eredmények jelentése:

Kaba 25,0%: A hajdúszoboszlói focipályák számához képest a kabai focipályák száma 75%-kal KEVESEBB ($25\% - 100\% = -75\%$).

Hajdúszoboszló 100,0%: Nem kell lejellemmezni, mivel ez a bázis terület, ennek értéke mindig 100%.

Debrecen 187,5%: A hajdúszoboszlói focipályák számához képest a debreceni focipályák száma 87,5%-kal TÖBB ($187,5\% - 100\% = +87,5\%$).

Hajdúböszörmény 75,0%: A hajdúszoboszlói focipályák számához képest a hajdúböszörményi focipályák száma 25%-kal KEVESEBB ($75\% - 100\% = -25\%$).

2.4.19. A TERÜLETI ÖSSZEHASONLÍTÓ VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2

Adott Magyarország néhány megyéjének a kézilabda csapatszáma a 2019. évben. (7. táblázat).

Feladat: Határozza meg a csapatok megyék szerinti megoszlását Somogy megyei csapatszámhoz képest a 2019. évben.

7. TÁBLÁZAT: Kézilabda csapatok száma a vizsgált megyékben a 2019. évben

Megnevezés	Kézilabda csapatok száma (db)
Hajdú Bihar	14
Zala	9
Veszprém	25
Somogy	12
Pest	21
Heves	11

Forrás: Saját szerkesztés

2.4.20. A TERÜLETI ÖSSZEHAJONLÍTÓ VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

Megnevezés	Kézilabda csapatok száma (db)	Területi viszonyszám (%)	
Hajdú Bihar	14	14/12	116,67%
Zala	9	9/12	75,00%
Veszprém	25	25/12	208,33%
Somogy	12	12/12	100,00%
Pest	21	21/12	175,00%
Heves	11	11/12	91,67%

25. ÁBRA: A területi összehasonlító viszonyszámok kiszámítása

Forrás: Saját szerkesztés

Értelmezése a kapott eredményeknek:

Hajdú Bihar megyében Somogy megyéhez képest 16,67%-kal több a kézilabda csapatok száma a 2019. évben (25. ábra).

Zala megyében Somogy megyéhez képest 25%-kal kevesebb a kézilabda csapatok száma a 2019. évben.

Veszprém megyében Somogy megyéhez képest 108,33%-kal több a kézilabda csapatok száma a 2019. évben.

Somogy megye a bázis, ezért ennek az értéke 100%.

Pest megyében Somogy megyéhez képest 75%-kal több a kézilabda csapatok száma a 2019. évben.

Heves megyében Somogy megyéhez képest 8,33%-kal több a kézilabda csapatok száma a 2019. évben.

2.4.21. A TELJESÍTMÉNY VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1

Ismert néhány magyarországi város kézilabda meccseinek a száma, melyet az adott város szervezett a 2019. évben (8. táblázat).

8. TÁBLÁZAT: A 2019. évre tervezett és megvalósult kézilabda meccsek száma az egyes városokban

Városok	Tervezett	Tényleges
	érték (db)	
Debrecen	25	27
Szeged	35	30
Szolnok	30	27
Pécs	21	24

Forrás: Saját adatgyűjtés

- a) Határozza a 2019. év tervteljesítési viszonyszámait.
- b) Határozza meg a 2019. év tervfeladat viszonyszámait!

2.4.22. A TELJESÍTMÉNY VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

a) Határozza a 2019. év tervteljesítési viszonyszámait.

A tervteljesítési viszonyszámok kiszámításához a következő képletet kell alkalmazni:

$$V_{tt} = \frac{\text{adott időszak TÉNY értéke}}{\text{adott időszak TERV értéke}} \times 100 \quad [\%]$$

Debrecen esetében: $\frac{27}{25} = 1,08 \Rightarrow \times 100 = 108,0\%$. A tervezett értékhez képest a tényleges kézilabdameccsek száma 8%-kal volt magasabb a 2019. évben.

Szeged esetében: $\frac{30}{35} = 0,8571 \Rightarrow \times 100 = 85,71\%$. A tervezett értékhez képest a tényleges kézilabdameccsek száma $(85,74\% - 100,00\% = -14,26\%)$ 14,26%-kal volt alacsonyabb a 2019. évben.

Szolnok esetében: $\frac{27}{30} = 0,9 \Rightarrow \times 100 = 90,0\%$. A tervezett értékhez képest a tényleges kézilabdameccsek száma $(90,0\% - 100,00\% = -10,0\%)$ 10,0%-kal volt alacsonyabb a 2019. évben.

Pécs esetén: $\frac{24}{21} = 1,1429 \Rightarrow \times 100 = 114,29\%$. A tervezett értékhez képest a tényleges kézilabdameccsek száma ($114,29\% - 100,0\% = 14,29\%$) 14,29%-kal volt magasabb a 2019. évben.

b) Határozza meg a 2019. év tervfeladat viszonyyszámait!

A tervfeladat viszonyyszám kiszámításához a következő képletet kell alkalmaznunk.

$$V_{tf} = \frac{\text{adott időszak TERV értéke}}{\text{megelőző időszak TÉNY értéke}} \times 100 \quad [\%]$$

Mivel a példában csak egy év adata van megadva, így itt nem lehet számolni tervfeladat viszonyyszámot. Az adott évünk a 2019. év, a megelőző év a 2018. év lenne, de ez nincs megadva.

2.4.23. A TELJESÍTMÉNY VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2

Ismert 6 futóversenyző, akik 2018. és 2019. években pontosan számolták, hogy hány kilométert futottak le összesen a részt vett versenyek alatt. Ismert mindkét évre a tervezett és tényleges kilométer nagysága is (9. táblázat).

9. TÁBLÁZAT: A vállalkozás nettó jövedelemre vonatkozó ismert adatai

Versenyzők	2018. év		2019. év	
	Tervezett	Tényleges	Tervezett	Tényleges
	érték (km)		érték (db)	
Kovács Evelin	125	134	140	130
Tóth Katinka	130	118	125	130
Mészáros Daniella	150	144	155	140
Szemere Éva	178	160	160	160
Soós Anita	190	201	210	196
Teve Mónika	200	204	200	197

Forrás: Saját szerkesztés

a) Határozza meg az összes tervteljesítési viszonyyszámot!

b) Határozza meg a 2019. év tervfeladat viszonyyszámait!

2.4.24. A TELJESÍTMÉNY VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

a) Határozza meg az összes tervteljesítési viszonyszámot!

Először a 2018. évi tervteljesítési viszonyszámát számoljuk ki (26. ábra):

Versenyzők	2018. év		Tervteljesítési viszonyszám %	
	Tervezett	Tényleges		
	érték (km)			
Kovács Evelin	125	134	134/125	107,20%
Tóth Katinka	130	118	118/130	90,77%
Mészáros Daniella	150	144	144/150	96,00%
Szemere Éva	178	160	160/178	89,89%
Soós Anita	190	201	201/190	105,79%
Teve Mónika	200	204	204/200	102,00%

26. ÁBRA: A 2018. évi tervteljesítési viszonyszámok

Forrás: Saját kalkuláció

A kapott eredmények elemzése:

Kovács Evelin: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 7,2%-kal több km-t futott a versenyző.

Tóth Katinka: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 9,23%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Mészáros Daniella: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 4,00%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Szemere Éva: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 10,11%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Soós Anita: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 5,79%-kal több km-t futott a versenyző.

Teve Anita: A 2018. évben a tervezett értékhez képest 2,00%-kal több km-t futott a versenyző.

Másodjára pedig a 2019. évi tervteljesítési viszonyszámot számoljuk ki (27. ábra):

Versenyzők	2019.év		Tervteljesítési viszonyszám %	
	Tervezett	Tényleges		
	érték (db)			
Kovács Evelin	140	130	130/140	92,86%
Tóth Katinka	125	130	130/125	104,00%
Mészáros Daniella	155	140	140/155	90,32%
Szemere Éva	160	160	160/160	100,00%
Soós Anita	210	196	196/210	93,33%
Teve Mónika	200	197	197/200	98,50%

27. ÁBRA: A 2019. évi tervteljesítési viszonyszámok a megtett km-ekre

Forrás: Saját kalkuláció

A kapott eredmények értelmezése:

Kovács Evelin: A 2019. évben a tervezett értékhez képest 7,14%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Tóth Katinka: A 2019. évben a tervezett értékhez képest 4,00%-kal több km-t futott a versenyző.

Mészáros Daniella: A 2019. évben a tervezett értékhez képest 9,68%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Szemere Éva: A 2019. évben a tervezett értékhez képest ugyanannyi km-t futott a versenyző.

Soós Anita: A 2019. évben a tervezett értékhez képest 6,67%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

Teve Anita: A 2019. évben a tervezett értékhez képest 1,50%-kal kevesebb km-t futott a versenyző.

b) Határozza meg a 2019. év tervfeladat viszonyszámait!

A példára vonatkozóan csak a 2019. évi tervfeladat viszonyszám számolható ki (adott év = 2019. év, megelőző év = 2018. év) (28. ábra):

Versenyzők	2018. év		2019.év		2019. év tervforgalom értéke	
	Tervezett	Tényleges	Tervezett	Tényleges		
	érték (km)		érték (db)			
Kovács Evelin	125	134	140	130	140/134	104,48%
Tóth Katinka	130	118	125	130	125/118	105,93%
Mészáros Daniella	150	144	155	140	155/144	107,64%
Szemere Éva	178	160	160	160	160/160	100,00%
Soós Anita	190	201	210	196	210/201	104,48%
Teve Mónika	200	204	200	197	200/204	98,04%
		megelőző időszak tény értéke	adott időszak terv értéke			

28. ÁBRA: A tervfeladat viszonyszám kiszámítása a megtett km-re vonatkozóan

Forrás: Saját kalkuláció

A kapott eredmények értelmezése:

Kovács Evelin: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest 4,48%-kal magasabbak.

Tóth Katinka: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest 5,93%-kal magasabbak.

Mészáros Daniella: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest 7,64%-kal magasabbak.

Szemere Éva: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest nem változott.

Soós Anita: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest 4,48%-kal magasabbak.

Teve Anita: A 2019. év tervezett megtett kilométerei a 2018. év ténylegesen megtett kilométereihez képest 1,96%-kal alacsonyabbak.

2.4.25. AZ INTENZITÁSI VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1

Ismert egy debreceni székhelyű sportcentrum adatai a vizsgált évekre (29. ábra).

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44

Megnevezés	2019	2020
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

29. ÁBRA: Egy debreceni székhelyű sportcentrum adatai a vizsgált évekre

Forrás: Saját kalkuláció

Határozza meg a következő mutatókat:

- 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2019. évben
- 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2019. évben
- 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2019. évben
- 1 gólra jutó kapufák száma a 2019. évben

2.4.26. AZ INTENZITÁSI VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A feladat megoldásához intenzitási viszonyyszámokat kell számolnunk.

a) 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2019. évben

Eolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2019. évre kell számolni és a bevétel és kiadás adatokat kell figyelembe venni. Ezeket egymás mellé felírjuk (30. ábra).

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

a) 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2019. évben

bevétel	kiadás
21 millió Ft	14 millió Ft
1 millió Ft	x millió Ft

$$x = (1/21) \cdot 14 = 0,667$$

30. ÁBRA: 1 millió Ft bevételre jutó kiadás nagysága 2019. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát bevétel alá a 21 millió Ft, a kiadás alá a 14 millió Ft-ot (30. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 millió Ft bevételre kell a számolást elkészíteni, így a 21 millió Ft alá beírjuk az 1 millió Ft-ot. A kiadás 14 millió forintja alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{21} \times 14 = 0,667$, azaz 1 millió Ft bevételre 0,667 millió Ft kiadás jut.

b) 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2019. évben

Eolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2019. évre kell számolni és a bevétel és a focisták számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk (31. ábra).

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

b) 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2019. évben

Bevétel	Focisták
21 millió Ft	45 fő
1 millió Ft	x fő

$x = (1/21) \cdot 45 = 2,1429$

31. ÁBRA: 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2019. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát bevétel alá a 21 millió Ft, a focisták száma alá a 45 főt (31. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 millió Ft bevételre kell a számolást elkészíteni, így a 21 millió Ft alá beírjuk az 1 millió Ft-ot. A focisták 45 fője alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{21} \times 45 = 2,1429$, azaz 1 millió Ft bevételre 2,1429 fő focista jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

c) 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2019. évben

Eloolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2019. évre kell számolni és a focisták számával és a gólok számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

c) 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2019. évben

Focisták	Gólok
45 fő	35 darab
1 fő	x darab

$$x = (1/45) \cdot 35 = 2,1429$$

32. ÁBRA: 1 főre jutó gólok száma a 2019. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát focisták alá a 45 főt, a gólok száma alá a 35 darabot (32. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 fő focistára kell a számolást elkészíteni, így a 45 fő alá beírjuk az 1 főt. A gólok 35 darabja alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{45} \times 35 = 2,1429$, azaz 1 fő focistára 2,14 darab gól jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

d) 1 gólra jutó kapufák száma a 2019. évben

Elolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2019. évre kell számolni és a gólok számával és a kapufák számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

d) 1 góltra jutó kapufák száma a 2019. évben

Gólok	Kapufa
35 darab	79 darab
1 darab	x darab

$$x = (1/35) \cdot 79 = 2,2571$$

33. ÁBRA: 1 góltra jutó kapufák száma a 2019. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát gólok alá a 35 darabot, a kapufák száma alá a 79 darabot (33. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 darab góltra kell a számolást elkészíteni, így a 35 darab alá beírjuk az 1 darabot. A kapufák 79 darabja alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{35} \times 79 = 2,2571$, azaz 1 darab góltra 2,2571 darab kapufa jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

2.4.27. AZ INTENZITÁSI VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2

Ismert egy debreceni székhelyű sportcentrum adatai a vizsgált évekre (34. ábra).

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

34. ÁBRA: Egy debreceni székhelyű sportcentrum adatai a vizsgált évekre

Forrás: Saját kalkuláció

Határozza meg a következő mutatókat:

- 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2020. évben
- 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2020. évben
- 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2020. évben
- 1 gólra jutó kapufák száma a 2020. évben

2.4.28. AZ INTENZITÁSI VISZONYSZÁMOK – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

A feladat megoldásához intenzitási viszonyszámokat kell számolnunk.

a) 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2020. évben

Elolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2020. évre kell számolni és a bevétel és a kiadás adatokat kell figyelembe venni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

a) 1 millió Ft bevételre jutó kiadások nagysága a 2020. évben

bevétel	kiadás
28 millió Ft	17 millió Ft
1 millió Ft	x millió Ft

$$x = (1/28) \cdot 17 = 0,6071$$

35. ÁBRA: 1 millió Ft bevételre jutó kiadás nagysága 2020. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk a z adatokat: tehát bevétel alá a 28 millió Ft, a kiadás alá a 17 millió Ft-ot (35. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 millió Ft bevételre kell a számolást elkészíteni, így a 28 millió Ft alá beírjuk az 1 millió Ft-ot. A kiadás alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{28} \times 17 = 0,6071$, azaz 1 millió Ft bevételre 0,6071 millió Ft kiadás jut.

b) 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2020. évben

Eloolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy 2020. évre kell számolni és a bevétel és focisták számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

b) 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2019. évben

Bevétel	Focisták
28 millió Ft	50 fő
1 millió Ft	x fő

$$x = (1/28) \cdot 50 = 1,7857$$

36. ÁBRA: 1 millió Ft bevételre jutó focisták száma a 2020. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát bevétel alá a 28 millió Ft, a focisták száma alá az 50 főt (36. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 millió Ft bevételre kell a számolást elkészíteni, így a 28 millió Ft alá beírjuk az 1 millió Ft-ot. A focisták 50 fője alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{28} \times 50 = 1,7857$, azaz 1 millió Ft bevételre 1,79 fő focista jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

c) 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2019. évben

Elolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2020. évre kell számolni és focisták számával és a gólok számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

c) 1 főre jutó gólok száma a versenyen a 2020. évben

Focisták	Gólok
50 fő	44 darab
1 fő	x darab

$$x = (1/50) \cdot 44 = 0,88$$

37. ÁBRA: 1 főre jutó gólok száma a 2020. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát focisták alá a 50 főt, a gólok száma alá a 44 darabot (37. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 fő focistára kell a számolást elkészíteni, így az 50 fő alá beírjuk az 1 főt. A gólok 44 darabja alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{50} \times 44 = 0,88$, azaz 1 fő focistára 0,88 darab gól jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

d) 1 gólra jutó kapufák száma a 2019. évben

Eloolvassuk a feladatot, amiből kiderül, hogy a 2020. évre kell számolni és a gólok számával és a kapufák számának az adatával kell kalkulálni. Ezeket egymás mellé felírjuk.

Megnevezés	2019	2020
Bevétel (millió Ft)	21	28
Kiadás (millió Ft)	14	17
Gólok száma a versenyen (darab)	35	44
Kapufák száma versenyen (darab)	79	111
Focisták száma (fő)	45	50
Sérültek száma (fő)	7	6

d) 1 gólra jutó kapufák száma a 2020. évben

Gólok	Kapufák
44 darab	111 darab
1 darab	x darab

$$x = (1/44) \cdot 111 = 2,5227$$

38. ÁBRA: 1 gólra jutó kapufák száma a 2020. évben

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően a szövegek alá beírjuk az adatokat: tehát gólok alá a 44 darabot, a kapufák száma alá a 111 darabot (38. ábra). Ezután a feladatból kiírjuk, hogy 1 darab gólra kell a számolást elkészíteni, így a 44 darab alá beírjuk az 1 darabot. A kapufák 111 darabja alá beírjuk az „x” jelölést.

Az „x” értéket úgy számoljuk ki, hogy $\frac{1}{44} \times 111 = 2,5227$, azaz 1 gólra 2,5271 darab kapufa jut. Itt lehet tizedes vessző után is számérték, mivel ez egy mutató.

3. A KÖZÉPÉRTÉKEK

A középértékek a vizsgált statisztikai sokaságot egy olyan számmal jellemzik, amely mindenkor a sokaság centrumában helyezkedik el. A fősokasági középértékek mellett a különböző részsokaságra jellemző középértékeket is meghatározhatjuk, így lehetővé válik azok általános jellemzőinek összehasonlítása.

A középértékek egyik csoportja a *számított középértékek*, amelyek

- ♦ matematikai számítás eredményei és ezáltal
- ♦ az értéksor elemeivel matematikai összefüggésben állnak,
- ♦ az elemek értéknagyságának a centrumában állnak.

A másik csoportot a *helyzeti középértékek* képezik, amelyeket

- ♦ az elemek értéknagyság szerint rendezett sorából
- ♦ matematikai számítás nélkül jelölünk ki, és
- ♦ a kijelölés az adatok sorszámaához vagy gyakoriságához kötődik.

3.1. A középértékek elméleti alapjai

3.1.1. A SZÁMÍTOTT KÖZÉPÉRTÉKEK

A számított középértékek közé tartoznak a különféle átlagok (számtani-, mértani, négyzetes, kronológikus, harmonikus, stb.) Mértékegységük minden esetben az alapfeladat mértékegységétől függnék. Természetesen itt is van egy kivétel, mely a mértani átlag, mivel ennek a kifejezési formája százalékos (%).

Számtani átlag

A számtani átlag az észlelési adatok olyan középértéke, melyet az adatok helyébe helyettesítve az adatsor összege változatlan marad. Súlyozatlan formában számoljuk, ha az átlagolandó értékek gyakorisága megegyezik, ha a gyakoriság különböző súlyozott formában számolunk.

Egyszerű számtani átlag: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

A gyakorlati életben az egyszerű számtani átlagot az =ÁTLAG() függvény alkalmazásával is ki lehet számolni. A zárójelbe az alapadatokat kell kijelölni.

Súlyozott számtani átlag: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$

A gyakorlatban az átlagolandó értékek száma igen nagy, gyakran ekkor osztályozással osztályközös gyakorisági sorokat képezünk, az osztályokba sorolt adatokat az osztályközépével (x_i) jellemezzük. Az osztályközép értékét az adott intervallum alsó és felső határainak az átlaga adja meg. Azaz

$$\frac{\text{adott int ervallum alsó határa} + \text{adott int ervallum felső határa}}{2}$$

Az általános jelölése: x_i (vagy az u_i). Az átlag számítása osztályközös gyakorisági sorból:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i u_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

A számtani átlag:

- érzékeny a kiugró értékekre,
- nem mindig tipikus érték,
- a sor legkisebb és legnagyobb eleme között helyezkedik el,
- az átlagtól vett eltérések előjel szerinti összege 0.

A számtani átlag számításával kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Harmonikus átlag

A harmonikus átlagot olyan intenzitási viszonyszámok átlagának meghatározására használjuk, amelyek fordított arányt tükröznek. A harmonikus átlag esetén azt az értéket keressük, amelynek reciprokát az eredeti adatok helyére írva, egyenlő az eredeti adatok reciprokértékeinek összegével.

Ezt az átlagtípust akkor alkalmazzuk, ha teljesítmény adatok állnak a rendelkezésünkre (például motorteljesítmény, betakarítási adatok, futási köreredmények, önköltség számítás stb.).

$$\text{Egyszerű forma: } \bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{Súlyozott forma: } \bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{x_i}}$$

A harmonikus átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Mértani átlag

A mértani átlag az időbeli, dinamikus folyamatok változási ütemének átlagát adja. Számítását leggyakrabban a dinamikus viszonyszámok segítségével végezzük el.

Ez az egyedüli átlagszámítási formulánk, ahol a kifejezési formánk nem az alapadatok mértékegységével egyezik meg, hanem százalékos lesz.

A szakirodalom alapján a következő képletekkel találkozunk:

$$\text{Egyszerű mértani átlag: } \bar{X}_g = \sqrt[n]{\prod x_i} \quad \text{Súlyozott mértani átlag: } \bar{X}_g = \sqrt[n]{\prod x_i^{f_i}}$$

A gyakorlatban ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a mértani átlagot bázis- és lánc viszonyszámot kell kalkulálni először. A lánc viszonyszámból számított mértani

átlag a következő: $\bar{x} = \sqrt[n]{V_{L2} \times V_{L3} \times \dots \times V_{Ln}}$. Azaz, lánc viszonyszámból úgy számolunk

mértani átlagot, hogy az összes láncviszonyszámot összeszorozzuk egymással és n -edik gyököt vonunk belőle. Az „ n ” értékét úgy határozzuk meg, hogy mennyi darab lánc viszonyszámunk van a számításban (az első időszak lánc viszonyszámát tehát nem fogjuk tudni kiszámolni). Az eredményt %-os formában fejezzük ki. Ha a kapott eredményünk 100% felett van, akkor növekedést, míg 100% alatt csökkenést határoz meg a kezdeti időszakról a befejező időszakig az eredményünk.

Számítógéphez ezt a következő képletsorral számoljuk ki:

$$\text{Bázis viszonyszámból számított mértani átlag: } \bar{x} = \sqrt[n-1]{\frac{V_{Bn}}{V_{B1}}}. \text{ Azaz, bázis viszony-}$$

számból úgy számolunk mértani átlagot, hogy az utolsó időszakhoz tartozó értékét elosztjuk az első időszakhoz tartozó értékkel (így kapjuk meg az utolsó időszak bázis viszonyszám értékét), és ebből vonunk „ $n - 1$ ”-edik gyököt. Mivel az első bázis viszonyszám értékünk MINDIG 100% (vagyis 1), így elegendő az utolsó bázis viszonyszámot figyelembe venni az „ $n - 1$ ”-edik gyök alatt.

Eredményünk lehet 100 % alatt és felett is. 100% felett növekedés, míg 100% alatt csökkenés van.

Értelmezés:

100% feletti eredmény esetén: 128%-os eredmény azt jelenti (ha 2010-től 2019-ig vannak megadva évente az adatok), hogy a kezdő (2010) évtől a befejező (2019) évig *évente átlagosan* 28%-os növekedés következett be a vizsgált adatokon.

100% alatti eredmény esetén: 77%-os eredmény például azt jelenti (ha 2010-től 2019-ig vannak megadva évente az adatok), hogy a kezdő (2010) évtől a befejező (2019) évig évente átlagosan 23%-os csökkenés következett be a vizsgált adatokon.

Kronológikus átlag

A kronológikus átlag az állapot idősor adataiból számított speciális számtani átlag. Számításának alapja, hogy két szomszédos időpontban mért állományok átlaga az időszak átlagát adja. A teljes időtartamra vonatkozó átlag az időszakok átlagának az átlagolásával határozható meg:

$$\bar{X}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}}{n-1}$$

A kronológikus átlagot akkor használjuk, ha:

- az alapadatok egymástól azonos távolságban helyezkedjenek el. Például minden hónap első napjára, vagy minden hónap utolsó napjára állnak az adatok a rendelkezésre (január 1, február 1, március 1, stb.; vagy január 31, február 28, március 31, stb.).
- az adott időpont nyitó értéke megegyezik a megelőző időszak záró értékével. Azaz, például január 31 adata megegyezik a február 1 adatával. Február 28 adata megegyezik március 1 adatával. stb.

10. TÁBLÁZAT: A kronológikus átlag számításához szükséges időszakok, ha a hónap első napjai vannak megadva

ÉV	Hónap, nap	Éves átlag	Fél éves átlag		Negyedéves átlag			
			I.	II.	I.	II.	III.	IV.
ADOTT ÉV	1. 1.	x_1	x_1		x_1			
	2. 1.	x_2	x_2		x_2			
	3. 1.	x_3	x_3		x_3			
	4. 1.	x_4	x_4		x_4	x_1		
	5. 1.	x_5	x_5			x_2		
	6. 1.	x_6	x_6			x_3		
	7. 1.	x_7	x_7	x_1		x_4	x_1	
	8. 1.	x_8		x_2			x_2	
	9. 1.	x_9		x_3			x_3	
	10. 1.	x_{10}		x_4			x_4	x_1
	11. 1.	x_{11}		x_5				x_2
	12. 1.	x_{12}		x_6				x_3
Következő év	1. 1.	x_{13}		x_7				x_4

Forrás: Saját szerkesztés

A kronológikus átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg minden esetben.

Ha a *hónap első napjaira* vannak megadva az adataink, akkor a következő hónapokat kell a számításnál figyelembe venni (sárga részeket) (10. táblázat):

Éves átlag: adott év január 1-től adott év december 31-ig

Mivel a számoláshoz az adott év december 31.-ei adata is szükséges, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13 - 1}$$

Féléves átlag:

1. I. féléves átlag: adott év január 1-től adott év június 30-ig

Mivel az adott év június 30.-ai adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év július 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a június 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik a július 1. NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

2. II. féléves átlag: adott év július 1-től adott év december 31-ig

Mivel az adott év december 31.-e adata is szükséges a számoláshoz, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az adott év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

Negyedéves átlag:

1. I. negyedéves átlag: adott év január 1-től adott év március 31-ig

Mivel az adott év március 31.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év április 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a március 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az április 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

2. II. negyedéves átlag: adott év április 1-től adott év június 30-ig

Mivel az adott év június 30.-ai adata is szükséges a kalkulációhoz, így az adott év július 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az adott év június

31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

3. III. negyedéves átlag: adott év július 1-től adott év szeptember 30-ig
Mivel az adott év szeptember 30.-ai adata is szükséges a kalkulációhoz, így az adott év október 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy a szeptember 30.-a ZÁRÓ értéke megegyezik az október 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

4. IV. negyedéves átlag: adott év október 1-től adott év december 31-ig
Mivel a számoláshoz az adott év december 31.-ei adata is szükséges, így a következő év január 1.-ei adatát kell figyelembe venni. Mivel a december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a következő év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

11. TÁBLÁZAT: A kronológikus átlag számításához szükséges időszakok, ha a hónap utolsó napjai vannak megadva

ÉV	Hónap, nap	Éves átlag	Fél éves átlag		Negyedéves átlag			
			I.	II.	I.	II.	III.	IV.
Előző év	12. 31.	x_1	x_1		x_1			
ADOTT ÉV	1. 31.	x_2	x_2		x_2			
	2. 28.	x_3	x_3		x_3			
	3. 31.	x_4	x_4		x_4	x_1		
	4. 30.	x_5	x_5			x_2		
	5. 31.	x_6	x_6			x_3		
	6. 30.	x_7	x_7	x_1		x_4	x_1	
	7. 31.	x_8		x_2			x_2	
	8. 31.	x_9		x_3			x_3	
	9. 30.	x_{10}		x_4			x_4	x_1
	10. 31.	x_{11}		x_5				x_2
	11. 30.	x_{12}		x_6				x_3
	12. 31.	x_{13}		x_7				x_4

Forrás: Sajtó szerkesztés

Ha a *hónap utolsó napjaira* vannak megadva az adataink, akkor a következő hónapokat kell a számításnál figyelembe venni (11. táblázat),

Éves átlag: adott év január 1-től adott év december 31-ig

Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a számításhoz, így az előző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13 - 1}$$

Féléves átlag:

1. I. féléves átlag: adott év január 1-től adott év június 30-ig

Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a kalkulációhoz, így a megelőző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Mivel az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

2. II. féléves átlag: adott év július 1-től adott év december 31-ig

Mivel az adott év július 1.-ei adata is szükséges, így az adott év június 31.-ei adatát kell a számoláshoz felhasználni. Ennek oka, hogy az adott év június 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7 - 1}$$

Negyedéves átlag:

1. I. negyedéves átlag: adott év január 1-től adott év március 31-ig

Mivel az adott év január 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az előző év december 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Ennek oka, hogy az előző év december 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év január 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

2. II. negyedéves átlag: adott év április 1-től adott év június 30-ig

Mivel az adott év április 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év március 31.-ei adatát kell a számoláshoz felhasználni. Ennek oka, hogy az

adott év március 31.-ei ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év április 1.ei NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

3. III. negyedéves átlag: adott év július 1-től adott év szeptember 30-ig
Mivel az adott év július 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év június 31.-ei adatát kell figyelembe venni. Mivel a június 31.-e ZÁRÓ értéke megegyezik a július 1.-e NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

4. IV. negyedéves átlag: adott év október 1-től adott év december 31-ig
Mivel az adott év október 1.-ei adata is szükséges a számoláshoz, így az adott év szeptember 31.-ei adatát kell a számoláshoz felhasználni. Mivel a szeptember 31 ZÁRÓ értéke megegyezik az adott év október 1 NYITÓ értékével számviteli elszámolás alapján.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

Négyzetes átlag

A négyzetes átlag meghatározásánál azt a számot keressük, amelyet az eredeti adatok helyére helyettesítve az adatsor négyzetösszege változatlan marad.

$$\text{Súlyozatlan: } \bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad \text{Súlyozott: } \bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i}}$$

A négyzetes átlagot önálló formában nem használjuk, általában az átlagtól vett eltérések átlagos távolságának meghatározására használjuk.

A négyzetes átlagszámítással kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Azt, hogy melyik átlagot is kell a számításnál használni azt mindig a vizsgálat célját, az elemezni kívánt jelenség tulajdonságai határozzák meg. Ugyanabból a sokaságból számított különböző átlagok nagysága eltér egymástól:

$$\bar{X}_h < \bar{X}_g < \bar{X}_a < \bar{X}_q$$

3.1.2. A HELYZETI KÖZÉPÉRTÉKEK

A gyakorlatban nem mindig az átlagok a legalkalmasabbak a sorok jellemzésére, hanem az olyan mutatók, amelyek helyzetük révén jellemzik a statisztikai sort, vagy a sorszámuk miatt, vagy pedig a legnagyobb gyakoriság centrumában helyezkednek el. Az ilyen középértékeket helyzeti középértéknek nevezzük.

Medián

A medián a sorba rendezett adatsor közepén elhelyezkedő középérték, amelynél az összes előforduló ismérték fele kisebb, fele pedig nagyobb.

A medián a növekvően sorba rendezett adatok $\frac{n+1}{2}$ -ik elemének az értéke. Ha az értéksor páratlan számú adatból áll, a medián a középső adat értéke. Ha páros, akkor a két középső szám számtani átlagának az értéke.

Például, ha a medián eredményeként 30 főt kapunk egy adatbázisban, akkor azt mondjuk, hogy a vizsgált sokaság 50%-a 30 fő alatt van, míg 50% e felett van. A kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Módusz

A módusz egy tipikus ismérték, diszkrét ismérték esetén a módusz a leggyakrabban előforduló ismérték, folytonos ismérték esetén a gyakorisági görbe maximumhelye. Vannak olyan statisztikai sorok, amelyeknek két módusza van (U vagy M alakú sorok). A kapott eredmény mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

3.2. A középértékek alkalmazásának bemutatása

3.2.1. SÚLYOZATLAN (EGYSZERŰ) SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 1

Számítsa ki átlagosan hány fő járt a sport- és rekreációs szervezés, vagy a Sportszervező szakra, ha a következő adatokat ismerjük (12. táblázat):

12. TÁBLÁZAT: A sport- és rekreációs szervezés, valamint a sportszervező szakra járó hallgatók létszámadatai

Félév	Összes létszám (fő)
2016–2017. II. félév	80
2017–2019. II. félév	92
2018–2019. II. félév	140
2019–2020. II. félév	136

Forrás: Saját összeállítás

Értelmezze a kapott eredményeket.

3.2.2. SÚLYOZATLAN (EGYSZERŰ) SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

Mivel az alapadataink gyakorisági értékek nélkül szerepelnek a táblázatban, így egyszerű (súlyozatlan) számtani átlagot kell számolni (39. ábra).

Félév	Összes létszám (fő)	2. lépés
2016-2017. II. félév	80	
2017-2019. II. félév	92	$448/4=112,00$ fő
2018-2019. II. félév	140	
2019-2020. II. félév	136	4 darab félév van
Összesen (1. lépés)	448	

↓
+80+92+140+136

39. ÁBRA: A sport- és rekreációs szervezés szakra járó hallgatók létszámadataira számított átlag

Forrás: Saját kalkuláció

Az alapadatok összegét vesszük (448 fő), és az összeget osztjuk el az elemek számával (azaz a 4 értékével).

Eredményként azt kaptuk, hogy az átlagos évfolyam létszám 112 fő félévenként.

3.2.3. SÚLYOZATLAN (EGYSZERŰ) SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 2

Adott egy debreceni edzőterem létszáma 2020. január 20 és 2020. január 26 között (13. táblázat):

13. TÁBLÁZAT: Egy debreceni edzőterem létszámának az alakulása
2020.01.20 – 2020.01.26 között

Napok	Létszám, fő
Hétfő	475
Kedd	319
Szerda	378
Csütörtök	388
Péntek	390
Szombat	366
Vasárnap	379

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg, hogy mennyi volt az átlagos napi edzőtermi létszám. Értelmezze a kapott eredményt.

3.2.4. SÚLYOZATLAN (EGYSZERŰ) SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

Napok	Létszám, fő
Hétfő	475
Kedd	319
Szerda	378
Csütörtök	388
Péntek	390
Szombat	366
Vasárnap	379
Összesen	2695

$$2695/7 = 385,00 \text{ fő}$$

40. ÁBRA: Egy debreceni edzőterem átlagos létszámának meghatározása
2020.01.20 – 2020.01.26 között

Forrás: Saját kalkuláció

Az átlagos látogatói létszám a debreceni edzőteremnek 385 fő naponta (40. ábra).

3.2.5. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 1

A nappali tagozatos egyetemi hallgatók gimnasztika vizsga eredményei az 1. évfolyamon a következő volt 2020. január 28.-án (14. táblázat):

14. TÁBLÁZAT: A nappali tagozatos egyetemi hallgatók gimnasztika vizsga eredményei az első évfolyamon 2020. január 28.-án

Osztályzat	Nappali tagozat (fő)
1	19
2	24
3	29
4	35
5	30

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az első évfolyamos hallgatók átlagos gimnasztika eredményét. Értelmezze a kapott eredményt.

3.2.6. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A példánkban gyakorisági értékek is szerepelnek (nappali tagozatos hallgatói létszám), így súlyozott átlagot kell számolni. Itt már nem alkalmazható az egyszerű (súlyozatlan) számtani átlag. Itt a súlyozott számtani átlag képletét kell alkalmazni:

$$\bar{X}_a = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni az átlagot az egyes oszlopokat el kell jelölni. Mindig azt választjuk „x”-nek, aminek az átlagát meg akarjuk határozni. Esetünkben a jegyek átlagát akarjuk meghatározni (így ez lesz az „x_i”). A gyakorisági értékünk (hallgatói létszám) lesz az „f_i” jelölésű (41. ábra).

Az eljelöléseket követően egy új oszlopot készítünk, melyet „f_i * x_i” jelöléssel látunk el. A nappali tagozatos hallgatók adott értékét meg kell szorozni az adott osztályzat értékével. Ezeket soronként ki kell számolni, majd ezeket a kapott eredményeket össze kell adni (példánkban 444). Utána összegezzük a nappali tagozatos hallgatók létszámát is (137 fő). A 444 értékét osztva a 137 értékével kapjuk meg a 3,24 értékét. Ez lesz a megoldás. Tehát a nappali tagozatos 1. évfolyamos hallgatók gimnasztika vizsga eredményének az átlaga létszám függvényében 3,24.

x _i	f _i	
Osztályzat	Nappali tagozat (fő)	f _i x _i
1	19	19
2	24	48
3	29	87
4	35	140
5	30	150
Összesen	137	444

(19+24+29+35+30) (19+48+87+140+150)

Behelyettesítés 444/137= 3,24

41. ÁBRA: A nappali tagozatos egyetemi hallgatók gimnasztika vizsgájának átlag eredménye

Forrás: Saját kalkuláció

3.2.7. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 2

A levelező tagozatos egyetemi hallgatók Statisztika I. vizsgáinak eredményei a Nemzetközi gazdálkodás BA szakon a 2. évfolyamon a 2019-2020. I. félévében a következő volt (15. táblázat):

15. TÁBLÁZAT: A levelező tagozatos egyetemi hallgatók Statisztika I. vizsga eredményei a második évfolyamon

Osztályzat	Levelező tagozat hallgatók létszáma (fő)
1	5
2	19
3	34
4	44
5	17

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg a levelező tagozatos, második évfolyamos hallgatók átlagos Statisztika I. eredményét. Értelmezze a kapott eredményt.

3.2.8. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

x_i	f_i	
Osztályzat	Levelező tagozat hallgatók létszáma (fő)	$f_i x_i$
1	5	5
2	19	38
3	34	102
4	44	176
5	17	85
Összesen	119	406

$$(5+19+34+44+17) \quad (5+38+102+176+85)$$

$$\text{Behelyettesítés} \quad 406/119 \quad 3,41$$

42. ÁBRA: A levelező tagozatos egyetemi hallgatók Statisztika I. vizsga jegyének átlaga

Forrás: Saját szerkesztés

A levelező tagozatosok hallgatók Statisztika I. eredménye 3,41 a második évfolyamon (42. ábra).

3.2.9. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 3

Ismert a „Súlylökés” Bt. teljes munkaidős statisztikai állományi létszáma (16. táblázat).

16. TÁBLÁZAT: A vizsgált vállalkozás teljes munkaidős dolgozóinak létszám adatai

Életkor (év)			Teljes munkaidős létszám (fő)
18	-	23	17
24	-	29	18
30	-	35	16
36	-	41	13
42	-	47	18
48	-	53	12
54	-	59	14

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az átlagos életkor nagyságát a vállalkozás esetében. Értelmezze a kapott eredményt.

3.2.10. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 3 MEGOLDÁSA

Abban az esetben, ha az átlagolandó értékek nem „egyszerű” szám formájában vannak megadva, hanem osztályközös gyakorisági sor formájában, akkor is súlyozott számtani átlagot kell számolni. Ebben az esetben először meg kell határozni az osztályközép értékét (mely a számolásban az „ x_i ” értékét fogja adni. Ennek meghatározásához alkalmazzuk a következő képletet:

$$\frac{\text{alsó határ} + \text{felső határ}}{2}$$

A példában az osztályközép értékei a következők (43. ábra):

1. intervallum: $(18+23)/2 = 20,50$
2. intervallum: $(24+29)/2 = 26,50$
3. intervallum: $(30+35)/2 = 32,50$
4. stb.

Az osztályközép értékeit eljelöljük az „ x_i ”-nek, míg a teljes munkaidős létszámot „ f_i ”-vel (mivel az életkor átlagát akarom megkapni, így ez lesz az „ x ” jelölés).

Életkor (év)	Teljes munkaidős létszám (fő)	x_i
18 - 23	17	$(18+23)/2 = 20,5$
24 - 29	18	$(24+29)/2 = 26,5$
30 - 35	16	$(30+35)/2 = 32,5$
36 - 41	13	$(31+41)/2 = 38,5$
42 - 47	18	$(42+47)/2 = 44,5$
48 - 53	12	$(48+53)/2 = 50,5$
54 - 59	14	$(54+59)/2 = 56,5$
Összesen		

43. ÁBRA: Az osztályközös gyakorisági sorból számított osztályközép levezetése

Forrás: Saját kalkuláció

Innentől kezdve már ugyanúgy kell számolni, mint az előző példában is, tehát be kell helyettesíteni a következő képletbe:

$$\bar{X}_a = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Egy új oszlopot készítünk, melyet „ $f_i * x_i$ ” jelöléssel látunk el. Az adott teljes munkaidős létszámot összeszorozzuk az adott osztályközép értékével minden sorban (44. ábra). Ezután ezt összeadjuk (4044). Ezután összegzem a teljes munkaidős létszámot is (108 fő).

Életkor (év)	Teljes munkaidős létszám (fő)	x_i	$f_i * x_i$
18 - 23	17	$(18+23)/2 = 20,5$	$17 * 20,5 = 348,5$
24 - 29	18	$(24+29)/2 = 26,5$	$18 * 26,5 = 477$
30 - 35	16	$(30+35)/2 = 32,5$	$16 * 32,5 = 520$
36 - 41	13	$(31+41)/2 = 38,5$	$13 * 38,5 = 500,5$
42 - 47	18	$(42+47)/2 = 44,5$	$18 * 44,5 = 801$
48 - 53	12	$(48+53)/2 = 50,5$	$12 * 50,5 = 606$
54 - 59	14	$(54+59)/2 = 56,5$	$14 * 56,5 = 791$
Összesen	108		4044

(17+18+16+13+18+12+14)

(348,5+477+520+500,5+801+606+791)

Eredmény 4044/108= 37,44

44. ÁBRA: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját kalkuláció

Ezután a 4044 és a 108 hányadosát képezzük. Eredményül azt kaptuk, hogy az átlagos életkor a vizsgált vállalkozásnál $(4044/108 =)$ 37,44 év.

3.2.11. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 4

A Debreceni Egyetem dolgozóinak kereseti adatai ismertek 2020. január 01.-én (17. táblázat):

17. TÁBLÁZAT: A Debreceni Egyetem dolgozóinak kereseti adatai 2020.01.01.-én

Kereset (ezer Ft)			Dolgozók száma (fő)
	-	150,0	25
150,1	-	175,0	36
175,1	-	200,0	44
200,1	-	225,0	32
225,1	-	250,0	21
250,1	-	275,0	9

Forrás: Saját összeállítás

Határozza meg az átlagos kereset nagyságát a Debreceni Egyetemen. Értelmezze a kapott eredményt.

3.2.12. SÚLYOZOTT SZÁMTANI ÁTLAG – PÉLDA 4 MEGOLDÁSA

		f_i		
Kereset (ezer Ft)		Dolgozók száma (fő)	x_i	$f_i \cdot x_i$
125,1	- 150,0	25	137,55	3438,75
150,1	- 175,0	36	162,55	5851,8
175,1	- 200,0	44	187,55	8252,2
200,1	- 225,0	32	212,55	6801,6
225,1	- 250,0	21	237,55	4988,55
250,1	- 275,0	9	262,55	2362,95
Összesen		167		31695,9

$$\text{Eredmény} \quad 30132,1/167 = 189,7955$$

45. ÁBRA: A súlyozott számtani átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját kalkuláció

A példa megoldása: $= 31695,9 / 167 = 189,795$ ezer Ft (45. ábra). Azaz az átlagos dolgozói kereset a Debreceni Egyetemen 189 795 Ft volt 2020.01.01.-én.

3.2.13. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) HARMONIKUS ÁTLAG – PÉLDA 1

2020.01.29.-én egy edzésen 13 versenyző futási teljesítményét mérték. A mérés eredményeit a következő táblázat (18. táblázat) tartalmazza:

18. TÁBLÁZAT: A sportolók teljesítményének mérési adatai 2020.01.29.-én

Me. másodperc/távolság	
Sportoló	Teljesítmény
1	68
2	72
3	66
4	60
5	64
6	62
7	67
7	66
9	67
10	68
11	69
12	64
13	64

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg az átlagos teljesítmény nagyságát a sportolóknál.

3.2.14. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) HARMONIKUS ÁTLAG – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

Mivel a példában teljesítmény adatok vannak megadva, így harmonikus átlagot kell számolni. A teljesítmény adatok felsorolás formájában vannak megadva, így súlyozatlan, egyszerű harmonikus átlagot kell számolni.

A teljesítmény adatokat eljelöljük „ x_i ”-vel és ezt követően reciprok értékeit képezzük a teljesítmény adatoknak. Mivel a reciprok érték képzésével 0-1 közötti értékeket fogunk kapni, így itt 5 számjegyre ajánlatos számolni (46. ábra).

A reciprok értékek meghatározását követően összeadjuk a reciprok értékeket, melynek eredménye 0,197618. Az összesen értéket behelyettesítve a képletbe megkapjuk a végeredményt:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{13}{0,197618} = 65,78 \text{ másodperc/távolság}$$

Me. másodperc/távolság

Sportoló	Teljesítmény	Reciprok képzés (1/x _i)	
1	68	1/68	0,014706
2	72	1/72	0,013889
3	66	1/66	0,015152
4	60	1/60	0,016667
5	64	1/64	0,015625
6	62	1/62	0,016129
7	67	1/67	0,014925
7	66	1/66	0,015152
9	67	1/67	0,014925
10	68	1/68	0,014706
11	69	1/69	0,014493
12	64	1/64	0,015625
13	64	1/64	0,015625

0,197618

13/0,197618 = 65,78

(Összeadni az adatokat)

46. ÁBRA: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját kalkuláció

Tehát az átlagos sportolói teljesítmény az adott távolságra 65,78 másodperc.

3.2.15. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) HARMONIKUS ÁTLAG – PÉLDA 2

19. TÁBLÁZAT: A dolgozók teljesítményének mérési adatai 2020.01 01.-én

Szektor	Termelt mennyiség (db/nap)
Fekete	1 250
Kék	1 236
Zöld	1 190
Piros	1 170
Fehér	1 260
Barna	1 290

Forrás: Saját adatgyűjtés

2020.01.01.-én vizsgálták egy debreceni vállalat 6 különböző szektorában az előállított termék mennyiségeket (19. táblázat).

Határozza meg a 6 szektor adatai alapján, hogy a cégnél mennyi az átlagos termelési mennyiség.

3.2.16. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) HARMONIKUS ÁTLAG PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

x_i		
Szektor	Termelt mennyiség (db/nap)	$1 / x_i$
Fekete	1 250	0,00080
Kék	1 236	0,00081
Zöld	1 190	0,00084
Piros	1 170	0,00085
Fehér	1 260	0,00079
Barna	1 290	0,00078
Összesen		0,00487 $6/0,00487 : 1231,29$

47. ÁBRA: A súlyozatlan harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját kalkuláció

Az átlagos teljesítmény (47. ábra) az adatok alapján $\frac{6}{0,004873} = 1231,29 \text{ db/nap}$

3.2.17. SÚLYOZOTT HARMONIKUS ÁTLAG – PÉLDA 1

Egy úszóversenyen felmérték, hogy az adott távot mennyi idő alatt teszik meg a versenyzők (20. táblázat). A teljesítmény adatait az alábbi táblázat tartalmazza 2020.01.05.-én:

20. TÁBLÁZAT: A vállalkozásnál dolgozó munkások teljesítmény adatai 2020.01.05.-én

Versenyzők száma (fő)	Teljesítmény (másodperc/távolság)
4	67
5	72
3	78
6	83
2	89
4	90
1	91

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg az átlagos teljesítményt egy főre levetítve.

3.2.18. SÚLYOZOTT HARMONIKUS ÁTLAG PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

Ebben a feladatban is teljesítmény adatok vannak megadva, így itt is harmonikus átlagot kell számolni. Mivel itt vannak gyakorisági értékek is (versenyzők száma), így súlyozott harmonikus átlagot kell számolni.

A számításhoz a következő képletet fogjuk alkalmazni:

$$\bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n f_i \frac{1}{x_i}}$$

Az első lépésként meg kell határozni a jelöléseket. Az „ f_i ” a gyakoriság (a versenyzők száma), az „ x_i ” az átlagolandó értékeket (teljesítmény) fogja jelölni. Ezt követően lehet az $\frac{f_i}{x_i}$ hányadost képezni, melyet a végén össze kell adni (0,3178). A képlet alapján így meg kell még határozni az összes gyakoriság értékét is, mely 25 (48. ábra).

f_i	x_i		
Versenyzők száma (fő)	Teljesítmény (másodperc/távolság)	f_i / x_i	
4	67	4/67	0,05970
5	72	5/72	0,06944
3	78	3/78	0,03846
6	83	6/83	0,07229
2	89	2/89	0,02247
4	90	4/90	0,04444
1	91	1/91	0,01099
Összesen	25	0,3178	

48. ÁBRA: A súlyozott harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját szerkesztés

A képletbe helyettesítve a következő eredményt kapjuk:

$$\bar{x}_h = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f_i}{x_i}} = \frac{25}{0,3178} = 78,67$$

Tehát az átlagos teljesítmény nagysága 78,67 másodperc/távolság egy főre levetítve.

3.2.19. SÚLYOZOTT HARMONIKUS ÁTLAG – PÉLDA 2

Egy motorversenyen ismertek a következő adatok 2020.02.01.-jén (21. táblázat):

21. TÁBLÁZAT: A motorok teljesítménye a motorversenyen 2020.02.01.-én

Motor száma (db)	Teljesítmény (LE)
15	350
7	250
5	200
4	158
11	170
10	310

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg az átlagos teljesítményt a motorversenyen egy motorra levetítve.

3.2.20. SÚLYOZOTT HARMONIKUS ÁTLAG PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

fi		xi	
Motor száma (db)	Teljesítmény (LE)	fi / xi	
15	350	15/350	0,042857
7	250	7/250	0,028000
5	200	5/200	0,025000
4	158	4/158	0,025316
11	170	11/170	0,064706
10	310	10/310	0,032258
Összesen	52		0,218138

52/0,218138 = 238,382

49. ÁBRA: A súlyozott harmonikus átlag megoldása a példa adatai alapján

Forrás: Saját szerkesztés

Az átlagos motor teljesítmény a motorversenyen 238,382 LE/motor (49. ábra).

3.2.2.1. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG – PÉLDA 1 (A HÓNAP ELSŐ NAPJAI ADOTTAK)

Ismert egy sportcsarnok látogatói létszáma 2019. évben (22. táblázat).

22. TÁBLÁZAT: Egy sportcsarnok látogatóinak a száma 2019. évben

Időpont	Látogatói létszám (fő)
január 1.	4500
február 1.	5450
március 1.	4360
április 1.	4260
május 1.	4689
június 1.	4578
július 1.	4157
augusztus 1.	4571
szeptember 1.	4697
október 1.	5001
november 1.	4997
december 1.	4578
december 31.	3071

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. évben.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év I. félévében.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. II. félévében.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. I. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. II. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év III. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év IV. negyedévében.

3.2.22. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA (A HÓNAP ELSŐ NAPJAI ADOTTAK)

Mivel a hónap első napjára vannak az adatok megadva, így a kalkulációnál az elemélelnél leírt (10. táblázat) kell alkalmazni.

a) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. évben.

Éves átlagot kell számolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + \frac{x_{13}}{2}}{13 - 1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4500}{2} + 5450 + 4360 + \dots + 4997 + 4578 + \frac{3071}{2}}{13 - 1} = 4593,62$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés
január 1.	4500	$x_1 \longrightarrow$ fele 4500/2 2250
február 1.	5450	x_2
március 1.	4360	x_3
április 1.	4260	x_4
május 1.	4689	x_5
június 1.	4578	x_6
július 1.	4157	x_7
augusztus 1.	4571	x_8
szeptember 1.	4697	x_9
október 1.	5001	x_{10}
november 1.	4997	x_{11}
december 1.	4578	x_{12}
december 31.	3071	$x_{13} \longrightarrow$ fele 3071/2 1535,5

adott év december 31 = következő év január 01

50. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (éves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

Tehát havonta átlagosan a sportcsarnokba 4593,62 fő ~4594 fő látogatott el (50. ábra).

a) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év I. félévében.

A kalkulációt az 1. félévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4500}{2} + 5450 + \dots + 4578 + \frac{4157}{2}}{7-1} = 4610,92$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés			
január 1.	4500	x_1	→ fele	4500/2	2250
február 1.	5450	x_2			
március 1.	4360	x_3			
április 1.	4260	x_4			
május 1.	4689	x_5			
június 1.	4578	x_6			
július 1.	4157	x_7	→ fele	4157/2	2078,5
augusztus 1.	4571				
szeptember 1.	4697				
október 1.	5001				
november 1.	4997				
december 1.	4578				
december 31.	3071				

adott év június 30 = adott év július 01

51. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (I. féléves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

A 2019. I. félévében havonta átlagosan 4610,92 fő ~ 4611 fő járt a sportcsarnokban (51. ábra).

b) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év II. félévében.

A kalkulációt az 2. félévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \frac{x_7}{2}}{7-1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4157}{2} + 4571 + \dots + 4578 + \frac{3071}{2}}{7-1} = 4576,33$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés
január 1.	4500	
február 1.	5450	
március 1.	4360	
április 1.	4260	
május 1.	4689	
június 1.	4578	
július 1.	4157	$x_1 \longrightarrow$ fele $4157/2$ $2078,5$
augusztus 1.	4571	x_2
szeptember 1.	4697	x_3
október 1.	5001	x_4
november 1.	4997	x_5
december 1.	4578	x_6
december 31.	3071	$x_7 \longrightarrow$ fele $3071/2$ $1535,5$

adott év december 31 = következő év január 01

52. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (II. féléves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

A 2019. II. félévében havonta átlagosan 4573,33 fő ~ 4573 fő járt a sportcsarnokban (52. ábra).

c) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év I. negyedévében.

A kalkulációt az 1. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4500}{2} + 5450 + 4360 + \frac{4260}{2}}{4 - 1}$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés
január 1.	4500	$x_1 \longrightarrow$ fele 4500/2 2250
február 1.	5450	x_2
március 1.	4360	x_3
április 1.	4260	$x_4 \longrightarrow$ fele 4260/2 2130
május 1.	4689	
június 1.	4578	
július 1.	4157	
augusztus 1.	4571	
szeptember 1.	4697	
október 1.	5001	
november 1.	4997	
december 1.	4578	
december 31.	3071	

adott év március 31 = adott év április 01

53. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (I. negyedéves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

Tehát 2019. I. negyedévében havonta átlagosan 4730 fő járt a sportcsarnokban (53. ábra).

d) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év II. negyedévében.

A kalkulációt a 2. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4 - 1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4260}{2} + 4689 + 4578 + \frac{4157}{2}}{4-1}$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)
január 1.	4500
február 1.	5450
március 1.	4360
április 1.	4260
május 1.	4689
június 1.	4578
július 1.	4157
augusztus 1.	4571
szeptember 1.	4697
október 1.	5001
november 1.	4997
december 1.	4578
december 31.	3071

Jelölés

 $x_1 \longrightarrow$ fele $4260/2$ 2130
 x_2 x_3
 $x_4 \longrightarrow$ fele $4157/2$ $2078,5$

adott év június 30 = adott év július 01

54. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (II. negyedéves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

A 2019. II. negyedévében havonta átlagosan 4491,83, azaz 4492 fő járt a sportcsarnokban (54. ábra).

e) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év III. negyedévében.

A kalkulációt a 3. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{4157}{2} + 4571 + 4697 + \frac{5001}{2}}{4-1}$$

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés
január 1.	4500	
február 1.	5450	
március 1.	4360	
április 1.	4260	
május 1.	4689	
június 1.	4578	
július 1.	4157	$x_1 \longrightarrow$ fele $4157/2$ $2078,5$
augusztus 1.	4571	x_2
szeptember 1.	4697	x_3
október 1.	5001	$x_4 \longrightarrow$ fele $5001/2$ $2500,5$
november 1.	4997	
december 1.	4578	
december 31.	3071	

adott év szeptember 31 = adott év október 01

55. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (III. negyedéves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

A 2019. III. negyedévében havonta átlagosan 4615,67 fő ~ 4616 fő járt a sportcsarnokban (55. ábra).

f) Határozza meg az átlagos havi látogatói létszámot az adott sportcsarnokban a 2019. év IV. negyedévében.

A kalkulációt a 4. negyedévre kell kiszámolni.

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + x_3 + \frac{x_4}{2}}{4-1}$$

$$\bar{x}_k = \frac{\frac{5001}{2} + 4997 + 4578 + \frac{3071}{2}}{4-1}$$

A 2019. IV. negyedévében havonta átlagosan 4537 fő járt a sportcsarnokban (56. ábra).

Időpont	Látogatói létszám (fő)	Jelölés		
január 1.	4500			
február 1.	5450			
március 1.	4360			
április 1.	4260			
május 1.	4689			
június 1.	4578			
július 1.	4157			
augusztus 1.	4571			
szeptember 1.	4697			
október 1.	5001	x_1	→ fele	$5001/2 \quad 2500,5$
november 1.	4997	x_2		
december 1.	4578	x_3		
december 31.	3071	x_4	→ fele	$3071/2 \quad 1535,5$

adott év december 31 = következő év január 01

56. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira (IV. negyedéves átlag)

Forrás: Saját szerkesztés

3.2.23. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG – PÉLDA 2 (A HÓNAP ELSŐ NAPJAI ADOTTAK)

Ismert a neves sporthíreket bemutató internetes oldal regisztrációs adatai 2019. évre (23. táblázat):

23. TÁBLÁZAT: A sport honlapra regisztráltak száma a 2019. évben

Időpont	Regisztráltak száma (fő)
január 1.	4569
február 1.	5697
március 1.	3647
április 1.	3477
május 1.	3458
június 1.	5474
július 1.	5478
augusztus 1.	4574
szeptember 1.	4578
október 1.	5550

Időpont	Regisztráltak száma (fő)
november 1.	5478
december 1.	6478
december 31.	3674

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. évben.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év I. félévében.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év II. félévében.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év I. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év II. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év III. negyedévében.
- Határozza meg az átlagos havi regisztráltak számát a sport honlapon a 2019. év IV. negyedévében.

3.2.24. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG PÉLDA 2 MEGOLDÁSA (A HÓNAP ELSŐ NAPJAI ADOTTAK)

A 2019. évben havonta átlagosan 4834,21 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. I. félévében havonta átlagosan 4462,75 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. II. félévében havonta átlagosan 5205,67 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. I. negyedévében havonta átlagosan 4455,67 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. II. negyedévében havonta átlagosan 4469,83 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. III. negyedévében havonta átlagosan 4888,67 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

A 2019. IV. negyedévében havonta átlagosan 5522,67 fő regisztrált be a sport honlapon (57. ábra).

Időpont	Regisztráltak száma (fő)	Jelölés	Éves	1. félév	2. félév	1. negyedév	2. negyedév	3. negyedév	4. negyedév
január 1.	4569	x_1	2284,50	2284,50		2284,50			
február 1.	5697	x_2							
március 1.	3647	x_3							
április 1.	3477	x_4				1738,50	1738,50		
május 1.	3458	x_5							
június 1.	5474	x_6							
július 1.	5478	x_7		2739,00	2739,00		2739,00	2739,00	
augusztus 1.	4574	x_8							
szeptember 1.	4578	x_9							
október 1.	5550	x_{10}						2775,00	2775,00
november 1.	5478	x_{11}							
december 1.	6478	x_{12}							
december 31.	3674	x_{13}	1837,00		1837,00				1837,00

Adott időszak záró értéke = következő időszak nyitó értéke

ÁTLAG		4834,21	4462,75	5205,67	4455,67	4469,83	4888,67	5522,67
-------	--	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

57. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a regisztráltakra vonatkozóan

Forrás: Saját szerkesztés

3.2.25. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG – PÉLDA 3 (A HÓNAP UTOLSÓ NAPJAI ADOTTAK)

Ismert egy budapesti sportbolt labda készletének alakulása 2019. évben. (24. táblázat):

24. TÁBLÁZAT: Egy budapesti sportbolt labda készletének az alakulása a 2019. évben

Időpont	Labda készlet (db)
január 1.	125
február 1.	260
március 1.	126
április 1.	230
május 1.	246
június 1.	280
július 1.	214
augusztus 1.	236
szeptember 1.	301
október 1.	214
november 1.	236

Időpont	Labda készlet (db)
december 1.	241
december 31.	248

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. évre.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év I. félévére.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év II. félévére.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év I. negyedévére.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év II. negyedévére.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év III. negyedévére.
- Határozza meg az átlagos havi labda készletet a 2019. év IV. negyedévére.

3.2.26. KRONOLÓGIKUS ÁTLAG – PÉLDA 3 MEGOLDÁSA (A HÓNAP UTOLSÓ NAPJAI ADOTTAK)

Időpont	Ladbakészlet (db)	Jelölés	Éves	1. félév	2. félév	1. negyedév	2. negyedév	3. negyedév	4. negyedév
december 31.	125	x_1	62,50	62,50		62,50			
január 31.	260	x_2							
február 29.	126	x_3							
március 31.	230	x_4				115,00	115,00		
április 30.	246	x_5							
május 31.	280	x_6							
június 30.	214	x_7		107,00	107,00		107,00	107,00	
július 31.	236	x_8							
augusztus 31.	301	x_9							
szeptember 30.	214	x_{10}						107,00	107,00
október 31.	236	x_{11}							
november 30.	241	x_{12}							
december 31.	248	x_{13}	124,00		124,00				124,00

Adott időszak záró értéke = következő időszak nyitó értéke

ÁTLAG	230,88	218,58	243,17	187,83	249,33	250,33	236,00
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

58. ÁBRA: A kronológikus átlag számítása a példa adataira

Forrás: Saját kalkuláció

A 2019. évben havonta átlagosan 230,88 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év I. félévében havonta átlagosan 218,58 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év II. félévében havonta átlagosan 243,17 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év I. negyedévében havonta átlagosan 187,83 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év II. negyedévében havonta átlagosan 249,33 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év III. negyedévében havonta átlagosan 250,33 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

A 2019. év IV. negyedévében havonta átlagosan 236,00 darab labda volt a kislabda készlet. (58. ábra).

3.2.27. SÚLYOZATLAN MÉRTANI ÁTLAG – PÉLDA 1

A 2019-2020. I. félévében részt vett Sportszervező hallgatók száma a Statisztika vizsgán (25. táblázat):

25. TÁBLÁZAT: A statisztika előadásra járó hallgatók száma 2018-2019. II. félévében

Hét	Vizsgán megjelent hallgatók száma (fő)
1. hét	12
2. hét	18
3. hét	14
4. hét	10
5. hét	9
6. hét	2

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg a fejlődés átlagos ütemét! Értelmezze a kapott eredményt!

3.3.28. SÚLYOZATLAN MÉRTANI ÁTLAG PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A fejlődés átlagos üteme kérdés a mértani átlagra utal, melyet kétféleképpen is kiszámolhatunk.

a) láncviszonyszámból számított mértani átlag:

Az alapadatokra vonatkozóan először lánc viszonyszámot kell számolni (adott hét értékét osztjuk a megelőző hét értékével). Ezt követően alkalmazuk az elméletben bemutatott képletet: $\bar{x} = \sqrt[n]{V_{L2} \times V_{L3} \times \dots \times V_{Ln}}$.

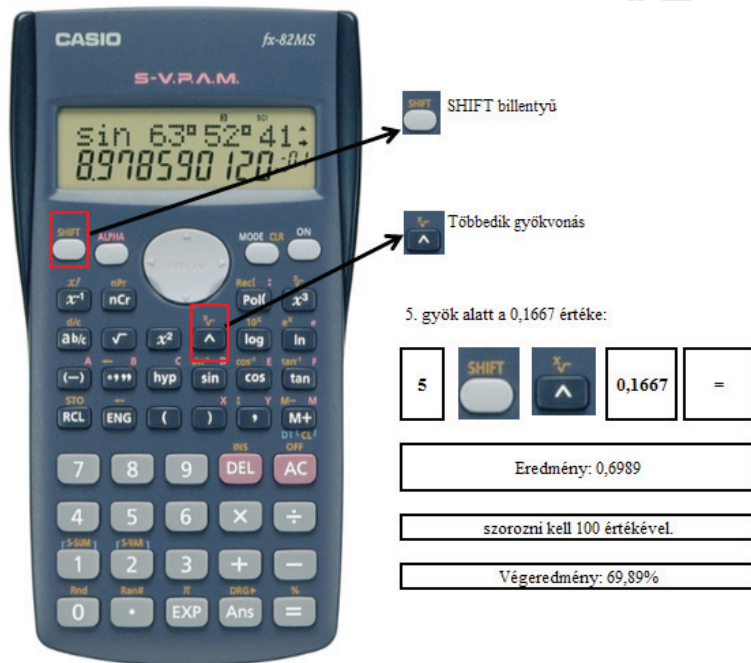
Hét	Vizsgán megjelent hallgatók száma (fő)	Lánc viszonyyszám (%)
1. hét	12	-
2. hét	18	150,00%
3. hét	14	77,78%
4. hét	10	71,43%
5. hét	9	90,00%
6. hét	2	22,22%

$$1,5000 \cdot 0,7778 \cdot 0,7143 \cdot 0,9000 \cdot 0,2222 = 0,1667$$

59. ÁBRA: A mértani átlag számítása láncviszonyyszámból

Forrás: Saját kalkuláció

A láncviszonyyszámok kiszámítását követően azokat összeszorozzuk (0,1667) (59. ábra) és ebből a számból vonunk „6-1”-edik gyököt (azaz 5. gyököt) (60. ábra).



60. ÁBRA: Számológéppel 5. gyök vonása

Forrás: Saját kalkuláció

Eredményünk a 69,89%, ami azt jelenti, hogy az első hétről a 6. hétig hetente átlagosan (69,89% – 100,00% = – 30,11%) 30,11%-kal csökkent a vizsgán részt vett hallgatók száma (60. ábra).

Ha az adatbázisra vonatkozóan a mértani átlagot a bázisviszonyszám felhasználásával számoljuk ki, akkor is ugyanezt a megoldást kell kapnunk.

b) bázis viszonyyszámból számított mértani átlag:

Az alapadatokra először kiszámoljuk a bázis viszonyyszám értékeit (adott hét értéke osztva a bázis (1. hét) értékével) (61. ábra). Ezután alkalmazzuk az elméletben bemutatott képletet:

$$\bar{X} = \sqrt[n-1]{\frac{V_{Bn}}{V_{B1}}}$$

Hét	Vizsgán megjelent hallgatók száma (fő)	Bázis viszonyyszám (%)
1. hét	12	100,00%
2. hét	18	150,00%
3. hét	14	116,67%
4. hét	10	83,33%
5. hét	9	75,00%
6. hét	2	16,67%
		utolsó bázis érték: 0,1667

61. ÁBRA: A mértani átlag számítása bázis viszonyyszámból

Forrás: Saját kalkuláció

SHIFT billentyű

Többedik gyökvonás

5. gyök alatt a 0,1667 értéke:

5	SHIFT	$\sqrt[n]{}$	0,1667	=
---	-------	-------------------------	--------	---

Eredmény: 0,6989

szorozni kell 100 értékével.

Végeredmény: 69,89%

62. ÁBRA: Számológéppel 5. gyök vonása

Forrás: Saját kalkuláció

Eredményünk a 69,89%, ami azt jelenti, hogy az első hétről a 6. hétig hetente átlagosan $(69,89\% - 100,00\% = -30,11\%)$ 30,11%-kal csökkent a vizsgán részt vett hallgatók száma (62. ábra).

3.2.29. SÚLYOZATLAN MÉRTANI ÁTLAG – PÉLDA 2

Adott az alkalmazásban álló nők havi bruttó átlagkeresete a 2013-2019-es években Magyarországon. Határozza meg az átlagos változás mértékét (fejlődés átlagos ütemét) a vizsgált adatok alapján (26. táblázat).

26. TÁBLÁZAT: Havi bruttó átlagkereset a vizsgált időszakban a nők esetén

Év	Bruttó átlagkereset Ft/fő
2013	158 000
2014	169 000
2015	173 000
2016	187 000
2017	196 000
2018	201 000
2019	212 000

Forrás: Saját adatgyűjtés

3.2.30. SÚLYOZATLAN MÉRTANI ÁTLAG – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

Év	Bruttó átlagkereset Ft/fő	Bázis	Lánc
		viszonyszám (%)	
2013	158 000	100,00%	-
2014	169 000	106,96%	106,96%
2015	173 000	109,49%	102,37%
2016	187 000	118,35%	108,09%
2017	196 000	124,05%	104,81%
2018	201 000	127,22%	102,55%
2019	212 000	134,18%	105,47%

Bázis viszonyszámból számított mértani átlag

Utolsó bázis viszonyszám

1,3418

Lánc viszonyszámból számított mértani átlag

Lánc viszonyszámok szorzata



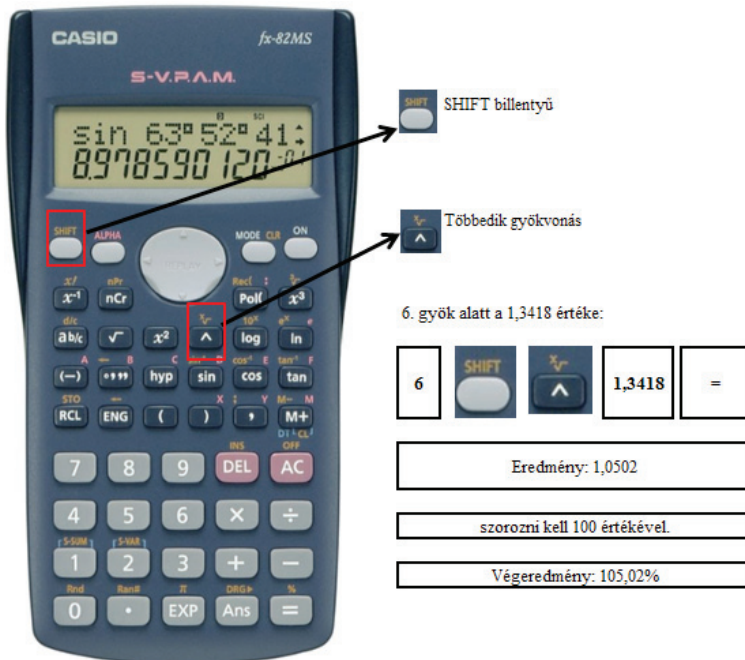
1,3418

$$\sqrt[6]{1,3418} = 105,02\%$$

63. ÁBRA: Mértani átlag számításának menete

Forrás: Saját kalkuláció

A bázisból számított mértani átlag megegyezik a lánc viszonyszámból számított mértani átlag értékével. Eredményünk 105,02% (63. és 64. ábra). Mivel 100% feletti eredményt kaptunk, így megállapítható, hogy a 2013. évtől a 2019. évig évente átlagosan 5,02%-kal nőtt a nők bruttó átlagkeresete Magyarországon (63. ábra).



64. ÁBRA: Számológéppel 6. gyök vonása

Forrás: Saját kalkuláció

2.2.31. SÚLYOZATLAN NÉGYZETES ÁTLAG – PÉLDA 1

Ismertek a következő számadatok (27. táblázat):

27. TÁBLÁZAT: Az ismert adatok rendezett sora

Sorszám	Értékek
1	-2
2	-5
3	6
4	9
5	7

Sorszám	Értékek
6	-1
7	6

Forrás: Saját adatgyűjtés

Határozza meg az értékek átlagát.

3.2.32. SÚLYOZATLAN NÉGYZETES ÁTLAG – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

Mivel az értékek között szerepel negatív előjelű érték is, így négyzetes átlagot kell számolni (65. ábra).

Sorszám	Értékek	Négyzetreemelés
1	-2	-2 * -2
2	-5	-5 * -5
3	6	6 * 6
4	9	9 * 9
5	7	7 * 7
6	-1	-1 * -1
7	6	6 * 6

232

Négyzetreemelt értékek összege 232

65. ÁBRA: A négyzetes átlag számítása

Forrás: Saját kalkuláció

Kiszámításához a következő képletet alkalmazzuk: $\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$

A feladat megoldása érdekében az alapadatokat (x_i) négyzetre kell emelni egy külön oszlopba, majd azokat össze kell adni (232). Ezen összeget kell elosztani a vizsgált elemek számával (7) és a hányadosból gyököt vonni.

A vizsgált adatok átlaga 5,76.

3.2.33. SÚLYOZATLAN NÉGYZETES ÁTLAG – PÉLDA 2

Ismertek a következő adatok. Határozza meg ezek átlagát (28. táblázat).

28. TÁBLÁZAT: Az ismert adatok rendezett sora

Sorszám	Értékek
1	-9
2	8
3	18
4	12
5	-10
6	-7
7	-1

Forrás: Saját adatgyűjtés

3.2.34. SÚLYOZATLAN NÉGYZETES ÁTLAG PÉLDA 2 MEGOLDÁS

Sorszám	Értékek	Négyzetreemelés
1	-9	-9 * -9
2	8	8 * 8
3	18	18 * 18
4	12	12 * 12
5	-10	-10 * -10
6	-7	-7 * -7
7	-1	-1 * -1

763

Négyzetreemelt értékek összege 763

66. ÁBRA: A négyzetes átlag számítása

Forrás: Saját kalkuláció

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{763}{7}} = 10,44$$

A vizsgált értékek átlaga 10,44 (66. ábra).

3.2.35. MEDIÁN ÉS MÓDUSZ – PÉLDA 1

Egy sportoló esetében egy hónapon keresztül mérték le a megtett körök számát 2020. január különböző napjain: 36, 39, 24, 22, 18, 18, 18, 22, 24, 27, 29 (adatok mértékegysége db)

- a) Határozza meg a leggyakrabban előforduló elemértéket a köreredmények között?

- b) Határozza meg, hogy melyik az a köreredmény, melynél az adatok 50%-a nagyobb, 50%-a pedig kisebb (Határozza meg a középítő elemértéket).

3.2.36. MEDIÁN ÉS MÓDUSZ PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

- a) Határozza meg a leggyakrabban előforduló elemértéket a köreredmények között?

A módusz meghatározásához először is sorba kell az adatokat rendezni (növekvő sorrendbe), majd azt a számot ki kell választani, melyből a legtöbb van. Esetünkben ez a 18 (67. ábra).

Ha két olyan szám is lenne, melyből 3 darab is van, akkor azt mondanánk, hogy két móduszú a vizsgált sokaságunk.

Megtett körök száma (db)	Sorbarendezés (növekvő)	leggyakrabban előforduló elemek a felsorolásban
36	18	
39	18	
24	18	
22	22	
18	22	
18	24	
18	24	
22	27	
24	29	
27	36	
29	39	

Elemek száma:

11

$$\frac{n+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6. \text{ sorbarendezt elem}$$

67. ÁBRA: A négyzetes átlag számítása

Forrás: Saját kalkuláció

- b) Határozza meg, hogy melyik az a köreredmény, melynél az adatok 50%-a nagyobb, 50%-a pedig kisebb (Határozza meg a középítő elemértéket).

A medián értékének meghatározásához is sorba kell rendezni az elemeket és a medián helyét meghatározzuk az $\frac{n+1}{2}$ képlet segítségével. 11 darab elemünk van, így $11+1=12$. 12 osztva kettő értékével adja meg a medián helyét. Azaz a sorba rendezett elemek közül a 6. elem lesz a medián. Tehát a mediánunk a 24. Eredményül

azt kaptuk, hogy a vizsgált adatok 50%-a 24 kör alatt van, 50% pedig 24 kör felett van (67. ábra).

Páros elemszám esetén:

Abban az esetben, ha 12 elemünk lenne, akkor a medián meghatározása egy kicsi számolást is igényelne. Az értékeket sorba rendezzük (növekvő) itt is és megnézzük, hogy a 12 elem középső értéke mennyi. Ezt legegyszerűbben úgy tudjuk kiszámolni, hogy az $\frac{n+1}{2}$ képletbe behelyettesítünk. Azaz $\frac{12+1}{2} = 6,5$. *elem* lesz a mediánunk a sorba rendezett elemek közül. A 6. és 7. elem számtani átlagát kell ebben az esetben képezni.

4. A SZÓRÓDÁSI MUTATÓK

4.1. A szóródási mutatók elméleti alapjai (súlyozott, súlyozatlan)

Az előző fejezetben megismertük a középértéket, melyek arra alkalmasak, hogy a megfigyelt értéksorokat tömören, egy számmal jellemezzék (vagy a centrális tendenciát kifejezzék).

Mivel az egyes értékek természetesen változékonyságot mutatnak, eltérnek a középértékektől, így különböznek egymástól. Az értékek különbözőségét, változékonyságát *szóródás*nak nevezzük. Az egyes értéksorozatok jellemezésének fontos eleme a szóródás vizsgálata. Fontos, hogy az egyes vizsgálatok esetén egy számmal tudjuk jellemezni a vizsgálatot. Erre a célra szolgálnak a szóródási mérőszámok.

A szóródási mutatóknak a következő csoportjait különíthetjük el:

- a) a szóródás terjedelme ($i = R$)
- b) a középeltérés (KE)
- c) az abszolút átlageltérés (AÁ)
- d) a variancia (S^2)
- e) a szórás (S)
- f) a relatív szórás (V)

A 6 darab szóródási mutató más-más szempontból jellemzi a változékonyságot, ezért célszerű az összes mutatót kiszámolni egy teljes körű jellemzés esetén.

- a) A *szóródás terjedelme* azt mutatja meg, hogy a vizsgált sokaság legkisebb és legnagyobb elemértéke között mekkora a távolság (két elemet vesz figyelembe). Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg. Ezt a mutatót tekintjük a legegyszerűbb mérőszámnak a szóródás vizsgálatánál. Jele az „i” vagy a „R” (range).

Kiszámítása a következő képlettel történik: $i = R = x_{\max} - x_{\min}$

Az $x_{\max}$ a legnagyobb elemértéket, míg az $x_{\min}$ a legkisebb elemértéket jelenti. A szóródás terjedelme azt az értékközt jelöli, amelyen belül az egyes értékek elhelyezkednek. A szóródásról általában nem ad jó tájékoztatást, mivel nagyságát a véletlen hatásra erősen ingadozó, gyakran kiugró, szélső értékek határozzák meg (Kerékgyártó – Mundruczó, 1987). A mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

b) A *középel térés* a sokaságelemek mediántól abszolút értékben számított eltéréseinek átlaga. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Fontos, hogy az eltérések előjelétől el kell tekinteni, mivel akármilyen irányú az eltérés, annak abszolút nagysága a mértékadó (Szűcs, 2004). Ezt a mutatót akkor alkalmazzuk, ha a medián fejezi ki a legjobban a középértéket.

Pozitív szám abszolút értéke maga a szám. Negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje. A nullától vett távolság soha nem lehet negatív szám (0 abszolút értéke 0. Az abszolút érték jele: | |

A pozitív számok abszolút értékét maga a szám. Például +10 abszolút értéke 10. A negatív számok abszolút értékét (0-tól mért távolsága) a szám ellentettje. Például a - 10 abszolút értéke a 10.

Egyszerű (súlyozatlan) feladatok esetén a számítás:

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - Me|}{n}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

$$KE = \frac{\sum_{i=1}^k f_i * |x_i - Me|}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a középel térést gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

c) Az *abszolút átlageltérés* (más néven átlagos abszolút eltérés) esetén a számtani átlagtól való eltérést használjuk fel a szóródás mértékének a meghatározásához. Mivel az egyes értékeknek a számtani átlagtól vett eltéréseinek az összege nulla (számtani átlag tulajdonsága), így az abszolút értékét kell képezni a különbségeknek, hogy az felhasználható legyen a jellemzéshez.

Tehát az abszolút átlageltérés az egyes értékek és a számtani átlag különbségei abszolút értékének a számtani átlaga. Azaz az abszolút átlagos eltérés az eltérések abszolút értékeinek számtani átlaga. Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Egyszerű (súlyozatlan) feladatok esetén a számítás:

$$AA = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

$$AA = \frac{\sum_{i=1}^k f_i * |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha az abszolút átlageltérést gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

- d) A *variancia (szórás négyzet)* jelentésének a meghatározása nehéz, mivel mértékegysége nem értelmezhető a számításban használt négyzetre emelés miatt.

Nagyon fontos azt figyelembe venni, hogy az egyes értékeknek a számtani átlagtól vett eltéréseinek az összege nulla, így a $\sum (x_i - \bar{x})$ összeget nem tudjuk felhasználni a szóródás mérésére. Az $(x_i - \bar{x})$ eltérések előjelétől való eltekintés egyik módja, ha az átlagolásukra a négyzetes átlagot használjuk. Egyszerű (súlyozatlan) feladatok esetén a számítás:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \times (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a varianciát a gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

- e) A *szórás (átlagos négyzetes eltérés)* az egyes értékek és a számtani átlag különbségeinek négyzetes átlag. Ez a leggyakrabban használt szóródási mérőszám. Fontos tulajdonságnak számít az, hogy a számtani átlag négyzetes minimum tulajdonságából következik, hogy a számtani átlagtól vett eltérés négyzetes átlaga KISEBB, mintha az eltéréseket bármilyen más értéktől kalkuláltuk volna (Kerékgyártó – Mundruczó, 1987). A szórás az eltérések négyzetes átlagának tekinthető. Az ismérvértékeknek a számtani átlagtól való eltérését, az $(x_i - \bar{x})$ értékeket használja fel a szóródás mértékeként. Ke-

rekgyártó et. al (2008) szerint kézenfekvő az eltérések átlagával jellemezni a szóródást.

Mértékegysége az alapadatok mértékegységével egyezik meg.

Egyszerű (súlyozatlan) feladatok esetén a számítás:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Súlyozott feladatok esetén a számítás (gyakorisági sorból számítjuk a mutató értékét, természetesen súlyozott formulát kell alkalmazni):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i * (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

Súlyozott feladatról akkor beszélünk, ha a szórást gyakorisági sorból számoljuk, az egyes eltéréseket a megfelelő gyakoriságokkal súlyozva vesszük figyelembe.

A szórást tehát így az egyes értékek és a számtani átlag különbségének négyzetes átlagának is hívjuk.

A szórás nagyon sok előnnyel rendelkezik, mivel valamennyi értéket figyelembe veszi, egyértelműen meghatározható és algebrailag könnyen kezelhető. A szakirodalmi kutatás alapján megállapítható, hogy a szórás jól alkalmazható a változékonyság, az ingadozások mértékének jellemezésére. Azonban természetesen van hátránya is, mivel a szórás négyzetes átlagon alapul, így rendkívül érzékeny a kiugró értékekre (négyzetre emeléssel a kiugró értékek torzítják az eredményt).

- f) A szórás abszolút értéke a sokaság változékonyságáról önmagában még kevés információt ad. Ezért célszerű kiszámítani annak az átlaghoz viszonyított nagyságát is, melyet *relatív szórásnak* (*szóródási együtthatónak* vagy *variációs koefficiensnek*) nevezünk. Ez egy dimenzió nélküli szóródási mérőszám, mely a szóródás relatív nagyságát méri (dimenzió nélküli szám). Fontos tulajdonsága az, hogy kiszűri az értékek nagyságrendjét. A mutató esetében a szórás átlaghoz viszonyított nagyságát fejezi ki, vagyis az egyes értékek az átlagtól relatíve átlagosan mennyivel (hány százalékkal) térnek el.

Kifejezési formája százalék (mértékegysége nincs!).

Kiszámítása:

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

Értékei a következők lehetnek:

0–10%: homogén a sokaság, állandóságot feltételezünk.

10–20%: közepesen változékony a sokaság.

20–30%: erősen változékony a sokaság.

30% felett: a sokaság jellemzésére az átlag nem alkalmas, szélsőségesen ingadozó a sokaság.

Fontos, hogy a relatív szórás értékét csak pozitív értékű ismérv esetén alkalmazhatjuk. Ez a mutató (mérőszám) a szóródás relatív nagyságát méri. A kapott eredmény egy dimenzió nélküli szám, mely kiszűri az értékek nagyságrendjét.

Értelmezése: a szórás átlaghoz viszonyított nagyságát fejezi ki, azaz az egyes értékek az átlagtól relatíve átlagosan mennyivel (hány százalékkal) térnek el. A képlet alkalmazásával megállapítható, hogy a relatív szórás egyenlő az egyes relatív eltérések négyzetes átlagával.

4.2. A szóródási mutatók alkalmazásának bemutatása

4.2.1. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 1

Ismert egy lovaglással foglalkozó sportoló, aki minden hónapban összeszámolta 2019. évben, hogy a pontszerzős versenyben mennyi pontot szerzett az egyes hónapokban.

29. TÁBLÁZAT: A lovas egyes hónapokban begyűjtött ponteredményei

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban
Január	150
Február	164
Március	116
Április	126
Május	120
Június	138
Július	141
Augusztus	150
Szeptember	178
Október	164
November	164
December	130

Forrás: Saját szerkesztés

- Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb távolság közti nagyságot.
- Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el?
- Határozza meg a variancia értékét.
- Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e?

4.2.2. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) SZÓRÓDÁSI MUTATÓK PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

a) Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb távolság közti nagyságot.

Ezen kérdés esetén a „Szóródás terjedelme” mutatót kell kiszámolni.

$$i = R = x_{\max} - x_{\min}$$

Az $x_{\max}$ érték a legmagasabb értéket jelenti a vizsgált sorban (178).

Az $x_{\min}$ érték a legkisebb értéket jelenti a vizsgált adatsorban (116).

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban
Január	150
Február	164
Március	116
Április	126
Május	120
Június	138
Július	141
Augusztus	150
Szeptember	178
Október	164
November	164
December	130

Legmagasabb érték 178 pont

Legalacsonyabb érték 116 pont

Szóródás terjedelme: $178 - 116 = 62$ pont

68. ÁBRA: A szóródás terjedelmének a kiszámítása

Forrás: Saját szerkesztés

A legmagasabb (MAX) értéknek a 178 pontot kaptuk, míg a legalacsonyabbnak a 116 pontot (68. ábra).

Tehát a szóródás terjedelme:

$$i = R = x_{\max} - x_{\min} = 178 - 116 = 62 \text{ pont}$$

Megoldás: A lovas legmagasabb és legalacsonyabb pontértéke közti különbség 62 pont volt.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?

A feladat megoldásához szükségünk van a medián számítására, mivel a feladatban kért mutató a „Középeltérés”. Ebben az esetben a medián értékét a tanult módszerrel kiszámoljuk.

A kapott eredmény: 145,5 pont, mely azt jelenti, hogy az alapadatok 50%-a 145,5 pont alatt, míg 50%-a 145,5 pont felett van. Azaz a középső elemérték az 145,5 pont (69. ábra).

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban	Sorba rendezett elemek (növekvő)
Január	150	116
Február	164	120
Március	116	126
Április	126	130
Május	120	138
Június	138	141
Július	141	150
Augusztus	150	150
Szeptember	178	164
Október	164	164
November	164	164
December	130	178

$$\frac{141 + 150}{2} = \frac{291}{2} = 145,5 \text{ pont}$$

A medián értéke tehát 145,5 pont.

$$\frac{n+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6,5. \text{ elem a medián}$$

69. ÁBRA: A medián és az elemszám kiszámítása

Forrás: Saját szerkesztés

Ezt követően meghatározzuk az elemek számát, mely 12 (12 hónap van).

A medián kiszámítását követően kerülhet sor a „Középérték” számításához szükséges részek meghatározására. Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$I x_i - Me I$$

Az $I x_i - Me I$ képletben a medián (Me) értéke az 145,5 pont. Az x_i értékei pedig soronként rendre a pontok az egyes hónapokban. A kiszámításhoz a különbség abszolút értékét kell venni (70. ábra).

Januári adat meghatározása: $I\ 116 - 145,5\ I = 29,5$
 Februári adat meghatározása: $I\ 120 - 145,5\ I = 25,5$
 Márciusi adata meghatározása: $I\ 126 - 145,5\ I = 19,5$
 stb.

Az összes adat kiszámolását követően lehet összeadni az új oszlop adatit (199).

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban	Sorba rendezett elemek (növekvő)	$I\ x - \text{medián } I$	
Január	150	116	$I\ 116 - 145,5\ I$	29,5
Február	164	120	$I\ 120 - 145,5\ I$	25,5
Március	116	126	$I\ 126 - 145,5\ I$	19,5
Április	126	130	$I\ 130 - 145,5\ I$	15,5
Május	120	138	$I\ 138 - 145,5\ I$	7,5
Június	138	141	$I\ 141 - 145,5\ I$	4,5
Július	141	150	$I\ 150 - 145,5\ I$	4,5
Augusztus	150	150	$I\ 150 - 145,5\ I$	4,5
Szeptember	178	164	$I\ 164 - 145,5\ I$	18,5
Október	164	164	$I\ 164 - 145,5\ I$	18,5
November	164	164	$I\ 164 - 145,5\ I$	18,5
December	130	178	$I\ 178 - 145,5\ I$	32,5
Összesen				199

$$\text{Középtérés} = 199 / 12 = 16,583$$

70. ÁBRA: A középeltérés kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően kell a képletbe behelyettesíteni: $199 / 12 = 16,583$ pont.

Értelmezés: Az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben 16,58 ponttal térnek el.

c) *Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan?*

A feladat megoldásához szükségünk van az átlag kiszámítására, mivel a feladatban kért mutató az „Abszolút átlageltérés”. Ebben az esetben az átlag értékét a súlyozatlan (egyszerű) számtani átlaggal határozzuk meg. A kapott eredmény a 145,083 pont, mely azt jelenti, hogy az alapadatok átlaga 145,083 pont (71. ábra).

Az átlag kiszámítását követően kerülhet sor az „Abszolút átlageltérés” számításához szükséges részek meghatározására. Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$I\ x_i - \bar{x}\ I$$

Az $|x_i - \bar{x}|$ képletben az átlag ($\bar{x}$) értéke a 145,083 pont. Az x_i értékei pedig soronként és n t rendre a pont értékek. A kiszámításhoz a különbség abszolút értékét kell venni.

Januári adat meghatározása: $|116 - 145,083| = 29,083$

Februári adat meghatározása: $|120 - 145,083| = 25,083$

Márciusi adat meghatározása: $|126 - 145,083| = 19,083$

stb.

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban	Sorba rendezett elemek (növekvő)	$ x - \text{átlag } x $	
Január	150	116	$ 116 - 145,083 $	29,0830
Február	164	120	$ 120 - 145,083 $	25,0830
Március	116	126	$ 126 - 145,083 $	19,0830
Április	126	130	$ 130 - 145,083 $	15,0830
Május	120	138	$ 138 - 145,083 $	7,0830
Június	138	141	$ 141 - 145,083 $	4,0830
Július	141	150	$ 150 - 145,083 $	4,9170
Augusztus	150	150	$ 150 - 145,083 $	4,9170
Szeptember	178	164	$ 164 - 145,083 $	18,9170
Október	164	164	$ 164 - 145,083 $	18,9170
November	164	164	$ 164 - 145,083 $	18,9170
December	130	178	$ 178 - 145,083 $	32,9170
Összesen		1741		199,0000

$$\text{Abszolút átlageltérés} = 199 / 12 = 16,583$$

$$\text{Átlag: } 1741 / 12 = 145,083$$

71. ÁBRA: Az abszolút átlageltérés kiszámítása

Forrás: Saját szerkesztés

Az újonnan elkészített oszlop kiszámítását követően kerülhet sor az összegzésre (199,00). Ezt követően kell a képletbe behelyettesíteni: $199 / 12 = 16,583$ pont.

Értelmezés: Az alapadatok egyes értékének a számtani átlagtól való átlagos eltérése abszolút értékben 165,58 pont.

d) Határozza meg a variancia értékét.

A feladat megoldásához szükségünk van az átlagra (145,083 pont) és a darabszámra (12 darab), melyet már korábban kiszámoltunk. A kérdés alapján a feladatban a „Variancia” értékét kell meghatározni. Az alap feladat mellé egy új oszlopot készítünk el, melynek az elnevezése:

$$(x_i - \bar{x})^2$$

Az $(x_i - \bar{x})^2$ képletben az átlag ($\bar{x}$) értéke a 145,083 pont, míg az x_i értékei pedig soronként rendre a pont értékei. A kiszámításhoz a különbség négyzetét kell venni (72. ábra). Januári adat meghatározása: $(116 - 145,083)^2$

Februári adat meghatározása: $(120 - 145,083)^2$

Márciusi adat meghatározása: $(126 - 145,083)^2$

stb.

Hónapok	Elért pont az egyes hónapokban	Sorba rendezett elemek (növekvő)	$(x - \text{átlag})^2$	
Január	150	116	$(116 - 145,083)^2$	845,8209
Február	164	120	$(120 - 145,083)^2$	629,1569
Március	116	126	$(126 - 145,083)^2$	364,1609
Április	126	130	$(130 - 145,083)^2$	227,4969
Május	120	138	$(138 - 145,083)^2$	50,1689
Június	138	141	$(141 - 145,083)^2$	16,6709
Július	141	150	$(150 - 145,083)^2$	24,1769
Augusztus	150	150	$(150 - 145,083)^2$	24,1769
Szeptember	178	164	$(164 - 145,083)^2$	357,8529
Október	164	164	$(164 - 145,083)^2$	357,8529
November	164	164	$(164 - 145,083)^2$	357,8529
December	130	178	$(178 - 145,083)^2$	1083,5289
Összesen		1741		4338,9167

$$\text{Variancia} = 4338,9167 / 12 =$$

$$361,576$$

72. ÁBRA: A variancia kiszámítása

Forrás: Saját szerkesztés

Az újonnan elkészített oszlop kiszámítását követően kerülhet sor az összegzésre (4338,9167). Fontos, hogy ennek a számnak nincs értelmezhető mértékegysége.

Képletbe behelyettesítve az eredményünk: $=(4338,9167 / 12) = 361,576$.

Értelmezés: Nem szükséges az értelmezés, mivel nem a számértéknek nincs értelmezhető mértékegysége.

e) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el?

A variancia értékéből egyszerűen gyököt kell vonni és megkapjuk a szórást ($\sqrt{361,576} = 19,02$ pont).

Értelmezés: az alapadatok az átlagtól átlagosan 19,02 ponttal térnek el.

f) Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e?

A relatív szórás meghatározásához a korábban kiszámított szórás és átlag értékekre van szükségünk.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Szórás} & 19,02 & \text{pont} & \\
 \text{Átlag} & 145,08 & \text{pont} & \\
 \\
 \text{Relatív szórás} & 19,02/145,083 = & 0,13 & \xrightarrow{*100} 13,1\%
 \end{array}$$

Mivel a relatív szórás értékünk 10-20% között van, így megállapítható, hogy a sokaság közepesen változékony.

4.2.3. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 2

A Statisztika előadáson részt vett hallgatók számát gyűjtöttem össze a 2019–2020. I. félévében (73. ábra):

Hét	Előadáson részt vett hallgatók száma (fő)
1. hét	89
2. hét	86
3. hét	78
4. hét	72
5. hét	80
6. hét	84

73. ábra: A 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók száma

Forrás: Saját adatgyűjtés

Kérdések:

- Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb elemérték közötti távolságot?
- Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el?
- Határozza meg a feladat varianciáját.
- Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e?

Az a)-tól f)-ig az összes kapott eredményt értelmezzük is.

4.2.4. EGYSZERŰ (SÚLYOZATLAN) SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

a) *Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb elemérték közötti távolságot?
Értelmezze az eredményt (74. ábra).*

Hét	Előadáson részt vett hallgatók száma (fő)
1. hét	89
2. hét	86
3. hét	78
4. hét	72
5. hét	80
6. hét	84

Minimum 72 fő

Maximum 89 fő

Terjedelem 17 fő

74. ÁBRA: A 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók számára
vonatkozóan a szóródás terjedelmének a meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés (74. ábra):

Max = 89 fő A Statisztika előadáson részt vett hallgatók legmagasabb száma a 89 fő.

Min = 72 fő A Statisztika előadáson részt vett hallgatók legalacsonyabb száma a 72 fő.

Terjedelem = 17 fő A legmagasabb és a legalacsonyabb elemérték közötti távolság 17 fő.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt (75. ábra).

Hét	Hallgatók száma (fő)	$ x_i - \text{medián } I $	
1. hét	89	$ 89 - 82 $	7
2. hét	86	$ 86 - 82 $	4
3. hét	78	$ 78 - 82 $	4
4. hét	72	$ 72 - 82 $	10
5. hét	80	$ 80 - 82 $	2
6. hét	84	$ 84 - 82 $	2
Összesen		29	

Medián 82,00 fő

Középelérés $\sqrt{29/6}$ 4,83 fő

75. ÁBRA: A 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók számára vonatkozóan a középeltérés meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Medián (Me) = 82 fő

z alapadatok 50%-a 82 fő alatt, míg 50%-a 82 fő felett van.

Középelérés (KE) = 4,83 fő

Az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben 4,83 fővel térnek el átlagosan.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt (76. ábra).

Hét	Hallgatók száma (fő)	$ x_i - \text{átlag } I $	
1. hét	89	$ 89 - 81,5 $	7,5
2. hét	86	$ 86 - 81,5 $	4,5
3. hét	78	$ 78 - 81,5 $	3,5
4. hét	72	$ 72 - 81,5 $	9,5
5. hét	80	$ 80 - 81,5 $	1,5
6. hét	84	$ 84 - 81,5 $	2,5
Összesen		29,0	

Átlag 81,50 fő

Abszolút átlageltérés $29/6 = 4,83$ fő

76. ÁBRA: A 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók számára vonatkozóan az abszolút átlageltérése meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Átlag ($\bar{x}$) = 81,5 fő

Az alapadatok átlaga 81,5 fő.

Abszolút átlageltérés (AÁ) = 4,83 fő

Az alapadatok az átlag értékétől abszolút értékben 4,83 fővel térnek el átlagosan.

d) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt (77. ábra).

Hét	Hallgatók száma (fő)	$(x_i - \text{átlag})^2$
1. hét	89	$(89 - 81,5)^2$ 56,3
2. hét	86	$(86 - 81,5)^2$ 20,3
3. hét	78	$(78 - 81,5)^2$ 12,3
4. hét	72	$(72 - 81,5)^2$ 90,3
5. hét	80	$(80 - 81,5)^2$ 2,25
6. hét	84	$(84 - 81,5)^2$ 6,25
Összesen		187,5

Átlag 81,50 fő

Variancia $187,5/6 = 31,25$

77. ÁBRA: 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók számára vonatkozóan a variancia értékének a meghatározása

Forrás: Saját kalkuláció

Átlag $(\bar{x}) = 81,5$ fő

Variancia $(S^2) = 31,25$

Az alapadatok átlaga 81,5 fő.

Mértékegysége nem értelmezhető, így a kapott eredmény értékét sem kell lejellemmezni. A mértékegység különben cm^2 lenne, de ezt nem tudjuk értelmezni.

e) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt (78. ábra).

Hét	Hallgatók száma (fő)	$(x_i - \text{átlag})^2$
1. hét	89	$(89 - 81,5)^2$ 56,25
2. hét	86	$(86 - 81,5)^2$ 20,25
3. hét	78	$(78 - 81,5)^2$ 12,25
4. hét	72	$(72 - 81,5)^2$ 90,25
5. hét	80	$(80 - 81,5)^2$ 2,25
6. hét	84	$(84 - 81,5)^2$ 6,25
Összesen		187,5

Átlag 81,50 fő

Variancia $187,5/6 = 31,25$

Szórás $\text{gyök}(31,25) = 5,59$ fő

78. ÁBRA: A 2019–2020. I. félévében a Statisztika előadáson részt vett hallgatók számára vonatkozóan a szórás kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Átlag $(\bar{x}) = 84,5$ fő

Szórás $(S) = 5,59$ fő

Az alapadatok átlaga 84,5 fő.

Az alapadatok az átlag értékétől átlagosan 5,59 fővel térnek el.

f) Határozza meg, hogy a sokaság heterogénnek vagy homogénnek tekinthető-e? Értelmezze az eredményt.

A relatív szórás értékét a szórás és az átlag hányadosával számoljuk ki. Mivel a szórás 5,59 fő, az átlag pedig 84,5 fő, így a kettő hányadosa: $\frac{5,59}{84,5} = 6,86\%$

A relatív szórás értéke 6,86%. Mivel 0–10% között van a relatív szórás értéke, így a sokaság homogénnek tekinthető.

4.2.5. SÚLYOZOTT SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 1

Ismert egy úszóversenyen részt vett úszók teljesítménye 2020.02.10.-én (30. táblázat):

30. TÁBLÁZAT: Egy úszóversenyen részt vett úszók teljesítménye

Táv teljesítésének az ideje (másodperc)			Úszók száma (fő)
240	–	249	2
250	–	259	10
260	–	269	15
270	–	279	16
280	–	289	13
290	–	299	19
300	–	309	4
Összesen			79

Forrás: Saját szerkesztés

Kérdések:

- Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb teljesítmény közti távolságot? Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el az átlagosan az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján. Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján. Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján? Értelmezze az eredményt.

- e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.
- f) Határozza meg, hogy az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján, hogy mennyi a relatív szórás értéke. Értelmezze az eredményt.

4.2.6. SÚLYOZOTT SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

- a) *Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb nettó árbevétel közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.*

A kérdés alapján meg kell határozni a legkisebb és a legnagyobb elemértéket az intervallumok ismeretében.

A legkisebb (minimum) érték az első intervallum alsó határa, míg a legnagyobb (maximum) érték az utolsó intervallum felső határa. A minimum érték tehát a 240 másodperc, míg a maximum érték a 310 másodperc.

A szóródás terjedelme tehát $i = R = x_{\max} - x_{\min} = 309 - 240 = 69$ másodperc. Tehát a legkisebb és a legnagyobb elemérték közötti különbség 70 másodperc.

- b) *Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján. Értelmezze az eredményt.*

Mivel a középérték számításnál nem tanultunk súlyozott medián számítást, így ezen feladattípust nem kell kiszámolni.

- c) *Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el az úszóversenyen mutatott teljesítmények alapján. Értelmezze az eredményt.*

A súlyozott feladatok megoldása a súlyozatlan feladathoz képest annyiban módosul, hogy minden számítási résznél a súlyozó tényezőt is figyelembe kell venni. A súlyozó tényező az minden esetben egyedi mértékegységgel rendelkezik. A feladatban az első oszlop mértékegysége másodperc, míg a második oszlopé fő. Ebben az esetben az úszók létszáma (fő) lesz a súlyozó tényező és a táv teljesítésének az ideje oszlopból fogjuk meghatározni az osztályközép értékét (mely a későbbiekben az „ x_i ” jelölést fogja kapni) (79. ábra).



Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszok száma (fő)	Osztályközép (xi)
240	- 249	2	
250	- 259	10	

79. ÁBRA: Az osztályközép meghatározása a példa adataira

Forrás: Saját kalkuláció

Az osztályközép értékét úgy számoljuk ki, hogy az adott intervallum alsó és felső határértékét összeadjuk, és ennek számoljuk ki a számtani átlagát (80. ábra).

Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszok száma (fő)	Osztályközép (xi)
240	- 249	2	(240+249)/2 244,50
250	- 259	10	(250+259)/2 254,50
260	- 269	15	(260+269)/2 264,50
270	- 279	16	(270+279)/2 274,50
280	- 289	13	(280+289)/2 284,50
290	- 299	19	(290+299)/2 294,50
300	- 309	4	(300+309)/2 304,50
Összesen		79	

80. ÁBRA: Az osztályközép számítása a példára vonatkozóan

Forrás: Saját kalkuláció

Azaz

- ♦ az első intervallumhoz tartozó osztályközép: $= (240+249)/2 = 244,5$
- ♦ a második intervallumhoz tartozó osztályközép értéke: $= (250+259)/2 = 254,5$
- ♦ a harmadik intervallumhoz tartozó osztályközép értéke: $= (260+269)/2 = 264,5$
- ♦ stb.

Az osztályközép kiszámítását követően kerülhet sor a súlyozott számtani átlag meghatározására. A középértékek fejezetben tanultak alapján a súlyozott számtani

átlag kiszámítása: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$

A képletben az f_i érték a súlyozó tényezőt jelenti (úszok létszáma), míg az x_i az osztályközép értékeit. Először tehát egy szorzatot kell készíteni: $f_i x_i$ (81. ábra):

A kapott összesen érték $\sum_{i=1}^k f_i x_i = 21905,5$ másodperc. Tehát összesen 21905,5 másodpercet voltak a versenyzők a vízbe. Ha ezt a számot elosztjuk az úszok számával (79 db), akkor megkapjuk az egy főre eső teljesítést másodpercben.

		f_i	x_i			
Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszok száma (fő)	Osztályközép (x_i)	$f_i \cdot x_i$		
240	-	249	2	244,50	2*244,5	489,0
250	-	259	10	254,50	10*254,5	2545,0
260	-	269	15	264,50	15*264,5	3967,5
270	-	279	16	274,50	16*274,5	4392,0
280	-	289	13	284,50	13*284,5	3698,5
290	-	299	19	294,50	19*294,5	5595,5
300	-	309	4	304,50	4*304,5	1218,0
Összesen		79				21905,5

Átlag $21905,5/79 = 277,28$

81. ÁBRA: Az átlag kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron

Forrás: Saját kalkuláció

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{21905,5}{79} = 277,28 \text{ másodperc}$$

Ez alapján megállapítható, hogy az úszok száma és a teljesítés idejük alapján az egy főre eső átlagos teljesítés 277,28 másodperc.

Ezt követően egy új oszlopot kell elkészíteni a példa mellé (82. ábra), melynek az elnevezése:

$$f_i \times |x_i - \bar{x}|$$

Itt soronként ki kell számolni ennek az összefüggésnek az értékét. Ezt követően össze kell adni az új oszlop értékeit, melynek az értéke 1059,49. Ezután lehet a képletbe behelyettesíteni:

$$A\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \times |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{1059,49}{79} = 13,41$$

Az alapadatok a 277,28 másodperces átlag értékétől abszolút értékben átlagosan 13,41 másodperccel térnek el.

		f_i	x_i		
Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszok száma (fő)	Osztályközép (xi)	$f_i * x_i$	$f_i * I x_i - \text{átlag } I$
240	-	249	2	244,50	489,0
250	-	259	10	254,50	2545,0
260	-	269	15	264,50	3967,5
270	-	279	16	274,50	4392,0
280	-	289	13	284,50	3698,5
290	-	299	19	294,50	5595,5
300	-	309	4	304,50	1218,0
Összesen		79		21905,5	1059,49

Átlag $21905,5/79 = 277,28$

Abszolút átlageltérés $1059,49 / 79 =$

13,41

82. ÁBRA: Az abszolút átlageltérés kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron

Forrás: Saját kalkuláció

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

A feladat kérdése alapján szórást kell számolni. Azaz a következő képletet kell

$$\text{használni teljes sokaság esetén: } S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f * (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i}}$$

A képlet kiszámításához szükségünk van egy új oszlopra, melynek az elnevezése (83. ábra): $f \times (x - \bar{x})^2$

		f_i	x_i				
Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszók száma (fő)	Osztály-közép (x_i)	$f_i * x_i$	$f_i * (x_i - \text{átlag})^2$		
240	-	249	2	244,50	489,0	$2 * (244,5 - 277,28)^2$	2149,69
250	-	259	10	254,50	2545,0	$10 * (254,5 - 277,28)^2$	5191,48
260	-	269	15	264,50	3967,5	$15 * (264,5 - 277,28)^2$	2451,77
270	-	279	16	274,50	4392,0	$16 * (274,5 - 277,28)^2$	124,08
280	-	289	13	284,50	3698,5	$13 * (284,5 - 277,28)^2$	676,77
290	-	299	19	294,50	5595,5	$19 * (294,5 - 277,28)^2$	5630,89
300	-	309	4	304,50	1218,0	$4 * (304,5 - 277,28)^2$	2962,67
Összesen		79		21905,5	19187,34		

$$\text{Átlag} \quad 21905,5/79 = 277,28$$

$$\text{Szórás} \quad 19187,34 / 79 \text{ hányadosból kell gyököt vonni} = 15,58$$

83. ÁBRA: A szórás kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron

Forrás: Saját kalkuláció

Tehát az alapadatok a 277,28 másodperces átlagtól átlagosan 15,58 másodperccel térnek el.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

Hasonlóképpen kell a varianciaszámítást elvégezni, mint a szórást, csak a végén nem kell gyököt vonni a kapott hányados értékéből (84. ábra).

		f_i	x_i			
Táv teljesítésének az ideje (másodperc)		Úszók száma (fő)	Osztály-közép (x_i)	$f_i * x_i$	$f_i * (x_i - \text{átlag})^2$	
240	- 249	2	244,50	489,0	$2 * (244,5 - 277,28)^2$	2149,69
250	- 259	10	254,50	2545,0	$10 * (254,5 - 277,28)^2$	5191,48
260	- 269	15	264,50	3967,5	$15 * (264,5 - 277,28)^2$	2451,77
270	- 279	16	274,50	4392,0	$16 * (274,5 - 277,28)^2$	124,08
280	- 289	13	284,50	3698,5	$13 * (284,5 - 277,28)^2$	676,77
290	- 299	19	294,50	5595,5	$19 * (294,5 - 277,28)^2$	5630,89
300	- 309	4	304,50	1218,0	$4 * (304,5 - 277,28)^2$	2962,67
Összesen		79		21905,5	19187,34	

$$\text{Átlag} \quad 21905,5/79 = 277,28$$

$$\text{Variancia} \quad 19187,34 / 79 = 242,88$$

84. ÁBRA: A variancia kiszámítása az osztályközös gyakorisági soron

Forrás: Saját kalkuláció

A használt képlet tehát:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{19187,34}{79} = 242,88$$

Értelmezés nem szükséges, mivel nincs értelmezhető mértékegysége a varianciának.

f) Határozza meg, hogy a vizsgált vállalkozások adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

A relatív szórás értékét ugyanúgy határozzuk meg, mint a súlyozatlan forma esetén, azaz

$$V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\text{súlyozottszórás}}{\text{súlyozottátlag}} \quad V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{15,58}{277,28} = 0,0562 \Rightarrow 0,0562 \times 100 = 5,62\%$$

Mivel a relatív szórás értéke 0–10% között van, így homogénnek tekinthető a sokaság.

4.2.7. SÚLYOZOTT SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 2

Ismert egy homokugró versenyszám távolság adatai (31. táblázat).

31. TÁBLÁZAT: Homokugró verseny teljesítmény adatai

Ugrási távolságok (cm)			Versenyzők száma (fő)
260	–	269	39
270	–	279	27
280	–	289	21
290	–	299	14
300	–	309	12
310	–	319	7
320	–	329	2
Összesen			122

Forrás: Saját összeállítás

Kérdések:

- Határozza meg a legmagasabb és a legalacsonyabb ugrási távolság közötti távolságot? Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan. Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el. Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.
- Határozza meg, hogy a homokugró verseny teljesítmény adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

4.2.8. SÚLYOZOTT SZÓRÓDÁSI MUTATÓK – PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

- Határozza meg a legmagasabb és a legalacsonyabb ugrási távolság közötti távolságot? Értelmezze az eredményt (85. ábra).

Ugrási távolságok (cm)	Versenyzők száma (fő)
269	39
270 - 279	27
280 - 289	21
290 - 299	14
300 - 309	12
310 - 319	7
320 -	2
Összesen	122

Az első intervallum alsó határát úgy számoljuk ki, hogy megnézzük milyen távolságok vannak az alsó határok esetén: $280-270=10$; $290-280=10$, stb. Így ennek az értéke $270-10=260$.

Az utolsó intervallum felső határát úgy számoljuk ki, hogy megnézzük milyen távolságok vannak a felső határok esetén: $319-309=10$; $309-299=10$, stb. Így ennek az értéke $319-10=309$.

85. ÁBRA: A szóródás terjedelmének a meghatározása a távolugrás adatok esetén

Forrás: Saját kalkuláció

A legkisebb elemérték a 260 cm (minimum érték).

A legnagyobb elemérték a 329 cm (maximum érték).

A szóródás terjedelme $i = R = 329 - 260 = 69$ cm. Azaz a legnagyobb és legkisebb elem közötti távolság 69 cm.

b) Határozza meg, hogy az alapadatok a medián értékétől abszolút értékben mennyivel térnek el átlagosan. Értelmezze az eredményt.

Nem kell kiszámolni a súlyozott középeltérést, mivel a középértékek témakörénél nem tanultunk súlyozott mediánszámítást.

c) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan abszolút értékben mennyivel térnek el a távolugrás esetén. Értelmezze az eredményt (86. ábra).

			f_i		
Ugrási távolságok (cm)		Versenyzők száma (fő)	x_i	$f_i * x_i$	
260	-	269	39	264,5	10315,5
270	-	279	27	274,5	7411,5
280	-	289	21	284,5	5974,5
290	-	299	14	294,5	4123
300	-	309	12	304,5	3654
310	-	319	7	314,5	2201,5
320	-	329	2	324,5	649
Összesen			122		34329

$$\begin{aligned} \text{Átlag} &= 34329/122 \\ &= 281,39 \text{ cm} \end{aligned}$$

86. ÁBRA: Az átlag meghatározása a távolugrás adatok esetén

Forrás: Saját kalkuláció

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{34329}{122} = 281,39 \text{ cm}$$

Az átlag meghatározása után kerülhet sor az abszolút átlageltérés kalkulálására (87. ábra).

f_i

Ugrási távolságok (cm)	Versenyzők száma (fő)	x_i	$f_i * x_i$	$f_i * I x_i - \text{átlag } I$
260 - 269	39	264,5	10315,5	$39 * I 264,5 - 281,39 I$ 658,52
270 - 279	27	274,5	7411,5	$27 * I 274,5 - 281,39 I$ 185,90
280 - 289	21	284,5	5974,5	$21 * I 284,5 - 281,39 I$ 65,41
290 - 299	14	294,5	4123	$14 * I 294,5 - 281,39 I$ 183,61
300 - 309	12	304,5	3654	$12 * I 304,5 - 281,39 I$ 277,38
310 - 319	7	314,5	2201,5	$7 * I 314,5 - 281,39 I$ 231,80
320 - 329	2	324,5	649	$2 * I 324,5 - 281,39 I$ 86,23
Összesen	122		34329	1688,85

$$\text{Abszolút átlageltérés} = 1688,85 / 122 = 13,84$$

87. ÁBRA: Az abszolút átlageltérés meghatározása a távolugrás esetén

Forrás: Saját kalkuláció

$$\text{Az abszolút átlageltérés értéke: } AA = \frac{\sum_{i=1}^k f_i * |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{1688,85}{122} = 13,84$$

Az alapadatok a 281,39 cm-res átlag értékétől abszolút értékben 13,84 cm-rel térnek el átlagosan.

d) Határozza meg, hogy az alapadatok az átlagtól átlagosan mennyivel térnek el? Értelmezze az eredményt.

A feladat kérdése alapján szórást kell számolni (88. ábra).

f_i

Ugrási távolságok (cm)	Versenyzők száma (fő)	x_i	$f_i * x_i$	$f_i * (x_i - \text{átlag})^2$
260 - 269	39	264,5	10315,5	$39 * (264,5 - 281,39)^2$ 11119,35
270 - 279	27	274,5	7411,5	$27 * (274,5 - 281,39)^2$ 1279,98
280 - 289	21	284,5	5974,5	$21 * (284,5 - 281,39)^2$ 203,74
290 - 299	14	294,5	4123	$14 * (294,5 - 281,39)^2$ 2407,95
300 - 309	12	304,5	3654	$12 * (304,5 - 281,39)^2$ 6411,50
310 - 319	7	314,5	2201,5	$7 * (314,5 - 281,39)^2$ 7676,11
320 - 329	2	324,5	649	$2 * (324,5 - 281,39)^2$ 3717,76
Összesen	122		34329	32816,39

$$\text{Szórás} = \text{gyök alatt a } 32816,39 / 122 \text{ hányadosa} = 16,4$$

88. ÁBRA: A szórás meghatározása a távolugrás esetén

Forrás: Saját kalkuláció

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i * (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i}} = \sqrt{\frac{32816,39}{122}} = 16,4$$

Tehát az alapadatok a 281,39 cm átlagtól átlagosan 16,4 cm-rel térnek el a távol-ugrás adatok alapján.

e) Határozza meg a feladat varianciáját. Értelmezze az eredményt.

A szórásnál bemutatott számítások alapján a variancia a következőképpen alakul:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i * (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i} = \frac{32816,39}{122} = 268,99$$

Értelmezés nem szükséges, mivel a varianciának nincs értelmezhető mértékegysége.

f) Határozza meg, hogy a vizsgált vállalkozások adatai alapján mennyi a relatív szórás értéke.

A relatív szórás értéke súlyozott formában $V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\text{súlyozottszórás}}{\text{súlyozottátlag}}$

$$V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{16,4}{281,39} = 0,0583 \Rightarrow 0,0583 \times 100 = 5,83\%$$

Mivel a relatív szórás értéke 0–10% között van, így homogén a sokaság.

5. AZ INDEXEK

5.1. Az indexek elméleti alapjai

Az index kifejezés latin eredetű szó. A vizsgálat heterogén, összetett sokaságra irányul. Makroszinten (pl. a gazdasági növekedés jelzőszámai, fogyasztói árindex), illetve mikroszinten (vezetői tájékoztatási adatok, a folyamatokban bekövetkező változások kiváltó tényezőinek elemzése) is alkalmazható.

Másik megközelítés szerint az index-számítás olyan összehasonlító viszonyszámok, melyek közvetlenül nem összesíthető mennyiségek, együttes, átlagos változást fejezi ki. A dinamikus viszonyszámokkal mindig csak 1-1 termék árának, illetve mennyiségének alakulását vizsgálhatjuk. A gazdasági életben azonban szükség van olyan számításokra, amelyek egyszerre fejezik ki több termék ár- és mennyiségváltozásának hatását. Erre szolgálnak az indexszámítások. A változást kifejezhetjük mind relatív (I =index), mind abszolút (K =különbség) módon.

Az összehasonlítás elvégezhető:

- ♦ térben: 2 ország vagy két vállalat adatait hasonlítom,
- ♦ időben: 2 év adatait hasonlítom össze.

Napjainkban nem egyféle árut termelnek és forgalmaznak a vállalkozások, ezért érthető, hogy összevont mutatókkal vizsgálják tevékenységük időbeli alakulását, illetve hasonlítják azt más vállalkozások, területek adataihoz.

Természetesen az egyedi indexeket is használják, mert az egyes termékek ár-, mennyiség- és értékváltozását ezek fejezik ki. A termékekre számított egyedi indexek a dinamikus viszonyszámok.

A termékek mennyiségi és árváltozását együtt vizsgálva legegyszerűbben az érték összehasonlításával oldható meg. A különböző termékekből származó bevételek, termelési értékek azonos mértékegységűek, így összesíthetőek, és összehasonlíthatók mind hányados, mind különbség formájában is. A leggyakrabban az időbeli összehasonlítást végezzük.

Standardizálás, aggregálás

Az egymással összehasonlítható adatokat bizonyos szempontok érvényesítésével csak a bennünket érdeklő szempontból tesszük különbözővé, más szempontokból pedig egyformává alakítjuk. A standardizálás a heterogén sokaság színvonalváltozását kifejező mutatók tényezőkre bontásának olyan módszere, ahol a változó súlyok helyett változatlan (standard) súlyokat feltételezünk.

Az értékben való összesítést aggregálásnak, az összesített értékadatokat aggregátumoknak nevezzük.

Statisztikai indexek

A statisztikai index több eltérő tulajdonságú, gyakran eltérő mértékegységben kifejezett jelenség együttes átlagos változásának jellemzésére alkalmas. Megjelenési formájuk az egynemű adatokból számított viszonyszámokkal azonos (százalékos). Csak az összetett indexek tekinthetők **tényleges indexeknek**. **Az egyes résztvevők változását kifejező dinamikus vagy egyéb összehasonlító viszonyszámok az egyedi indexek, de csak az összetett indexszámítás keretén belül nevezhetők annak.**

Indexek csoportosítása

I. Abszolút számokból számított indexek:

- a) **Értékindex**,
- b) **Árindex** (bázis időszaki súlyozású, tárgyidőszaki súlyozású)
- c) **Volumenindex** (bázis időszaki súlyozású, tárgyidőszaki súlyozású).

II. Viszonyszámokból számított indexek:

- a) Változó állományú index,
- b) Változatlan állományú index,
- c) **Összetételindex**.

I. ABSZOLÚT SZÁMOKBÓL SZÁMÍTOTT INDEXEK

Az indexszámok valamilyen szempontból összetartozó, de különmemű (különböző mértékegységű), közvetlenül nem összesíthető javak összességének időbeli vagy térbeli összehasonlítására szolgálnak.

Az index számításánál szükségünk van mennyiségekre (jele: q [quantity]) és árakra (jele: p [price]) egyaránt. Az ár és a mennyiség szorzatából jön létre az értékadat (jele: v [value]), vagyis az árbevétel

A számításnál mindig két időszakra van szükségünk (évre, napra, hónapra, idő megjelölésre, stb.), mivel időbeli változást határozunk meg. A tőlünk távolabbi időszakot bázis időszaknak (jele: 0), míg a hozzánk közelebbi időszakot tárgy időszaknak (jele: 1) hívjuk. Mivel két időszakunk is van, így az ár és mennyiségi adatok a következő jelöléseket kapják: q_0, q_1, p_0, p_1 .

Az ár és a mennyiség szorzatából árbevételt (aggregátumot) tudunk képezni, melyek a következők: $q_0 p_0, q_1 p_1, q_1 p_0, q_0 p_1$.

A $q_0 p_0$ a bázis időszaki árbevétel/aggregátum, a $q_1 p_1$ a tárgy időszaki árbevétel/aggregátum, melyeket valós aggregátumoknak nevezünk. A $q_1 p_0$ és a $q_0 p_1$ pedig a vegyes, vagyis fiktív árbevétel/aggregátum. Ezeket az árbevétel adatokat fogjuk a különböző indexszámításoknál felhasználni.

Tehát a nem összegezhető (különböző mértékegységű) termékek az értékösszeük alapján elemezhetők. Az összetartozó, de különmemű termékekből álló (heterogén) termékcsoporthoz összértékét aggregátumnak (A) nevezzük.

Ha az árbevétel adatokból hányadost képzünk, akkor indexet (I), míg ha különbséget képzünk, akkor pedig különbséget (K) számolunk.

Általános jelölésük:

$$I_{\Delta}^{\Delta} = \frac{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}} \quad K_{\Delta}^{\Delta} = \sum q_{\Delta} p_{\Delta} - \sum q_{\Delta} p_{\Delta}$$

Látható, hogy az index és a különbség esetében is az árbevétel értékekre lesz szükségünk. Az indexek esetében a következő jelölések szerepelhetnek a képletben:

csak szám jelölés lehet itt (0 vagy 1)

$$I_{\Delta}^{\Delta} = \frac{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}{\sum q_{\Delta} p_{\Delta}}$$

csak szám jelölés lehet itt (0 vagy 1)

Árindex esetén: p
Volumenindex esetén: q

A különbséget minden esetben úgy fogjuk képezni, hogy az indexnél megtanult képlet számlálójából kivonjuk a nevező értékét. Részletesebben erről a majd példánál kapunk információt.

FONTOS SZABÁLY: Mindig valaminek mutatni kell a tárgy / bázis elképzelést, azaz vagy az ár (p) vagy a mennyiségi (q) értékeknél $\frac{1}{0}$ jelölés legyen az index esetén!

A termékek változásait együtt vizsgálva legegyszerűbben az érték összehasonlításával oldhatjuk meg. A különböző termékekből származó bevételek, termelési értékek azonos mértékegységűek, így összesíthetők.

A következőkben tekintsük át, milyen index típusokat különböztetünk meg.

a) Értékindex

Az értékindex szakmai szempontból összetartozó jelenségek (legtöbbször termékek vagy termékcsoporthoz) értékben kifejezett összességének (termelési értékének) együttes átlagos változását fejezi ki. Az értékindex mindig az érvényben lévő, folyó-árakon számítva fejezi ki a termelés értékének változását.

Az értékinde克斯 jelentése, hogy a mennyiség és az ár együttes változása esetén, hogyan változott az érték az összes terméket figyelembe véve (hányszorosára). Az érték különbség pedig azt mutatja meg, hogy mennyivel változott az érték.

Az értékinde克斯 számítása (%):
$$I_v = I_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0}$$

Eltérések (Ft):
$$K = \sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0$$

Látható, hogy az eltérés értékét úgy határozzuk meg, hogy az értékinde克斯nél meghatározott képlet számlálójából kivonjuk a nevező értékét. Az így kapott eredmény mértékegysége Ft lesz.

Ha 100% felett van az eredményünk az értékinde克斯nél, akkor növekedés következett be bázis időszakról tárgy időszakra. Például az $I_\epsilon = 105\%$ azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 5%-os növekedés következett be az árbevételben.

Ha 100% alatt van az eredményünk az értékinde克斯nél, akkor csökkenés következett be bázis időszakról tárgy időszakra. Például az $I_\epsilon = 91\%$ azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 9%-kal csökkent az árbevétel.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám pedig a növekedést jelöli bázisról tárgy időszakra.

Például a $K_\epsilon = 159\,000$ Ft azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 159 ezer forinttal nőtt az árbevétel.

Például a $K_\epsilon = -108\,000$ Ft azt jelenti, hogy a bázis időszakról a tárgy időszakra 108 ezer forinttal csökkent az árbevétel.

Az értékinde克斯nél meghatározott növekedést vagy csökkenést az ár- és volumenindex segítségével fogjuk magyarázni.

b) Volumenindex (az ár [p] adatok állandóak)

A volumenindex különböző termékek mennyiségének együttes átlagos változását fejezi ki. A mennyiség változása mellett azt feltételezzük, hogy az árak változatlanok.

A bázissúlyozású volumenindexet Laspeyres-féle volumenindexnek, míg a tárgyidőszak súlyozású volumenindexet Paasche-féle volumenindexnek nevezzük.

A volumenindex számítása (%):

$$I_q^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_0}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0} \qquad I_q^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_0}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0}$$

$$I_q^P = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_1} \qquad I_q^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_1}$$

$$\begin{aligned} \text{Eltérések (Ft):} \quad K_q^1 &= \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_1 \\ K_q^0 &= \Sigma q_1 p_0 - \Sigma q_0 p_0 \end{aligned}$$

A képletekben szereplő $q_0 p_1$ és $q_1 p_0$ szorzatok összegzéseként kapott értékadatokat fiktív aggregátumoknak nevezzük, mivel ezek a valóságban nem léteznek.

Ha 100% felett van az eredményünk a volumenindexnél, akkor növekedés állapítunk meg. Például az

- $I_q^0 = 110\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak 10%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_q^1 = 110\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak 10%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_q^0 = 88\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak 12%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_q^1 = 88\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak 12%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám pedig a növekedést jelöli bázisról tárgy időszakra.

c) Árindex (a mennyiségi [q] adatok állandóak)

Az árindex különböző termékek árainak együttes átlagos változását mutatja meg. Az aggregátumot kialakító tényezők közül a **mennyiségek változatlanok**.

Az árindex kifejezi, hogy hányszorosára változott az érték, csak az árváltozás hatására. A különbségképzés esetén megkapjuk, hogy mennyivel változott az érték.

A bázissúlyozású árindexet Laspeyres-féle árindexnek, míg a tárgyidőszak súlyozású árindexet Paasche-féle árindexnek nevezzük.

$$I_p^L = \frac{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0} \qquad I_p^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0}$$

Az árindex számítása (%):

$$I_p^P = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_0} \qquad I_p^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Eltérések (Ft):} \quad K_p^1 &= \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_1 p_0 \\ K_p^0 &= \Sigma q_0 p_1 - \Sigma q_0 p_0 \end{aligned}$$

Ha 100% felett van az eredményünk az árindexnél, akkor növekedés állapítunk meg. Például az

- $I_p^0 = 120\%$ azt jelenti, hogy az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek 20%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_p^1 = 120\%$ azt jelenti, hogy az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek 20%-ban növelték az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_p^0 = 77\%$ azt jelenti, hogy az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek 23%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.
- $I_p^1 = 77\%$ azt jelenti, hogy az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek 23%-ban csökkentették az árbevétel változást bázisról tárgy időszakra.

Ha a különbségképzés esetén negatív előjelű számot kapunk, akkor az a csökkenést, míg a pozitív előjelű szám pedig a növekedést jelöli bázisról tárgy időszakra.

Az érték-, a volumen- és az árindex közötti összefüggések

$$I_v = I_q^L \cdot I_p^P$$

$$I_v = I_q^P \cdot I_p^L$$

VAGYIS

$$I_\epsilon = I_q^0 \cdot I_p^1$$

$$I_\epsilon = I_q^1 \cdot I_p^0$$

A visszaellenőrzéssel ugyanazt fogjuk megkapni, mint amit az értékindexnél kiszámoltunk.

Fisher-féle indexformula: A kétféle súlyozással meghatározott eredményből mértani átlagot számítva határozza meg az ár és volumen indexeket.

$$I_q^F = \sqrt{I_q^L \cdot I_q^P}$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^L \cdot I_p^P}$$

$$I_v = I_q^F \cdot I_p^F$$

A Fisher-féle volumenindex a mennyiségek befolyásoló szerepét határozzák meg. 100% alatt csökkenést, míg 100% felett növekedést jelent az értéke. Az $I_q^F = 0,98 \Rightarrow * 100 = 98\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek az árbevétel változást 2%-ban (befolyásolják) csökkentik. Az $I_q^F = 1,2228 \Rightarrow * 100 = 122,28\%$ azt jelenti, hogy a mennyiségek az árbevétel változást 22,28%-ban növelik.

A Fisher féle árindex az árak befolyásoló szerepét határozzák meg. 100% alatt csökkenést, míg 100% felett növekedést jelent az érték. Az $I_p^F = 0,90 \Rightarrow * 100 = 90\%$ azt jelenti, hogy az árak az árbevétel változást 10%-ban (befolyásolják) csökkentik. Az $I_p^F = 1,1234 \Rightarrow * 100 = 112,34\%$ azt jelenti, hogy az árak az árbevétel változást 12,34%-ban növelik.

Az érték-, volumen- és az árindex aggregátumai közötti összefüggések: A különböző indexeknél számolt aggregátumok különbségei értékben fejezik ki, hogy a bekövetkezett összértékváltozásból mennyi tulajdonítható a mennyiség és az ár változásának.

Az aggregátumok különbségeinek számításakor az összértékben jelentkező változást a mennyiségi és árváltozás okozza, ezért érvényesek a következő összefüggések:

$$K_v = K_q^0 + K_p^1$$

$$K_v = K_q^1 + K_p^0$$

Kérdések tehát a következőképpen alakulnak:

- Határozza meg ... együttes értékváltozását a bázis évhez viszonyítva! (érték-index)
- Határozza meg ... együttes változását a bázisidőszak árai alapján! (bázis időszaki volumenindex)
- Határozza meg ... együttes változását a tárgyidőszak árai alapján! (tárgy időszaki volumenindex)
- Határozza meg ... együttes változását a bázisidőszak mennyiségei alapján! (bázis időszaki árindex)
- Határozza meg ... együttes változását a tárgyidőszak mennyiségei alapján! (tárgy időszaki árindex)
- Végezze el az ellenőrző számításokat és értelmezze a kapott eredményeket!

Egyedi indexek

Az egyedi indexek között megkülönböztetünk egyedi értékindexet, egyedi árindexet, egyedi volumenindexet.

Egyedi árindex:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0} \quad i_p$$

ahol:

p_1 : tárgyidőszak egységára

p_0 : bázisidőszak egységára

Egyedi volumenindex:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

ahol:

q_1 : tárgyidőszaki mennyiség

q_0 : bázisidőszaki mennyiség

Egyedi értékindex:

$$i_v = \frac{v_1}{v_0} = \frac{q_1 p_1}{q_0 p_0}$$

ahol:

$$i_v = i_q \cdot i_p$$

v_1 : tárgyidőszaki termékérték

v_0 : bázisidőszaki termékérték

*Egyedi értékinde*x: Az egyedi termékek értékének eltérését mutatja, azaz hogyan változott az adott termékre vonatkozó termelési érték (forgalom) a bázisidőszakról a tárgyidőszakra.

A vizsgált termékek értékének változása részben az árak változásának, részben a mennyiségek változásának köszönhető.

- *Egyedi árindex*: Adott termék árváltozását fejezi ki.
- *Egyedi árindex*: Adott termék mennyiségi változását fejezi ki.

II. A VISZONYSZÁMOK EGYÜTTES VÁLTOZÁSÁT KIFEJEZŐ INDEXEK

A viszonszámok együttes változását kifejező indexek heterogén összetételű sokaságok átlagai, viszonszámok együttes változásának kifejezésére alkalmasak.

A viszonszám önmagában is színvonalat kifejező változó, ezért ezekkel az átlagos színvonalváltozás és az azt befolyásoló tényezők fejezhetők ki.

A sokaság általános jellemzője a főátlag, a tényezők főátlagra gyakorolt hatását *standardizálással* mutatjuk ki.

a) Főátlagindex

Főátlagindex-szel fejezzük ki a szakmai tekintetben összetartozó, de eltérő részsokaságokból álló statisztikai sokaság valamely tulajdonságának színvonalváltozása.

A főátlag-index a főátlag változását fejezi ki, azaz megmutatja, hogy hogyan változik a heterogén sokaság főátlaga a részátlagok színvonalának és arányának együttes változása esetén.

A főátlagindex számítása:

$$I_x = \frac{\sum_{i=1}^n f_{1i} \bar{x}_{1i}}{\sum_{i=1}^n f_{0i} \bar{x}_{0i}}$$

ahol az f_{1i} az egyes sokaságok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a tárgyidőszakban;
 ahol az f_{0i} az egyes sokaságok átlagszínvonal mutatóinak súlyai a bázisidőszakban;
 ahol az $\bar{x}_{0i}$ az egyes csoportok vagy részsokaságok átlagszínvonal mutatói a bázisidőszakban;

ahol az $\bar{x}_{1i}$ az egyes csoportok vagy részsokaságok átlagszínvonal mutatói a tárgyidőszakban.

b) Részátlagindex

A részátlagindex azt mutatja meg, hogyan változott volna az egész sokaság átlaga, ha csak a részsokaságok színvonala változott volna, de a csoportok közötti arányok nem tolódtak volna el.

A részátlagindex számítása:

$$I_x^0 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n f_{0i} \bar{x}_{1i}}{\sum_{i=1}^n f_{0i}}}{\frac{\sum_{i=1}^n f_{0i} \bar{x}_{0i}}{\sum_{i=1}^n f_{0i}}} \text{ bázissúlyozás} \quad I_x^1 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n f_{1i} \bar{x}_{1i}}{\sum_{i=1}^n f_{1i}}}{\frac{\sum_{i=1}^n f_{1i} \bar{x}_{0i}}{\sum_{i=1}^n f_{1i}}} \text{ tárgysúlyozás}$$

c) Összetételindex

Az összetételindex azt fejezi ki, hogyan változott volna a sokaság átlaga, ha csak a részsokaságok arányai változtak volna, de a részsokaságok átlagai változatlanok maradnak.

Az összetételindex számítása:

$$I_o^0 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n f_{1i} \bar{x}_{0i}}{\sum_{i=1}^n f_{1i}}}{\frac{\sum_{i=1}^n f_{0i} \bar{x}_{0i}}{\sum_{i=1}^n f_{0i}}} \text{ bázissúlyozás} \quad I_o^1 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n f_{1i} \bar{x}_{1i}}{\sum_{i=1}^n f_{1i}}}{\frac{\sum_{i=1}^n f_{0i} \bar{x}_{1i}}{\sum_{i=1}^n f_{0i}}} \text{ tárgy súlyozás}$$

A viszonyszámokból számított indexek közötti összefüggések

Az értékindexkörnél már bemutatott módon itt is érvényes az, hogy a főátlagindex egyenlő a különböző súllyal számított rész- és összetételindex szorzatával:

$$I_x = I_x^0 \cdot I_o^1$$

$$I_x = I_x^1 \cdot I_o^0$$

5.2. Az abszolút számokból számított indexek alkalmazásának bemutatása

5.2.1. PÉLDA 1

Ismert egy neves sportbolt, ahol a 4 legfontosabb (legjobban keresett) termékre vonatkozóan megkaptuk a mennyiségi és ár adatokat (32. táblázat) a 2017. és 2020. év január 1-re vonatkozóan:

32. TÁBLÁZAT: A sportbolt értékesítési adatai 2017. és 2020. években

Megnevezés	2017		2020	
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)
Sportcipő	12 000	450	15 000	390
Sportnadrág	9 000	604	7 500	550
Póló	7 800	550	6 250	780
Zokni	5 000	1 080	4 500	990

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban a sportbolt esetén!
- Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
- Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
- Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
- Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.
- Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását forintban!
- Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
- Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
- Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.
- Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.

5.2.2. PÉLDA 1 MEGOLDÁSA

A kérdésekre való válaszadások előtt az alap táblázatban szereplő értékeket kell eljelölni a p_0 , a p_1 , a q_0 és a q_1 jelölésekkel.

Két évünk van jelenleg: 2017 és 2020. A 2017. év lesz a bázis, mivel az tőlünk időben távolabb van. A 2020. év lesz a tárgy időszak, mivel az hozzánk közelebb van időben. Tehát a jelölések a táblázat felett a következők (89. ábra):

	p_0	q_0	p_1	q_1
Megnevezés	2017		2020	
	Ár (Ft/db)	Mennyiség g (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség g (db)
Sportcipő	12000	450	15000	390
Sportnadrág	9000	604	7500	550
Póló	7800	550	6250	780
Zokni	5000	1080	4500	990

89. ÁBRA: Az alaptáblázat értékeinek az eljelölése ár és mennyiség alapján

Forrás: Saját kalkuláció

Ezt követően kerülhet sor az aggregátumok kiszámításra (90. és 91. ábra):

	p_0	q_0	p_1	q_1		
Megnevezés	2017		2020		$q_1 p_1$	$q_0 p_0$
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)		
Sportcipő	12000	450	15000	390	$390 \cdot 15000$	$12000 \cdot 450$
Sportnadrág	9000	604	7500	550	$550 \cdot 7500$	$9000 \cdot 604$
Póló	7800	550	6250	780	$780 \cdot 6250$	$7800 \cdot 550$
Zokni	5000	1080	4500	990	$990 \cdot 4500$	$5000 \cdot 1080$
Összesen					19305000	20526000

90. ÁBRA: Az első két aggregátum kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

	p_0	q_0	p_1	q_1		
Megnevezés	2017		2020		$q_0 p_1$	$q_1 p_0$
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)		
Sportcipő	12000	450	15000	390	$450 \cdot 15000$	$390 \cdot 12000$
Sportnadrág	9000	604	7500	550	$604 \cdot 7500$	$550 \cdot 9000$
Póló	7800	550	6250	780	$550 \cdot 6250$	$780 \cdot 7800$
Zokni	5000	1080	4500	990	$1080 \cdot 4500$	$990 \cdot 5000$
Összesen					19577500	20664000

91. ÁBRA: A második két aggregátum kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Az árbevétel meghatározását követően jöhetnek a kérdésekhez szükséges számítások.

a) *Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban a sportbolt esetén!*

A kérdés alapján az értékindexet kell kiszámolni. Az ehhez szükséges képlet:

$$I_v = I_\epsilon = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0} = \frac{19305000 \text{ Ft}}{205260000 \text{ Ft}} = 0,9405 \Rightarrow * 100 = 94,05\%$$

A 2017. év januárjához képest 2020. januárjára 5,95%-os csökkenés következett be.

b) *Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.*

Mivel a mennyiségek változnak, és az árak fixek (bázis időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol az árak „0” jelöléssel van és a mennyiségek pedig „1” jelölésűek. Tehát itt bázis időszaki volumenindexet kell számolni.

$$I_q^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 p_0}{\sum_{i=1}^n q_0 p_0} = \frac{20664000 \text{ Ft}}{20526000 \text{ Ft}} = 1,0067 \Rightarrow * 100 \Rightarrow 100,67\%$$

Tehát a mennyiségek változása mellett a 2017. évi árak 0,67%-ban növelték az árbevétel változást 2017-ről 2020-ra.

c) *Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.*

Mivel a mennyiségek változnak, és az árak fixek (tárgy időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol az árak „1” jelöléssel van, s a mennyiségek pedig „0” jelölésűek. Tehát itt tárgy időszaki volumenindexet kell számolni.

$$I_q^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 p_1} = \frac{19305000 \text{ Ft}}{19577500 \text{ Ft}} = 0,9861 \Rightarrow * 100 \Rightarrow 98,61\%$$

Tehát a mennyiségek változása mellett a 2020. évi árak 1,39%-ban csökkentik az árbevétel változást 2017-ről 2020-ra.

d) Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.

Mivel az árak változnak, és a mennyiségek fixek (bázis időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol a mennyiségek „0” jelöléssel, míg az árak „ $\frac{1}{0}$ ” jelöléssel vannak. Tehát itt bázis időszaki árindexet kell számolni.

$$I_p^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_0 p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 p_0} = \frac{19577500 \text{ Ft}}{20526000 \text{ Ft}} \Rightarrow 0,9538 * 100 \Rightarrow 95,38\%$$

Tehát az árak változása mellett a 2017. évi mennyiségek 4,62%-kal növelték az árbevétel változást 2017-ről 2020-ra.

e) Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra.

Mivel az árak változnak, és a mennyiségek fixek (tárgy időszakiak), ezért azt a képletet kell kiszámolni, ahol a mennyiségek „1” jelöléssel, míg az árak „ $\frac{1}{0}$ ” jelöléssel vannak. Tehát itt tárgy időszaki árindexet kell számolni.

$$I_p^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 p_1}{\sum_{i=1}^n q_1 p_0} = \frac{19305000 \text{ Ft}}{20664000 \text{ Ft}} = 0,9342 \Rightarrow * 100 \Rightarrow 93,42\%$$

Tehát az árak változása mellett a 2020. évi mennyiségek 6,58%-ban csökkentették az árbevétel változást 2017-ről 2020-ra.

f) Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását forintban!

A feladatban azt kell meghatározni, hogy az 5,95% csökkenés (melyet az értékindexnél számoltunk ki) hány Ft változást jelent a bolt esetében.

Kiszámításához a K_v értéket kell meghatározni:

$$K_v = \sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0 = 19305000 \text{ Ft} - 20526000 \text{ Ft} = 1221000 \text{ Ft}$$

A 2017. év januárjához képest 2020. januárjára 5,95%-os csökkenés következett be, mely 1 221 000 Ft csökkenést jelent.

g) *Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.*

A kérdés alapján itt bázis időszaki volumenindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_q^0 = \Sigma q_1 p_0 - \Sigma q_0 p_0 = 20664000 \text{ Ft} - 20526000 \text{ Ft} = 138000 \text{ Ft}$$

Tehát a bázis időszak árai a mennyiségek változása mellett 138 ezer Ft-tal növelik az árbevételt 2017-ről 2020-ra.

h) *Határozza meg a mennyiségek változása mellett a tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.*

A kérdés alapján itt tárgy időszaki volumenindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_q^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_0 p_1 = 19305000 \text{ Ft} - 19577500 \text{ Ft} = -272500 \text{ Ft}$$

Tehát a tárgy időszak árai a mennyiségek változása mellett 272,5 ezer Ft-tal csökkentették az árbevételt 2017-ről 2020-ra.

i) *Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.*

A kérdés alapján itt bázis időszaki árindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_p^0 = \Sigma q_0 p_1 - \Sigma q_0 p_0 = 19577500 \text{ Ft} - 20526000 \text{ Ft} = -948500 \text{ Ft}$$

Tehát a bázis időszak mennyiségei az árak változása mellett 948,5 ezer Ft-tal csökkentik az árbevételt 2017-ről 2020-ra

j) *Határozza meg az árak változása mellett a tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra forintban.*

A kérdés alapján itt tárgy időszaki árindex értékét kell forintban kifejezni. Azaz a képlet, melybe be kell helyettesíteni:

$$K_p^1 = \Sigma q_1 p_1 - \Sigma q_1 p_0 = 19305000 \text{ Ft} - 20664000 \text{ Ft} = -1359000 \text{ Ft}$$

Tehát a tárgy időszak mennyiségei az árak változása mellett 1 millió 359 ezer Ft-tal csökkentik az árbevételt 2017-ről 2020-ra.

Végül ellenőrizzük le a példánkat, hogy jók-e az eredményeink:

$$I_q^F = \sqrt{I_q^0 \cdot I_q^1} = \sqrt{1,0067 \cdot 0,9861} = 0,9963$$

$$I_p^F = \sqrt{I_p^0 \cdot I_p^1} = \sqrt{1,0820 \cdot 1,0810} = 0,9440$$

$$I_v = I_q^F \cdot I_p^F = 1,0815 \cdot 1,0416 = 1,1265 \Rightarrow 94,05\%$$

$I_q^F = 0,9963 \Rightarrow * 100 = 99,63\%$, ezt jelenti, hogy a mennyiségek csökkentő/befolyásoló szerepe a vizsgált boltnál 0,37%.

$I_p^F = 0,9440 \Rightarrow * 100 = 94,40\%$, ezt jelenti, hogy az árak csökkentő/befolyásoló szerepe a vizsgált vállalkozásnál 5,6%.

$$K_p^0 = \sum q_0 p_1 - \sum q_0 p_0 = 19577500 \text{ Ft} - 20526000 \text{ Ft} = -948500 \text{ Ft}$$

$$K_p^1 = \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = 19305000 \text{ Ft} - 20664000 \text{ Ft} = -1359000 \text{ Ft}$$

$$K_q^0 = \sum q_1 p_0 - \sum q_0 p_0 = 20664000 \text{ Ft} - 20526000 \text{ Ft} = 138000 \text{ Ft}$$

$$K_q^1 = \sum q_1 p_1 - \sum q_0 p_1 = 19305000 \text{ Ft} - 19577500 \text{ Ft} = -272500 \text{ Ft}$$

$$K_v = K_p^1 + K_q^0 = -1359000 \text{ Ft} + 138000 \text{ Ft} = -1221000 \text{ Ft}$$

$$K_v = K_q^1 + K_p^0 = -272500 \text{ Ft} + -948500 \text{ Ft} = -1221000 \text{ Ft}$$

5.2.3. PÉLDA 2

Ismert egy neves sportbolt, ahol a 4 legfontosabb (legjobban keresett) termékre vonatkozóan megkaptuk a mennyiségi és ár adatokat (33. táblázat) a 2017. és 2020. év január 1-re vonatkozóan:

33. TÁBLÁZAT: A sportbolt értékesítési adatai 2017. és 2020. években

Megnevezés	2017		2020	
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)
Sportcipő	12 000	450	15 000	390
Sportnadrág	9 000	604	7 500	550
Póló	7 800	550	6 250	780
Zokni	5 000	1 080	4 500	990

Forrás: Saját adatgyűjtés

- Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
- Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
- Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

5.2.4. PÉLDA 2 MEGOLDÁSA

a) *Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!*

Az egyedi értékindex kiszámolásához a valódi árbevétel értékek szükségesek, azaz q_0p_0 és a q_1p_1 . Ezen értékek kiszámolásához először el kell készíteni az egyes oszlopok eljelölését:

p_0 : bázis időszaki ár (2017. évi egységár)

p_1 : tárgy időszaki ár (2020. évi egységár)

q_0 : bázis időszaki mennyiség (2017. évi értékesítési mennyiség)

q_1 : tárgy időszaki mennyiség (2020. évi értékesítési mennyiség)

A 2017. év lesz a bázis- (tőlünk időben távolabb van) és a 2020. év lesz a tárgy időszak (hozzánk közelebb van időben). Tehát az jelölések a táblázat felett a következők (92. ábra):

	p_0	q_0	p_1	q_1
Megnevezés	2017		2020	
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)
Sportcipő	12000	450	15000	390
Sportnadrág	9000	604	7500	550
Póló	7800	550	6250	780
Zokni	5000	1080	4500	990
Összesen				

92. ÁBRA: Az alaptáblázat oszlopainak az eljelölése

Forrás: Saját kalkuláció

Ezután következik az aggregátumok kiszámítása (93. ábra):

	p_0	q_0	p_1	q_1		
Megnevezés	2017		2020		q_1p_1	q_0p_0
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)		
Sportcipő	12000	450	15000	390	390*15000	5850000
Sportnadrág	9000	604	7500	550	550*7500	4125000
Póló	7800	550	6250	780	780*6250	4875000
Zokni	5000	1080	4500	990	990*4500	4455000
Összesen					19305000	20526000

93. ÁBRA: A valódi árbevételek kiszámítása

Forrás: Saját kalkuláció

Az egyedi értékindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{q_1p_1}{q_0p_0}$ hányados értékét (94. ábra).

Megnevezés	P ₀ Q ₀		P ₁ Q ₁		q ₁ p ₁	q ₀ p ₀	$\frac{q_1 P_1}{q_0 P_0}$			
	2017		2020							
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)						
Sportcipő	12000	450	15000	390	5850000	5400000	5850000/5400000	1,0833	*100	108,33%
Sportnadrág	9000	604	7500	550	4125000	5436000	4125000/5436000	0,7588		75,88%
Póló	7800	550	6250	780	4875000	4290000	4875000/4290000	1,1364		113,64%
Zokni	5000	1080	4500	990	4455000	5400000	4455000/5400000	0,8250		82,50%
Összesen					19305000	20526000				

94. ÁBRA: Az egyedi értéktindex kiszámítása az árbevétel értékekből

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Sportcipő 108,33%: A 2017. évről a 2020. évre 8,33%-kal növekedett a sportcipőből származó árbevétele.

Sportnadrág 75,88%: A 2017. évről a 2020. évre 24,12%-kal csökkent sportnadrágból származó árbevétele.

Póló 113,64%: A 2017. évről a 2020. évre 13,64%-kal növekedett a pólóból származó árbevétel.

Zokni 82,50%: A 2017. évről a 2020. évre 17,5%-kal csökkent a zokniból származó árbevétele.

b) Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

Az egyedi volumenindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{q_1}{q_0}$ hányados értékét (95. ábra).

Megnevezés	p ₀ q ₀		p ₁ q ₁					
	2017		2020					
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	$\frac{q_1}{q_0}$			
Sportcipő	12000	450	15000	390	390/450	0,8667	*100	86,67%
Sportnadrág	9000	604	7500	550	550/604	0,9106		91,06%
Póló	7800	550	6250	780	780/550	1,4182		141,82%
Zokni	5000	1080	4500	990	990/1080	0,9167		91,67%
Összesen								

95. ÁBRA: Az egyedi volumenindex kiszámítása az alapadatokból

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Sportcipő 86,67%: A 2017. évről a 2020. évre 13,33%-kal csökkent a sportcipő eladott mennyisége.

Sportnadrág 91,06%: A 2017. évről a 2020. évre 8,94%-kal csökkent sportnadrág eladott mennyisége.

Póló 141,82%: A 2017. évről a 2020. évre 41,82%-kal növekedett a póló eladott mennyisége.

Zokni 91,67%: A 2017. évről a 2020. évre 8,33%-kal csökkent a zokni eladott mennyisége.

c) *Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!*

Az egyedi árindex esetén soronként kell meghatározni a $\frac{p_1}{p_0}$ hányados értékét (79. ábra).

	p_0	q_0	p_1	q_1				
Megnevezés	2017		2020		$\frac{p_1}{p_0}$			
	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	Ár (Ft/db)	Mennyiség (db)	p_0			
Sportcipő	12000	450	15000	390	15000/12000	1,2500	*100	125,00%
Sportnadrág	9000	604	7500	550	7500/9000	0,8333		83,33%
Póló	7800	550	6250	780	6250/7800	0,8013		80,13%
Zokni	5000	1080	4500	990	4500/5000	0,9000		90,00%
Összesen								

96. ÁBRA: Az egyedi volumenindex kiszámítása az alapadatokból

Forrás: Saját kalkuláció

Értelmezés:

Sportcipő 125,00%: A 2017. évről a 2020. évre 25,00%-kal nőtt a sportcipő eladási ára.

Sportnadrág 83,33%: A 2017. évről a 2020. évre 16,67%-kal csökkent sportnadrág eladási ára.

Póló 80,13%: A 2017. évről a 2020. évre 19,87%-kal csökkent a póló eladási ára.

Zokni 90,00%: A 2017. évről a 2020. évre 10,00%-kal csökkent a zokni eladási ára.

5.2.5. PÉLDA 3

Ismert egy étrend kiegészítőket értékesítő bolt, mely Szegeden működik. A kereskedés rendelkezésünkre bocsátotta a kereskedésével kapcsolatos 2010. és 2019. évi adatait (forgalom és ár adatok) (34. táblázat):

34. TÁBLÁZAT: Az értrend kiegészítőket értékesítő kereskedés alapadatai a 2010. és a 2019. évekre

Meg- nevezés	2010		2019	
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)
"A"	2500	650	4980	750
"A+"	3200	540	3900	970
"B"	4000	520	4600	340
"C"	7100	560	5500	490

Forrás: Saját szerkesztés

- Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban és forintban!
- Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis és tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban.
- Határozza meg az árak változása mellett a bázis és tárgy időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban.
- Határozza meg az egyedi értékindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
- Határozza meg az egyedi volumenindexet. Értelmezze a kapott eredményt!
- Határozza meg az egyedi árindexet. Értelmezze a kapott eredményt!

5.2.6. PÉLDA 3 MEGOLDÁSA

A kezdeti időszakunk a 2010. év, így ennek a jelölése lesz a „0”. A későbbi időszakunk a 2019. évi, így ennek a jelölése „1”. Az árakat „p”, a mennyiségeket „q” jelöléssel látjuk el (97. ábra).

Meg- nevezés	p_0	q_0	p_1	q_1
	2010		2019	
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)
"A"	2500	650	4980	750
"A+"	3200	540	3900	970
"B"	4000	520	4600	340
"C"	7100	560	5500	490

97. ÁBRA: A feladatban alkalmazandó jelölések

Forrás: Saját szerkesztés

Az árak és a mennyiségek ismeretében elkészítjük az aggregátumokat (árbevételeket) (98. ábra).

	p ₀ q ₀		p ₁ q ₁					
Meg- nevezés	2010		2019		q ₁ p ₁		q ₀ p ₀	
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)				
"A"	2500	650	4980	750	750*4980	3735000	650*2500	1625000
"A+"	3200	540	3900	970	970*3900	3783000	540*3200	1728000
"B"	4000	520	4600	340	340*4600	1564000	520*7100	2080000
"C"	7100	560	5500	490	490*5500	2695000	560*7100	3976000
Összesen						11777000		9409000

	p ₀ q ₀		p ₁ q ₁					
Meg- nevezés	2010		2019		q ₀ p ₁		q ₁ p ₀	
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)				
"A"	2500	650	4980	750	650*4980	3237000	750*2500	1875000
"A+"	3200	540	3900	970	540*3900	2106000	970*3200	3104000
"B"	4000	520	4600	340	520*4600	2392000	340*4000	1360000
"C"	7100	560	5500	490	560*5500	3080000	490*7100	3479000
Összesen						10815000		9818000

98. ÁBRA: Az aggregátumok eredményei

Forrás: Saját szerkesztés

Az aggregátumok összesen értékeit fogjuk a különböző indexeknél felhasználni. Tehát a képletekben a következő összegeket kell majd szerepeltetni:

$$\begin{aligned} \sum q_1 p_1 &= 11777000 \text{ Ft} & \sum q_0 p_0 &= 9409000 \text{ Ft} \\ \sum q_0 p_1 &= 10815000 \text{ Ft} & \sum q_1 p_0 &= 9818000 \text{ Ft} \end{aligned}$$

Határozza meg bázisról tárgy időszakra az árbevétel változását százalékban és forintban (99. ábra)!

	p ₀ q ₀		p ₁ q ₁					
Meg- nevezés	2010		2019		q ₁ p ₁	q ₀ p ₀	q ₀ p ₁	q ₁ p ₀
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)				
"A"	2500	650	4980	750	3 735 000	1 625 000	3 237 000	1 875 000
"A+"	3200	540	3900	970	3 783 000	1 728 000	2 106 000	3 104 000
"B"	4000	520	4600	340	1 564 000	2 080 000	2 392 000	1 360 000
"C"	7100	560	5500	490	2 695 000	3 976 000	3 080 000	3 479 000
Összesen					11 777 000	9 409 000	10 815 000	9 818 000

Értékindex $I_v = I_e = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0} = \frac{11\,777\,000}{9\,409\,000} = 125,17\%$

Különbség $K = \sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1 - \sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0 = 11\,777\,000 - 9\,409\,000 = 2\,368\,000 \text{ Ft}$

99. ÁBRA: Az értékindex kiszámítása a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

Tehát 2010. évről 2019. évre 25,17%-kal nőtt az árbevétel a vizsgált vállalkozásnál, mely 2368000 Ft-os növekedést csökkenést jelentett.

Határozza meg a mennyiségek változása mellett a bázis és tárgy időszaki árak befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (100. ábra)!

	p ₀ q ₀		p ₁ q ₁					
Meg- nevezés	2010		2019		q ₁ p ₁	q ₀ p ₀	q ₀ p ₁	q ₁ p ₀
	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)				
"A"	2500	650	4980	750	3 735 000	1 625 000	3 237 000	1 875 000
"A+"	3200	540	3900	970	3 783 000	1 728 000	2 106 000	3 104 000
"B"	4000	520	4600	340	1 564 000	2 080 000	2 392 000	1 360 000
"C"	7100	560	5500	490	2 695 000	3 976 000	3 080 000	3 479 000
Összesen					11 777 000	9 409 000	10 815 000	9 818 000

**Bázis időszaki
árindex**

$$I_q^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} \cdot p_0}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_0} = \frac{9818000}{9409000} = 1,0435 \Rightarrow *100 = 104,35\%$$

**Tárgyidőszaki
árindex**

$$I_q^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \cdot p_1} = \frac{11777000}{10815000} = 1,0890 \Rightarrow *100 = 108,90\%$$

Különbségek

$$K_q^1 = \sum q_{i1} p_1 - \sum q_{i0} p_1 = 9818000 - 9409000 = 409000 \text{ Ft}$$

$$K_q^0 = \sum q_{i1} p_0 - \sum q_{i0} p_0 = 111777000 - 10815000 = 962000 \text{ Ft}$$

100. ÁBRA: A bázis és tárgy időszaki volumenindex kiszámítása a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

A 2010. évi árak, a mennyiségek változása mellett 4,35%-ban növelik az árbevétel növekedést, mely 409 ezer Ft-os növekedést jelent.

A 2019. évi árak, a mennyiségek változása mellett 8,90%-ban növelik az árbevétel növekedést, mely 962 ezer Ft-os növekedést jelent.

Határozza meg az árak változása mellett a bázis időszaki mennyiségek befolyásoló szerepét az árbevétel változásra százalékban és forintban (101. ábra)!

	p_0		p_1					
	2010		2019					
Megnevezés	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	Ár (Ft/doboz)	Mennyiség (doboz)	$q_1 p_1$	$q_0 p_0$	$q_0 p_1$	$q_1 p_0$
"A"	2500	650	4980	750	3 735 000	1 625 000	3 237 000	1 875 000
"A+"	3200	540	3900	970	3 783 000	1 728 000	2 106 000	3 104 000
"B"	4000	520	4600	340	1 564 000	2 080 000	2 392 000	1 360 000
"C"	7100	560	5500	490	2 695 000	3 976 000	3 080 000	3 479 000
Összesen					11 777 000	9 409 000	10 815 000	9 818 000

Bázis időszaki
árindex

$$I_p^0 = \frac{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_0 \cdot p_0} = \frac{10815000}{9409000} = 1,1494 \Rightarrow *100 = 114,94\%$$

Tárgy időszaki
árindex

$$I_p^1 = \frac{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^n q_1 \cdot p_0} = \frac{11777000}{9818000} = 1,1995 \Rightarrow *100 = 119,95\%$$

Különbség

$$K_p^1 = \sum q_1 p_1 - \sum q_1 p_0 = 10815000 - 9409000 = 1406000 \text{ Ft}$$

$$K_p^0 = \sum q_0 p_1 - \sum q_0 p_0 = 11777000 - 9818000 = 1959000 \text{ Ft}$$

101. ÁBRA: A bázis időszaki árindex kiszámítása a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

A 2010. évi mennyiségek, az árak változása mellett 14,94%-ban növelik az árbevétel növekedést, mely 1406 ezer Ft-os növekedést eredményez az árbevétel növekedésben.

A 2019. évi mennyiségek, az árak változása mellett 19,95%-ban növelik az árbevétel növekedést, mely 1959 ezer Ft-os növekedést eredményez az árbevétel növekedésben.

Az érték, az ár- és a volumen indexek meghatározását követően jöhet az ellenőrzés.

Ahogy az elméleti részben is láttuk az értékindex értékét (I_ϵ) megkaphatjuk, ha:

- a bázis időszaki árindexet (I_p^0) megszorozzuk a tárgy időszaki volumenindex (I_q^1) értékével VAGY
- a tárgy időszaki árindexet (I_p^1) megszorozzuk a bázis időszaki volumenindex (I_q^0) értékével VAGY
- a Fisher féle árindexet (I_p^F) megszorozzuk a Fisher féle volumenindex (I_q^F) értékével.

A K_ϵ értékét megkapjuk, ha:

- a bázis időszaki árindexhez tartozó különbségből (K_p^0) kivonjuk a tárgy időszaki volumenindexhez tartozó különbséget (K_q^1) VAGY

- ♦ a tárgy időszaki árindexhez tartozó különbségből (K_p^1) kivonjuk a bázis időszaki volumenindexhez tartozó különbséget (K_q^0).

Értékindex	$I_{\bar{e}}$ 125,17%	$K_{\bar{e}}$ 2 368 000 Ft
-------------------	-----------------------	----------------------------

Ellenőrzés

$$I_{\bar{e}} = I_p^0 * I_q^1 = 1,1494 * 1,0890 = 125,17\%$$

Árindex

Bázis	I_p^0 114,94%	K_p^0 1 406 000 Ft
Tárgy	I_p^1 119,95%	K_p^1 1 959 000 Ft

$$I_{\bar{e}} = I_q^0 * I_p^1 = 1,0435 * 1,1995 = 125,17\%$$

$$I_{\bar{e}} = I_q^F * I_p^F = 1,1742 * 1,0660 = 125,17\%$$

Volumenindex

Bázis	I_q^0 104,35%	K_q^0 409 000 Ft
Tárgy	I_q^1 108,90%	K_q^1 962 000 Ft

$$I_p^F = \sqrt{I_p^0 * I_p^1} = \sqrt{1,1494 * 1,1995} = 1,1742$$

$$I_q^F = \sqrt{I_q^0 * I_q^1} = \sqrt{1,0435 * 1,0890} = 1,0660$$

$$K_{\bar{e}} = K_p^0 + K_q^1 = 1\,406\,000 \text{ Ft} + 962\,000 \text{ Ft} = 2\,368\,000 \text{ Ft}$$

$$K_{\bar{e}} = K_q^0 + K_p^1 = 409\,000 \text{ Ft} + 1\,959\,000 \text{ Ft} = 2\,368\,000 \text{ Ft}$$

102. ÁBRA: Az ellenőrzés elkészítése a példafeladatra

Forrás: Saját szerkesztés

FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM

1. Kerékgyártó Györgyné – Mudruczó György (1987): Statisztikai módszerek a gazdasági elemzésben. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. ISBN 963 221 697 0
2. Csipkés M. (2019): Viszonyszámok. Előadás: Statisztika, Debrecen Egyetem GTK, 2018/2019/II. félév
3. Huzsvai L. (2019): Viszonyszámok. Előadás: Statisztika I., Debrecen Egyetem GTK, 2018/2019/I. félév
4. Nagy L. (2019): Viszonyszámok. Előadás: Statisztika, Debrecen Egyetem GTK, 2017/2018/I. félév
5. Petres T. – Tóth L. (2004): Statisztika. Központi Statisztikai Hivatal, Budapest, 287 p. ISBN 963 215 734 6
6. Statisztika (2019): http://193.6.12.228/uigtk/uise/gik/stat_mm_bgi_2ea.pdf, letöltés dátuma: 2019. augusztus 21.
7. Szűcs I. (2004): Alkalmazott statisztika. AGROINFORM Kiadó és Nyomda Kft., Budapest, 551 p. ISBN 963 502 761 3