



# Geometriai transzformációk

doktori (PhD) értekezés

**Horváth Eszter**

Debreceni Egyetem  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika Doktori Iskola  
Debrecen, 2007



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika Doktori Iskola matematika-didaktika alprogramja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2007. december 1.

Horváth Eszter  
jelölt

Tanúsítom, hogy Horváth Eszter doktorjelölt 2000-2007. között a fent megnevezett Doktori Iskola matematika-didaktika alprogramjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2007. december 1.

Dr. Molnár Emil  
témavezető



## Köszönetnyilvánítás

Hosszú évek közös munkája után szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Molnár Emil professzornak, aki még egyetemista koromban érdeklődésemet az adott téma felé irányította és az elmúlt években észrevételeivel, tanácsaival segítette munkámat.

Hálával tartozom édesapámnak, rokonaimnak, tanártársaimnak és tanítványaimnak, akik megbocsátották, ha kevesebb figyelmet tudtam rájuk szánni a disszertáció írása közben.



# Tartalomjegyzék

|                                                                                                         |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                                                     | <b>1</b>  |
| <b>2. A geometriai transzformációk áttekintése</b>                                                      | <b>3</b>  |
| 2.1. A geometriai transzformációk csoportelméleti megközelítése . . . . .                               | 3         |
| 2.2. Az euklideszi sík egybevágósági transzformációi . . . . .                                          | 4         |
| 2.3. Az euklideszi tér egybevágósági transzformációi . . . . .                                          | 9         |
| 2.4. Hasonlósági transzformációk . . . . .                                                              | 10        |
| 2.5. Néhány gondolat a transzformációk általánosabb köréről . . . . .                                   | 12        |
| <b>3. A geometriai transzformációk tanításának lépései az iskolai oktatásban</b>                        | <b>15</b> |
| 3.1. A geometriai transzformációk fogalmainak kialakítása az általános iskola felső tagozatán . . . . . | 16        |
| 3.1.1. Ötödik évfolyam - játszunk a szimmetriával . . . . .                                             | 16        |
| 3.1.2. Hatodik évfolyam - a tengelyes szimmetriával ismerkedünk . . . . .                               | 17        |
| 3.1.3. Hetedik évfolyam - geometriai transzformációk változatos szabállyal . . . . .                    | 18        |
| 3.1.4. Nyolcadik évfolyam - az összefoglalás és a rendszerezés éve . . . . .                            | 19        |
| 3.2. Geometriai transzformációk a középiskolában . . . . .                                              | 21        |
| 3.2.1. Kilencedik évfolyam - egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik . . . . .                   | 21        |
| 3.2.2. Tizedik évfolyam - a hasonlóság és alkalmazásai . . . . .                                        | 22        |
| 3.2.3. Tizenegyedik és tizenkettedik évfolyam . . . . .                                                 | 22        |
| <b>4. Geometriai transzformációk alkalmazása egy versenyfeladatban</b>                                  | <b>23</b> |

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5. A tükrözésgeometria alaptételének alkalmazásáról</b>   | <b>32</b> |
| 5.1. Bevezetés . . . . .                                     | 32        |
| 5.2. Alapfogalmak, jelölések . . . . .                       | 33        |
| 5.3. Axiómák és tételek . . . . .                            | 35        |
| 5.3.1. A három egyenestükrözés axiómája síkban . . .         | 35        |
| 5.3.2. A három síktükrözés axiómája térben . . . . .         | 35        |
| 5.3.3. Tételek . . . . .                                     | 36        |
| 5.4. Egyenestükrözésekről térben . . . . .                   | 43        |
| 5.5. Vajon az előállítás egyértelmű-e? . . . . .             | 47        |
| <b>6. Kristálycsoportok</b>                                  | <b>51</b> |
| 6.1. 4-dimenziós kristálycsoportok vizsgálata . . . . .      | 51        |
| 6.2. Alapfogalmak és jelölések . . . . .                     | 53        |
| 6.3. A $T$ pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportja . . . | 54        |
| 6.4. A $T$ pontcsoportja nem tükrözéscsoport . . . . .       | 60        |
| 6.5. A maximális tükrözésrészcsoport . . . . .               | 63        |
| 6.6. Eredmények a többi esetre . . . . .                     | 66        |
| 6.6.1. $P_4$ vizsgálata . . . . .                            | 66        |
| 6.6.2. $S_4$ vizsgálata . . . . .                            | 70        |
| 6.6.3. $B$ vizsgálata . . . . .                              | 73        |
| 6.6.4. $C_4$ vizsgálata . . . . .                            | 77        |
| 6.6.5. $Q_4$ vizsgálata . . . . .                            | 81        |
| 6.6.6. Az eredmények összefoglalása . . . . .                | 86        |
| <b>7. Összegzés</b>                                          | <b>88</b> |
| <b>8. Summary</b>                                            | <b>92</b> |



# 1. Bevezetés

A szépet, a harmóniát veszi észre szemünk a természetben és az emberi alkotásokban akkor, ha felfedezzük a szimmetriát az elénk táruló látványban. Az orhidea és az Országház síkszimmetrikus, a Pentagon forgásszimmetriája ötödrendű. A hópelyhek hatodrendű forgásszimmetriájukról nevezetesek. A népművészeti hímzések, kékfestőminták tengelyes-, középpontos- és eltolás szimmetriával rendelkeznek. A csigalépcső formáját eltolás és forgatás határozza meg. A szimmetria mindennapi életünk része, épületeink, környezetünk tárgyai, díszítő motívumai már gyermekkortól kezdve „ösztönösen” alakítják látásmódunkat - vizuális kultúránkat.

Az alakzatok szimmetriáját vizsgálva jutunk el a geometriai transzformációk fogalmához. Ha csak a síkbeli lehetőségeket figyeljük, akkor a tengelyes tükrözéssel, középpontos tükrözéssel, forgatással, eltolással, csúsztatva tükrözéssel találkozunk. A térbeli tapasztalatok a síktükrözés, egyenes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, csavarmozgás, forgatás-tükrözés, eltolás-tükrözés absztrakciójához vezetnek el. A sokféle változat a rendszerezés igényét veti fel.

A 2. fejezetben az euklideszi sík és tér geometriai transzformációiról adok áttekintést. Az euklideszi sík egybevágósági transzformációival részletesebben foglalkozom, ezzel bemutatom a rendszerezés lehetséges módját, amelyet más típusú transzformációknál is alkalmazni lehet, másrészt a 4. fejezetben bemutatott feladatban a síkbeli esetre lesz szükségem. A 2.5. szakaszban az euklideszi tér további transzformációiról is szólok. A fogalmak többdimenzióban és a nem euklideszi geometriában is általánosíthatóak.

A 3. fejezetben a geometriai transzformációk fogalmának kialakításáról, alkalmazásairól írok az iskolai gyakorlatban. A folyamatot 10 éves kortól 18 éves korig kísérem végig - a tapasztalatszerzéstől az elméleti megalapozásig.

A 4 fejezetben bemutatok egy olyan feladatot, amely a 2006-2007-

es év Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyén a speciális matematika tagozatos tanulók versenyén került kitűzésre. Ez a feladat az én javaslatomra került a feladatsorba. A dolgoztok javítása során ezért különösen érdekelt, hogy a tanulók hogyan fognak hozzá egy ilyen jellegű feladathoz. Írásomban elemzem a tanulók által adott megoldások típusait.

Félix Klein német matematikus 1872-ben erlangeni egyetemi székfoglaló előadásában új szemléletet alapozott meg a geometriák kutatása területén. Az egyes geometriákat abból a szempontból vizsgálta, hogy a bennük lehetséges transzformációkkal szemben mely tulajdonságok maradnak változatlanok. Ezek a geometria invariánsai. Ilyen invariáns pl. a távolság az euklideszi geometriában, a szög a hasonlóságnál vagy a körgeometriában, a kettősviszony a projektív geometriában. Félix Klein ezzel új kutatási irányt szabott meg, amelyre erlangeni programként hivatkozunk. Erre a szemléletre egy példa a tükrözésgeometria, melynek egy problémáját az 5. fejezetben tárgyalom. Ennek a résznek a tartalma a [30] cikkben jelent meg.

Dade [14] nyomán S.S. Ryshkov [51] Maximal finite groups of integral  $n \times n$  matrices and full groups of integral automorphisms of positive quadratic forms (Bravais models) című cikkében a 6. fejezet bevezetésében megadott kvadratikus alakok egészegyütthatós automorfizmuscsoportjait, mint maximális csoportokat adta meg. Ezek a csoportok  $E^4$ -beli 4-dimenziós rácshoz tartozó maximális pontcsoportoknak tekinthetők. Maxwell [35] dolgozatában felveti a kérdést, hogy a  $T$  kvadratikus alakhoz tartozó csoport tükrözéscsoport-e? Dolgozatomban megmutatom, hogy nem az. Ezt a kérdést a többi esetben is megvizsgálom. Meghatározom a  $T$ -vel jelölt pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportját, ennek fundamentális tartományát, majd az egész pontcsoportot. Továbbá meghatározom a jelölt rács teljes szimmetriacsoportjához tartozó maximális tükrözésrészcsoportot és ennek a fundamentális tartományát. Végül megadom a vizsgált csoportok helyét a [11] monográfia táblázatai szerint. Ez a fejezet a [31] cikk

témája.

## 2. A geometriai transzformációk áttekintése

Ebben a fejezetben először a transzformációk általános meghatározását adom meg, majd áttekintést adok az euklideszi sík egybevágósági transzformációiról. Ezzel előkészítem a 4. részben felhasznált ismereteket. Röviden foglalkozom a térbeli egybevágósági transzformációkkal, majd néhány gondolatban a transzformációk tágabb körét is megemlítem. (Ld. 2.5 rész)

### 2.1. A geometriai transzformációk csoportelméleti megközelítése

**2.1. Definíció.** *Egy  $M$  halmaz önmagára való bijektív leképezését az  $M$  halmaz transzformációjának vagy permutációjának nevezzük. A permutáció elnevezés véges halmazok esetében gyakrabban használt.*

Két transzformáció egymásutáni alkalmazását a transzformációk szorzatának nevezzük, ezt a leképezések szokásos kompozíciójaként értelmezzük.  $m \in M$  esetén  $(f \circ g)(m) = f(g(m))$ . Először  $g$ -t majd  $f$ -et alkalmazzuk, ebben a jelölésmódban a kompozíciót jobbról balra értékeljük ki. Létezik egy másik jelölésmód is. Ekkor az  $f$  transzformáció alkalmazásával az  $m \in M$  képe  $m^f$ . Ebben a jelölérendszerben  $m^{f \circ g} = (m^f)^g$ , ilyenkor a kompozíció kiértékelése balról jobbra történik (az 5. fejezetben így használom). A kompozíció  $\circ$  jelét, a szorzás jelét gyakran elhagyjuk, az  $f$  és  $g$  szorzatát  $fg$ -vel jelöljük.

Az  $M$  összes transzformációja csoportot alkot a kompozíció műveletével. Ezt a csoportot  $S_M$ -el jelöljük, az  $M$  halmaz teljes transz-

formáció csoportjának nevezzük. Az  $S_M$  részcsoporthai pedig az  $M$  halmaz transzformációcsoportjai.

Ha  $L$  az  $M$  halmaz valamely részhalmaza, akkor azok a transzformációk, amelyek az  $L$  halmazt önmagára képezik le, az  $L$  halmaz szimmetriacsoportját alkotják. Ilyen értelemben beszélünk például a szabályos testek szimmetriacsoportjáról. Az alábbiakban áttekintem az euklideszi sík illetve tér egybevágósági transzformációit.

(Részletesebb tárgyalásban ld.[7] és [32])

## 2.2. Az euklideszi sík egybevágósági transzformációi

A geometriai transzformációkat sokszor vizsgáljuk abból a szempontból, hogy mely tulajdonságok maradnak változatlanok a transzformáció elvégzése során. Például egyenestartók-e, távolságtartók-e, szögtartók-e, irányítástartók-e, melyek a fixalakzatai, és így tovább.

**2.2. Definíció.** *Az euklideszi geometriában az egyenestartó transzformációkat affin transzformációknak, vagy röviden affinitásoknak nevezzük.*

Az affin transzformációk csoportot alkotnak a kompozíció műveletével.

**2.3. Definíció.** *Az affin transzformációk csoportjának részcsoportha a távolságtartó transzformációk csoportja. Ezeket a transzformációkat nevezzük egybevágósági transzformációknak vagy egybevágóságoknak.*

Az egybevágósági transzformációk egyben szögtartók is.

Ezeknek a csoportoknak az egységeleme az identikus leképezés, amely minden ponthoz önmagát rendeli, jelölése  $id$ ,  $e$  vagy egyszerűen 1. Síkbeli egybevágósági transzformációk az eltolás, a középpontos tükrözés, a forgatás, a tengelyes tükrözés, és a csúsztatva tükrözés. A

középpontos tükrözés a forgatás speciális esetének,  $180^\circ$ -os forgatásnak tekinthető, ennek megfelelően időnként félfordulatnak is nevezik, az angol nyelvű irodalomban ez a kifejezés használatos.

A fixpontok száma szerint csoportosítva ezeket a transzformációkat:

**Minden pont fixpont** az identitikus leképezés esetében.

**Egy egyenes minden pontja fixpont** a tengelyes tükrözés alkalmazásakor. A fixpontok a tengely pontjai.

**Egyetlen fixpontja van** a nem identikus forgatásoknak, ide értjük a középpontos tükrözést is. A fixpont a forgatás középpontja.

**Nincs fixpontja** a nem identikus eltolásnak és a tükrözéstől különböző csúsztatva tükrözésnek.

Fontos tulajdonság az irányítás megőrzése is. Ez síkban azt jelenti, hogy egy tetszőleges háromszögnek és képének a körüljárása megegyezik. A nap járása, az óramutató járása az irányítás fogalmának a tapasztalati alapja. A sík óramutató járásával ellentétes, pozitív irányítása azt is jellemzi, melyik féltérből nézve vizsgáljuk a síkot. Irányítástartás szempontjából az egybevágósági transzformációk:

**Irányítástartó** az identitás, az eltolás, a forgatás.

**Irányításváltó** a tengelyes tükrözés és a csúsztatva tükrözés.

Az irányítástartó transzformációkat *mozgásnak* is szoktuk nevezni, Ez azt jelenti, hogy ezeknek a transzformációknak az esetében az eredeti alakzat és a képe síkbeli mozgással fedésbe hozható. A szakirodalom egy része az egybevágósági transzformációkat egységesen mozgásnak nevezi. Ez azzal magyarázható, hogy térbeli mozgást alkalmazva a tengelyes tükrözés és a csúsztatva tükrözés esetében is fedésbe hozható az eredeti alakzat és a képe.

Azokat az identikus transzformációtól különböző transzformációkat, amelyeknek a négyzete az identikus leképezés, szimmetrikus transzformációnak vagy involúciónak nevezzük. A síkbeli egybevágósági transzformációk közül involúció a középpontos tükrözés, a tengelyes tükrözés.

Az egyes transzformációk részletes elemzése megtalálható például a [34] és a [36] irodalomban.

A témakör alapvető tétele az egybevágósági transzformációk és a tengelyes tükrözés kapcsolatát mutatja be. (pl. [13] 57-58.o.)

**2.4. Tétel.** *A sík bármely egybevágósági transzformációja legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzata.*

Az alábbi tételek két illetve három tengelyes tükrözés szorzatát vizsgálják.

**2.5. Tétel.** *Két egymással párhuzamos egyenesre való tükrözés szorzata eltolás, amelynek iránya merőleges az egyenesekre és nagysága az egyenesek távolságának kétszerese. Bármely eltolás előállítható két megfelelő párhuzamos egyenesre való tükrözés szorzataként.*

**2.6. Tétel.** *Két metsző egyenesre való tükrözés szorzata a metszéspont körüli forgatás. Az elforgatás szöge a két metsző egyenes által bezárt irányított szög. Bármely forgatás helyettesíthető két metsző egyenesre való tükrözéssel, ekkor az egyenesek szöge a forgatás szögének a felével egyezik meg. Ha az egyenesek szöge derékszög, akkor középpontos tükrözést kapunk.*

**2.7. Tétel.** *Három párhuzamos egyenesre való tükrözés szorzata egyetlen tükrözéssel helyettesíthető, amelynek tengelye párhuzamos az eredeti egyenesekkel. Ha a  $t_1, t_2, t_3$  egyenesekre való tükrözés a  $t_4$  egyenesre való tükrözéssel helyettesíthető, akkor a  $t_1$  és  $t_2$  egyenesek távolsága megegyezik a  $t_4$  és  $t_3$  egyenesek távolságával (ebben a sorrendben irányított távolságot mérünk).*

**2.8. Tétel.** *Három egy ponton átmenő egyenesre való tükrözés szorzata egyetlen tükrözéssel helyettesíthető, amelynek tengelye szintén átmeny a közös metszésponton. Ha a  $t_1, t_2, t_3$  egyenesekre való tükrözés a  $t_4$  egyenesre való tükrözéssel helyettesíthető, akkor a  $t_1$  és  $t_2$  egyenesek szöge megegyezik a  $t_4$  és  $t_3$  egyenesek szögével (ebben a sorrendben irányított szöget mérünk).*

**2.9. Definíció.** *Egy tengelyes tükrözés és egy a tengellyel párhuzamos irányú eltolásnak a szorzatát csúsztatva tükrözésnek nevezzük.*

A fenti tételek alapján látható, hogy a csúsztatva tükrözést két párhuzamos egyenesre és egy rájuk merőleges egyenesre való tükrözés szorzataként is előállíthatjuk. A párhuzamos egyenesek távolsága az eltolás felével egyezik meg. Az egymásra merőleges tengelyekre való tükrözések sorrendje felcserélhető, ezért a merőleges tengelyre való tükrözés sorrendje nem kötött ebben az összeállításban. A párhuzamos tengelyekre való tükrözések egymáshoz viszonyított sorrendje viszont lényeges, hiszen ez az eltolás irányából adódó sorrend.

Még meg kell vizsgálnunk azt az esetet, amikor három tengely egymáshoz viszonyított sorrendje az eddig tárgyaltaktól eltérő. Bizonyítható, hogy:

**2.10. Tétel.** *Három egymást páronként más-más pontban metsző egyenesre, vagy két párhuzamos és ezeket metsző harmadik egyenesre való tükrözés szorzata csúsztatva tükrözés.*

Páros számú egyenesre való tükrözés szorzata az identikus transzformáció, középpontos tükrözés vagy eltolás, páratlan számú egyenes esetében pedig tengelyes tükrözést vagy csúsztatva tükrözést kapunk. Ezzel indokolható, hogy az irányítástaró transzformációkat szokás páros izometriának, az irányításváltókat pedig páratlan izometriának nevezni. (Ld.[33] 73.o.)

A fentiek alapján látható, hogy a síkbeli egybevágósági transzformációk az eddig tárgyalt típusok valamelyikét képviselik, sőt akár a tengelyes tükrözés segítségével is elő tudunk állítani minden lehetőséget. (Az identikus leképezés sem kivétel, egy egyenesre egymás után kétszer tükrözünk.)

Az egybevágósági transzformációk rendszerezéséhez az eddig tárgyalt tételek elegendőek, de az alkalmazások szempontjából még néhány fontos állítást megemlítek. Ezek közül a 2.11. és a 2.15. tétel tipikusan az euklideszi geometriára jellemző, mert a párhuzamossági axiómára épül. A többi pl. Bolyai János hiperbolikus geometriájára, sőt a gömbi geometriára is átvihető.

**2.11. Tétel.** *Két eltolás szorzata eltolás.*

**2.12. Tétel.** *Az  $O_1$  és  $O_2$  pontokra való középpontos tükrözések szorzata a  $2 \cdot \overrightarrow{O_1 O_2}$  vektorral való eltolás. Bármely eltolás ilyen módon felbontható két középpontos tükrözés szorzatára.*

**2.13. Tétel.** *Egy eltolás és egy középpontos tükrözés szorzata középpontos tükrözés. Az új középpontot az előző tétel alapján tudjuk meghatározni.*

**2.14. Tétel.** *Két azonos középpont körüli  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  szögű forgatás szorzata az adott középpont körüli  $\alpha_1 + \alpha_2 \pmod{360^\circ}$  szögű forgatás.*

**2.15. Tétel.** *Két különböző középpontú  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  szögű forgatás szorzata  $\alpha_1 + \alpha_2 \pmod{360^\circ}$  szögű forgatás, ha  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq k \cdot 180^\circ$  ( $k$  egész szám). Ha  $\alpha_1 + \alpha_2 = k \cdot 180^\circ$ , akkor a két forgatás szorzata eltolás.*

Ezeknek a tételeknek a bizonyítása megtalálható Molnár Emil [36] és Vigassy Lajos [56] könyvében. Kiss Emil [32] könyvének 4. fejezete pedig a témát csoportelméleti szempontból tárgyalja részletesen. Kovács Zoltán [33] könyvében a geometriai transzformációk rendszerezését axiomatikus alapozással adja meg, a definíciók és tételek



kezdetben az abszolút geometriához köthetőek, a folytatásban világosan követhető, hogy melyek azok az állítások, amelyek már csak az euklideszi geometria kereteiben igazak.

### 2.3. Az euklideszi tér egybevágósági transzformációi

A térbeli egybevágósági transzformációk típusai : síktükrözés, egyenes-tükrözés, középpontos tükrözés, eltolás, forgatás, csavarmozgás, forgatva tükrözés, csúsztatva tükrözés. Az egyenestükrözés a forgatás speciális esete  $180^\circ$ -os forgatási szöggel. A középpontos tükrözés pedig ugyanilyen értelemben a forgatva tükrözés speciális esete.

A fixpontok száma szerint csoportosítva:

**Minden pont fixpont** az identitikus leképezés esetében.

**Egy sík minden pontja fixpont** a síktükrözés alkalmazáskor. A fixpontok a tükrözési sík pontjai.

**Egy egyenes minden pontja fixpont** a forgatásnál, ideértve az egyenesre való tükrözést is. A fixpontok a tengely pontjai.

**Egyetlen fixpontja van** a forgatva tükrözésnek, speciálisan a középpontos tükrözésnek. A fixpont a középpont.

**Nincs fixpontja** a nem identikus eltolásnak, csavarmozgásnak és a csúsztatva tükrözésnek.

Irányítástartás szempontjából csoportosítva a térbeli egybevágósági transzformációkat:

**Irányítástartó** az identitás, az eltolás, a forgatás és a csavarmozgás.

**Irányításváltó** a síktükrözés, középpontos tükrözés, forgatva tükrözés és a csúsztatva tükrözés.

A térbeli egybevágóságok és a síktükrözés kapcsolatát mutatja az alábbi tétel ([13] 109.o.).

**2.16. Tétel.** *Bármely egybevágósági transzformáció legfeljebb négy síktükrözés szorzata.*

Az előző fejezet szellemében elemezhető a különböző transzformációk előállítására síktükrözések szorzataként. Az irányítástartó transzformációkat páros számú, az irányításváltó transzformációkat pedig páratlan számú síktükrözés szorzataként kapjuk meg.

## 2.4. Hasonlósági transzformációk

**2.17. Definíció.** *Az euklideszi tér (illetve sík) aránytartó transzformációit hasonlósági transzformációknak nevezzük. Ekkor létezik olyan  $k \neq 0$  valós szám, amely bármely szakasz képének és az eredeti szakasz hosszának az arányát fejezi ki. Ha a szakasz és a képe ellentétes irányú, akkor  $k$  negatív, a megfelelő szakaszok arányát ekkor  $|k|$  adja meg. Ezt a  $k$  valós számot a hasonlóság arányának nevezzük.*

$k = 0$  esetén az egész teret egyetlen pontra képeznénk le, ezt a degenerált esetet kizárjuk.

A hasonlósági transzformációk azért is fontosak, mert az euklideszi geometria olyan tulajdonságokat vizsgál, amelyek invariánsak a hasonlóság alkalmazásakor. Ez azzal függ össze, hogy a távolságmérés egységének megválasztása a geometriai állítások többségének igaz voltát nem befolyásolja. (Ld. [13] 81.o.; [36] 54.o.)

A hasonlósági transzformációk egyenestartóak, így az affin transzformációk részcsoportját alkotják. Az egybevágósági transzformációk csoportja pedig,  $|k| = 1$  hasonlósági aránnyal, a hasonlósági transzformációk csoportjának részcsoportja.

A fixpontokról az alábbi állítások mondhatók ki:

**2.18. Tétel.** *Ha egy hasonlósági transzformációnak legalább két fixpontja van, akkor egybevágóság.*

**2.19. Tétel.** *Ha egy hasonlósági transzformáció nem egybevágóság, akkor egyértelműen meghatározott fixpontja van.*

Így az egybevágóságtól különböző síkbeli hasonlósági transzformációk a következő típusokba sorolhatóak:

- középpontos hasonlóság (homotécia)
- forgatva nyújtás (egy középpontos hasonlóság és egy azonos középpont körüli forgatás szorzata - tetszőleges sorrendben.)
- tükrözve nyújtás ( egy középpontos hasonlóság és egy, a középponton átmenő egyenesre történő tengelyes tükrözés szorzata - tetszőleges sorrendben.)

A síkbeli hasonlósági transzformációk közül( most nem zárom ki az egybevágóságokat sem):

**irányítástartó** az eltolás, a középpontos hasonlóság (ez speciális forgatva nyújtásnak is tekinthető  $0^\circ$ -kal) és a forgatva nyújtás,

**irányításváltó** a tengelyes tükrözés (speciális tükrözve nyújtásnak is tekinthető), tükrözve nyújtás és a csúsztatva tükrözés.

A hasonlósági transzformációk egymásutáni alkalmazására vonatkozó állításokat tartalmaz a következő két tétel.

**2.20. Tétel.** *A  $k_1$  és  $k_2$  arányú középpontos hasonlóság szorzata (nem csak azonos középpont esetén)  $k_1 k_2$  arányú középpontos hasonlóság, ha  $k_1 k_2 \neq 1$ .  $k_1 k_2 = 1$  esetében identikus leképezést vagy eltolást kapunk.*

**2.21. Tétel.** *A  $k_1$  arányú  $\alpha_1$  szögű és a  $k_2$  arányú  $\alpha_2$  szögű forgatva nyújtás szorzata (nem csak azonos középponttal)  $k_1 k_2$  arányú,  $\alpha_1 + \alpha_2 \pmod{360^\circ}$  szögű forgatva nyújtás, ha  $k_1 k_2 \neq 1$ ,  $k_1 k_2 = 1$  és  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq k \cdot 360^\circ$  ( $k$  egész) esetén forgatás,  $k_1 k_2 = 1$  és  $\alpha_1 + \alpha_2 = k \cdot 360^\circ$  esetén pedig identikus leképezés vagy eltolás.*

A térbeli hasonlósági transzformációk egyetlen kategóriába sorolhatók.

**2.22. Tétel.** *Térben minden az egybevágóságtól különböző hasonlóság forgatva nyújtás (egy egyenes körüli forgatás és egy az egyenesre illeszkedő középpontos hasonlóság szorzata).*

$k > 0$  esetén a térbeli forgatva nyújtás irányítástartó,  $k < 0$  esetén irányításváltó.

Végül a hasonlósági transzformációkra vonatkozó alapvető állítással zárom ezt a szakaszt. ([33] 85.o.)

**2.23. Tétel.** *Minden hasonlóság egy középpontos hasonlóság és egy egybevágóság szorzata. A középpontot tetszőlegesen választhatjuk meg, a hasonlóság aránya pedig az így kapott középpontos hasonlóság arányával egyezik meg.*

## 2.5. Néhány gondolat a transzformációk általánosabb köréről

Az előzőekben vizsgált egybevágósági transzformációk egyenestartók, illeszkedéstartók, párhuzamostartók, szögtartók voltak, a hasonlósági transzformációk esetében nincs távolságtartás, helyette az aránytartás teljesül. Ezek a transzformációk az euklideszi geometriára jellemzőek, hiszen a távolságegység megválasztása nem lehet lényeges a geometriai állítások megfogalmazásánál. Ha az invariáns tulajdonságok változnak, új típusú transzformációkat és új típusú geometriát kapunk.

Az egyenestartó transzformációk az affin geometriához vezetnek el. Az affin transzformációk párhuzamosságtartóak, de nem szögtartóak és nem távolságtartóak. Három egy egyenesen lévő  $A, B, C$  pont esetében értelmezzük az osztóviszonyt az  $(ABC) = \frac{AC}{CB}$  hányadossal (irányított szakaszokat használunk). Az affin transzformációk az osztóviszonyt megőrzik. Az affin transzformációk egyik alkalmazása a párhuzamos vetítés. A számítógépes grafikában a 3-dimenziós teret a 2-dimenziós képsíkra képezzük le. Erre az egyik lehetőség a párhuzamos vetítés, amely elfajult affin transzformáció (csökken a kép dimenziója). Az ábrázoló geometriában az axonometrikus leképezés (egy ortonormált tengelykereszt képét adjuk meg a vetítés síkjában) pedig Pohlke tétele szerint lényegében párhuzamos vetítésnek, ezáltal elfajuló affin transzformációnak tekinthető. (Ld. [4] 54-57.o.)

A projektív tér és a projektív transzformáció fogalmához jutunk, ha a párhuzamostartás tulajdonságát elvetjük. Ekkor elképzelhető, hogy párhuzamos egyenesek képei metszik egymást. A perspektíva alkalmazza ezt a jelenséget. A számítógépes grafikában ezzel találkozunk, amikor a teret egy középpontból vetítjük a képsíkra. Ha nem akarjuk feladni a geometriai transzformációk illeszkedéstartó tulajdonságát, akkor a végtelen távoli ideális pont, egyenes, sík fogalmát vezetjük be, így jutunk el a projektív sík ( $\mathbb{P}^2$ ), a projektív tér ( $\mathbb{P}^3$ ) fogalmához. A projektív transzformációk a párhuzamosságot, a szöget, az osztóviszonyt és a távolságot általában nem tartják meg. Ha egy egyenes 4 pontja  $A, B, C, D$ , akkor a négy pont kettősvizonyát az  $(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}$  osztóviszony-hányadossal értelmezzük. A projektív transzformációk a kettősvizonyt megtartják. Ezek a transzformációk előállíthatók centrális vetítések egymásutáni alkalmazásával.

A középpontos vetítés  $\mathbb{P}^3$ -at  $\mathbb{P}^2$ -re képezi le elfajult projektív transzformációként. Az ábrázoló geometriában alkalmazott centrális axonometria szintén projektív transzformáció. A Szabó-Stachel-Vogel tétel mondja ki, hogy egy centrális axonometria milyen feltételekkel felel

meg egy középpontos vetítésnek, így speciális projektív transzformációnak. (Ld. [4] 63.o.)

Az affin, az euklideszi és a projektív tér  $n$ -dimenzióban is értelmezhető. Ekkor a lineáris algebra eszközeit használjuk a fogalmak egységes, általánosítható leírására.

**2.24. Definíció.** *Legyen  $T$  test és  $n \geq 1$  egész szám. A  $T$ -beli együtthatójú, nem nulla determinánsú  $n \times n$ -es mátrixok halmazát  $GL(n, T)$ -el jelöljük, általános lineáris csoportnak nevezzük.*

**2.25. Definíció.** *Legyen  $T$  test és  $n \geq 1$  egész szám. Az*

$$AGL(n, T) = \{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{b} + M\mathbf{v} : \mathbf{v}, \mathbf{b} \in T^n, M \in GL(n, T)\}$$

*a  $T^n$  halmazon értelmezett affin leképezések halmaza.*

Amint látható,  $T$  tetszőleges test, nem szükségszerű, hogy a valós számok halmaza legyen. Ekkor  $\mathbf{v}$  oszlopvektor és a transzformációk szorzatát jobbról balra értékeljük ki. Ha  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}M + \mathbf{b}$  a megfelelő leképezés alakja, akkor  $\mathbf{v}$  sorvektor és a leképezést balról jobbra értékeljük ki.

Ha  $\mathbb{R}^n$ -en a szokásos módon értelmezzük a skaláris szorzatot, majd a távolságot, akkor az  $\mathbb{E}^n$  euklideszi teret kapjuk. Az ortogonális mátrixokhoz (a mátrix és a transzponáltjának a szorzata az egységmátrix) tartozó leképezések lesznek a távolságtartó transzformációk, tehát az egybevágósági transzformációk. Ezt a halmazt  $O(n, \mathbb{R})$ -rel, röviden  $O(n)$ -nel jelöljük. Egy ortogonális mátrix determinánsa  $+1$  vagy  $-1$ . A  $+1$  determinánsú mátrixok határozzák meg az irányítástartó transzformációkat, a mozgásokat. Ezt a halmazt  $SO(n)$  (speciális ortogonális csoport) jelöli.

Ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , akkor az origót fixen hagyó transzformációkat kapjuk. Ezek halmaza  $O(n)$ -nel, mozgások esetében  $SO(n)$ -nel azonosítható.

Megmutatható, hogy egy tetszőleges pontot fixen hagyó transzformációk csoportja izomorf az origót fixen hagyó transzformációk csoportjával.

Az  $n$ -dimenziós affin és euklideszi tér részletes tárgyalása például Baziljev-Dunyicsev-Ivanyickaja [5] könyvében a 2. rész IV. fejezetében található meg. Az  $n$ -dimenziós projektív geometria felépítésével például [6] 3. rész I. és II. fejezete foglalkozik. Lényeges csoportelméleti megfontolások szerepelnek Kiss Emil [32] könyvének 4. fejezetében. A számítógépes grafikával kapcsolatos vonatkozások olvashatók [17] 5. és 6. fejezetében, [53] 3. fejezetében.

### 3. A geometriai transzformációk tanításának lépései az iskolai oktatásban

A szimmetria mindennapi életünk része, épületeink, környezetünk tárgyai, díszítő motívumai szimmetrikus elemeket tartalmaznak. Hargittai Magdolna és Hargittai István csodálatos könyvei : Fedezzük fel a szimmetriát [22] és Képes szimmetria [23], mindezt gazdag képanyaggal mutatják be. A művészek alkotásaiban a szimmetria alkalmazásával vagy annak tudatos megtörésével találkozunk. M.C.Esher képei nem csak az euklideszi geometria, hanem a hiperbolikus geometria modelljében is használják a geometriai transzformációkat. Számos könyv foglalkozik ezzel a témával, én most két videót említek meg: Michele Emmer: Simmetria e spazio [15] és Geometries and impossible worlds [16].

Amikor geometriát tanítunk, akkor nem csak gondolkodási módszereket, hanem látásmódot is tanítunk. Ebben a folyamatban a geometriai transzformációk, a szimmetriák tanításának kiemelt szerepe van. Nyolcosztályos gimnázium tanáraként ennek a folyamatnak a 10-18 év közötti időszakáról írok disszertációmban.

A 3.1 szakaszban a Rátz László Vándorgyűlésen 2005-ben tartott előadásom anyagát foglaltam össze. Az előadás prezentációja megtekinthető honlapomon(<http://www.szolda.hu/he>).

A téma középiskolai tanításának áttekintése után a 4 fejezetben a 2006/2007-es tanévben egy az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen kitűzött feladatot és az arra adott megoldásokat mutatom be.

### **3.1. A geometriai transzformációk fogalmainak kialakítása az általános iskola felső tagozatán**

A felső tagozat négy éve alatt tanítványainkat „ösztönös” geometriai ismereteik matematikai háttérével ismertetjük meg a geometriai transzformációk tanítása során. Kezdetben a játékos felfedeztetés az ismeretszerzés alapja. Nyolcadik osztályban már a fogalmi rendszerezésig is eljutunk, annak az igényét is kialakítjuk, hogy állításainkat bizonyítani kell. Tételeket mondunk ki és bizonyítunk, természetesen az életkornak megfelelő szinten.

#### **3.1.1. Ötödik évfolyam - játszunk a szimmetriával**

Tanítványaink az ötödik osztályban már rendelkeznek a témába illő előismerettel. Füzetüket az alsó tagozaton sormintával díszítették, „tapétáztak”, hajtogattak, a különböző építő készletekkel sokféle alakzatot építettek.

Ebben az évfolyamban szigorú értelemben nincs olyan témakör, amely valamelyik geometriai transzformációhoz lenne kapcsolható. Ugyanakkor geometriai alapfogalmakat tanítunk, a körző, a vonalzó, a szögmérő használatát gyakoroltatjuk, a párhuzamosság és a merőlegesség „jelenségét” ismertetjük meg tanítványainkkal. Ez sokkal érdekesebb elfoglaltság lehet a kisgyerek számára, ha eközben „látványos” dolgokat hozunk létre. A körző és a vonalzó használatával rajzolt



ábrák szimmetriát mutathatnak. Az ezekben lévő ismétléssel a biztonságos eszközhasználatot érhetjük el, a végeredmény szép, amit a gyerekek szívesen kiszíneznek.

Ebben az évben ismerkedünk meg a koordináta-rendszerrel. A koordináták pozitív és negatív számok egyaránt lehetnek. Amikor a pontok jelzőszámait megadjuk, és ezeket ábrázoljuk, ábrák jönnek létre. A kezdeti lépések után tanítványaink is szívesen terveznek ilyeneket. Ezeket az ábrákat el lehet tolni, tükrözni, nagyítani, kicsinyíteni lehet. Bár a pontos geometriai fogalmat még nem tudják, de a geometriai transzformációkat elvégzik és a hétköznapi szóhasználatból vett szavakat használják is - eltolunk, tükrözünk, nagyítunk. A koordináták változását is figyeljük.

A papírhajtogatást minden gyerek szereti (vannak felnőttek is e műfaj szerelmesei között). Egy-egy kötetlenebb, játékos órán, szünet előtti utolsó órán igen jó elfoglaltság. Az ötödik osztály első félévében a szakköreim befejező feladata rendszerint egy-egy hajtogatás. Fénymásolt lapon a gyerekek a lépések rajzos vázlatát (jól használható könyvek kaphatóak, pl. Pataki Tibor: Papírcsodák [42] című könyve) a kezükbe kapják, amit haza lehet vinni, otthon újra el lehet készíteni. Én egy nagyobb papírból készítem el a „művet”, így mindenki látja, mit kell tennie a siker érdekében. Különböző színű és méretű lapok kaphatóak az üzletekben. Ezekből még szebb alkotások hozhatók létre. És hajtogatásaink számtalan szimmetriával rendelkeznek ...

### **3.1.2. Hatodik évfolyam - a tengelyes szimmetriával ismerkedünk**

Ebben az osztályban lesz a tanulmányaink tárgya az első geometriai transzformáció, a tengelyes tükrözés. Ha a hétköznapi életben azt mondjuk, hogy szimmetrikus, akkor valószínűleg síkszimmetrikus vagy tengelyesen szimmetrikus. Talán ezért foglalkozunk először ezzel a transzformációval. A fogalmat a síktükör vizsgálatával vezetjük be. A

tükörkép vizsgálata - síkbeli és térbeli alakzatok tükörképét is nézzük - sok jelenség, tulajdonság felismeréséhez elvezet. Másolópapírként a régi írógéphez használt átütőpapír használható, ami ma is megvásárolható az írószertboltokban, de ilyen célra a konyhában használt sütőpapír is kiválóan megfelel. A másolópapírt összehajtva megrajzolhatjuk egy egyszerű ábra tengelyes tükörképét. Ezt ismételve szép sormintát is lehet készíteni. Ha egy papírlapot összehajtunk, akár többször is, ollóval szép alakzatokat vághatunk ki, „csipkéket” készíthetünk. A színes rudak készletéből megépíthetjük különböző alakzatok tükörképét.

Nekünk pedagógusoknak tudnunk kell, hogy a síktükör jó analógia, de a tengelyes tükrözés nem mindenben a síkra történő tükrözés „két-dimenziós” megfelelője. Amikor a másolópapírt használjuk, mozgással fedésbe tudjuk hozni az ábrát a tükörképével. A síktükör viszont a jobblábás cipőnkől ballábás cipőt „hoz létre” és nincs az a térbeli mozgás, ami a ballábás cipőből jobblábast varázsolna.

Kellő tapasztalatszerzés után fogunk hozzá a tükörkép szokásos szerkesztéséhez. A már megismert tulajdonságokat ekkor fogalmazzuk meg: távolságtartás, szögtartás, pont és képének helyzete a tengelyhez képest, egyenes és képének helyzete a tengelyhez képest, egyenes és tükörképének kapcsolata.

Amikor a szakaszfelező merőlegesről, szögfelezőről és szabályos sokszögekről tanulunk, már a tengelyes szimmetriát alkalmazzuk.

### **3.1.3. Hetedik évfolyam - geometriai transzformációk változatos szabállyal**

Az általános iskolában a hetedik évfolyamon tudjuk megtenni a legfontosabb lépéseket a geometriai transzformációkkal kapcsolatban. A hatodik évfolyamon tárgyalt tengelyes tükrözés kellő bevezetést jelent az általánosabb megközelítéshez. Egy „szabállyal” adjuk meg egy pontnak a képét. Eközben vizsgáljuk, hogy a különböző alakzatok jellemző tulajdonságai hogyan változnak. Tudunk példát mutatni arra, hogy

megváltozhat egy szakasz hossza, egy szög nagysága, sőt lehet, hogy egy egyenes képe görbe vonal lesz.

A transzformációk tulajdonságait felsoroljuk: egyértelmű-e, megfordítható-e, egyenestartó-e, távolságtartó-e, aránytató-e, szögtartó-e. Figyelünk arra, hogy a transzformáció alkalmazásakor az alakzat körüljárása változik-e vagy sem. A cél az, hogy minél több transzformációt végrehajtsunk, akár másolópapírral akár körzővel, vonalzóval. Nem cél, hogy egy-egy esetben minden „szokásos” tulajdonságot felsoroljunk.

Miután az általános fogalmakat áttekintettük, a középpontos tükrözéssel foglalkozunk részletesen. Jó képességű csoportban érdemes a térbeli analógiákra is időt szánni: pontra, egyenesre és síkra is tükrözhetünk térben.

A középpontos tükrözés alkalmazásaként foglalkozunk a paralelogrammával, a rombusszal, a négyzettel, a szabályos sokszögekkel.

Ebben az életkorban a szerkesztések módszerét is rögzítjük: vázlatot készítünk, ezen gondoljuk végig a megoldást, elemzést írunk, az adatokkal elvégezzük a szerkesztést, majd megvizsgáljuk a szerkeszthetőség feltételét. Ezzel a korábbi években is próbálkoztunk, de tapasztalatom szerint ebben az életkorban válik természetessé a gyerekek többsége számára ez a módszer. El kell fogadtatnunk velük azt, hogy itt is fogalmazást írunk, mint magyar órán. A megoldásokat érdemes a táblánál szóban is elmagyaráztatni, mert így lehet a jó matematikai szóhasználatot kialakítani.

#### **3.1.4. Nyolcadik évfolyam - az összefoglalás és a rendszerezés éve**

Az általános iskola utolsó évében sok gond van vagy lehet, ami nem kedvez a geometria tanításának. A tanulókat továbbtanulásra készítve nem biztos, hogy a geometriai ismeretek gyakoroltatása lesz a legfontosabb cél. Nyolcosztályos gimnáziumban tanítva jobb lehetőségek

között tervezhettem ezen a téren.

Részletesen ebben az évben tárgyaljuk az eltolást. Ennek ellenére ez az a geometriai transzformáció, amelyet szemléletesen régen ismernek a tanulók. Ezzel a témával kapcsolatban arra is figyelniünk kell, hogy a vektor fogalma a fizika számára is igen fontos.

Itt érdemes a hasonlósági transzformációval is foglalkozni, mert a rendszerezés során jó, ha nem csak egybevágósági transzformációkra figyelünk. Erős csoportban én az affinitást is megemlítem.

Az egybevágósági transzformációk rendszerezését sokféle mélységben lehet elvégezni. Ez a következő évben, kilencedik évfolyamon is téma lesz a matematika órán. Ha több időnk van, ha erősebb a csoportunk, akkor sem szükséges nehéz bizonyítási vagy ravasz szerkesztési feladatok felé venni az irányt nyolcadik osztályban.

Két éve egy nyolcadik és egy kilencedik évfolyamos csoportom is volt. Így jó alkalmam volt arra, hogy átgondoljam, melyik évfolyamon mit tartok fontosnak. Több héten keresztül gyűjtöttek a gyerekek a környezetükben olyan tárgyakat, amelyeken a szimmetria különböző típusait találták. (Eközben a matematika órákon más témával is foglalkoztunk.) Digitális fényképezőgéppel jártam az órákra, hogy a legértékesebb „kincseket” megörökítsük. A nyolcadikosokkal az volt a célom, hogy észrevegyék és meg tudják különböztetni a geometriai transzformációkat a talált tárgyakon. Ők is élvezték, ha egy hajpánton, egy kulcstartón, egy tapétacsíkon, sőt még a konyhai papírtörlőn is alkalmazni tudták az előző évek ismereteit. A kilencedikesek számára ez kiindulópont volt a geometriai transzformációk egymás utáni alkalmazásának tanulmányozásához. A gyűjtőmunka után levetítettük, hogy mi mindent találtunk a témával kapcsolatban. Két szép és érdekes videót is megnéztünk, amely M.C.Esher életével és munkásságával foglalkozik. ([15] és [16])

A geometriai transzformációkat egymás után alkalmazva ráismerünk arra, hogy az eredményt egyetlen transzformációval is el lehet érni. Ezeket a sejtéseinket nem bizonyítottuk nyolcadik osztályban.

## 3.2. Geometriai transzformációk a középiskolában

### 3.2.1. Kilencedik évfolyam - egybevágósági transzformációk és alkalmazásaik

Az elmúlt években a szokásos heti óraszámnál 2 órával magasabb óraszámban tanítottam kilencedik osztályban matematikát - a mi iskolánkban ezeket a csoportokat reál csoportoknak nevezik. Először röviden azt foglalom össze, hogy ilyen körülmények között mit lehet megvalósítani. Ezen az éven kell megpróbálni átlépni azt a határt, ami a szemléletes látástól a bizonyított állításokhoz vezet. A geometriai transzformációkat ilyen szempontból ismételjük. Most szerzünk gyakorlatot szerkesztési és bizonyítási feladatokban. Kellő számú feladat után érdemes összegyűjteni azt, hogy milyen „ötleteket” szoktunk használni. A geometriai bizonyítások jól mutatják azt, hogy egy sejtéstől hogyan juthatunk el a bizonyított állításhoz.

A geometriai transzformációkat felhasználjuk komolyabb állítások, tételek bizonyítására ezen az évfolyamon: Thálesz-tétel, paralelogramma tulajdonságai, középvonalakra vonatkozó állítások.

Az egybevágósági transzformációk rendszerezése során megemlítjük, sok esetben bizonyítjuk, hogy a tengelyes tükrözésekkel melyik transzformáció, hogyan állítható elő. Bevezetjük a transzformációk szorzatának a fogalmát is.

Négy évfolyamos gimnáziumban, vagy kisebb óraszámú tanítva jobban támaszkodunk a szemléletre, a szimmetriának a körülöttünk lévő világban való észrevételére. A geometriai transzformációk alkalmazására koncentrálunk: szimmetrikus háromszögek, négyszögek tulajdonságai, Thálesz-tétele. Ilyen esetben is egy korábbinál absztraktabb megközelítést várunk el a tanítványainktól.

### 3.2.2. Tizedik évfolyam - a hasonlóság és alkalmazásai

A hasonlóság fogalmával már nyolcadik osztályban találkoztunk. Akkor arra volt módunk, hogy felfedezzük és elhiggyük ennek a transzformációnak a tulajdonságait. Ebben az életkorban már alkalmazhatunk bizonyításokat ebben a témában is. Az elméleti alapot a párhuzamos szelők tétele, megfordítása és a párhuzamos szelőszakaszok tétele jelenti. Ezek a bizonyítások nehezek ebben az életkorban. Vannak olyan gyerekek, akik csak az állítások megértéséig jutnak el - ez is fontos lépés. A jobbak pedig bizonyítani tanulnak ezeken a tételeken.

A középpontos hasonlóság tulajdonságait már ezzel az ismerettel gondoljuk át. A hasonlósági transzformációk fogalmát bevezetjük, szerkesztési és számításos feladatokban is alkalmazzuk, nevezetesen tételeket bizonyítunk használatával: szögfelezőtétel, magasságtétel, befogótétel, szelőtétel ...

Gyengébb csoportban, kisebb óraszámban elfogadhatónak tartom a fordított utat: a középpontos hasonlóság tulajdonságaiból kapjuk meg a párhuzamos szelők tételét és következményét. A hangsúlyt a számításos feladatokra érdemes ebben az esetben tenni. Ezzel a szögfüggvények fogalmának bevezetését készíthetjük elő.

### 3.2.3. Tizenegyedik és tizenkettedik évfolyam

A geometriai transzformációkkal kötelezően a tizenegyedik évfolyamtól már nem foglalkozunk. A megszerzett ismereteket feladatokban alkalmazzuk - például trigonometriai számításokban.

Új ismeretet nem kötelező anyagként az emelt szintű csoportban tanuló diákok kapnak. A mátrixokkal ismerkedve a transzformációk koordinátageometriai mátrixával találkoznak.

## 4. Geometriai transzformációk alkalmazása egy versenyfeladatban

Az előző szakaszban áttekintést adtam azokról a területekről, amelyekkel az iskolai oktatásban a geometriai transzformációkkal kapcsolatban foglalkozunk. Ezekkel az eszközökkel a geometria „szép tájaira” juthatunk el diákjainkkal.

Az alábbi feladatot a 2006-2007-es tanévben az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójában a speciális matematika tagozatos tanulók számára tűzte ki a versenybizottság (az én javaslatomra).

**4.1. feladat.** *Az  $ABC$  háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az  $A$ ,  $B$  illetve  $C$  csúcsnál rendre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . A  $B$  csúcsot az  $A$  pont körül negatív irányban elforgatjuk  $\alpha$  szöggel, majd az így kapott  $B_1$  pontot a  $B$  pont körül negatív irányban elforgatjuk  $\beta$  szöggel, és végül az így nyert  $B_2$  pontot a  $C$  pont körül negatív irányban  $\gamma$  szöggel elforgatva a  $B_3$  pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a  $B$ ,  $B_3$  pontok és az  $ABC$  háromszög beírt körének  $O$  középpontja.*

A versenybizottsághoz azok a dolgozatok jutottak, amelyek legalább 15 pontot értek a lehetséges 35-ből. Ilyen dolgozat ebben a tanévben 98 darab volt. Előzetesen két típusú megoldásra számítottunk – az alábbiakban az 1. és 2. megoldás. A dolgozatjavítás során nagy öröm volt látni, hogy a diákok dolgozata sok ötletet tartalmaz, a megoldások között még további 3 típust találtunk. A 98 dolgozat közül az első megoldás négy tanuló dolgozatában szerepelt, a második ötben, a harmadik típusú megoldást három tanuló adta, a negyediket tizenegy, az ötödiket pedig három. A versenybizottság az első két megoldást fogalmazta meg, a további megoldásokat a diákok munkáiból válogattam. A megoldások leírása során természetesen a szóhasználatot egységesítettem, némileg pontosítottam a dolgozatokban megtalálható változatokhoz képest.

A feladat szövege sugallhatta a transzformációk helyettesítésének gondolatát. Az előbbi statisztika – a legtöbben a negyedik típus szerint oldották meg a feladatot – azonban azt mutatja, hogy a speciális matematika tagozatos tanulók sem ehhez a megoldási módszerhez nyúl-  
nak döntően. Érdemes lenne a geometriai transzformációk előállításá-  
nak lehetőségét részletesebben tanítani a matematikával mélyebben  
ismerkedő tanulóknak akár speciális matematika tagozatos osztályok-  
ban, akár más emelt óraszámú csoportok esetében. Ehhez elméleti  
megközelítést adhat Reiman István: Matematika [49] könyvének 179-  
190. oldalai, ennél egy mélyebb átekintést jelent A geometria és határ-  
területei [50] című könyvének 7. és 8. fejezete. Ha feladatokon  
keresztül szeretnénk elmélyíteni ezt a tudást, akkor nagyon jól használ-  
ható anyag található Vigassy Lajos: Egybevágósági transzformációk a  
síkban és a térben [56] című középiskolai szakköri füzetében. Molnár  
Emil: Elemi matematika II. egyetemi jegyzetében [36] az elméleti is-  
meretek összefoglalása után számos feladat szerepel, ez alapos tudást  
adhat a témát tanító tanárnak és a téma iránt mélyebben érdeklődő  
diáknak is.

**Az alábbi öt megoldásban egységesen használt jelölések:**

a háromszög szögfelezői:  $f_a, f_b, f_c$

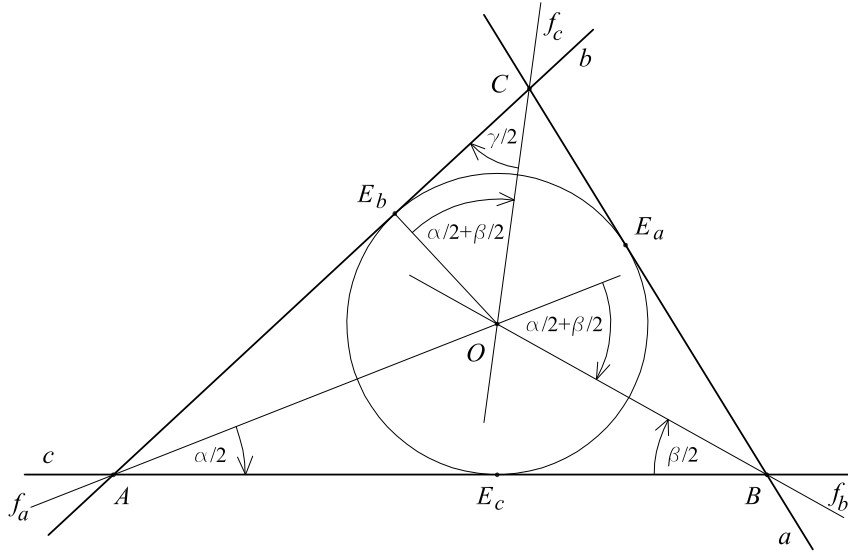
a beírható kör középpontja:  $O$

érintési pontok az oldalakon:  $E_a, E_b, E_c$

**1. megoldás** (Ld. 1. ábra )

Egy  $\alpha$  szögű forgatás helyettesíthető a középponton átmenő két  
egyenesre történő tengelyes tükrözés (megfelelő sorrendben vett) egy-  
másutánjával, ahol a tengelyek szöge  $\alpha/2$ .





1. ábra.

Így a feladatban szereplő  $A$  pont körüli forgatás felbontható az  $f_a$  szögfelezőre és a  $c$  oldalegyenesre való tükrözés egymásutánjára. Hasonlóan a  $B$  pont körüli forgatást a  $c$  oldalegyenesre és az  $f_b$  szögfelezőre való tükrözéssel állítjuk elő. Így a két forgatás szorzata az  $f_a$  és  $f_b$  szögfelezőkre való tükrözéssel helyettesíthető, hiszen a  $c$  oldalegyenesre való kétszeri tükrözés egymást semlegesíti. A szögfelezők szöge  $\alpha/2 + \beta/2$ , tehát a két forgatás egymás utáni alkalmazása a beírt kör középpontja körüli  $\alpha + \beta$  szögű negatív irányú forgatással egyenlő.

A beírt kör a  $b$  oldalt az  $E_b$  pontban érinti. Az  $OCE_b$  háromszögben az  $E_b$  érintési pontban derékszög van, a  $C$  csúcsnál lévő szög  $\gamma/2$ , így az  $O$  pontnál lévő szög  $\alpha/2 + \beta/2$  (felhasználjuk, hogy  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ). Tehát az  $E_bO$  sugár és az  $f_c$  szögfelező szöge is  $\alpha/2 + \beta/2$ , ezért az

előbbi forgatás az  $E_bO$  egyenesre és az  $f_c$  szögfelezőre való tükrözések egymásutáni alkalmazásával is előállítható. Bontsuk fel  $C$  pont körüli  $\gamma$  szögű negatív irányú forgatást az  $f_c$  szögfelezőre és  $b$  oldalegyenesre való tükrözések egymásutánjára. Így a három forgatás az  $E_bO$  egyenesre és a  $b$  egyenesre való tükrözésekkel helyettesíthető. Ezek egymásra merőleges egyenesek, tehát a három egymást követő forgatás olyan középpontos tükrözéssel egyenértékű, amelynek a középpontja  $E_b$ .

Ennek ismeretében adjuk meg a feladat megoldását. Szerkesszük meg az adott  $B$  és  $B_3$  pontok felezőpontját, ezzel megkapjuk az  $E_b$  pontot. Az adott  $O$  pont körül,  $E_bO$  sugárral megrajzoljuk a beírt kört. A körhöz az  $E_b$  pontban érintőt szerkesztünk, ezzel a háromszög  $b$  oldalegyenesét kapjuk meg. A  $B$  pontból az ismert módon érintőket szerkesztünk a körhöz, ezzel megkapjuk az  $a$  és  $c$  oldalegyeneseket. A háromszög csúcsait az oldalegyenesek metszéspontjaiként kapjuk meg.

**Diszkusszió:** A megoldhatóság feltétele, hogy a  $B$  és  $B_3$  pontok felezőpontja az  $O$  ponttól különböző pont legyen, a  $B$  pont a megrajzolt körvonalon kívül helyezkedjen el, továbbá a kör és a  $B$  pont a  $b$  oldalegyenes azonos félsíkjában legyen (ellenkező esetben a háromszög hozzáírt körét kapjuk). A feladatnak ekkor egy megoldása van.

Ez az eljárás valóban a keresett  $ABC$  háromszöghöz vezet, hiszen az idézett tételek miatt az így kapott háromszög  $B$  csúcsának megfelelő szögekkel való elforgatottja az a  $B_3$  pont, amely az  $O$  pontnak az  $E_b$  pontra vonatkozó tükörképe.

Az általánosítás lehetőségét adja, ha a hozzáírt kör esetével foglalkozunk.

A további megoldások azonos jellegű tényeket használnak, de a nézőpont más és más. Ezek a variációk a későbbi tükrözésgeometriai témakört is gazdagítják. (5. fejezet)

## 2. megoldás (Ld. 1. ábra )

Az előző megoldáshoz hasonlóan belátható, hogy különböző közép-pontú,  $\alpha$  és  $\beta$  szögű forgatások egymásutánja  $\alpha + \beta$  szögű forgatás (alkalmas középpont körül), ha  $\alpha + \beta \neq k \cdot 360^\circ$  ( $k$  egész szám). Így a három egymásutáni elforgatás  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ -os elforgatásnak, tehát középpontos tükrözésnek felel meg.

Az  $E_b$  érintési pontot az  $A$  pont körül  $\alpha$  szöggel negatív irányban elforgatva az  $E_c$  érintési pontot kapjuk. Ha az  $E_c$ -t a  $B$  pont körül  $\beta$  szöggel negatív irányban elforgatjuk, akkor az  $E_a$  pontba jutunk. A  $C$  pont körüli  $\gamma$  szögű negatív irányú forgatásnál ennek a képe az  $E_b$  pont. Tehát  $E_b$  a transzformációnak fixpontja, ebből adódóan az  $E_b$  pont lesz a tükrözés középpontja.

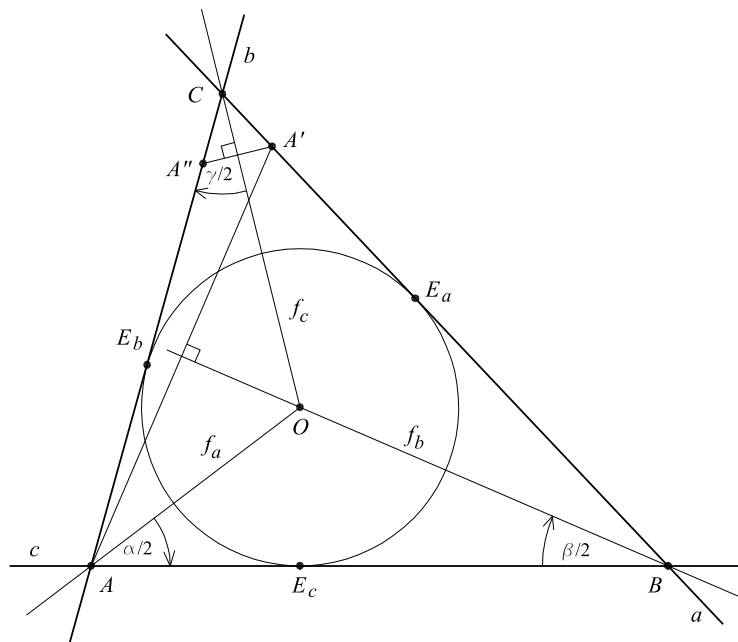
A szerkesztés és a diszkusszió a továbbiakban azonos az 1. megoldásban leírtakkal.

## 3. megoldás(Ld. 2. ábra )

A három forgatást a következő egyenesekre való tükrözésekkel helyettesíthetjük:  $f_a, c, c, f_b, f_c, b$ . A kétszeri  $c$  egyenesre való tükrözés semlegesíti egymást. Tehát az  $f_a f_b f_c b$  transzformációt vizsgáljuk a továbbiakban. Ez egy síkbeli egybevágósági transzformáció, amit 3 nem kollineáris pont képe meghatároz.

Legyen ez a három pont  $O, A$  és az  $E_b$  érintési pont. A 2. megoldásban már beláttuk, hogy az  $E_b$  pont a transzformáció fixpontja. Az  $O$  pont a szögfelezők metszéspontja, ezért ezekre az egyenesekre tükrözve az  $O$  pont helyben marad. A folyamat végén az  $O$  pont  $b$ -re való tükörképét kapjuk, ami azonos az  $E_b$  pontra vonatkozó tükörképpel. Ha  $A$ -t  $f_a$ -ra tükrözzük, akkor a képe önmaga. Ha ezután  $f_b$ -re tükrözzük, akkor az  $A'$  pont a  $BC$  oldalegyenesen lesz és  $AB = BA'$ .  $A'$ -t  $f_c$ -re tükrözve az  $AC$  egyenes egy pontját kapjuk és  $A''C = A'C$ .

$$AA'' = AC - CA'' = AC - CA' = AC - (BC - BA') = AC - (BC -$$



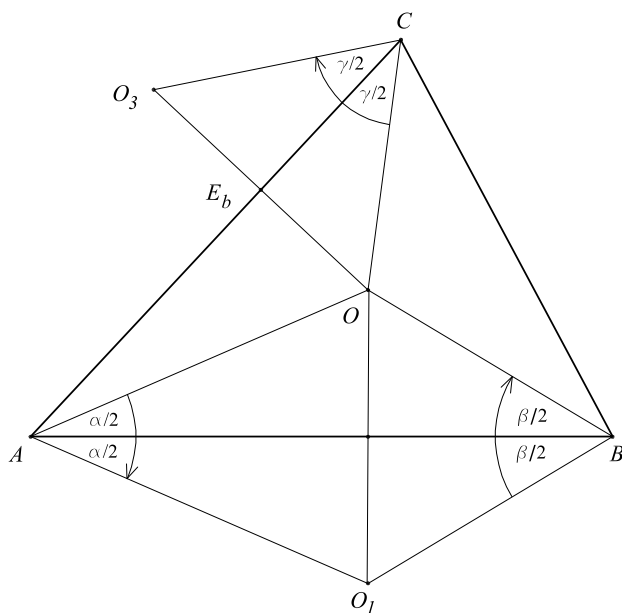
2. ábra.

$-AB) = AC - BC + AB = (AB + AC + BC) - 2BC = 2s - 2a = 2(s - a)$ .  $s$ -sel a háromszög fél kerületét jelöljük. Ellenőrizhető, hogy ez akkor is igaz, ha a megfelelő pontok nem az oldal belső pontjai, hanem az oldal meghosszabbítására esnek.

Ismert, hogy  $AE_b = s - a$ , így  $A''$  pont az  $A$ -nak  $E_b$ -re vonatkozó tükörképe. Ezért a négy tengelyes tükrözés egymásutáni alkalmazása az  $E_b$  érintési pontra való tükrözéssel egyenértékű.

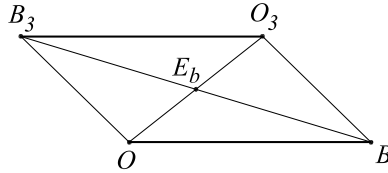
Innen az 1. megoldás szerint végezzük el a szerkesztést.

**4. megoldás** (Ld. 3. és 4. ábra )



3. ábra.

Ha az  $O$  pontot az  $A$  pont körül negatív irányban  $\alpha$  szöggel elforgatjuk, akkor az  $O_1$  pontot kapjuk. Ha ezután az  $O_1$  pontot a  $B$  pont körül negatív irányban  $\beta$  szöggel forgatjuk el, akkor visszajutunk az  $O$  pontba (felhasználtuk, hogy  $O$  a szögfelezők metszéspontja). Majd az  $O$  pontot  $C$  körül  $\gamma$  szöggel negatív irányban forgatva az  $O_3$  pontot kapjuk.  $\angle OCE_b = \gamma/2$ , ezért az  $O_3$  pont az  $O$  pontnak az  $E_b$  pontra való tükörképe. (3. ábra)



4. ábra.

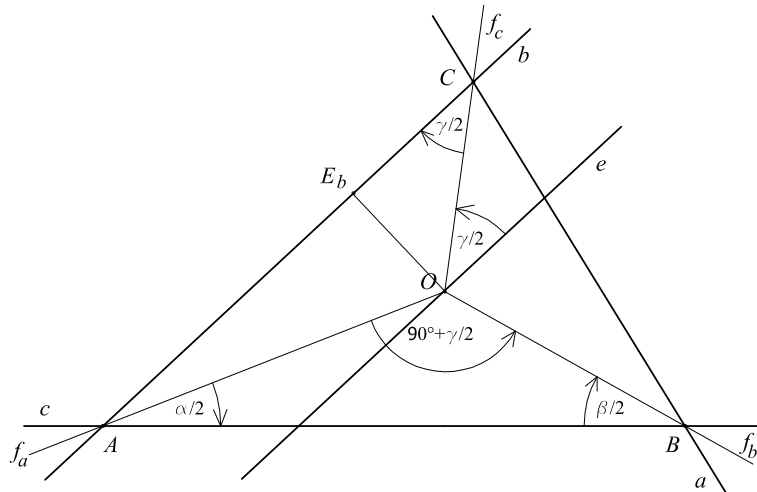
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Ezért, ha az  $OB$  szakaszt a feladat szerint elforgatjuk, akkor  $OB$  és  $O_3B_3$  párhuzamos lesz, irányításuk pedig ellentétes. Így  $OBO_3B_3$  paralelogramma (esetleg elfajult), amelynek a középpontja  $E_b$ . Ezt a pontot a  $BB_3$  szakasz felezőpontjaként kapjuk meg.(4. ábra)

Innentől a szerkesztést a már ismert módon fejezzük be.

## 5. megoldás (Ld. 5. és 6. ábra )

A feladatban szereplő,  $A$  és  $B$  pont körüli forgatások az  $f_a$ ,  $c$ ,  $c$ ,  $f_b$  tengelyes tükrözésekkel helyettesíthetők, itt a két  $c$ -re való tükrözés semlegesíti egymást, tehát  $f_a$  és  $f_b$  egyenesekre való tükrözések egymásutánját vizsgáljuk. Az  $f_a$  és  $f_b$  szöge az ábra szerint mérve  $90^\circ + \gamma/2$ . Ezért  $f_a f_b$  egy  $O$  középpontú,  $2 \cdot (90^\circ + \gamma/2) = 180^\circ + \gamma$  szögű pozitív irányú forgatásnak felel meg. Ezt tekinthetjük egy  $O$ -ra vonatkozó középpontos tükrözés és egy pozitív irányú  $\gamma$  szögű forgatás egymásutánjának alkalmazásának.

Az  $O$  ponton keresztül felvesszünk egy  $AC$ -vel párhuzamos  $e$  egyenest. Az  $e$  egyenes és az  $f_c$  szögfelező szöge  $\gamma/2$  (váltószögek egyenlősége miatt). Tehát az  $O$  körüli pozitív irányú  $\gamma$  szögű forgatás az  $e$  és az  $f_c$  egyenesekre, a  $C$  középpontú negatív irányú  $\gamma$  szögű forgatás pedig az  $f_c$  és a  $b$  egyenesekre való tükrözésekkel helyettesíthető. A

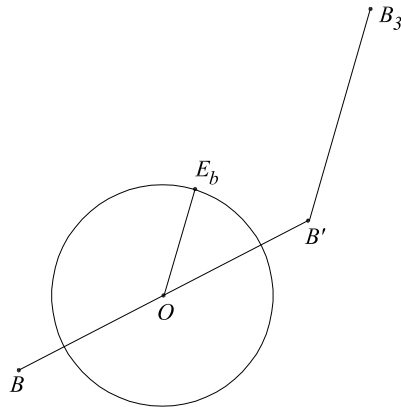


5. ábra.

két  $f_c$ -re való tükrözés semlegesíti egymást, így az  $e$  és a  $b$  egyenesekre való tükrözések maradnak.

$e$  és  $b$  párhuzamos, ezért a rájuk való tükrözés a távolságuk kétszeresével, a  $2 \cdot \overrightarrow{OE_b}$  vektorral való eltolással egyenértékű. A teljes transzformáció tehát az  $O$  pontra való tükrözés és a  $2 \cdot \overrightarrow{OE_b}$  vektorral való eltolás egymásutánja.

Tükrözzük a  $B$  pontot  $O$ -ra.  $\overrightarrow{B'B_3}$  a fentemlített eltolás vektora. Az  $O$  pontot toljuk el az  $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B'B_3}$  vektorral. Így megkapjuk az  $E_b$  pontot. Innen a szokásos módon fejezzük be a megoldást.



6. ábra.

## 5. A tükrözésgeometria alaptételének alkalmazásáról

### 5.1. Bevezetés

Geometriai transzformációk, mint a tér önmagára való bizonyos típusú leképezései, csoportot alkotnak az egymásutáni végrehajtás (kompozíció) mint szorzás műveletével. Az egybevágósági transzformációk csoportjának áttekintésében, rendszerezésében kiemelt szerepe van síkban az egyenesre történő tengelyes tükrözésnek, térben a síktükrözésnek, ahogyan ezt a 2. fejezetben már elemeztem. A tükrözésgeometria arra tesz kísérletet, hogy a geometriai problémák széles körét ezekre a transzformációkra alapozva vizsgálja. Néhány, a 2. fejezetben szereplő tételt most axiómaként mondunk ki. Ezek „erős” axiómák az általában szokásos axiómákhoz képest, de pontosan ez ad lehetőséget, hogy egy hatékony geometriai rendszert építsünk fel. Bachmann [3] és



Ahrens [2] klasszikus munkáira fogok hivatkozni és használok Molnár Emil [37] és [38] munkáit, amelyekben síkban és térben egy lehetséges egyszerűsített felépítést ismerhetünk meg.

A tükrözésgeometria lehetőséget ad arra, hogy az egybevágósági transzformációkat rendszerezzük. A rendszerezés során két tetszőleges egyenesre való tükrözést két másik egyenesre való tükrözéssel helyettesítünk, amelyek közül az egyik egy adott ponton megy át, vagy más feltételt teljesít. Ez a lehetőség térben síktükrözésekkel kapcsolatban lép fel. A tükrözésgeometria alaptételei (5.5. tétel és 5.6. tétel a későbbiekben) megmutatják az ilyen helyettesítés lehetőségét és módszerét, és kimondják az előállítás egyértelműségét is. Az 5.6. tétel bizonyítását dolgozatomban tartalmazza, ebben az axiómák hatékony és szép alkalmazását figyelhetjük meg.

Egyenestükrözés térben is értelmezhető. Felmerül a kérdés, hogy térben az 5.5. tétel egyértelmű konstrukciója lehetséges-e. Az 5.9. tételben kimondom, hogy ilyen előállítás létezik. A tételre adott bizonyításom azt is megmutatja, hogy ez az előállítás térben nem mindig egyértelmű, megadom az egyértelmű előállítás feltételét is (5.10. tétel). Ez az elemzés nem volt ismert a téma irodalmában.

Az alábbiakban először áttekintem a szükséges alapfogalmakat, axiómákat és tételeket. Az 5.9. tétel bizonyításához közvetlenül az 5.3. és 5.4. axiómára és az 5.8. tételre lesz szükségem. Az 5.7. és 5.8. tétel bizonyítását is megadom, ezek az 5.9. tételben szereplő előállítás konkrét kivitelezését teszik lehetővé. Az 5.9. tétel így nem csak egy előállítás elvi lehetőségét mutatja meg, hanem az 5.7. és 5.8. tételre alapozva látható, hogy a konstrukció a gyakorlatban, szerkeszthető módon hogyan állítható elő.

## 5.2. Alapfogalmak, jelölések

pontok:  $A, B, C \dots$

egyenesek:  $a, b, c \dots$

síkok:  $\alpha, \beta, \gamma \dots$

$\alpha$ -val jelölöm az  $\alpha$  síkra való tükrözést is, hasonlóan használom a jelöléseket pontok és egyenesek esetében is.

A  $P$  pont illeszkedik az  $e$  egyenesre:  $P \mathbf{I} e$ .

A  $P$  pont, az  $e$  egyenes illeszkedik az  $\alpha$  síkra :  $P \mathbf{I} \alpha$  ,  $e \mathbf{I} \alpha$  .

$\equiv$  jel a térelemek egyenlőségét jelöli.

$=$  jel a transzformációk egyenlőségét jelöli.

Az  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  síkokra való tükrözések szorzata :  $\alpha\beta\gamma \dots$

$P^\phi$  ,  $e^\phi$  ,  $\alpha^\phi$ : A  $P$  pont, az  $e$  egyenes, az  $\alpha$  sík képe a  $\phi$  transzformáció alkalmazása után.

A  $\phi$  transzformáció inverze:  $\phi^{-1}$ .

A  $\phi$  transzformáció involutív , ha  $\phi = \phi^{-1} \neq 1$  (1 jelöli az identikus leképezést).

$\phi^{-1}\psi\phi$  : A  $\psi$  leképezésnek a  $\phi$  leképezéssel történő transzformáltja (konjugáltja).

Ha  $\phi$  involutív, akkor  $\phi^{-1}\psi\phi = \phi\psi\phi$ .

Speciálisan  $\phi^{-1}\alpha\phi =: \alpha^\phi$  olyan síktükrözés, ahol a tükrözés síkját az  $\alpha$  síkból a  $\phi$  transzformáció alkalmazásával kapjuk.

$\alpha \perp \beta$  : Az  $\alpha$  sík merőleges a  $\beta$  síkra, ha  $\alpha^\beta \equiv \alpha$  és  $\alpha \not\equiv \beta$ .

$a \perp \beta$  : Az  $a$  egyenes merőleges a  $\beta$  síkra, ha  $a^\beta \equiv a$  és  $a \not\mathbf{I} \beta$ .

**egyenestükrözés :** Ha  $\alpha \perp \beta$  és  $g \mathbf{I} \alpha, \beta$ , akkor az  $\alpha\beta = \beta\alpha$  transzformációt  $g$  egyenestükrözésnek nevezzük. A  $g = \alpha\beta$  transzformáció involutív, hiszen

$$\alpha^\beta = \beta\alpha\beta = \alpha \iff \alpha\beta = \beta\alpha = (\alpha\beta)^{-1}.$$

**ponttükrözés:** Ha  $P \mathbf{I} a, \alpha$  és  $a \perp \alpha$ , akkor az  $\alpha a = a\alpha$  transzformációt  $P$  ponttükrözésnek nevezzük. A  $P = \alpha a$  transzformáció involutív, mert

$$a^\alpha = \alpha a \alpha = a \iff \alpha a = a\alpha = (\alpha a)^{-1}.$$

Az axiómák és a tételek egységes tárgyalást tesznek lehetővé az euklideszi és a hiperbolikus térben. A fogalmak, axiómák és a tételek az elliptikus térben is analóg módon fogalmazhatóak meg. Az egyértelműség kérdése azonban eltérő módon tárgyalható, ezért dolgozatomban az elliptikus geometria esetével nem foglalkozom.

### 5.3. Axiómák és tételek

#### 5.3.1. A három egyenestükrözés axiómája síkban

**5.1. Axióma.** Ha  $a, b, c \mathbf{I} P$ , akkor létezik olyan  $d$  egyenes, amelyre  $abc = d$ .

*Következmény:*  $d \mathbf{I} P$ .

**5.2. Axióma.** Ha  $a, b, c \perp g$ , akkor létezik olyan  $d$  egyenes, amelyre  $abc = d$ .

*Következmény:*  $d \perp g$ .

#### 5.3.2. A három síktükrözés axiómája térben

**5.3. Axióma.** Ha  $\alpha, \beta, \gamma \mathbf{I} g$ , akkor létezik olyan  $\delta$  sík, amelyre  $\alpha\beta\gamma = \delta$ .

*Következmény:*  $\delta \mathbf{I} g$ .

**5.4. Axióma.** Ha  $g \perp \alpha, \beta, \gamma$ , akkor létezik olyan  $\delta$  sík, amelyre  $\alpha\beta\gamma = \delta$ .

Következmény:  $g \perp \delta$ .

A 5.3. és a 5.4. axióma alapján az egyenestükrözés definícióját használva az 5.1. és 5.2. axióma bebizonyítható.

### 5.3.3. Tételek

**5.5. Tétel. A tükrözésgeometria főtétele síkban** (Hjelmslev)

A sík bármely különböző  $a$  és  $b$  egyeneséhez és nem mindkettőre illeszkedő  $X$  ponthoz létezik pontosan egy olyan  $g$  egyenes, amelyre  $g \mathbf{I} X$  és  $agb = h$  egyenestükrözés.

A tétel következménye, hogy létezik olyan  $h_1$  egyenestükrözés is, hogy  $ab = gh_1$ , ahol  $h_1 = bhb = h^b$ .

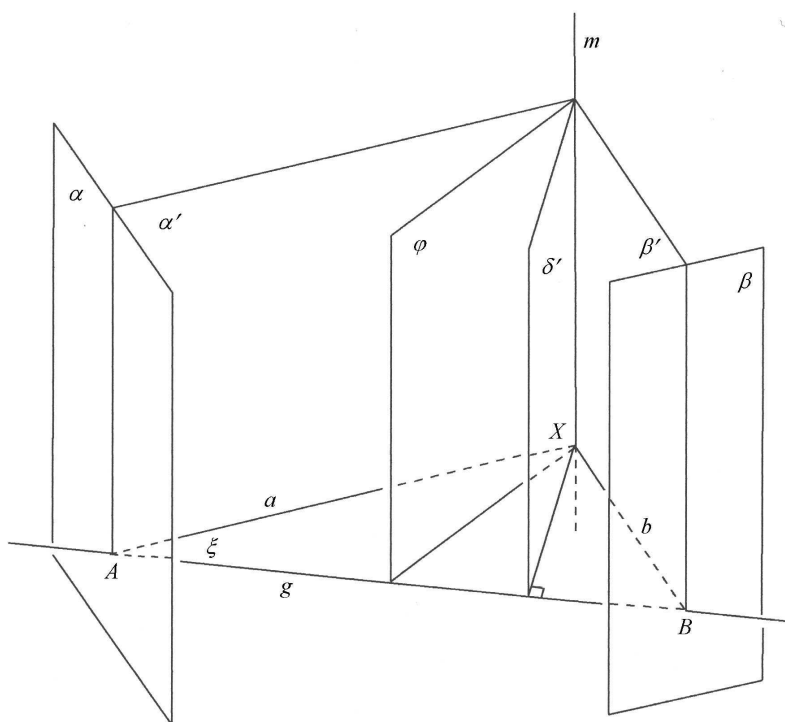
**5.6. Tétel. A tükrözésgeometria főtétele térben**

Bármely különböző  $\alpha$  és  $\beta$  síkhoz és nem mindkettőre illeszkedő  $X$  ponthoz létezik pontosan egy olyan  $\varphi$  sík, amelyre  $\varphi \mathbf{I} X$  és  $\alpha\varphi\beta = \psi$  síktükrözés.

Itt is következik, hogy létezik olyan  $\psi_1$  síktükrözés is, hogy  $\alpha\beta = \varphi\psi_1$ , ahol  $\psi_1 = \beta\psi\beta = \psi^\beta$ .

**Bizonyítás:** (Ld. 7. és 8. ábra)

Bocsássunk merőlegest az  $X$  pontból az  $\alpha$  síkra ( $a$  egyenes). A merőleges talppontja  $A$ . Hasonlóan keletkezik a  $b$  egyenes és a  $B$  pont. A  $g$  egyenes az  $A$  és  $B$  pontokra illeszkedik.  $\delta'$  az  $X$  pontból a  $g$  egyenesre állított merőleges sík. A  $\xi$  síkot az  $X$  pont és az  $a, b$  egyenesek határozzák meg.  $\alpha'$  sík illeszkedik az  $a$  egyenesre és merőleges a  $\xi$  síkra. A  $\beta'$  síkot az 7. ábra szerint hasonlóan kapjuk.  $X \mathbf{I} \alpha', \beta'$ , ezért



7. ábra.

$\alpha'$  és  $\beta'$  metszik egymást az  $m$  egyenesben.  $m$  merőleges a  $\xi$  síkra és átmegy az  $X$  ponton.  $\delta'$  is illeszkedik erre a metszéspontjára. A 5.3. axióma alapján létezik olyan  $\varphi$  sík, amelyre  $\alpha'\delta'\beta' = \varphi$  és  $\varphi \perp m$ ,  $\varphi \perp \xi$ , így  $\varphi\xi = \xi\varphi$ .

Ezért:

$$a\delta'b = (\xi\alpha')\delta'(\beta'\xi) = \xi(\alpha'\delta'\beta')\xi = \xi\varphi\xi = \varphi.$$

Tehát:

$$a\varphi b = \delta' \quad (1)$$

A ponttükrözés definíciója szerint:

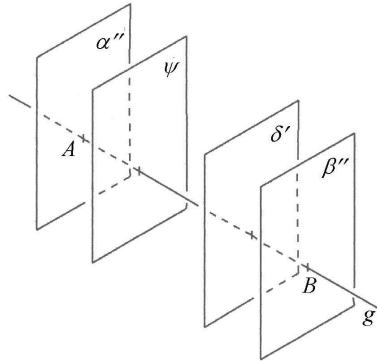
$$\begin{aligned} A &= a\alpha = \alpha a \iff \alpha = aA = Aa \quad , \\ B &= b\beta = \beta b \iff \beta = bB = Bb \quad . \end{aligned}$$

Ezeket az összefüggéseket felhasználva:

$$\alpha\varphi\beta = (Aa)\varphi(bB) = A(a\varphi b)B.$$

(1) alapján:

$$\alpha\varphi\beta = A\delta'B. \tag{2}$$



8. ábra.

Az  $A$  és  $B$  ponttükrözéseket a definíció alapján előállítjuk:

$$\alpha'' \perp g, \alpha'' \text{ I } A \Rightarrow A = g\alpha''; \beta'' \perp g, \beta'' \text{ I } B \Rightarrow B = g\beta''.$$

A 5.4. axióma alapján van olyan  $\psi \perp g$  sík, amelyre

$$\alpha''\delta'\beta'' = \psi.$$

(2) szerint:

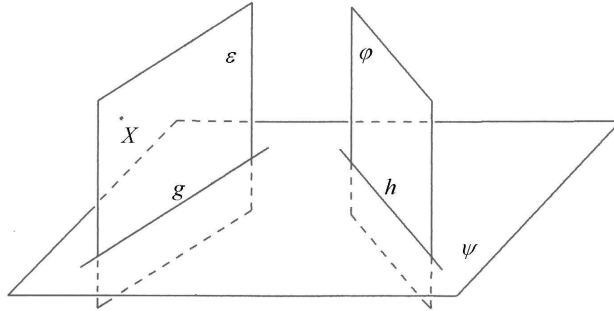
$$\alpha\varphi\beta = A\delta'B = (g\alpha'')\delta'(\beta''g) = g(\alpha''\delta'\beta'')g = g\psi g = \psi.$$

Ezzel a tétel állítását beláttuk.

A tételben megfogalmazott következmény az alábbiak szerint adódik:

$$\psi = \alpha\varphi\beta \Rightarrow \alpha\psi = \varphi\beta \Rightarrow \alpha = \varphi\beta\psi \Rightarrow \alpha\beta = \varphi\beta\psi\beta = \varphi\psi^\beta.$$

$\varphi$  (és  $\psi_1$ ) egyértelműségét indirekt módon lehet bizonyítani, a részletek az [2], [3], [38] irodalomban megtalálhatóak.



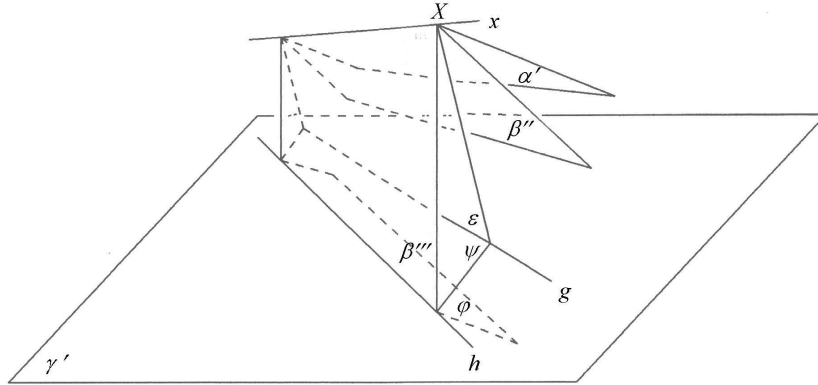
9. ábra.

**5.7. Tétel.** Ha  $\Phi = \alpha\beta\gamma$  három síktükrözés szorzata és  $X$  a tér egy tetszőleges pontja, akkor létezik olyan  $\varepsilon, \varphi, \psi$  sík, hogy  $X \in \varepsilon$  és  $\varepsilon, \varphi \perp \psi$  és  $\Phi = \varepsilon\psi\varphi$ .

Ha az  $\varepsilon$  és  $\psi$  metszésvonala  $g$ , a  $\varphi$  és  $\psi$  metszésvonala  $h$ , akkor  $\Phi = \varepsilon h = g\varphi$ . (Ld. 9. ábra)

**Bizonyítás:** (a 10. ábra jelöléseit használom.)

A 5.6. tétel szerint létezik olyan  $\alpha'$  és  $\beta'$  sík, hogy  $X \mathbf{I} \alpha'$  és  $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ . Újra a 5.6. tételt alkalmazva létezik olyan  $\beta''$  és  $\gamma'$ , hogy  $X \mathbf{I} \beta''$  és  $\beta'\gamma = \beta''\gamma'$ . Legyen  $x$  az  $\alpha'$  és  $\beta''$  metszészvonala. Ekkor létezik olyan  $\beta'''$  sík, amely illeszkedik az  $x$  egyenesre és  $\beta''' \perp \gamma'$ . (Amennyiben  $x \perp \gamma'$ , akkor minden  $x$ -re illeszkedő sík megfelel  $\beta'''$ -nek.) Ekkor a 5.3. axióma alapján van olyan  $\varepsilon$  sík, amelyre  $\varepsilon \mathbf{I} x$  és  $\alpha'\beta'' = \varepsilon\beta'''$ . Legyen  $h$  a  $\beta'''$  és  $\gamma'$  metszészvonala, és legyen  $\psi$  olyan sík, amelyre  $\psi \mathbf{I} h$  és  $\psi \perp \varepsilon$ . ( $h \perp \varepsilon$  esetében a  $\psi$  sík tetszőlegesen választható a  $h$ -ra illeszkedő síkok közül.)



10. ábra.

Ekkor újra a 5.3. axióma alapján létezik olyan  $\varphi$  sík, amelyre  $\beta'''\gamma' = \varphi\psi$  és  $\varphi \mathbf{I} h$ . A  $\beta''' \perp \gamma'$  feltétel miatt  $\varphi \perp \psi$ . Ezért  $\varphi\psi = \psi\varphi$ .



Tehát

$$\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma' = \alpha'\beta''\gamma' = \varepsilon\beta'''\gamma' = \varepsilon\varphi\psi = \varepsilon\psi\varphi.$$

$\psi$  és  $\varphi$  metszésvonala  $h$ ,  $\varepsilon$  és  $\psi$  metszésvonala  $g$ ,  $\varepsilon \perp \psi$ . Így az egyenestükrözés definíciója alapján:

$$\alpha\beta\gamma = (\varepsilon\psi)\varphi = g\varphi$$

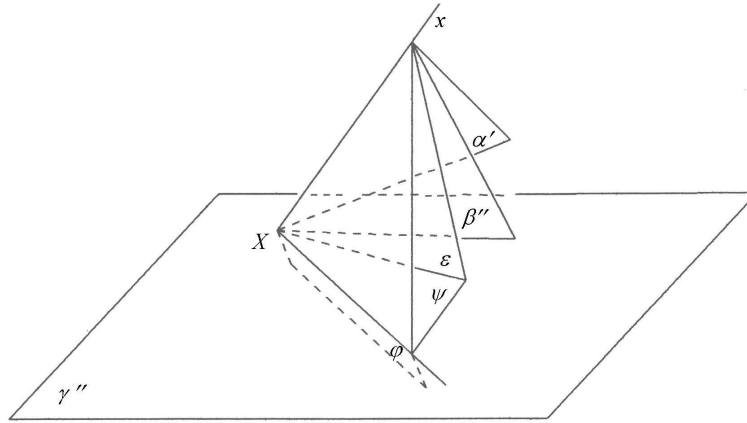
$$\alpha\beta\gamma = \varepsilon(\psi\varphi) = \varepsilon h.$$

A  $\beta'''$  és  $\psi$  síkokat bizonyos esetekben többféle módon is meg tudjuk választani, így a tételben szereplő előállítás nem feltétlenül egyértelmű.

**5.8. Tétel.** *Ha  $\Phi = \alpha\beta\gamma\delta$  és  $X$  a tér egy tetszőleges pontja, akkor létezik olyan  $g$  és  $h$  egyenes, hogy  $\Phi = gh$  és  $X \in g$ .*

**Bizonyítás:**

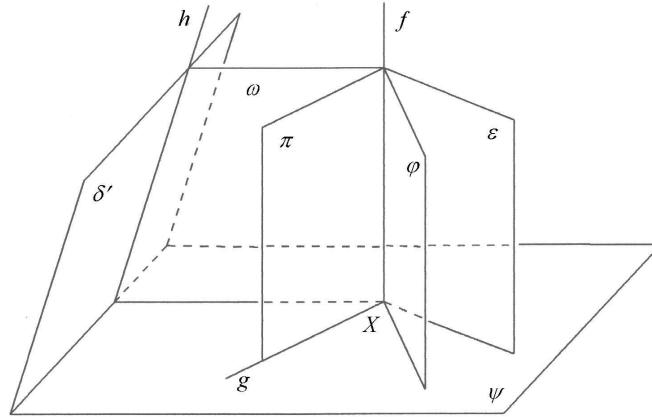
(Ld. a 11. ábra jelöléseit)



11. ábra.

A 5.6. tétel szerint létezik olyan  $\alpha'$  és  $\beta'$  sík, hogy  $X \mathbf{I} \alpha'$  és  $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ . Újra a 5.6. tételt alkalmazva van olyan  $\beta''$  és  $\gamma'$ , hogy  $X \mathbf{I} \beta''$  és  $\beta'\gamma = \beta''\gamma'$ , és létezik olyan  $\gamma''$  és  $\delta'$ , hogy  $X \mathbf{I} \gamma''$  és  $\gamma'\delta = \gamma''\delta'$ . A 5.7. tétel szerint van olyan  $\varepsilon, \varphi, \psi$ , hogy  $\alpha'\beta''\gamma'' = \varepsilon\psi\varphi$ . A 11. ábra szerint (ezen az ábrán követhető az 5.7. tétel konstrukciója)  $\alpha', \beta'', \gamma'' \mathbf{I} X$ , ezért  $X \mathbf{I} \varepsilon, \varphi, \psi$  is teljesül.  $\varepsilon, \varphi \perp \psi$  miatt  $\alpha'\beta''\gamma'' = \psi\varepsilon\varphi$ .

$\varepsilon$  és  $\varphi$  illeszkedik az  $X$  pontra, így a két sík metszi egymást az  $f$  egyenesben (ld. 12. ábra).  $f \perp \psi$  is teljesül. Van olyan  $\omega$  sík ( $f \perp \delta'$  esetén több is), amely illeszkedik  $f$ -re és  $\omega \perp \delta'$ . (Ha  $f \perp \delta'$ , akkor egyet választunk az  $f$  egyenesre illeszkedő síkok közül.)  $\omega$  és  $\delta'$  a  $h$  egyenesben metszi egymást. A 5.3. axióma alapján van olyan  $\pi$  sík, hogy  $\varepsilon\varphi\omega = \pi$  és  $\pi \mathbf{I} f$ . A  $\pi \mathbf{I} f$  és  $f \perp \psi$  feltételek miatt  $\pi \perp \psi$  is igaz.  $\pi$  és  $\psi$  metszésvonala  $g$ .



12. ábra.

Mindezeket felhasználva:

$$\Phi = \alpha\beta\gamma\delta = \alpha'\beta''\gamma''\delta' = \psi\varepsilon\varphi\delta' = \psi(\varepsilon\varphi\omega)(\omega\delta') = (\psi\pi)h = gh$$

és  $X \perp g$ .

Itt is látható, hogy az előállítás nem feltétlenül egyértelmű.

#### 5.4. Egyenestükrözésekről térben

Felmerül a kérdés, hogy a síkbeli 5.5. tételnek van-e egyenestükrözésekre vonatkozó térbeli megfelelője. Az alábbiakban ezt bizonyítom.

**5.9. Tétel.** *Legyen  $a$  és  $b$  a tér két különböző egyenese,  $X$  pedig a tér egy az  $a$  és  $b$  egyenesek nem mindegyikére illeszkedő tetszőleges pontja. Ekkor létezik olyan  $g$  egyenes, amely illeszkedik az  $X$  pontra és  $agb$  helyettesíthető egy  $h$  egyenes-tükrözéssel.*

**Bizonyítás**(ld. 13. ábra):

*Ha  $a$  és  $b$  egyeneseknek van közös merőlegesük (az euklideszi térben ez mindig létezik).*

Az  $a$  és  $b$  egyenesek közös merőlegese legyen  $m$ . Az  $X$  pont és az  $m$  egyenes meghatároz egy  $\gamma$  síkot. (Ha az  $X$  pont illeszkedik az  $m$  egyenesre, akkor ilyen sík több is van, vegyük az egyiket.) Ebben a síkban van olyan  $g$  egyenes, amely illeszkedik az  $X$  pontra és merőleges az  $m$  egyenesre. Az  $\alpha \equiv [a, m]$ ,  $\beta \equiv [b, m]$ ,  $\gamma \equiv [g, m]$  síkokat az  $a$ ,  $b$ ,  $g$ ,  $m$  egyenesek egyértelműen meghatározzák.  $\delta_1$  legyen az  $a$ -ra illeszkedő  $m$ -re merőleges sík. A  $\delta_2$  és  $\delta_3$  síkokat analóg módon értelmezzük.

Az egyenestükrözés definíciója alapján:

$$a = \alpha\delta_1, \quad b = \beta\delta_2, \quad g = \gamma\delta_3.$$

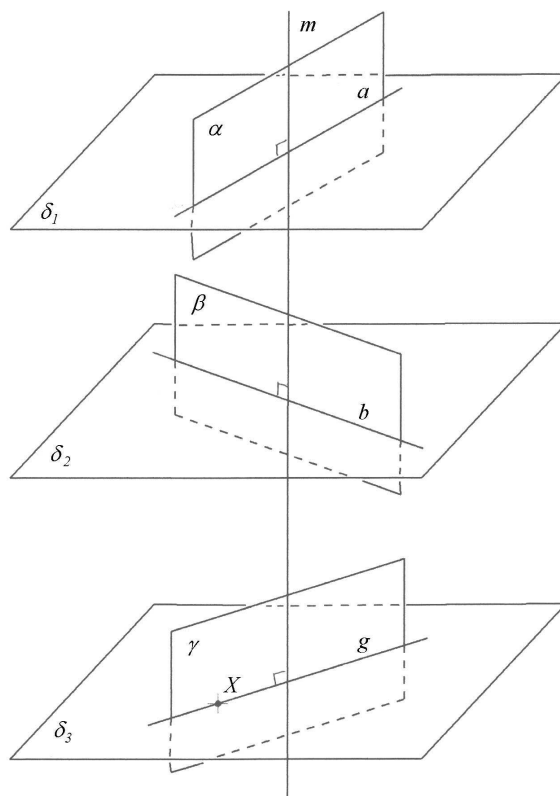
Szeretnénk egyszerűsíteni az  $agb = (\alpha\delta_1)(\gamma\delta_3)(\beta\delta_2)$  szorzatot.

$\alpha, \beta, \gamma \perp \delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), mert  $m \perp \delta_i$  és  $m \perp \alpha, \beta, \gamma$ .

Ezért  $\alpha\delta_i = \delta_i\alpha$ ;  $\beta\delta_i = \delta_i\beta$ ;  $\gamma\delta_i = \delta_i\gamma$ .

Ennek felhasználásával:

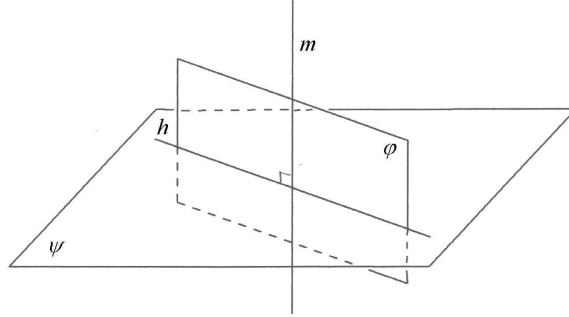
$$agb = (\alpha\gamma\beta)(\delta_1\delta_3\delta_2).$$



13. ábra.

Az  $\alpha, \beta, \gamma \mathbf{I} m$ , így a 5.3. axióma alapján létezik olyan  $\varphi$  sík, amelyre  $\alpha\gamma\beta = \varphi$  és  $\varphi \mathbf{I} m$ .  $m \perp \delta_1, \delta_2, \delta_3$ , ezért a 5.4. axióma alapján van olyan  $\psi$  sík, amelyre  $\delta_1\delta_3\delta_2 = \psi$  és  $m \perp \psi$ . Tehát  $agb = \varphi\psi$ .  $m \mathbf{I} \varphi$  és  $m \perp \psi$ , tehát  $\varphi \perp \psi$ .

Az egyenestükrözés definíciója szerint a  $\varphi\psi$  szorzat a  $h$  egyenestükrözés-



14. ábra.

nek felel meg, ahol  $h$  a  $\varphi$  és  $\psi$  síkok metszésvonala. Tehát az  $agb$  szorzatot az  $m$ -re merőleges  $h$  egyenestükrözéssel helyettesíthetjük (14. ábra). A bizonyításból következik, hogy ha az  $X$  pont illeszkedik az  $a$  és  $b$  egyenesek közös merőlegesére, akkor az előállítás nem egyértelmű.

*Ha nem tételezzük fel, hogy az  $a$  és  $b$  egyeneseknek van közös merőlegesük – a hiperbolikus térben ez előfordulhat: (ld. 15. ábra)*

Az  $X$  pont és az  $a$  egyenes síkja  $\alpha$ . Ha az  $X$  pont nem illeszkedik az  $a$  egyenesre, akkor  $\alpha$  egyértelmű, különben pedig egyet választunk az  $a$ -ra illeszkedő síkok közül. Az  $\alpha_1$  síkot az  $\alpha_1 \mathbf{I} a$  és  $\alpha_1 \perp \alpha$  feltételekkel határozzuk meg.

Ekkor

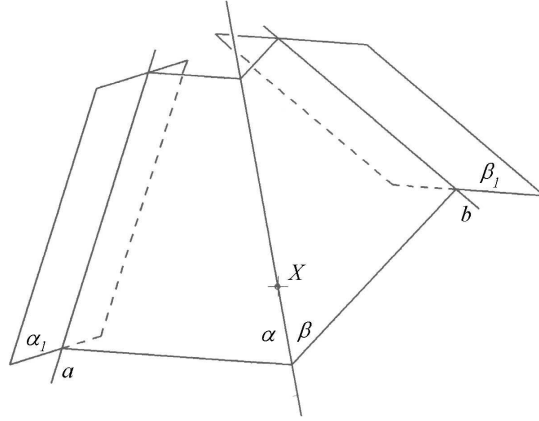
$$X \mathbf{I} \alpha \quad \text{és} \quad a = \alpha \alpha_1 = \alpha_1 \alpha .$$

A  $\beta$  és  $\beta_1$  síkot analóg módon értelmezve ( $X \mathbf{I} b$  esetén  $g = b$ ,  $h = a$ ):

$$X \mathbf{I} \beta \quad \text{és} \quad b = \beta \beta_1 = \beta_1 \beta .$$

Ezeket a jelöléseket használva:

$$ab = \alpha_1 \alpha \beta \beta_1 .$$



15. ábra.

A 5.8. tételt erre a négy síktükrözésre alkalmazva léteznek olyan  $g$  és  $h_1$  egyenes-tükrözések, amelyekre:

$$\alpha_1\alpha\beta\beta_1 = gh_1 \quad \text{és} \quad X \mathbf{I} g.$$

Tehát

$$\begin{aligned} ab &= gh_1 \\ gab &= h_1 \\ bga &= bh_1b \\ agb &= bh_1b = h_1^b. \end{aligned} \quad (3)$$

Ezekben az átalakításokban azt használtuk fel, hogy az egyenestükrözés involutív. Így  $bh_1b$  éppen a  $h_1$  egyenestükrözés  $b$ -vel való transzformáltja. Ez szintén egyenestükrözés, a  $h \equiv h_1^b$  egyenesre való tükrözésnek felel meg. Tehát az  $agb = h$  előállítás valóban létezik.

## 5.5. Vajon az előállítás egyértelmű-e?

Az  $a$  és  $b$  egyenesek illetve az  $X$  pont helyzete lehet olyan, hogy a 5.7. és 5.8. tételek konstrukciója a bizonyításokban megemlített helyeken többféle előállítást eredményezhet. Ezek alapján a 5.9. tételben sem garantálhatjuk az egyértelműséget.

Az alábbiakban megvizsgálom azt, hogy mit állíthatunk akkor, ha többféle előállítás is létezik. Tegyük fel, hogy létezik két olyan  $g_1, g_2 \perp X$  egyenes és  $h_1, h_2$  egyenes, amelyekre

$$ag_1b = bh_1b \quad \text{és} \quad ag_2b = bh_2b \quad . \quad (4)$$

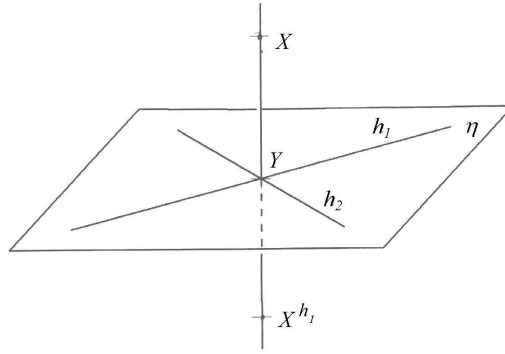
Ekkor a (3) átalakításokat fordított sorrendben elvégezve kapjuk:

$$\begin{aligned} ab &= g_1h_1 = g_2h_2 \\ g_1g_2 &= h_1h_2 \quad . \end{aligned}$$

Az  $X$  pont a  $g_1g_2$  transzformáció fixpontja, így a  $h_1h_2$ -nek is. Ha  $X$  illeszkedik a  $h_1$  egyenesre, akkor a  $g_1$  és  $h_1$  egyeneseknek van közös pontjuk, így szükségképpen közös merőlegesük is.

Most tegyük fel, hogy  $X$  nincs rajta a  $h_1$  egyenesen.

$X \equiv X^{h_1h_2}$  alapján  $X^{h_1} \equiv X^{h_2}$  (ld. 16. ábra). Az  $X$  pont nem illeszkedik a  $h_1$  egyenesre. Az egyenestükrözés definíciója szerint  $h_1$  és  $h_2$  illeszkedik egy olyan  $\eta$  síkra, amely merőleges az  $x = XX^{h_1}$  egyenesre. Az  $x$  egyenes és az  $\eta$  sík közös pontja  $Y$ .  $h_1$  és  $h_2$  is átmegy az  $Y$  ponton. Ez az  $Y$  pont a  $h_1h_2$  és  $g_1g_2$  transzformációnak is fixpontja. Ebben az esetben  $XY$  a transzformáció fixegyenes, mégpedig minden pontja fixpont, és az  $XY \perp g_1, h_1$  feltétel is teljesül. Tehát a  $g_1$  és  $h_1$  egyeneseknek van közös merőlegese, amely átmegy az  $X$  ponton. Ezek alapján, ha a 5.9. tétel előállítása nem egyértelmű, akkor van olyan  $g_1$  és  $h_1$  egyenes, amelyeknek van közös merőlegese, és  $g_1 \perp X$  és  $ab = g_1h_1$ .



16. ábra.

Megmutatom, hogy ilyen esetben mindig tudunk a feladatnak megfelelő  $g_1$ -től,  $h_1$ -től különböző  $g_2$  és  $h_2$  egyenest megadni a  $g_1 h_1 = g_2 h_2$ ,  $g_1, g_2 \perp X$  feltételekkel.

A  $g_1$  és  $h_1$  egyenesek közös merőlegese  $m = [X, Y]$  (ld. 17. ábra).  $\delta_1$  a  $g_1$  egyenesre illeszkedő,  $m$ -re merőleges sík.  $\delta_2$  a  $h_1$  egyenesre illeszkedő,  $m$ -re merőleges sík. Legyen  $g_2$  egy a  $g_1$ -től különböző, az  $X$  pontra és a  $\delta_1$  síkra illeszkedő egyenes.

A  $g_1, g_2, h_1$  és  $m$  egyenesek a  $\gamma_1 \equiv [g_1, m]$ ,  $\gamma_2 \equiv [g_2, m]$ ,  $\varphi_1 \equiv [h_1, m]$  síkokat egyértelműen meghatározzák.

Az egyenestükrözés definíciója alapján:

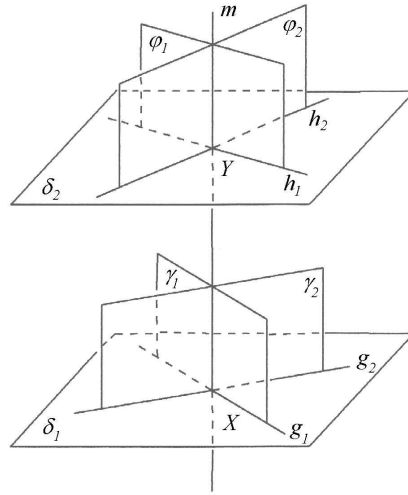
$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma_1 \delta_1 = \delta_1 \gamma_1 \\ g_2 &= \gamma_2 \delta_1 = \delta_1 \gamma_2 \\ h_1 &= \varphi_1 \delta_2 = \delta_2 \varphi_1 \end{aligned} .$$

Ezért

$$h_1 g_1 g_2 = \delta_2 \varphi_1 \gamma_1 \delta_1 \delta_1 \gamma_2 = \delta_2 \varphi_1 \gamma_1 \gamma_2 \quad .$$

$\varphi_1, \gamma_1, \gamma_2 \perp m$ , így a 5.3. axióma alapján létezik olyan  $m$ -re illeszkedő





17. ábra.

$\varphi_2$  sík, amelyre  $\varphi_1\gamma_1\gamma_2 = \varphi_2$ . Ezek alapján

$$h_1g_1g_2 = \delta_2\varphi_2 \quad .$$

$\delta_2 \perp m$  és  $\varphi_2 \perp m$  miatt  $\varphi_2 \perp \delta_2$ .  $\varphi_2$  és  $\delta_2$  közös pontja  $Y$ , így ezek a síkok  $h_2$  egyenesben metszik egymást. Az egyenestükrözés definíciója alapján:

$$\begin{aligned} h_2 &= \delta_2\varphi_2 = \varphi_2\delta_2 \\ h_1g_1g_2 &= h_2 \\ g_1g_2 &= h_1h_2 \quad . \end{aligned}$$

Most a (3) átalakításokat alkalmazva az  $agb = h$  szorzat kétféle előállítását kapjuk.

*Mit mondhatunk ekkor az eredeti  $a$  és  $b$  egyenesekről?*

Ebben az esetben  $ab = g_1h_1 = g_2h_2$ ,  $X \nmid g_1 \not\equiv g_2$ ,  $Y \nmid h_1 \not\equiv h_2$  és  $m = XY$  a  $g_1, g_2, h_1, h_2$  egyenesek közös merőlegese. Legyen  $P$  az  $a$  egyenes egy tetszőleges pontja. Ekkor  $P$  és  $m$  meghatároz egy síkot. Ebben a síkban legyen  $a_1$  olyan egyenes, amely illeszkedik a  $P$  pontra és merőleges  $m$ -re.  $a_1, g_1, h_1 \perp m$ , ezért van olyan  $b_1 \perp m$  (az előző bizonyításnak megfelelően, ld. 13. ábra), amelyre  $a_1g_1h_1 = b_1 \Rightarrow a_1b_1 = g_1h_1$ . Így  $g_1h_1 = ab = a_1b_1$  és  $P \nmid a, a_1$ .

Ha  $a \equiv a_1$ , akkor  $b \equiv b_1$ , így  $m$  az  $a$  és  $b$  egyenes közös merőlegese és  $X$  illeszkedik a közös merőlegesre ( $a$  és  $b$  metsző egyenes is lehet).

Ha  $a \not\equiv a_1$ , akkor az  $ab = a_1b_1$  és  $P \nmid a$ ,  $a_1$  feltételek miatt  $a$  és  $b$  egyeneseknek van közös merőlegesük amely átmegy a  $P$  ponton (a  $g_1$  és  $h_1$  egyenesek esetében látott bizonyítás szerint). De ezzel a módszerrel az  $a$  egyenes minden pontjához találunk közös merőlegest az  $a$  és  $b$  egyenesekhez. Ez csak az euklideszi térben, párhuzamos  $a$  és  $b$  egyenesek esetében fordulhat elő, ekkor egynél több közös merőlegesük van. Ebben az esetben  $ab$  az euklideszi térben egy eltolás és a tér tetszőleges  $X$  pontján keresztül van olyan  $x$  egyenes, amely párhuzamos az  $a$  és  $b$  közös merőlegesével. Ekkor minden olyan  $g$  egyenes esetén, amelyre teljesül, hogy  $X \nmid g \perp x$  létezik olyan  $h$  egyenes, hogy  $ab = gh$ , nevezetesen  $agb = bhb = h^b$  az 5.9. tétel szerint.

Az alábbi tétel foglalja össze az egyértelműséggel kapcsolatban bizonyított állításokat:

**5.10. Tétel.** *Az euklideszi térben az 5.9. tétel konstrukciója pontosan akkor egyértelmű, ha  $a$  és  $b$  metsző vagy kitérő egyenesek és  $X$  nem illeszkedik a közös merőlegesükre.*

*Hiperbolikus térben egyértelmű az előállítás, ha van az  $a$  és  $b$  egyeneseknek közös merőlegese, amelyre az  $X$  pont nem illeszkedik, vagy  $a$  és  $b$  egyeneseknek nincs közös merőlegese. Ez utóbbi eset a klasszikus Bolyai-Lobachevski féle hiperbolikus térben pontosan akkor áll elő, ha  $a$  és  $b$  hiperbolikus értelemben párhuzamosak, azaz egy síkban fekszenek, de sem közös pontjuk, sem közös merőlegesük nincs.*

## 6. Kristálycsoportok

### 6.1. 4-dimenziós kristálycsoportok vizsgálata

Dade [14] nyomán S.S. Ryshkov [51] Maximal finite groups of integral  $n \times n$  matrices and full groups of integral automorphisms of positive quadratic forms (Bravais models) című cikkében a következő kvadratikus alakok egészegyütthetős automorfizmuscsoportjait, mint maximális csoportokat adta meg:

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 + 2x^1x^2 - 4x^1x^3 - 4x^1x^4 - 4x^2x^3 - 4x^2x^4 + 2x^3x^4 . \quad (T)$$

$$q(\mathbf{x}) = 4x^1x^1 + 4x^2x^2 + 4x^3x^3 + 4x^4x^4 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 - 2x^2x^4 - 2x^3x^4 , \quad (P_4)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^2x^3 - x^3x^4 . \quad (S_4)$$

Ez ekvivalens [11]-ban az alábbi kvadratikus alakkal:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^3 + x^1x^4 + x^2x^3 + x^2x^4 + x^3x^4 . \quad (S_4)$$

Továbbá:

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 - x^1x^2 - x^3x^4 , \quad (B)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 , \quad (C_4)$$

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 - x^1x^3 - x^1x^4 - x^2x^3 - x^2x^4 . \quad (Q_4)$$

Ez szintén ekvivalens [11]-ban az alábbi kvadratikus alakkal :

$$q(\mathbf{x}) = x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 + x^4x^4 + x^1x^2 + x^1x^4 + x^2x^3 - x^3x^4 . \quad (Q_4)$$

$$q(\mathbf{x}) = \lambda(3x^1x^1 + 3x^2x^2 + 3x^3x^3 - 2x^1x^2 - 2x^1x^3 - 2x^2x^3 + \mu x^4x^4) .$$

$$q(\mathbf{x}) = \lambda(x^1x^1 + x^2x^2 + x^3x^3 - x^1x^2 - x^2x^3 + \mu x^4x^4) .$$

$$q(\mathbf{x}) = \lambda(x^1x^1 + x^2x^2 - x^1x^2) + \mu(x^3x^3 + x^4x^4) .$$

Dolgozatomban ezeket a csoportokat, mint az  $\mathbf{E}^4$ -beli 4-dimenziós rácshoz tartozó maximális pontcsoportokat fogom tekinteni. Tehát az  $O$  kezdőpont helybenmarad, a csoportnál bármely rácsvektor képe rácsvektor. Bármely fenti kvadratikus alakhoz tartozó  $\Lambda$  rác bázisvektora:  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ . A  $q(\mathbf{x})$  kvadratikus alak az  $\mathbf{x} = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2 + x^3 \cdot \mathbf{e}_3 + x^4 \cdot \mathbf{e}_4$  vektor hosszának négyzetét fejezi ki. Maxwell [35] dolgozatában felveti a kérdést, hogy a fenti  $(T)$  kvadratikus alakhoz tartozó csoport tükrözéscsoport-e? A későbbiekben megmutatom, hogy nem az. Meghatározom a  $T$ -vel jelölt pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportját, ennek fundamentális tartományát, majd az egész pontcsoportot. Továbbá meghatározom a  $\Lambda$ -val jelölt rác teljes szimmetriacsoportjához tartozó maximális tükrözésrészcsoportot és ennek a fundamentális tartományát.

Az utolsó 3 kvadratikus alaknak megfelelő rác egy 3-dimenziós és egy egydimenziós altér direktösszegéhez, illetve két 2-dimenziós altér direktösszegéhez tartozik, így a szimmetriacsoportjuk is valamilyen direkt szorzat alakjában áll elő. Így ezeket dolgozatomban nem vizsgálom.

## 6.2. Alapfogalmak és jelölések

$E$  : véges dimenziós affin, euklideszi tér.

$V$  : az  $E$  tér eltolásainak a vektortere. Egy  $O$  kezdőpont rögzítése után  $E$  pontjait  $V$ -beli vektorokkal jellemezhetjük.

$B$  : szimmetrikus, nemelfajuló, pozitív definit bilineáris forma a  $V$  vektortéren, amellyel az  $E$  tér euklideszi tér lesz. Ha  $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ , akkor  $B(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  a két vektor skaláris szorzatát fejezi ki.

$q$  : kvadratikus alak a  $V$  téren.  $\mathbf{v} \in V$  esetén  $q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ .

$|\mathbf{v}|$  : a  $\mathbf{v}$  vektor hosszát jelöli.  $|\mathbf{v}| = q(\mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$ .

$H$  : az  $E$  tér hipersíkja.

**6.1. Definíció.** Ha a  $V$  tér  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  vektora merőleges a  $H$ -ra ( $B$ -re vonatkozóan), akkor az:

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \cdot \frac{B(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{B(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{x} \in V$$

transzformációt a  $H$ -ra vonatkozó merőleges tükrözésnek nevezzük.

Ez a tükrözés  $B$ -t invariánsan hagyja és  $H$ -n azonosság.

**6.2. Definíció.** Egy olyan csoportot, amelyet hipersíkokra való merőleges tükrözések generálnak, tükrözéscsoportnak vagy Coxeter csoportnak nevezünk.

**6.3. Definíció.** Legyen  $\mathcal{H}$  az  $E$  tér hipersíkjainak egy lokálisan véges halmaza.  $W$  jelölje azt a csoportot, amelyet a  $\mathcal{H}$  elemeire való merőleges tükrözések generálnak. Ekkor az  $E$  tér  $C$  részhalmazát a  $W$  csoport (zárt) fundamentális tartományának (alaptartományának) nevezzük, ha:

- minden  $\mathbf{x} \in E$  -hez van olyan  $\omega \in W$ , hogy  $\omega(x) \in C$ ;
- ha  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  és  $\omega \in W$  olyan, hogy  $\mathbf{y} = \omega(\mathbf{x})$ , akkor  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ .

**6.4. Definíció.** Ha a  $W$  csoportot egy fundamentális tartomány falaira való merőleges tükrözések  $S$  halmaza generál, akkor az

$$s_i^2 = 1 \quad \text{és} \quad (s_i \cdot s_j)^{m(s_i, s_j)} = 1 \quad s_i, s_j \in S$$

relációk meghatározzák a csoportot. Ezek a csoport definiáló relációi.

**6.5. Definíció.** Coxeter gráf:

Legyen  $C$  egy fundamentális tartomány.  $S$  jelölje a  $C$  falaira való merőleges tükrözések halmazát. Az  $S$  által generált csoport  $W$ . A  $W$  csoport Coxeter gráfjának csúcsai az  $S$  elemeit jelképezik. Ha  $m(s_i, s_j) = 2$ , akkor az  $s_i$  és  $s_j$  csúcsok nincsenek összekötve. Ha  $m(s_i, s_j) \neq 2$ , akkor az  $s_i$  és  $s_j$ -t összekötő élre  $m(s_i, s_j)$ -t írunk, ha  $m(s_i, s_j) = 3$ , akkor az élre nem feltétlenül írjuk ki a 3-at.

### 6.3. A $T$ pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportha

A továbbiakban a  $(T)$  kvadratikus alakot a következő formában fogom használni:

$$q(\mathbf{x}) = (x^1 + x^2 - x^3 - x^4)^2 + (x^1 - x^3)^2 + (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^2 - x^4)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2. \quad (1)$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x^1y^1 + 4x^2y^2 + 4x^3y^3 + 4x^4y^4 + x^1y^2 + x^2y^1 - 2x^1y^3 - 2x^3y^1 - 2x^1y^4 - 2x^4y^1 - 2x^2y^3 - 2x^3y^2 - 2x^2y^4 - 2x^4y^2 + x^3y^4 + x^4y^3. \quad (2)$$

Először azt vizsgálom meg, hogy milyen síkokra való tükrözések viszik a rácsot önmagába. A továbbiakban tükörsíkon mindig ilyen síkot fogok érteni.

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  a rács alapvektorai,  $O$  pedig legyen a rács egy tetszőleges pontja,  $\overrightarrow{OE_i} := \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Ha  $H_1$  egy lehetséges tükörsík, és a  $H_1$ -re való tükrözés  $O$ -t az  $O_1$  rácspontba viszi, akkor az  $\overrightarrow{OO_1}$  a  $\Lambda$  rácshoz tartozik. Az  $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO_1}$  vektorral való eltolás a  $H_1$  síkot az  $O$  ponton átmenő  $H$  síkba viszi. Ekkor a  $H$  síkra való tükrözés egyenértékű az  $\overrightarrow{OO_1}$  vektorral való eltolás és a  $H_1$  síkra való tükrözés szorzatával. Ha az  $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO_1}$  vektorral való eltolás  $H_1$ -et a  $H_2$  síkba viszi, akkor nyilvánvalóan  $H_2$  is egy lehetséges tükörsík. Ezek alapján a megfelelő tükörsíkokat a következőképpen határozhatom meg:

- meghatározom az  $O$  ponton átmenő tükörsíkokat,
- majd meghatározom az előbbi síkokból eltolással kapható tükörsíkokat.

Ez utóbbi így történik: Legyen  $H$  egy, az  $O$  ponton átmenő tükörsík, és  $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3, n^4)$  legyen a  $H$ -nak olyan normálvektora, ahol  $(n^1, n^2, n^3, n^4) = 1$ . Ekkor  $H$ -ból  $\frac{k}{2} \cdot \mathbf{n}$  vektorral való eltolással kapott síkok is megfelelőek ( $k$  tetszőleges egész), és bebizonyítható, hogy csak ezek megfelelőek.

Először tehát meghatározom az  $O$  ponton átmenő tükörsíkokat. Legyen egy ilyen sík  $H$ . A  $H$ -ra tükrözve  $E_1$ -et az  $E'_1$  rácspontot kapjuk. Az  $E_1$  csak olyan  $E'_1$  pontba mehet át a tükrözésnél, amelyre igaz, hogy  $|\overrightarrow{OE_1}| = |\overrightarrow{OE'_1}|$ . A kvadratikus alak felhasználásával azt kapom, hogy  $|\overrightarrow{OE_i}| = |\mathbf{e}_i| = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Ha  $\overrightarrow{OE'_1} = \mathbf{e}'_1 = k^1 \cdot \mathbf{e}_1 + k^2 \cdot \mathbf{e}_2 + k^3 \cdot \mathbf{e}_3 + k^4 \cdot \mathbf{e}_4$ , akkor teljesülnie kell, hogy:

$$\begin{aligned} (k^1 + k^2 - k^3 - k^4)^2 + (k^1 - k^3)^2 + (k^1 - k^4)^2 + (k^2 - k^3)^2 + \\ + (k^2 - k^4)^2 + (k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 + (k^4)^2 = 4. \end{aligned} \quad (3)$$

9 darab négyzetszám összege csak akkor lehet 4, ha:

- az egyik egyenlő 4-gyel, a többi 0;
- a 9 szám közül négy 1-gyel egyenlő, a többi 0.

A  $(k^1)^2$ ,  $(k^2)^2$ ,  $(k^3)^2$ ,  $(k^4)^2$  mindegyike nem lehet 0, mert akkor a (3) egész baloldala 0 lenne. Így az első eset csak akkor állhat fenn, ha valamelyik  $(k^i)^2 = 4$ . De ekkor a (3) baloldala 16 lenne. Tehát csak a második eset állhat fenn. Ekkor az 1. táblázat értékeit kapjuk:

|       |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |
|-------|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|
| $k^1$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 0 | 0  | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | -1 | 1 | -1 |
| $k^2$ | 1 | -1 | 0 | 0  | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  |
| $k^3$ | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | -1 | 0 | 0  | 1 | -1 |
| $k^4$ | 1 | -1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 0 | 0  | 1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0  | 1 | -1 | 0 | 0  |

1. táblázat.

Ha a  $H$  síkra való tükrözésnél az  $E_1$  pont a tőle különböző  $k^1 \cdot \mathbf{e}_1 + k^2 \cdot \mathbf{e}_2 + k^3 \cdot \mathbf{e}_3 + k^4 \cdot \mathbf{e}_4$  pontba megy át, akkor a  $H$  sík egyik normálvektora:  $\overrightarrow{E_1 E_1'} = (k^1 - 1) \cdot \mathbf{e}_1 + k^2 \cdot \mathbf{e}_2 + k^3 \cdot \mathbf{e}_3 + k^4 \cdot \mathbf{e}_4$ . Ennek a síknak egy normálvektora így is írható:  $\mathbf{n} = n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + n^2 \cdot \mathbf{e}_2 + n^3 \cdot \mathbf{e}_3 + n^4 \cdot \mathbf{e}_4$ , ahol  $(n^1, n^2, n^3, n^4) = 1$ . Az  $n^i$  lehetséges értékeit tartalmazza a 2. táblázat.

|       |   |   |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|---|---|---|---|
| $n^1$ | 0 | 2 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| $n^2$ | 1 | 1 | 0 | 1  | 1 | 0  | 0 | 0  | 0 | 1  | 1 | 1  | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n^3$ | 1 | 1 | 0 | 0  | 0 | 1  | 1 | 0  | 0 | 0  | 0 | 1  | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $n^4$ | 1 | 1 | 0 | 0  | 0 | 0  | 0 | 1  | 1 | 1  | 1 | 0  | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

2. táblázat.

Ismert, hogy egy  $\mathbf{n}$  normálvektorú síkra való tükrözés az  $\mathbf{x}$  helyek-



torú pontot a  $\mathbf{x}'$  helyvektorú pontba viszi, ahol:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{2 \cdot B(\mathbf{x}, \mathbf{n})}{B(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \cdot \mathbf{n} , \quad (4)$$

ha az  $O$  kezdőpont illeszkedik a tükörsíkra. Az  $\mathbf{e}'_i$ -t ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) az  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  vektorok egészegyütthatós lineáris kombinációjaként kell felírni. Ez csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{2 \cdot B(\mathbf{e}_i, \mathbf{n})}{B(\mathbf{n}, \mathbf{n})} \cdot n^j \quad (5)$$

egész szám  $i = 1, 2, 3, 4$  és  $j = 1, 2, 3, 4$  esetén.

|       |   |    |   |   |
|-------|---|----|---|---|
| $n^1$ | 0 | -1 | 1 | 1 |
| $n^2$ | 1 | 1  | 1 | 1 |
| $n^3$ | 1 | 0  | 0 | 1 |
| $n^4$ | 1 | 0  | 1 | 0 |

3. táblázat.

|       |   |   |   |   |    |    |
|-------|---|---|---|---|----|----|
| $n^1$ | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0  |
| $n^2$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1  | 0  |
| $n^3$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0  | -1 |
| $n^4$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0  | 1  |

4. táblázat.

A bilineáris forma felhasználásával eldönthető, hogy az (5) feltételt a 3. táblázat számnégyesei elégítik ki. Még meg kell vizsgálni, hogy melyek azok a tükrözések, amelyek az  $E_1$  pontot helyben hagyják. Ilyen tükrözések esetében is van olyan  $E_i$  pont, amely nem marad helyben. Ilyenkor az  $\mathbf{e}_i$  vektorral lehetne végigszámolni mindazt, amit

eddig  $\mathbf{e}_1$ -gyel végigszámoltunk. Ezt gyakorlatilag nem kell megtennem, mert a kvadratikus alak szimmetriája miatt ez a számítás lényegében megfelelő koordinátacserét jelent. Így a további lehetséges síkok normálvektorait az előbbiekből koordinátacserékkel kapom. Az összes lehetséges sík normálvektorát a 4. táblázatban gyűjtöttem össze. Végül hat tükrözést kaptunk, az alábbi jelöléseket fogjuk használni:

$\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (0, 1, 1, 1)$ ,

$\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1, 1)$ ,

$\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (1, 1, 0, 1)$ ,

$\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (1, 1, 1, 0)$ ,

$\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (-1, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (0, 0, -1, 1)$ .

A  $\sigma_1$  tükrözés esetében:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_3 &= -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}'_4 &= -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 ,\end{aligned}$$

vagy mátrixokkal kifejezve:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$$

Coxeter [12]-nek megfelelően, vagy transzponált mátrix segítségével:

$$(\mathbf{e}'_1 \quad \mathbf{e}'_2 \quad \mathbf{e}'_3 \quad \mathbf{e}'_4) = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vagy egyszerűen:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a [11] táblázatai szerint.

Hasonlóan a többi tükrözés esetében:

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

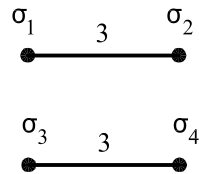
$$\sigma_6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \sigma_6 &= \sigma_4 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \\ (\sigma_1 \cdot \sigma_2)^3 &= (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^3 = I . \end{aligned}$$

( $I$  jelöli az azonos leképezést).

Így az  $O$  pontot helybenhagyó tükrözések csoportját generálni lehet a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  tükrözésekkel. A  $\sigma_1$  és  $\sigma_2$  tükrözésekkel generált csoportot  $A_2$ -vel jelöljük (ld.[8]) és ez a  $\sigma_3$  and  $\sigma_4$  által generált csoportra is igaz. Ezért a  $T$  pontcsoportjának maximális tükrözésrészcsoportját az  $A_2 \times A_2$  direktszorozattal jelöljük, mivel  $H_1, H_2 \perp H_3, H_4$ . Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja az 18. ábrán látható.



18. ábra.

#### 6.4. A $T$ pontcsoportja nem tükrözéscsoport

Meghatározom a fenti  $A_2 \times A_2$  csoport alaptartományát, amelyet  $F_{A_2 \times A_2}$ -vel jelölök. Ez a  $H_1, H_2, H_3, H_4$  síkok által meghatározott, megfelelően kiválasztott félterek metszete.

Az  $S_1$  sík egyenlete:

$$(x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2 + x^3 \cdot \mathbf{e}_3 + x^4 \cdot \mathbf{e}_4) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad ,$$

innen, a  $B$  bilineáris forma alkalmazásával

$$-x^1 + x^3 + x^4 = 0 \quad .$$

Hasonlóan az  $S_2$  sík egyenlete:

$$-x^2 + x^3 + x^4 = 0 \quad ,$$

az  $S_3$  sík egyenlete:

$$x^1 + x^2 - x^3 = 0 \quad ,$$

az  $S_4$  sík egyenlete:

$$x^1 + x^2 - x^4 = 0 \quad .$$

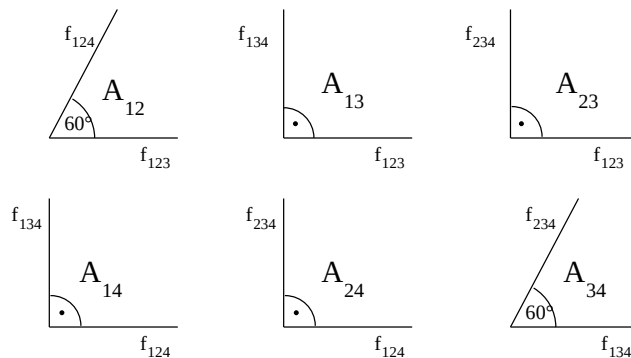
Az említett fundamentális tartomány  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  pontjait a következő egyenlőtlenségekkel megadott félterek metszete adja (A félterek jelölésére a  $H_i^+$  szimbólumot az alábbi módon vezetem be):

$$\begin{array}{ll} H_1^+ : & -x^1 + x^3 + x^4 \geq 0 \quad (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\ H_2^+ : & x^2 - x^3 - x^4 \geq 0 \quad (B(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_2) \geq 0), \\ H_3^+ : & x^1 + x^2 - x^3 \geq 0 \quad (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\ H_4^+ : & -x^1 - x^2 + x^4 \geq 0 \quad (B(\mathbf{x}, -\mathbf{n}_4) \geq 0). \end{array}$$

A  $H_i, H_j, H_k$  síkok metszésvonalát  $f_{ijk}$ -vel jelöljük. Az  $f_{123}, f_{124}, f_{134}, f_{234}$  egyenesek irányvektorai rendre  $(1, 1, 2, -1), (1, 1, -1, 2), (2, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1)$ . Ennek felhasználásával meghatározhatók az alaptartomány kétdimenziós lapjai:  $A_{ij}$  jelöli  $H_i$  és  $H_j$  metszetét. (19. ábra)

Még meg kell néznünk, hogy ez a fundamentális tartomány önmagába vihető-e valamilyen egybevágósági transzformációval vagy sem. (Olyan egybevágósági transzformációt keresünk, amely magát a rácsot is önmagába viszi.) A továbbiakban megmutatom, hogy ilyen transzformáció van, és ezzel belátom Maxwell sejtését.

Ilyen transzformációk a következők:



19. ábra.

1. Az  $f_1$  transzformáció a  $H_1^+$  féltérre a  $H_3^+$  féltérbe,  $H_2^+$ -t  $H_4^+$ -be viszi:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_1 \cdot f_1 = I$ . Az  $f_1$  transzformáció egy kétdimenziós síkra való tükrözést jelent.

2. Az  $f_2$  transzformáció a  $H_1^+$  féltérre a  $H_4^+$  féltérbe,  $H_2^+$ -t  $H_3^+$ -be viszi:

$$f_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_2 \cdot f_2 = I$ . Az  $f_2$  is egy 2-dimenziós síkra való tükrözést jelent.

3.  $f_1 \cdot f_2 = f_2 \cdot f_1$  transzformáció:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A Coxeter gráf alapján még elvileg lehetséges lenne, hogy egy transzformáció hatására  $H_1^+$  féltér  $H_2^+$  féltérbe megy át,  $H_3^+$  és  $H_4^+$  félterek pedig helyben maradnak. Ez a transzformáció viszont egy 3-dimenziós síkra való tükrözés lenne. De az összes ilyen tükrözést már meghatároztam, ez azt jelenti, hogy ez a transzformáció a rácsot nem viszi önmagába. Hasonlóan nem lehetséges, hogy  $H_1^+$  és  $H_2^+$  félterek helyben maradnak, a  $H_3^+$  féltér pedig a  $H_4^+$  féltérbe megy át. Tehát több ilyen transzformáció nincs.

Az  $F = \{1, f_1, f_2, f_1 \cdot f_2\}$  csoport elemei viszik át a  $T$  pontcsoport maximális tükrözésrészcsoportjának az alaptartományát és egyben a rácsot is önmagába. A  $T$  pontcsoport minden eleme egyértelműen előállítható  $f \cdot d$  alakban, ahol  $f \in F$  és  $d \in A_2 \times A_2$ . Ennek a magyarázata a következő: Egy  $T$ -beli  $t$  transzformáció  $P$ -t átviszi  $P'$ -be. Legyen  $P$  eleme az  $F_1$  fundamentális tartománynak,  $P'$  pedig az  $F_2$  fundamentális tartománynak. Tükrözések egymásutánjával  $F_2$  átvihető  $F_1$ -be. Ekkor  $P'$  képe  $P_1$  lesz. Van olyan  $f \in F$  transzformáció, amely  $P$ -t  $P_1$ -be viszi. Így ez a  $t$  transzformáció az  $f$  transzformáció és néhány tükrözés egymásutánjaként állítható elő.  $F$  elemeinek a száma 4,  $A_2 \times A_2$ -nek  $6 \cdot 6 = 36$  eleme van, így a  $T$  pontcsoport elemeinek a száma  $4 \cdot 36 = 144$ .

## 6.5. A maximális tükrözésrészcsoport

Az alábbiakban meghatározom a  $T$ -hez tartozó  $\Lambda$  rács teljes szimmetriacsoportjának maximális tükrözésrészcsoportját. A tükrözéscsoport

$F^*$  fundamentális tartománya olyan poliéder lesz, ami része  $F_{A_2 \times A_2}$ -nek, és a csoportot az  $F^*$  3-dimenziós lapjainak síkjára való tükrözések generálják. Ezek alapján az  $F^*$  fundamentális tartományt a következő módon kapom meg:

- a  $H_i$  síkot eltolom  $\frac{1}{2}\underline{n}_i$  vagy  $-\frac{1}{2}\underline{n}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) vektorral, A  $H_i$  képét  $H_{i'}$ -vel jelölöm. Azt a síkot választom, amely belemetsz  $F_{A_2 \times A_2}$ -be.
- Az így kiválasztott  $H_{i'}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) síkok által meghatározott egyik félteret veszem, azt választom, amelyik  $O$ -t tartalmazza.
- és veszem az  $F_{A_2 \times A_2}$  és az előbb leírt félterek közös részét.

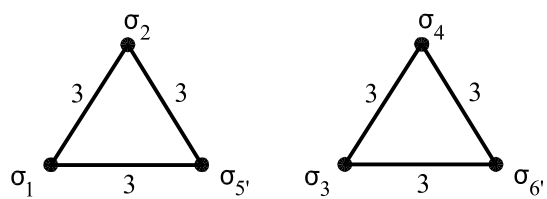
Megmutatható, hogy a keresett fundamentális tartomány a  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_{5'}$  (a  $H_5$ -ből  $\frac{1}{2}\underline{n}_5$  vektorral eltolva kapom),  $H_{6'}$  (a  $H_6$ -ből  $\frac{1}{2}\underline{n}_6$  vektorral eltolva kapom) síkok által meghatározott megfelelő félterek metszete. Az  $F^*$  fundamentális tartomány pontjait így a következő egyenlőtlenségek adják meg:

$$\begin{array}{ll}
H_1^+ : & -x^1 + x^3 + x^4 \geq 0, \\
H_2^+ : & x^2 - x^3 - x^4 \geq 0, \\
H_3^+ : & x^1 + x^2 - x^3 \geq 0, \\
H_4^+ : & -x^1 - x^2 + x^4 \geq 0, \\
H_{5'}^+ : & x^1 - x^2 + 1 \geq 0, \\
H_{6'}^+ : & x^3 - x^4 + 1 \geq 0.
\end{array}$$

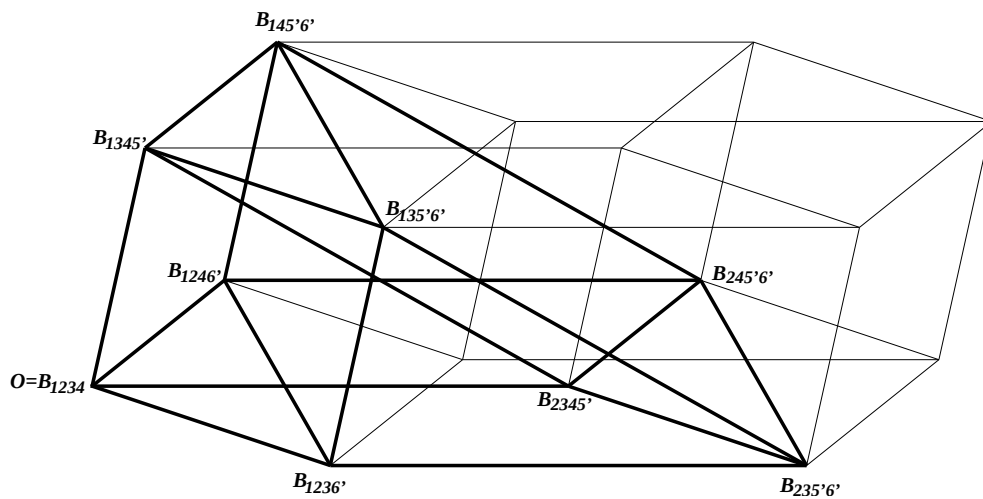
Az alaptartomány 2-dimenziós axonometrikus képe a 21. ábrán látható. A  $B_{ijkl}$  jelölés azt jelenti, hogy a megfelelő csúcsot tartalmazza a  $H_i, H_j, H_k, H_l$  sík. A  $\Lambda$  rács teljes szimmetriacsoportjának maximális tükrözéscsoportját a  $H_1, H_2, H_3, H_4, H_{5'}, H_{6'}$  síkokra való  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_{5'}, \sigma_{6'}$  tükrözések generálják. A 20. ábrán látható



ennek a csoportnak a Coxeter gráfja. Ez a csoport az [8] jelöléseinek megfelelően  $\tilde{A}_2 \times \tilde{A}_2$ .



20. ábra.



21. ábra.

## 6.6. Eredmények a többi esetre

Ebben a fejezetben a fent leírt módszert alkalmazom a többi esetre, az 5. és a 6. táblázat tartalmazza az eredményeket a összefoglalva. Brown-Bülow-Neubüser-Wondratschek-Zassenhaus [11] monográfiája megadja ezeknek a csoportoknak a kristály-családját, kristály-rendszerét, Q-osztályát és Z-osztályát. A táblázatok az erre vonatkozó számolásokat is tartalmazzák.

Az alábbiakban minden esetben a vizsgálat során adódó legfontosabb eredményeket adom meg, nem részletezem aprólékosan a számításokat .

### 6.6.1. $P_4$ vizsgálata

A  $P_4$ -hez tartozó kvadratikus alakot az alábbi formában használom:

$$q(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^1 - x^2)^2 + (x^1 - x^3)^2 + (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^2 - x^4)^2 + (x^3 - x^4)^2 . \quad (6)$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4x^1y^1 + 4x^2y^2 + 4x^3y^3 + 4x^4y^4 - x^1y^2 - x^2y^1 - x^1y^3 - x^3y^1 - x^1y^4 - x^4y^1 - x^2y^3 - x^3y^2 - x^2y^4 - x^4y^2 - x^3y^4 - x^4y^3 . \quad (7)$$

A pontcsoporthoz 10 tükrözés tartozik, az alábbi jelöléseket használom:

$\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (2, 1, 1, 1)$ ,

$\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (0, -1, 1, 0)$ ,

$\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (0, 0, -1, 1)$ ,

$\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (1, 2, 1, 1)$ ,

$\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (0, -1, 0, 1)$ ,

$\sigma_7$  : a tükrözési sík  $H_7$ , normálvektora  $\mathbf{n}_7 = (1, 1, 2, 1)$ ,

$\sigma_8$  : a tükrözési sík  $H_8$ , normálvektora  $\mathbf{n}_8 = (1, 1, 1, 2)$ ,

$\sigma_9$  : a tükrözési sík  $H_9$ , normálvektora  $\mathbf{n}_9 = (-1, 0, 0, 1)$ ,

$\sigma_{10}$  : a tükrözési sík  $H_{10}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{10} = (-1, 0, 1, 0)$ .

Az egyes tükrözésekhez tartozó mátrixok:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

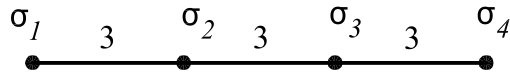
$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Továbbá:

$$\begin{aligned}
\sigma_5 &= \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \\
\sigma_6 &= \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3 \\
\sigma_7 &= \sigma_3 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_3 \\
\sigma_8 &= \sigma_6 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6 \\
\sigma_9 &= \sigma_2 \cdot \sigma_6 \cdot \sigma_2 \\
\sigma_{10} &= \sigma_4 \cdot \sigma_9 \cdot \sigma_4 \\
(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^3 &= (\sigma_2 \cdot \sigma_3)^3 = (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^3 = I .
\end{aligned}$$

Így az  $O$  pontot helybenhagyó tükrözések csoportját generálni lehet a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  tükrözésekkel. A  $P_4$  pontcsoportjának maximális tükrözésrészcsoportja  $A_4$  (ld.[8]). Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja a 22. ábrán látható.



22. ábra.

Az  $A_4$  fundamentális tartományát meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{array}{ll}
x^1 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
-x^1 + x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
-x^2 + x^3 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
-x^3 + x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0).
\end{array}$$

A fundamentális tartományt és a kvadratikus alakot is a következő transzformáció önmagába viszi:

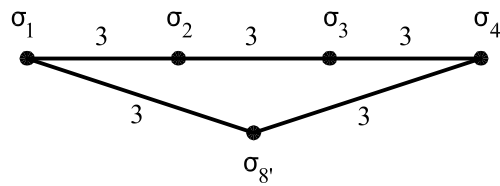
$$f : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tehát a pontcsoport nem tükrözéscsoport.

A rács teljes szimmetriacsoportja maximális tükrözéscsoportjának a fundamentális tartományát úgy kapjuk meg, ha az  $F_{A_4}$  alaptartományt a  $-\mathbf{n}_8$  normálvektorú,  $H_8$  síkkal párhuzamos  $H_{8'}$  síkkal el-metszük, a  $\sigma_{8'}$  tükrözést kapjuk.

Az  $F_{A_4}^*$  fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenségrend-szer:

$$\begin{aligned} x^1 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) &\geq 0), \\ -x^1 + x^2 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) &\geq 0), \\ -x^2 + x^3 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) &\geq 0), \\ -x^3 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) &\geq 0), \\ 1 - x^4 &\geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_8 - \mathbf{x}, \mathbf{n}_8) &\geq 0). \end{aligned}$$



23. ábra.

A maximális tükrözésrészcsoport Coxeter gráfja a 23. ábrán látható. Ez az  $\tilde{A}_4$  csoport (ld.[8]).

### 6.6.2. $S_4$ vizsgálata

Az  $S_4$ -hez tartozó kvadratikus alakot az alábbi formában használom:

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x^1 - x^2)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^3 - x^4)^2 + (x^1)^2 + (x^4)^2] . \quad (8)$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^1 y^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 y^1 - \\ & - \frac{1}{2} \cdot x^2 y^3 - \frac{1}{2} x^3 y^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^4 y^3 . \end{aligned} \quad (9)$$

A pontcsoporthoz 10 tükrözés tartozik, az alábbi jelöléseket használom:

$\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (0, -1, -1, -1)$ ,

$\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 1, 1)$ ,

$\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (-1, -1, -1, 0)$ ,

$\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (0, 0, 1, 0)$ ,

$\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (1, 0, 0, 0)$ ,

$\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (0, 0, 0, 1)$ ,

$\sigma_7$  : a tükrözési sík  $H_7$ , normálvektora  $\mathbf{n}_7 = (1, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_8$  : a tükrözési sík  $H_8$ , normálvektora  $\mathbf{n}_8 = (0, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_9$  : a tükrözési sík  $H_9$ , normálvektora  $\mathbf{n}_9 = (0, 1, 1, 0)$ ,

$\sigma_{10}$  : a tükrözési sík  $H_{10}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{10} = (0, 0, 1, 1)$ .

Az egyes tükrözésekhez tartozó mátrixok:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Továbbá:

$$\sigma_5 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_6 = \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_7 = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

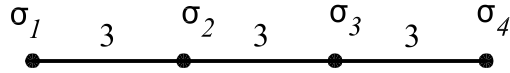
$$\sigma_8 = \sigma_5 \cdot \sigma_7 \cdot \sigma_5$$

$$\sigma_9 = \sigma_5 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_5$$

$$\sigma_{10} = \sigma_1 \cdot \sigma_8 \cdot \sigma_1$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^3 = (\sigma_2 \cdot \sigma_3)^3 = (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^3 = I .$$

A pontsoport maximális tükrözéscsoportja  $A_4$ , amelynek Coxeter gráfja a 24. ábrán látható.



24. ábra.

A fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned}
 x^1 - x^2 - x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) &\geq 0), \\
 x^1 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) &\geq 0), \\
 -x^1 - x^3 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) &\geq 0), \\
 -x^2 + 2x^3 - x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) &\geq 0).
 \end{aligned}$$

Az alaptartományt a következő transzformáció viszi önmagába:

$$f : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ez a transzformáció a kvadratikus alakot is önmagába viszi. Tehát a pontcsoport nem tükrözéscsoport.

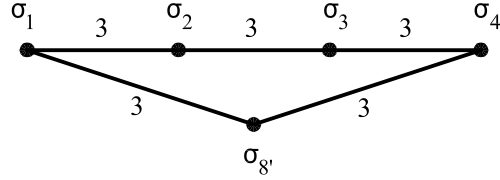
A rács teljes szimmetriacsoportja maximális tükrözéscsoportjának a fundamentális tartományát úgy kapjuk meg, ha az  $F_{A_4}$  alaptartományt az  $\mathbf{n}_8$  normálvektorú,  $H_8$  síkkal párhuzamos  $H_{8'}$  síkkal el-metszük, a  $\sigma_{8'}$  tükrözést kapjuk.

Az  $F_{A_4}^*$  fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenségrend-



szer:

$$\begin{aligned}
x^1 - x^2 - x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
x^1 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
-x^1 - x^3 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
-x^2 + 2x^3 - x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0), \\
1 - x^1 + 2x^2 - x^3 &\geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_8 + \mathbf{x}, \mathbf{n}_8) \geq 0).
\end{aligned}$$



25. ábra.

A maximális tükrözésrészcsoport Coxeter gráfja a 25. ábrán látható.

Ez az  $\tilde{A}_4$  csoport (ld.[8]).

A  $P_4$  és  $S_4$  teljes szimmetria csoportjának maximális tükrözés-csoportjai izomorfak. A két csoport közötti különbség az eltoláscsoportjukban van. Ezt dolgozatomban nem vizsgálom ([11],[1]).

### 6.6.3. B vizsgálata

A  $B$ -hez tartozó kvadratikus alakot az alábbi formában használom:

$$\begin{aligned}
q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x^1 - x^2)^2 + (x^3 - x^4)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + \\
+ (x^3)^2 + (x^4)^2] .
\end{aligned} \tag{10}$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^1 y^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 y^1 - \frac{1}{2} x^3 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^4 y^3 . \quad (11)$$

A pontcsoporthoz 12 tükrözés tartozik, az alábbi jelöléseket használom:

$\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,

$\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 0, 1)$ ,

$\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (0, 0, 1, -1)$ ,

$\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (1, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (0, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_7$  : a tükrözési sík  $H_7$ , normálvektora  $\mathbf{n}_7 = (2, 1, 0, 0)$ ,

$\sigma_8$  : a tükrözési sík  $H_8$ , normálvektora  $\mathbf{n}_8 = (0, 0, 1, 0)$ ,

$\sigma_9$  : a tükrözési sík  $H_9$ , normálvektora  $\mathbf{n}_9 = (0, 0, 1, 1)$ ,

$\sigma_{10}$  : a tükrözési sík  $H_{10}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{10} = (1, 2, 0, 0)$ ,

$\sigma_{11}$  : a tükrözési sík  $H_{11}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{11} = (0, 0, 2, 1)$ ,

$\sigma_{12}$  : a tükrözési sík  $H_{12}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{12} = (0, 0, 1, 2)$ .

Az egyes tükrözésekhez tartozó mátrixok:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Továbbá:

$$\sigma_5 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_6 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_7 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_8 = \sigma_4 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_9 = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

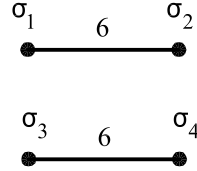
$$\sigma_{10} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_{11} = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{12} = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^6 = (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^6 = I .$$

Így az  $O$  pontot helybenhagyó tükrözések csoportját generálni lehet a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  tükrözésekkel. A  $B$  pontcsoportjának maximális tükrözésrészcsoporthja  $G_2 \times G_2$  (ld.[8]). Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja a 26. ábrán látható.



26. ábra.

A  $G_2 \times G_2$  fundamentális tartományát meghatározó egyenlőtlenség-rendszer:

$$\begin{array}{ll}
 2x^1 - x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
 -x^1 + x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
 -x^3 + 2x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
 x^3 - x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0).
 \end{array}$$

Az alaptartományt és a kvadratikus alakot is önmagába vivő transzformáció:

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

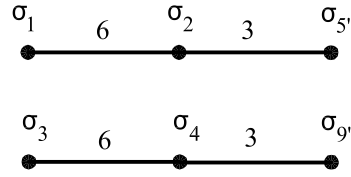
Így a pontcsoport nem tükrözéscsoport.

A rács teljes szimmetriacsoportja maximális tükrözéscsoportjának a fundamentális tartományát úgy kapjuk meg, ha az  $F_{G_2 \times G_2}$  alaptartományt a  $-\mathbf{n}_5$  normálvektorú,  $H_5$  síkkal párhuzamos  $H_{5'}$  és a  $-\mathbf{n}_9$  normálvektorú,  $H_9$  síkkal párhuzamos  $H_{9'}$  síkokkal elmetsszük, a  $\sigma_{8'}$  illetve  $\sigma_{9'}$  tükrözést kapjuk.

Az  $F_{G_2 \times G_2}^*$  fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenség-

rendszer:

$$\begin{array}{ll}
2x^1 - x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
-x^1 + x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
-x^3 + 2x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
x^3 - x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0), \\
1 - x^1 - x^2 \geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_5 - \mathbf{x}, \mathbf{n}_5) \geq 0), \\
1 - x^3 - x^4 \geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_9 - \mathbf{x}, \mathbf{n}_9) \geq 0).
\end{array}$$



27. ábra.

A maximális tükrözésrészcsoport Coxeter gráfja a 27. ábrán látható.

Ez az  $\tilde{G}_2 \times \tilde{G}_2$  csoport (ld.[8]).

#### 6.6.4. $C_4$ vizsgálata

A  $C_4$ -hez tartozó kvadratikus alakot az alábbi formában használom:

$$q(\mathbf{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2. \quad (12)$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4. \quad (13)$$

A pontcsoporthoz 16 tükrözés tartozik, az alábbi jelöléseket használom:

- $\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  
 $\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (-1, 1, 0, 0)$ ,  
 $\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (0, -1, 1, 0)$ ,  
 $\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (0, 0, -1, 1)$ ,  
 $\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (1, 1, 0, 0)$ ,  
 $\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (-1, 0, 1, 0)$ ,  
 $\sigma_7$  : a tükrözési sík  $H_7$ , normálvektora  $\mathbf{n}_7 = (1, 0, 1, 0)$ ,  
 $\sigma_8$  : a tükrözési sík  $H_8$ , normálvektora  $\mathbf{n}_8 = (-1, 0, 0, 1)$ ,  
 $\sigma_9$  : a tükrözési sík  $H_9$ , normálvektora  $\mathbf{n}_9 = (1, 0, 0, 1)$ ,  
 $\sigma_{10}$  : a tükrözési sík  $H_{10}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{10} = (0, 1, 0, 0)$ ,  
 $\sigma_{11}$  : a tükrözési sík  $H_{11}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{11} = (0, 0, 1, 0)$ ,  
 $\sigma_{12}$  : a tükrözési sík  $H_{12}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{12} = (0, 0, 0, 1)$ ,  
 $\sigma_{13}$  : a tükrözési sík  $H_{13}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{13} = (0, -1, 0, 1)$ ,  
 $\sigma_{14}$  : a tükrözési sík  $H_{14}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{14} = (0, 1, 1, 0)$ ,  
 $\sigma_{15}$  : a tükrözési sík  $H_{15}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{15} = (0, 1, 0, 1)$ ,  
 $\sigma_{16}$  : a tükrözési sík  $H_{16}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{16} = (0, 0, 1, 1)$ .

Az egyes tükrözésekhez tartozó mátrixok:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Továbbá:

$$\sigma_5 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_6 = \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_7 = \sigma_3 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_8 = \sigma_4 \cdot \sigma_6 \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_9 = \sigma_1 \cdot \sigma_8 \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_{10} = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{11} = \sigma_3 \cdot \sigma_{10} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{12} = \sigma_4 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_{13} = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

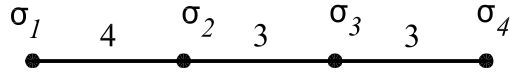
$$\sigma_{14} = \sigma_3 \cdot \sigma_{10} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{15} = \sigma_{12} \cdot \sigma_{13} \cdot \sigma_{12}$$

$$\sigma_{16} = \sigma_{11} \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_{11}$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^4 = (\sigma_2 \cdot \sigma_3)^3 = (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^3 = I .$$

Így az  $O$  pontot helybenhagyó tükrözések csoportját generálni lehet a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  tükrözésekkel. A  $C_4$  pontcsoportjának maximális tükrözésrészcsoportha  $B_4$ , illetve használatos a  $C_4$  jelölés is. (ld.[8]). Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja a 28. ábrán látható.



28. ábra.

A  $C_4$  fundamentális tartományát meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{array}{ll}
 x^1 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
 -x^1 + x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
 -x^2 + x^3 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
 -x^3 - x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0).
 \end{array}$$

A pontcsoport tükrözéscsoport, mert nincs olyan transzformáció, amely az előbbi fundamentális tartományt és a kvadrátikus alakot is önmagába vinné.

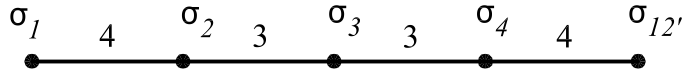
A rács teljes szimmetriacsoportja maximális tükrözéscsoportjának a fundamentális tartományát úgy kapjuk meg, ha az  $F_{C_4}$  alaptartományt a  $-\mathbf{n}_{12}$  normálvektorú,  $H_{12}$  síkkal párhuzamos  $H_{12'}$  síkkal elmetsszük, a  $\sigma_{12'}$  tükrözést kapjuk.



Az  $F_{C_4}^*$  fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned} x^1 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) &\geq 0), \\ -x^1 + x^2 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) &\geq 0), \\ -x^2 + x^3 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) &\geq 0), \\ -x^3 - x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) &\geq 0), \\ \frac{1}{2} - x^4 &\geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_{12} - \mathbf{x}, \mathbf{n}_{12}) &\geq 0). \end{aligned}$$

A maximális tükrözésrészcsoport Coxeter gráfja a 29. ábrán látható.



29. ábra.

Ez az  $\tilde{C}_4$  csoport (ld.[8]).

#### 6.6.5. $Q_4$ vizsgálata

A  $P_4$ -hez tartozó kvadratikus alakot az alábbi formában használom:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) = \frac{1}{6} \cdot [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 + (x^1 - x^2)^2 + \\ + (x^1 - x^4)^2 + (x^2 - x^3)^2 + (x^2 - x^4)^2 + (x^3 - x^4)^2 + \\ + (x^1 + x^2 - x^3 - x^4)^2 + (x^1 + x^2 - x^3)^2 + (x^1 + x^2 - x^4)^2] . \end{aligned} \quad (14)$$

A megfelelő bilineáris forma:

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 + x^4 y^4 + \frac{1}{2} \cdot x^1 y^2 + \frac{1}{2} \cdot x^2 y^1 - \\
& - \frac{1}{2} \cdot x^1 y^3 - \frac{1}{2} \cdot x^3 y^1 - \frac{1}{2} \cdot x^1 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^4 y^1 - \\
& - \frac{1}{2} \cdot x^2 y^3 - \frac{1}{2} \cdot x^3 y^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 y^4 - \frac{1}{2} \cdot x^4 y^2 .
\end{aligned} \tag{15}$$

A pontcsoporthoz 24 tükrözés tartozik, az alábbi jelöléseket használom:

- $\sigma_1$  : a tükrözési sík  $H_1$ , normálvektora  $\mathbf{n}_1 = (-1, 0, 0, 0)$ ,
- $\sigma_2$  : a tükrözési sík  $H_2$ , normálvektora  $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 0, 0)$ ,
- $\sigma_3$  : a tükrözési sík  $H_3$ , normálvektora  $\mathbf{n}_3 = (0, 2, 1, 1)$ ,
- $\sigma_4$  : a tükrözési sík  $H_4$ , normálvektora  $\mathbf{n}_4 = (-1, -1, -2, -1)$ ,
- $\sigma_5$  : a tükrözési sík  $H_5$ , normálvektora  $\mathbf{n}_5 = (1, -1, 1, 0)$ ,
- $\sigma_6$  : a tükrözési sík  $H_6$ , normálvektora  $\mathbf{n}_6 = (2, 0, 1, 1)$ ,
- $\sigma_7$  : a tükrözési sík  $H_7$ , normálvektora  $\mathbf{n}_7 = (1, 1, 1, 1)$ ,
- $\sigma_8$  : a tükrözési sík  $H_8$ , normálvektora  $\mathbf{n}_8 = (-1, 1, 1, 0)$ ,
- $\sigma_9$  : a tükrözési sík  $H_9$ , normálvektora  $\mathbf{n}_9 = (0, 1, 0, 0)$ ,
- $\sigma_{10}$  : a tükrözési sík  $H_{10}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{10} = (0, 1, 1, 1)$ ,
- $\sigma_{11}$  : a tükrözési sík  $H_{11}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{11} = (1, 1, 1, 2)$ ,
- $\sigma_{12}$  : a tükrözési sík  $H_{12}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{12} = (0, 0, 0, 1)$ ,
- $\sigma_{13}$  : a tükrözési sík  $H_{13}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{13} = (0, 0, 1, 0)$ ,
- $\sigma_{14}$  : a tükrözési sík  $H_{14}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{14} = (-1, 1, 0, 1)$ ,

$\sigma_{15}$  : a tükrözési sík  $H_{15}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{15} = (1, -1, 0, 1)$ ,

$\sigma_{16}$  : a tükrözési sík  $H_{16}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{16} = (0, 0, 1, 1)$ ,

$\sigma_{17}$  : a tükrözési sík  $H_{17}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{17} = (1, 1, 1, 0)$ ,

$\sigma_{18}$  : a tükrözési sík  $H_{18}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{18} = (0, 0, -1, 1)$ ,

$\sigma_{19}$  : a tükrözési sík  $H_{19}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{19} = (0, 1, 1, 0)$ ,

$\sigma_{20}$  : a tükrözési sík  $H_{20}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{20} = (0, 1, 0, 1)$ ,

$\sigma_{21}$  : a tükrözési sík  $H_{21}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{21} = (1, 0, 1, 1)$ ,

$\sigma_{22}$  : a tükrözési sík  $H_{22}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{22} = (1, 0, 1, 0)$ ,

$\sigma_{23}$  : a tükrözési sík  $H_{20}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{23} = (1, 0, 0, 1)$ ,

$\sigma_{24}$  : a tükrözési sík  $H_{21}$ , normálvektora  $\mathbf{n}_{24} = (1, 1, 0, 1)$ ,

Az egyes tükrözésekhez tartozó mátrixok:

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Továbbá:

$$\sigma_5 = \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_6 = \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_7 = \sigma_3 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_8 = \sigma_6 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_6$$

$$\sigma_9 = \sigma_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{10} = \sigma_3 \cdot \sigma_9 \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{11} = \sigma_5 \cdot \sigma_{10} \cdot \sigma_5$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{11} \cdot \sigma_9 \cdot \sigma_{11}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_4 \cdot \sigma_9 \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_{14} = \sigma_8 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_8$$

$$\sigma_{15} = \sigma_3 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{16} = \sigma_{10} \cdot \sigma_{15} \cdot \sigma_{10}$$

$$\sigma_{17} = \sigma_3 \cdot \sigma_{14} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{18} = \sigma_4 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_4$$

$$\sigma_{19} = \sigma_9 \cdot \sigma_{13} \cdot \sigma_9$$

$$\sigma_{20} = \sigma_3 \cdot \sigma_{19} \cdot \sigma_3$$

$$\sigma_{21} = \sigma_2 \cdot \sigma_{10} \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{22} = \sigma_2 \cdot \sigma_{19} \cdot \sigma_2$$

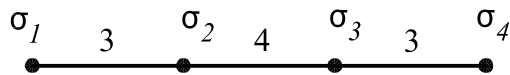
$$\sigma_{23} = \sigma_2 \cdot \sigma_{20} \cdot \sigma_2$$

$$\sigma_{24} = \sigma_{16} \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_{16}$$

$$(\sigma_1 \cdot \sigma_2)^3 = (\sigma_2 \cdot \sigma_3)^4 = (\sigma_3 \cdot \sigma_4)^3 = I .$$

Így az  $O$  pontot helybenhagyó tükrözések csoportját generálni lehet

a  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  tükrözésekkel. A  $Q_4$  pontcsoportjának maximális tükrözésrészcsoportja  $F_4$  (ld.[8]). Ennek a csoportnak a Coxeter gráfja a 30. ábrán látható.



30. ábra.

Az  $F_4$  fundamentális tartományát meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{array}{ll}
 -2x^1 - x^2 + x^3 + x^4 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
 x^1 - x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
 x^2 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
 -x^3 \geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0).
 \end{array}$$

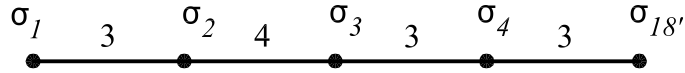
A pontcsoport tükrözéscsoport, mert nincs olyan transzformáció, amely az előbbi fundamentális tartományt és a kvadratikus alakot is önmagába vinné.

A rács teljes szimmetriacsoportja maximális tükrözéscsoportjának a fundamentális tartományát úgy kapjuk meg, ha az  $F_{F_4}$  alaptartományt a  $-\mathbf{n}_{18}$  normálvektorú,  $H_{18}$  síkkal párhuzamos  $H_{18'}$  síkkal elmetszük, a  $\sigma_{18'}$  tükrözést kapjuk.

Az  $F_{F_4}^*$  fundamentális tartományt meghatározó egyenlőtlenségrendszer:

$$\begin{aligned}
-2x^1 - x^2 + x^3 + x^4 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) \geq 0), \\
x^1 - x^2 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2) \geq 0), \\
x^2 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_3) \geq 0), \\
-x^3 &\geq 0 & (B(\mathbf{x}, \mathbf{n}_4) \geq 0), \\
1 + x^3 - x^4 &\geq 0 & (B(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{n}_{18} - \mathbf{x}, \mathbf{n}_{18}) \geq 0).
\end{aligned}$$

A maximális tükrözésrészcsoport Coxeter gráfja a 31. ábrán látható.



31. ábra.

Ez az  $\tilde{F}_4$  csoport (ld.[8]).

#### 6.6.6. Az eredmények összefoglalása

Az 5. és a 6. táblázat tartalmazza az eredményeket összefoglalva. Brown-Bülow-Neubüser-Wondratschek-Zassenhaus [11] monográfiája megadja ezeknek a csoportoknak a kristály-családját, kristály-rendszerét, Q-osztályát és Z-osztályát. A táblázatok az erre vonatkozó számozásokat is tartalmazzák.

5. táblázat. Eredmények az egyes esetekre I.(ld.[8],[11])

| A csoport                                           | $T$                              | $P_4$         | $S_4$         |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------|---------------|---------------|
| A pontcsoport maximális tükrözéscsoportja           | $A_2 \times A_2$                 | $A_4$         | $A_4$         |
| Tükrözéscsoport-e ez a csoport?                     | NEM                              | NEM           | NEM           |
| A [11] monográfiában a csoport jelölése             | XXI.29/09/01                     | XXII.31/07/01 | XXII.31/07/02 |
| A teljes szimmetria csoport tükrözés-részcssoportja | $\tilde{A}_2 \times \tilde{A}_2$ | $\tilde{A}_4$ | $\tilde{A}_4$ |

6. táblázat. Eredmények az egyes esetekre II.(ld.[8],[11])

| A csoport                                           | $B$                              | $C_4$          | $Q_4$          |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------|----------------|----------------|
| A pontcsoport maximális tükrözéscsoportja           | $G_2 \times G_2$                 | $C_4$          | $F_4$          |
| Tükrözéscsoport-e ez a csoport?                     | NEM                              | IGEN           | IGEN           |
| A [11] monográfiában a csoport jelölése             | XXI.30/13/01                     | XXIII.32/21/01 | XXIII.33/16/01 |
| A teljes szimmetria csoport tükrözés-részcssoportja | $\tilde{G}_2 \times \tilde{G}_2$ | $\tilde{C}_4$  | $\tilde{F}_4$  |

## 7. Összegzés

Dolgozatomban a geometriai transzformációk igen kiterjedt területét érintettem több témában. A bevezetésben rávilágítottam arra, hogy a szimmetria a környezetünk meghatározó jelensége, a természetben találkozunk vele, az építészetben, művészetben alkalmazzuk. Évszázadok óta a tudományos kutatás tárgya, az erlangeni program pedig a geometriák vizsgálatának alapvető szempontjává tette annak vizsgálatát, hogy bizonyos geometriai transzformációk alkalmazása során mely tulajdonságok maradnak változatlanok. Ezek a vizsgálatok a csoportelmélet és több más matematikai témakör fejlődéséhez is hozzájárultak.

A 2. fejezetben áttekintést adtam az euklideszi sík és tér egybevágósági és hasonlósági transzformációiról a transzformációk tágabb körét is megemlítve. Ismertettem azokat az alapvető fogalmakat és tételeket, amelyek a transzformációk értelmezése és rendszerezése szempontjából fontosak. A transzformációkat a fixpontok száma, illetve az irányítástartás szempontjából csoportosítottam. A transzformációk egymásutáni alkalmazásával a transzformációk szorzatát értelmezzük. A 2.4. tétel a síkbeli egybevágósági transzformációk tükrözések szorzataként történő előállításáról szól, térben az analóg állítást a 2.16. tétel síktükrözések használatával adja meg. A hasonlósági transzformációkkal foglalkozva kiemeltem, hogy az euklideszi geometria a hosszegység önkényes megválasztásával olyan tulajdonságokat vizsgál, amelyek hasonlósági transzformációk alkalmazása során változatlanok maradnak. A 2.5. részben kitekintést adtam az affín és a projektív transzformációkra. Röviden utaltam az ábrázoló geometriai vonatkozásokra, a számítógépes grafikában való alkalmazásra, megemlítettem az  $n$ -dimenziós értelmezés lehetőségét. A 2. fejezetben az elemi geometriai megközelítés mellett csoportelméleti és lineáris algebrai vonatkozásokról is szóltam. A fejezet alapvető célja az, hogy a későbbiekben tárgyalt témák



elméleti háttérét biztosítsa.

A 3. fejezetben azt elemeztem, hogy a geometriai transzformációkkal milyen módon foglalkozunk az oktatásban. Ennek alapja a több évtizedes tanítási tapasztalatom. Gondolataimat ezzel kapcsolatban a Rátz László Vándorgyűlésen és a Varga Tamás Napokon tartott előadásokon is kifejtettem. Nyolcosztályos gimnáziumban tanítok. Ez adott arra lehetőséget, hogy mind a felső tagozaton, mind a középiskolában tanított témaköröket áttekintsem, módszertani tapasztalataimról beszámoljak. A Rátz László Vándorgyűlésen tartott előadásom bemutatója honlapomon elérhető.

([www.szolda.hu/he](http://www.szolda.hu/he))

Hosszú évek óta veszek részt az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny speciális matematika bizottságának munkájában. Az alábbi feladatot a 2006-2007-es tanévben tűzte ki a versenybizottság az én javaslatomra:

*Az  $ABC$  háromszöget betűzzük pozitív körüljárás szerint. A háromszög szögei az  $A$ ,  $B$ , illetve  $C$  csúcsnál rendre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . A  $B$  csúcsot az  $A$  pont körül negatív irányban elforgatjuk  $\alpha$  szöggel, majd az így kapott  $B_1$  pontot a  $B$  pont körül negatív irányban elforgatjuk  $\beta$  szöggel, és végül az így nyert  $B_2$  pontot a  $C$  pont körül negatív irányban  $\gamma$  szöggel elforgatva a  $B_3$  pontba jutunk. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adottak a  $B$ ,  $B_3$  pontok és az  $ABC$  háromszög beírt körének  $O$  középpontja.*

A 4. fejezetben ezzel a feladattal összefüggésben bemutatom, hogy az előző fejezetben tárgyalt ismeretek alapján milyen szinten tudják alkalmazni a tanulók a geometriai transzformációkat feladatmegoldásban.

A fenti gondolatok vezettek el egy axiomatikai problémához, amelynek megoldását az 5. fejezetben adom meg. A tükrözésgeometria fo-

galmainak bemutatása után az 5.5. tétel térbeli megfelelőjét mondom ki:

**5.9. tétel** *Legyen  $a$  és  $b$  a tér két különböző egyenese,  $X$  pedig a tér egy az  $a$  és  $b$  egyenesek nem mindegyikére illeszkedő tetszőleges pontja. Ekkor létezik olyan  $g$  egyenes, amely illeszkedik az  $X$  pontra és agb helyettesíthető egy  $h$  egyenes-tükrözéssel.*

A bizonyítást nem csak az euklideszi geometria keretei között tárgyalom. Azt is megmutatom, hogy ez az előállítás nem mindig egyértelmű. Az 5.10 tételben adom meg az egyértelmű előállítás feltételét:

**5.10. tétel** *Az euklideszi térben az 5.9. tétel konstrukciója pontosan akkor egyértelmű, ha  $a$  és  $b$  metsző vagy kitérő egyenesek és  $X$  nem illeszkedik a közös merőlegesükre.*

*Hiperbolikus térben egyértelmű az előállítás, ha van az  $a$  és  $b$  egyeneseknek közös merőlegese, amelyre az  $X$  pont nem illeszkedik, vagy  $a$  és  $b$  egyeneseknek nincs közös merőlegese. Ez utóbbi eset a klasszikus Bolyai-Lobachevskij féle hiperbolikus térben pontosan akkor áll elő, ha  $a$  és  $b$  hiperbolikus értelemben párhuzamosak, azaz egy síkban fekszenek, de sem közös pontjuk, sem közös merőlegesük nincs.*

Ennek a fejezetnek az anyaga a [30] cikkben jelent meg, amely a fent említett két tételt, mint új önálló eredményt tartalmazza.

Még tudományos diákköri dolgozatomhoz és szakdolgozatomhoz kapcsolódva ismerkedtem meg a többdimenziós kristálytan egy témakörével, amely a mai kutatásokhoz is elvezet. S.S. Ryshkov [51] cikkében a 6. fejezet bevezetésében megadott kvadratikus alakok egész-együtthatós automorfizmuscsoportjait, mint maximális csoportokat adta meg. Maxwell [35] dolgozatában felveti a kérdést, hogy a  $T$  kvadratikus alakhoz tartozó csoport tükrözéscsoport-e? Dolgozatomban megmutattam, hogy nem az. Megadtam a  $T$ -vel jelölt pontcsoport maxi-

mális tükrözésrészcsoportját, ennek fundamentális tartományát, majd az egész pontcsoportot. Továbbá meghatároztam a  $\Lambda$ -val jelölt rács teljes szimmetriacsoportjához tartozó maximális tükrözésrészcsoportot és ennek a fundamentális tartományát.

Ezeket a kérdéseket a többi esetben is megvizsgáltam. Végül megadtam a vizsgált csoportok helyét a [11] monográfia táblázatai szerint. Az eredmények összefoglalását az 5. és a 6. táblázat tartalmazza. Ez a fejezet a [31] cikkben került publikálásra.

## 8. Summary

The thesis discusses an extensive domain of geometric transformations in several topics. In the introduction I established that symmetry is a fundamental phenomenon of our environment, we see it in nature and apply it in architecture and in arts. Symmetry has been the subject of scientific investigation for centuries. The Erlanger Program made the question, which geometric properties remain invariant while applying certain transformations, the fundamental aspect of the research of geometries. These investigations have also contributed to the development of group theory and several other mathematical topics.

In Chapter 2 I gave a survey of isometries and similarities in Euclidean plane and space mentioning a wider range of transformations as well. I presented the basic concepts and theorems which are important from the point of view of interpretation and systematization of transformations. Transformations were classified according to the number of fixed points and whether they preserve the orientation of plane and space, respectively, or not. We define the product of transformations as successive application of transformations. Theorem 2.4. deals with the representation of plane isometries as product of reflections, whereas, Theorem 2.16. provides the analogous statement in space applying plane-reflections. As regards similarity, I emphasized that, due to the arbitrary choice of the longitudinal unit, Euclidean geometry investigates properties that remain invariant while applying similarity. In Section 2.5 an outlook was given on affine and projective transformations. I briefly referred to connections with descriptive geometry, to application in computer graphics and mentioned the possibility of  $n$ -dimensional interpretation. I also touched upon group theoretical and linear algebraical connections in addition to elementary geometrical approach. The aim of this chapter was to provide the theoretical background for the topics discussed later on.

In Chapter 3 I analysed the methods used for teaching geometric

transformations at school based on my several decennial educational experience. I expressed my thoughts in this topic at the László Rátz Itinerary Congress and at the Tamás Varga Days as well.

I have been teaching at an eight-form secondary school for children of age between 10 and 18. This provided me the opportunity to sum up and report on my experience on methodology regarding the material taught both at senior section of elementary school and at secondary school. The presentation of the lecture, I gave at the László Rátz Itinerary Congress, is obtainable on my website ([www.szolda.hu/he](http://www.szolda.hu/he)).

I have been a member of the special mathematical classes' committee of the National Secondary School Competition for ages. The following exercise was set in the school year 2006/2007 at my initiative:

*Let the triangle  $ABC$  be named in positive sense. The angles of the triangle at vertices  $A$ ,  $B$  and  $C$  are  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ , respectively. We rotate the vertex  $B$  about point  $A$  in negative direction through angle  $\alpha$ , then we rotate the resulting point  $B_1$  about point  $B$  in negative direction through angle  $\beta$ , finally rotating the obtained point  $B_2$  about point  $C$  in negative direction through angle  $\gamma$  we get point  $B_3$ . Let us construct the triangle, if points  $B$ ,  $B_3$  and the centre  $O$  of the incircle of triangle  $ABC$  are given!*

In Chapter 4 in connection with this exercise, I illustrate on what level students can apply geometric transformations in solving exercises based on knowledge discussed in the previous chapter.

The above thoughts led to an axiomatical problem, the solution of which I provided in Chapter 5. Following the presentation of basic concepts of reflection geometry I state the spatial equivalent of Theorem 5.5.:

**Theorem 5.9.** *Let  $a$  and  $b$  be two distinct lines in the space and let  $X$  be an arbitrary point in the space not incident with both lines.*

*Then there exists a line  $g$ , such that  $X$  is incident with  $g$  and  $agb$  can be replaced with a line-reflection  $h$ .*

The proof was given not only within the scope of Euclidean geometry. I also show that the construction is not always unique. Theorem 5.10. gives the condition of uniqueness:

**Theorem 5.10.** *In Euclidean space the construction in Theorem 5.9 is unique precisely if  $a$  and  $b$  are intersecting or skew lines and  $X$  is not on their common perpendicular.*

*In hyperbolic space the construction is unique either if  $a$  and  $b$  have a common perpendicular line and  $X$  is not incident with it, or if  $a$  and  $b$  do not have a common perpendicular line. This latter case occurs in the classical Bolyai-Lobachevskian hyperbolic space iff  $a$  and  $b$  are parallel in hyperbolic sense, i.e. they lie in a plane without common point and without common perpendicular line.*

The subject of this chapter was published in article [30], which contains the two theorems mentioned above as new results.

I got acquainted with a topic of multidimensional crystallography at my university studies which lead to today's researches as well. In his paper [51] S.S. Ryshkov gave the group of integral automorphisms of some quadratic forms (see in the introduction of Chapter 6) as maximal groups. G. Maxwell [35] raised the question whether the group of quadratic form  $T$  was a reflection group. In my thesis I answer this question in the negative. I determined the maximal reflection subgroup of the point group of  $T$ , the fundamental domain of it, finally the whole point group. Moreover I determined the maximal reflection subgroup in the whole symmetry group of the lattice  $\Lambda$  and its fundamental domain.

I answered these questions in the other cases as well. Finally I gave the location of the considered groups in the tables of monograph [11].

Table 5 and Table 6 contain a summary of the results. This chapter has been published in [31].





## Hivatkozások

- [1] Ács, L.; Molnár, E.: Algorithm for D-V cells and fundamental domains of E4 space groups with broken translations in the icosahedral family *J. for Geometry and Graphics*. **6**(2002), No.1, 1–16.
- [2] Ahrens, J: Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff, *Math. Zeitschrift*. **71** (1959), 154-185.
- [3] Bachmann, F: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer, 1959,1973
- [4] Bácsó, S.; Hoffmann, M.: *Fejezetek a geometriából*. EKF Líceum Kiadó, 2003.
- [5] Baziljev, V. T.; Dunyicsev, K. I.; Ivanyickaja; V. P.: *Geometria I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [6] Baziljev, V. T.; Dunyicsev, K. I.: *Geometria II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- [7] Bódi, B.: *Algebra I*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2002.
- [8] Bourbaki, N.: *Groupes et Algèbres de Lie. Chap. IV-VI*. Hermann, Paris, 1968, Russian translation Mir, Moscow, 1972, English translation Springer, 2002.
- [9] Bovdi, V. A.; Gudovik, P. M.; Rudko, V. P.: Torsion-free Groups with indecomposable Holonomy Group. I. *J. Group Theory*. **5**(2002), No.1, 75–96.
- [10] Bovdi, V. A.; Gudovik, P. M.; Rudko, V. P.: Torsion-free Groups with indecomposable Holonomy Group. II. *J. Group Theory*. **7**(2004), No.4, 555–569.

- [11] Brown, H.; Bülow, R.; Neubüser, J.; Wondratschek, H.; Zassenhaus, H.: *Crystallographic Groups of Four-dimensional Space*. Wiley-Interscience, 1978.
- [12] Coxeter, H.S.M; Moser, W.O.J.: *Generators and Relations for Discrete Groups*. 4th ed., Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd.14, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [13] Coxeter, H.S.M.: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [14] Dade, E.C.: The maximal finite groups of  $4 \times 4$  integral matrices. *Illinois J. Math.* **9**(1965) 99–122.
- [15] Emmer, M.: *Simmetria e spazio.*, ART and MATHEMATICS , video
- [16] Emmer, M.: *Geometries and impossible worlds.*, ART and MATHEMATICS , video
- [17] Foley, J.D.; van Dam, A.; Feiner, S.K.; Hughes, J.F.: *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley, 1997
- [18] Freud, R.: *Lineáris algebra*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.
- [19] Gázsó Dr., I.: *Transzformációk*. Általános iskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- [20] Grossman, I.; Magnus, W.: *Csoportok és gráfjaik*. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [21] Hajós, Gy.: *Bevezetés a geometriába* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

- [22] Hargittai, M.; Hargittai, I.: *Fedezzük fel a szimmetriát!*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
- [23] Hargittai, M.; Hargittai, I.: *Képes szimmetria*. Galenus, Budapest, 2005.
- [24] Hollai, M.: A merőleges vetítés korábbi tanításának előnyei, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei IV.* (1971) 91-116.
- [25] Hollai, M.: A geometriai gondolkodás és a transzformáció-szemlélet szintjei, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei V.* (1972) 41-48.
- [26] Hollai, M.: A transzformációkra alapozott geometriai fogalmak fejlődése és kapcsolataik a matematika más területeivel, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei VIII.* (1975) 22-41.
- [27] Hollai, M.; Horváth J.: A sík és a tér affin transzformációi, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei VI.* (1973) 36-84.
- [28] Horváth, J.: A sík és a tér egybevágósági transzformációi, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei IV.* (1971) 48-70.
- [29] Horvay, K.: Geometriai transzformációk az általános- és középiskolai tanításban, *ELTE TTK Szak módszertani Közleményei I.* (1968) 24-46.
- [30] Horváth, E.: On a fundamental theorem of reflection geometry. *Annales Univ.Sci. Budapest.* **46** (2003) 133–148.
- [31] Horváth, E.: On four-dimensional crystallographic groups. *Teaching Mathematics and Computer Science* **4/2** (2006) 391–404.
- [32] Kiss, E.: *Bevezetés az algebrába*. Typotex kiadó, Budapest, 2007.

- [33] Kovács, Z.: *Geometria*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2004.
- [34] Martin, G.M.: *Transformation Geometry*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [35] Maxwell, G.: The crystallography of Coxeter groups. *J. Algebra*. **35**(1975) 159–178.
- [36] Molnár, E.: *Elemi matematika II. (Geometriai transzformációk)*. Tankönyvkiadó, 1974.
- [37] Molnár, E.: A tükrözésgeometriáról, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei VII.* (1974) 86-130.
- [38] Molnár, Emil: Tükrözésgeometria a térben, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei VIII.* (1975) 76-107.
- [39] Molnár, E.: Some old and new aspects on the crystallographic groups. *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.* **36**(1992) 191–218.
- [40] Molnár, E.; Prok, I.; Szirmai, J.: D-V Cells and Fundamental Domain for Crystallographic Groups, Algorithms, and Graphic Realizations. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. **38**, No. **7-9** (2003), Hungarian Applied Mathematics and Computer Applications, Guest Editor: A. Benczur, 929–943, [www.elsevier.com/locate/mcm](http://www.elsevier.com/locate/mcm)
- [41] Nyisztor, K.: *Grafika és játékprogramozás DirectX-szel*. SZAK kiadó, 2005.
- [42] Pataki, T.: *Papírcsodák*. Ságvári Endre Könyvszerkesztőség, 1983.
- [43] Rédling, E.: Megjegyzések a hasonlóság tanításához, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei V.* (1972) 170-178.

- [44] Rédling, E.: A hasonlóság témakörének felépítéséről, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 131-154.
- [45] Rédling, E.: A hasonlósági transzformáció tulajdonságai, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 155-175.
- [46] Rédling, E.: Az egybevágóság és a szimmetria kapcsolatáról, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VIII.** (1975) 109-133.
- [47] Rédling, E.; Szénásy M.: A hasonlóság tanításának néhány tapasztalata, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **X.** (1977) 147-160.
- [48] Reiman, I.: A geometriai transzformációk és a függvénytranszformációk kapcsolata matematika tanításában, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **III.** (1970) 21-39.
- [49] Reiman, I.: *Matematika*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992.
- [50] Reiman, I.: *A geometria és határterületei*. Gondolat, Budapest, 1986.
- [51] Ryshkov, S.S.: Maximal finite groups of integral  $n \times n$  matrices and full groups of integral automorphisms of positive quadratic forms (Bravais models). *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **128**(1972) 183–211.(in Russian), *Proc. Steklov Inst. Math.* **128**(1972) 217–250,(in English)
- [52] Ryshkov, S.S.: On complete groups of integral automorphisms of quadratic forms. *Soviet. Math. Dokl.* **13**(1972) 1251–1254.
- [53] Szirmay-Kalos, L.; Antal, Gy.; Csonka, F.: *Háromdimenziós grafika, animáció és játékfejlesztés*. ComputerBooks, Budapest, 2006.

- [54] Temesvári, Á.: A sík és a tér hasonlósági transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **V.** (1972) 179-198.
- [55] Temesvári, Á.: A tér hasonlósági transzformációi, *ELTE TTK Szakmódszertani Közleményei* **VII.** (1974) 204-218.
- [56] Vigassy, L.: *Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben.* Középiskolai szakköri füzet, Tankönyvkiadó, 1979.

# GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban

Írta: **Horváth Eszter**  
matematika-fizika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem matematika doktori iskolája  
(matematika-didaktika alprogramja) keretében

Témavezető: **Dr Molnár Emil** egyetemi tanár

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:

**Dr.Gaál István** egy. tanár .....

tagok:

**Dr. Bódi Béla** egy. tanár .....

**Dr. Nagyné Szilvási Márta** egy. docens .....

A doktori szigorlat időpontja: 2007. június 25.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:

Dr. ....

tagok:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: