1949

Fázisátalakulások vizsgálata Renormálási Csoport módszerrel

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Borbélyné Bacsó Viktória

Témavezető
Dr. Nándori István

Debreceni Egyetem
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
Debrecen, 2018

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Fizikai Tudományok Doktori Iskolája Részecskefizika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2018

. . . .

Borbélyné Bacsó Viktória
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Borbélyné Bacsó Viktória doktorjelölt 2014-2018 között a fent megnevezett Doktori Iskola Részecskefizika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2018

. . . .

Dr. Nándori István
témavezető

Fázisátalakulások vizsgálata Renormálási Csoport módszerrel

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a fizika tudományágban

Írta: Borbélyné Bacsó Viktória
okleveles fizikatanár-matematikatanár-informatikatanár
Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
Részecskefizika programja keretében

Témavezető: Dr. Nándori István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Schram Zsolt	....
tagok:	Dr. Horváth Dezső	....
	Dr. Barna Dániel	....

A doktori szigorlat időpontja: 2018. január 10.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: ....

Tartalomjegyzék

I. rész

Bevezetés és célkitűzés

Ha a modern fizika alappillléreiről van szó, még a nem szakmabeliek között is (viszonylag) magától értetődő a kvantumelmélet és a relativitáselmélet említése. Azonban van egy olyan terület, a fázisátalakulások elmélete, amely kevésbé tűnik meghatározó jelentőségűnek, pedig szintén alapvető fontosságú. Gondoljunk csak arra, hogy a Világegyetem is fázisátalakulások során nyerte el a ma ismert alakját. Vagy említhetjük a CERN-ben nemrég felfedezett Higgs részecskét, ami szintén egy fázisátmenet, az elektrogyenge fázisátalakulás során ad tömeget elemi részecskéknek.
Fázisátalakulásokkal már elemi tanulmányaink során is találkozunk, és jellemzésükre bevezetünk termodinamikai fogalmakat, mint például fázisátalakulási hőmérséklet, látens hő, stb. Ha azonban a termodinamika alapjául szolgáló statisztikus fizikából indulunk ki és egészen precíz leírást akarunk, akkor be kell vezetnünk a Renormálási Csoport Módszert.
Jelen értekezésben fázisátalakulások vizsgálatával foglalkozom az úgynevezett funkcionális renormálási csoport használatával. Az általam alkalmazott eljárás fontos eleme, hogy klasszikus statisztikus fizikai rendszerek leképezhetők kvantumtérelméleti modellekre, amelyek viszonylag könnyen tanulmányozhatók az említett renormálási csoport módszer funkcionális (vagy egzakt) alakjával, azaz a Wetterich egyenlettel. Speciális, úgynevezett sine-Gordon típusú kvantumtérelméleti modelleket vizsgálok, amelyek közös jellemzője, hogy tartalmaznak egy periodikus önkölcsönhatást és számos fontos fizikai alkalmazással bírnak. Ilyenek például bizonyos két-dimenziós rendszerekben (szupravezető, szuperfolyékony filmek) tapasztalható topológikus fázisátalakulások, melyek elméleti leírásáért (illetve a topológikus fázisok vizsgálatáért) ítélték oda a 2016-os fizikai Nobel díjat David J. Thouless, F. Duncan M. Haldone, és J. Michael Kosterlitz kutatóknak.
A szakirodalomban ismert a sine-Gordon modell $d = 2$ dimenzióban vett funkcionális renormálási csoport vizsgálata, ami az értekezésem alapjául szolgál.
Kutatómunkám során a következő kérdésekre kerestem a választ. Milyen a sine-Gordon modell fázisszerkezete $d < 2$ dimenzióban? Lehet-e reprodukálni a kétdimenziós sine-Gordon modell (konformtérelméletből ismert) c-függvényét az általam használt funkcionális renormálási módszer keretében? Milyen a fáziszerkezete a sine-Gordon elmélet módosításával kapott sinh-Gordon modellnek, illetve a köztük interpoláló modelleknek?
Megmutattam, hogy funkcionális RG módszer LPA' közelítésben, helytelenül a spontán szimmetriasértő fázis jelenlétét jósolja $d = 1$ dimenzióban, ami felhasználható az alkalmazott módszer regulátorának optimalizálására [1]. Továbbá megmutattam, hogy LPA közelítésben tetszőleges frekvenciákra az ismert c-függvény értékek nem reprodukálhatók, azonban sikerült a szakiroda-

lommal jól egyező eredményeket kapnom LPA' közelítésben [2]. Megalkottam egy új interpoláló modellt, és meghatároztam a fázisszerkezetét, beleértve az interpoláció végpontját, azaz a sinh-Gordon elméletet is [3].

II. rész

Irodalmi előzmények

1. fejezet

Fázisátalakulások

A természetben számos helyen találkozhatunk fázisátalakulásokkal. Gondoljunk csak a víz fagyására vagy forrására, amelynek tanulmányozása az általános iskolai tananyag részét képezi, vagy a ferromágneses-paramágneses átmenetre, amely említés szintjén előkerül a középiskolában. A szuperfolyékony ^4He filmen tapasztalt végtelen rendű fázisátalakulást már csak egyetemi szinten tanulmányozhatjuk, és hasonlóan egyetemi kurzusok során, illetve tudományos közleményekben olvashatunk arról, hogy az univerzum is fázisátalakulások révén nyerhette el ma ismert szerkezetét. Jelen értekezésben a fázisátalakulások tanulmányozásával foglalkozom, egy speciális technika, a renormálási csoport módszer segítségével.

Az alábbiakban áttekintjük a fázisátalakulások osztályozását, a kritikus viselkedés főbb jellemzőit és a skálainvarianciát, illetve annak matematikai megfogalmazását, a Kadanoff-Wilson blokkosítást. Végül megmutatom ezek kapcsolatát a renormálási csoport (RG) módszerrel. A fejezetben bemutatott ismeretek tárgyalása során erősen támaszkodom a [4–7], valamint a [8] szakirodalomra.

1.1. A fázisátalakulás rendje

Statisztikus rendszereket a termodinamikai limeszben a termodinamikai potenciál határozza meg. A fázisátalakulások tanulmányozásához tekintsünk egy Φ termodinamikai potenciállal jellemzett rendszert. A Φ abszolút minimuma megfelel a rendszer egyensúlyi állapotának és folytonos függvénye a rendszer paramétereinek (például a $\Phi = \Phi(T, p)$ a hőmérsékletnek és a nyomásnak.

Feltételezhetjük, hogy egy egykomponensű, homogén rendszer, bizonyos makroszkopikus paraméterek tekintetében, két egymással érintkező, homogén részre esik szét, amelyek egymástól különböznek, tehát különböző állapotokat képviselnek (Φ_1, Φ_2). Ezek az állapotok lesznek a fázisok, amelyek egymással érintkezve, egyensúlyban, egyidejűleg léteznek (fázisátalakulás során). A két fázis egyensúlya esetén, termodinamikai potenciáljuknak egyenlőnek kell lennie, azaz

$$\Phi_1(T,p) = \Phi_2(T,p). \tag{1.1}$$

Ez egy $p = p(T)$ fázishatárgörbét eredményez a $(p - T)$ síkon, amely elválasztja a modell két fázisát egymástól. Ennek átlépése vezet fázisátalakuláshoz. Míg a termodinamikai potenciál folytonosan változik a fázisátalakulás során, ez nem igaz a deriváltakra. A fázisátalakulás rendjét Ehrenfest [9] szerint az határozza meg, hogy a Φ hányadrendű parciális deriváltjai szenvednek ugrást a fázisátalakulás során.

1.1.1. Elsőrendű fázisátalakulás

Elsőrendű fázisátalakulásról beszélünk, amennyiben Φ elsőrendű parciális deriváltjai, például entrópia (S), térfogat (V) szenvednek ugrást (ahol Φ=G a rendszer szabad entalpiája.) Az elsőrendű fázisátalakulás során változik a rendszer energiája, amelyet a látens hő megjelenése jelez:

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}\,|_{p,H}; \qquad V = \frac{\partial G}{\partial p}\,|_{T,H}\;. \tag{1.2}$$

$$Q = T_c(S_1 - S_2) = T_c\left(\frac{\partial G}{\partial T}\,|_1 - \frac{\partial G}{\partial T}\,|_2\right). \tag{1.3}$$

Ahol T_c a fázisátalakulást jellemző kritikus hőmérséklet, és H a külső mágneses tér.

Látens hőnek (olvadáshő, forráshő) nevezzük azt a hőmennyiséget, amelyet halmazállapot-változás közben egy anyag elnyel (vagy lead) anélkül, hogy közben hőmérséklete megváltozna. A látens hő a rendszer állapotában hoz létre változást azzal, hogy az energiáját változtatja meg. Gondoljunk csak a jég olvadására, a víz-jég elegy mindaddig 0 $°C$-os marad, amíg a halmazállapot-változás folyik, ám energiája az olvadáshővel növekszik.

1.1.2. Másodrendű fázisátalakulás

Másodrendű fázisátalakulásról beszélünk, amennyiben a termodinamikai potenciál elsőrendű deriváltjai folytonosak, ám a másodrendű deriváltak, mint például a mágneses szuszceptibilitás (χ) vagy a fajhő (C) divergál a T_c kritikus hőmérsékleten. A mágneses szuszceptibilitásra vagy a fajhőre írhatjuk:

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = -\frac{\partial^2 G}{\partial H^2}; \qquad C = T\frac{\partial S}{\partial T} = -\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \tag{1.4}$$

ahol M a mágnesezettség, H a külső mágneses tér, h pedig annak normált értéke. Amíg a mágneses szuszceptibilitás vagy a fajhő divergensek T_c -nél, de van egy asszimptotikus skálázó viselkedésük. A T_c közelében a szuszceptibilitás és a fajhő hatványfüggvényei a redukált hőmérsékletnek

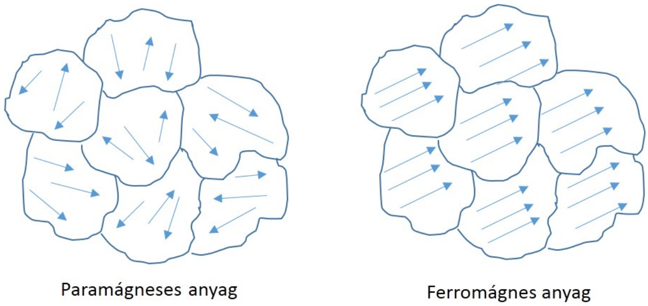
$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \tag{1.5}$$

és a h külső térnek. Ezen hatványfüggvények exponenseit nevezzük kritikus exponenseknek.

Másodrendű fázisátalakulásra példa a ferromágneses-paramágneses átmenet. Ennek áttekintése előtt nézzük meg, hogy mi az alapvető különbség a ferromágneses és a paramágneses anyag között. A ferromágneses anyagok kristályos szerkezetűek. Kristályukban az egyes tartományok (domének) mágnesezettsége nem nulla a külső mágneses tér hiányában sem. Mágnesezéskor a tarományok beállnak a külső térerősség irányába, ezzel megnövelve a mágneses indukciót (1.1. ábra).

A paramágneses anyagok ezzel szemben külső mágneses tér nélkül mágneses szempontból semlegesek. Ennek oka, hogy elektronjaik ugyan a saját mágneses momentumon kívül pályamomentummal is rendelkeznek, de ezek külső tér hiányában rendezetlenül helyezkednek el. Külső mágneses mező hatására azonban a mágneses momentumok bizonyos mértékben rendeződnek és beállnak a külső térerősség irányába. Másodrendű fázisátalakulásról beszélünk, amikor a ferromágneses anyagok a $T_c = T_{Curie}$ kritikus hőmérsékleten elveszítik mágneses tulajdonságukat és paramágnesessé válnak. (1.1. ábra)

A másodrendű fázisátalakuláson átmenő rendszerekben definiálhatunk egy rendezett és egy rendezetlen fázist. A rendezett fázis a kritikus hőmérséklet alatti $T < T_c$ alacsony hőmérséklettel [9], míg a rendezetlen fázis a kritikus hőmérséklet fölötti $T > T_c$ magas hőmérséklettel jellemezhető. A rendezettség jelenthet térbeli rendezettséget, amikor a rendszer valamely szimmetriája (például forgási szimmetriája) a rendezett fázisban spontán sérül, ellenben



1.1. ábra. Paramágneses illetve ferromágneses anyag és a mágneses doménszerkezet

a rendezetlen fázisban nincs szimmertiasértés.
Egy tetszőleges lokális fizikai mennyiség X(r) (pl. spin) korrelációs függvénye [10] alkalmas a hosszú távú térbeli rendezettség megahatározására [11],

$$G(r_1, r_2) \equiv \langle [X(r_1) - \langle X \rangle][X(r_2) - \langle X \rangle] \rangle. \tag{1.6}$$

Homogén és izotróp rendszerekben a korrelációs függvény csak a relatív távolság $r = |r_1 - r_2|$ nagyságától függ. A korrelációs függvény segítségével bevezethetünk egy hosszúság dimenziójú mennyiséget, a ξ korrelációs hosszt. Hosszútávú rendezettségnél ξ divergens, $T \to T_c$ esetén $\xi \to \infty$.

A rendezett és rendezetlen fázis megkülönböztetésére szolgáló másik fizikai mennyiség a rendparaméter $\Delta(T, h)$, amely nulla értéket vesz fel a rendezetlen fázisban és nullától különbözőt a rendezett fázisban. A rendparaméter folytonosan növekszik, ahogy a hőmérséklettel távolodunk a rendezett fázis fázisátmeneti pontjától. Ferromágneses rendszerekben például a rendparamétert definiálhatjuk, mint a rendszer spontán mágneses momentumának nagyságát $\Delta \equiv |M|$, zérus külső mágneses tér esetén. A rendszer rendezetlen fázisában (viszonylag közel a fázisátalakulási hőmérséklethez) sok-sok kis rendezett és rendezetlen doménről beszélhetünk, így a rendszer átlagos mágneses momentuma nulla. A fázisátalakulási ponthoz közelítve, egyre több és nagyobb rendezett doménről beszélhetünk, majd a fázisátalakulás során -mérettől függőenegyetlen vagy néhány nagy, rendezett doménünk lesz. Ezért a rendszer spontán mágneses momentuma nullától különböző értékűvé válik.

1.1.3. Végtelen rendű fázisátalakulás

A fázisátalakulások erősen függnek a rendszer dimenziójától. Például a Mermin-Wagner [11] tétel állítása szerint, azokban a modellekben, amelyekben rövid távú kölcsönhatások dominálnak (ahol a dinamikus változók száma $n \geq 2$) nem találunk hosszú távú térbeli rendezettséget $d = 1$ és $d = 2$ dimenzióban semmilyen véges hőmérsékleten. Ennek oka, hogy alacsony dimenzióban, alacsony frekvenciáknál a termikus fluktuációk elég erősek, hogy elrontsák a hosszú távú térbeli rendezettséget. Például egy kétdimenziós XY spinmodellben (rövid távú kölcsönhatásokkal) a rendszer spontán mágneses momentuma véges hőmérsékleten nulla lesz. Ezért ezekben a rendszerekben a rendparaméter hagyományos módon eltűnik. Ellentmondásnak tűnhet, hogy fázisátalakulás kétdimenziós rendszerekben rövid távú kölcsönhatások révén is megvalósulhat (például kétdimenziós Coulomb gáz [12], XY modell [13]). Ez a fázisátalakulás azonban nem másod-, hanem végtelen rendű, amely esetén létezik a rendszerben egy térbeli rendezettség, de nem a szokásos hosszú távú, hanem úgynevezett topológiai rendezettség.

Végtelen rendű fázisátalakulásnál a termodinamikai potenciál minden véges rendű deriváltja folytonos. A Berezinski-Kosterlitz-Thouless-féle (BKT) [14,15] fázisátalakulás például ilyen típusú. Fontos megjegyezni azonban, hogy a leírt tulajdonságok, illetve a mögöttük álló BKT (topológikus) fázisátalakulási mechanizmus d=2 dimenzióban működik.
Végtelen rendű fázisátalakulásról beszélhetünk a szuperfolyékony anyagok esetében. A ^4He film például a T_c kritikus hőmérséklet alatt szuperfolyékony állapotban van, és benne vortex-antivortex (örvény-antiörvény) párok jelentik a rendszer elemi gerjesztéseit. Vagyis a vortex dinamika fontos szerepet játszik a szuperfolyékony ^4He vékonyfilmekben tapasztalható fázisátmenet tanulmányozásában, amelynek leírására alkalmas az XY klasszikus spin modell [13].

$$Z_{2\mathrm{d-XY}} = \int \mathbf{D}[\mathbf{S}]\, \delta(\mathbf{S}^{\,2} - 1)\, \exp\left[-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \sum_{<x,y>} (-J)\, \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y \right], \tag{1.7}$$

ahol S_x spinváltozó egy kétdimenziós (klasszikus) vektor. Mérési eredmények alapján a szuperfolyékony sűrűséget ρ_s és a kritikus hőmérsékletet T_c univerzálisnak találjuk, $\rho_s(T_c)/T_c$ =állandó, és függetlennek a folyadék film egyéb paramétereitől.

A fázisátmenet rendparamétere egy komplex skalár, amely egy amplitúdóval és egy fázissal jellemezhető ($Ae^{i\Theta}$). A szuperfolyékony fázisban a rendparaméter nullától különböző és ha eltekintünk az amplitúdó fluktuációktól, akkor a rendszer gerjesztésit leírhatjuk a fázissal. A rendparaméter fázisa hasonló szerepet játszik az XY modellben definiált θ skalárral, amely felbontható egy vortex és egy spinhullám részre

$$\theta = \phi_{vortex} + \psi_{sw}. \tag{1.8}$$

Az XY modellben két fázist különböztethetünk meg. A molekuláris fázisban ($T < T_c$) a vortexek párokat képeznek és a spin-spin korrelációs függvény

$$G(r) = < S(r)\, S(0) > = < \cos(\theta(r) - \theta(0)) >, \tag{1.9}$$

csak a spin-hullám résztől függ

$$G(r) = G_{sw}(r) = < \cos(\psi(r) - \psi(0)) > . \tag{1.10}$$

A korrelációs függvénynek a következő skálatulajdonsága adható meg az η kritikus exponenssel

$$G_{sw}(r, t = 0) = r^{-\eta}, \tag{1.11}$$

ahol a t redukált hőmérsékletet nullára állítjuk be. Az XY modell keretén belül megkapjuk az η kritikus exponenst az (1.10) egyenletből,

$$\eta = \frac{1}{4}. \tag{1.12}$$

Anélkül, hogy a szuperfolyékonyság mikroszkópikus részleteit elemeznénk, a következő relációt írhatjuk fel a $\rho_s(T_c)$ szuperfolyékony sűrűségre [8]

$$\frac{m^2 k_B T_c}{\hbar^2 \rho_s(T_c)} = 2\pi\eta \tag{1.13}$$

ahol m a He atom tömege, k_B a Boltzmann faktor, T a hőmérséklet és η a kritikus exponens, amelyet a (1.11) egyenletben definiáltunk. Az (1.13) egyenletbe beírva $\eta = \frac{1}{4}$ értéket kapjuk,

$$\frac{m^2 k_B T_c}{\hbar^2 \rho_s(T_c)} = \frac{\pi}{2} \tag{1.14}$$

ami azt jelenti, hogy $\rho_s(T_c)/T_c$ meredekségének univerzálisnak kell lennie. Ez az elméleti megközelítés jó egyezést mutat a szuperfolyékony anyagok sűrűségére vonatkozó mérési eredményekkel, ami bizonyítja a vortex dinamika fontosságát és a használhatóságát.

1.2. Kritikus exponensek

Másodrendű fázisátalakulásnál különböző fizikai mennyiségek (pl. fajhő, szuszceptibilitás) skálázó viselkedést mutatnak a T_c kritikus fázisátmeneti pont közelében, azaz a redukált hőmérséklet és a külső tér (h) hatványfüggvényei lesznek. Ez a kritikus viselkedés. A G_r korrelációs függvényre, a ξ korrelációs hosszra és a Δ rendparaméterre egyaránt jellemző a kritikus viselkedés T_c közelében. A hatványfüggvények exponensei (a kritikus exponensek) eltérőek lehetnek a különböző rendszerekben, de az exponensek közötti relációk (skálatörvények) univerzálsak. A modelleket különböző univezalitási osztályokba sorolhatjuk a kritikus exponenseik alapján. Azok a rendszerek, amelyek azonos univerzalitási osztályba tartoznak, azonos kritikus exponensekkel rendelkeznek. Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül bemutatok néhány kritikus exponenst.

1. A β kritikus exponenst a $\Delta(t)$ rendparaméter hőmérséklet függése határozza meg zérus külső tér esetén a modell rendezett fázisában:

$$\Delta(t,h) \equiv \frac{\partial G}{\partial h}|_{p,T} \sim (-t)^{\beta}, \qquad h \to 0, \tag{1.15}$$

   ahol G a szabad entalpia ($\Phi = G$) és t a redukált hőmérséklet.

2. A δ kritikus exponenst úgy definiálhatjuk, mint a Δ rendparaméter külső tértől való függését a T_c kritikus hőmérsékleten:

$$\Delta(t=0,h) \sim h^{1/\delta}. \tag{1.16}$$

3. A szuszceptibilitás hőmérséklet függését a γ kritikus exponens határozza meg:

$$\chi = \left.\frac{\partial \Delta}{\partial h}\right|_{p,T} = -\left.\frac{\partial^2 G}{\partial h^2}\right|_{p,T} \sim |t|^{-\gamma}, \qquad \text{ha} \quad h \to 0. \tag{1.17}$$

4. Az α kritikus exponens a hőkapacitás hőmérséklet függése által határozható meg:

$$C = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{p,h} = -T\left.\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right|_{p,h} \sim |t|^{-\alpha}. \tag{1.18}$$

A fenti, dimenziófüggetlen kritikus exponensek egymástól nem függetlenek, közöttük bizonyos relációkat találunk. Ezek a relációk univerzálisak, azonosak lesznek különböző fizikai rendszerekben,

$$\gamma = \beta(\delta - 1), \tag{1.19}$$

$$2 = \alpha + \beta(\delta + 1). \tag{1.20}$$

Ezen skálatörvényeknek megfelelően csak két független kritikus exponens van. Definiálhatunk további kritikus exponenseket.

1. A $G(r)$ korrelációs függvény az r távolság hatványfüggvénye a T_c kritikus hőmérsékleten. Az η definíciója:

$$G(r, t = 0) \sim r^{-(d-2+\eta)}, \qquad \text{ha} \quad r \to \infty. \tag{1.21}$$

2. A rendezetlen fázisban ($t > 0$) a korrelációs függvénynek exponenciális asszimptotikus viselkedése van T_c közelében,

$$G(r, t) \sim e^{-r/\xi}, \qquad \text{ha} \quad r \to \infty. \tag{1.22}$$

   Ezt tekinthetjük a ξ korrelációs hossz definíciójának. A rendezetlen fázisban a korrelációs hossznak szintén hatványkitevős asszimptotikus viselkedése van,

$$\xi \sim |t|^{-\nu} \qquad \text{ha} \quad t \to 0^+. \tag{1.23}$$

Az újonnan bevezetett kritikus exponensekre kapott skálatörvények már függnek a rendszer d dimenziójától,

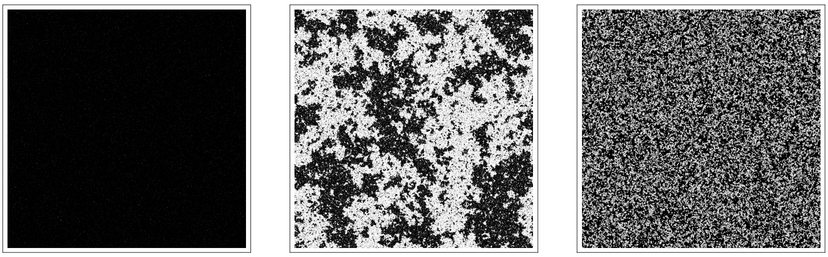
$$\nu\, d = 2 - \alpha, \tag{1.24}$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu. \tag{1.25}$$

1.3. Skálainvariancia

Másodrendű fázisátalakulások során kritikus viselkedést tapasztalhatunk a fázisátalakulási hőmérséklet közelében. Ennek hátterében az úgynevezett skálainvariancia áll [8], aminek a lényege, hogy a rendszer különböző méretskálán vizsgálva önhasonló marad. Tanulmányozzuk a skálainvarianciát a 2d Ising modell segítségével! Az Ising modell egy matematikai modell a ferromágnesesség leírására. A modell diszkrét változókból áll, amelyek az atomi spinek mágneses dipól momentumát képviselik, ezek két állapotúak lehetnek (+1 vagy -1). A spineket grafikusan egy rácsba rendezzük, általában a rács megengedi, hogy minden spin kölcsönhatásban legyen a szomszédjával. A 2d Ising modell négyzetrácson az egyik legegyszerűbb modell a fázisátmenet szemléltetésére.

Az alábbi ábrán látható, hogy $T < T_c$, illetve $T > T_c$ esetén nincs a modellnek sturtúrája. A $T = T_c$ kritikus hőmérsékleten az ábrán sok kicsi és kevés nagy doménét fedezhetünk fel. Amennyiben változtatjuk a megfigyelés skáláját, azt tapasztaljuk, hogy a modell struktúrája állandó marad, tehát $T \approx T_c$ kritikus hőmérsékleten, a rendszer skálainvariáns (1.2. ábra).



1.2. ábra. 2d Ising spin modell.

Mi a fizikai oka a kritikus viselkedésének? A válasz tehát a skálainvariancia. A rendszer a fázisátalakulás közelében skálainvariáns, azaz változtatva a megfigyelési skálát (például a rács méretét $a \to a'$), a modell partíciós függvénye változatlan marad. A skálainvarianciának megfelelően a termodinamikai potenciál az alábbi módon változik az átskálázáskor,

$$\Phi'(t', h') = \Phi(t', h'), \tag{1.26}$$

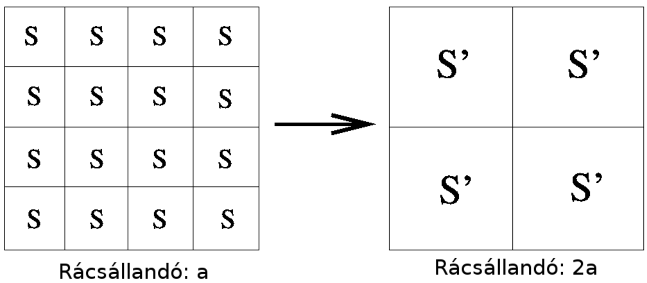
ahol Φ az eredeti rendszer termodinamikai potenciálja, amely a t redukált hőmérséklettől és a h külső tértől, Φ' pedig az átskálázott termodinamikai potenciál, amely az átskálázott t' és h' változóktól függ. Analógiát találhatunk a kvantumtérelmélettel, ahol a generáló funkcionál marad változatlan a megfigyelés skálájának változtatása közben. A skálainvarianciának megfelelően a termodinamikai potenciál homogén függvénye a redukált hőmérsékletnek és a külső térnek,

$$\Phi(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_h} h) = \lambda \Phi(t, h), \tag{1.27}$$

önkényesen megválasztott a_t, a_h és λ esetén. A fenti reláció a Wilkinson-Kadanoff blokkosítási eljárás [16] segítségével érthető meg, amit a következő fejezetben tárgyalok.

1.4. Wilson-Kadanoff blokkosítás

Tekintsünk egy klasszikus spin rendszert rácson!Az alábbi ábra egy blokkosítási lépést szemléltet az eredeti rendszer átskálázásával (a'=b*a).



1.3. ábra. Kadanoff blokkosítás

A blokkosított rendszerben definálhatjuk a spinek egy blokkját az új a' rácsméret segítségével, amely tartalmazza az eredeti rendszer b^d rácspontjait. Az eredeti rendszer minden spin blokkja helyettesíthető a spinek egy átlagával. Minden fizikai mennyiség átskálázódik az új rácsméretnek megfelelően. Egy blokk Φ' termodinamikai potenciálja megfeleltethető a eredeti Φ potenciál és a rácspontok számának szorzatával,

$$\Phi'(t', h') = b^d \Phi(t, h). \tag{1.28}$$

A skálainvarianciának megfelelően a következő relációk érvényesek a blokkosított külső hőmérsékletre és a blokkosított térre

$$t' = b^{a_t d} t, \qquad h' = b^{a_h d} h. \tag{1.29}$$

Behelyettesítve az (1.29) egyenletet az (1.28) egyenletbe, adódik a termodinamikai potenciál homogenitása (1.27) (ahol $\lambda = b^d$). A kritikus exponensek származtathatóak (1.27) alapján a külső tér vagy a redukált hőmérséklet által. Például a δ kritikus exponens a következő módon kapható meg

$$\frac{\partial \Phi(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_h} h)}{\partial h} = \lambda^{a_h} \Delta(\lambda^{a_t} t, \lambda^{a_h} h) = \lambda \Delta(t, h), \tag{1.30}$$

ahol $\Delta(t, h) \equiv \partial \Phi(t, h)/\partial h$ fázisátmenet rendparamétere. Mivel λ önkényesen választott, így definiálhatjuk $1 = \lambda^{a_h} h$. Behelyettesítve $\lambda = h^{-1/a_h}$ az (1.30) egyenletbe, $t = 0$ esetén az egyenlet erre redukálódik

$$\Delta(0, 1) h^{(1-a_h)/a_h} = \Delta(0, h) \tag{1.31}$$

ahol $\Delta(0, 1)$ konstans. A $\delta = a_h/(1 - a_h)$ kritikus exponenst megkaphatjuk a (1.31) egyenletből. Ezzel a módszerrel a többi kritikus exponens is származtatható a (1.27) reláció segítségével. Ezért levonhatjuk a fázisátalakulásokról azt a következtetést, hogy a termodinamikai potenciál skálainvarianciája kritikus viselkedést eredményez a rendszerekben a fázisátalakulási pont közelében.

1.5. Renormálási csoport (RG) módszer

Ebben az alfejezetben a renormálási csoport (RG) módszer [8, 18] lényegét ismertetem és megmutatom, hogyan kapcsolódik az előzőekben tárgyalt skálainvarianciához, illetve a Wilson-Kadanoff blokkosításhoz [16, 17].
Tekintsük az RG transzformációk szisztematikus megvalósítását egy rácson megfogalmazott spinmodell segítségével. A rendszer a fázisátalakulás fixpontjában skálainvariáns, így a Kadanoff blokkosítás során a partíciós függvény is skálainvariáns lesz

$$Z \equiv Tr \exp[-\beta J_a \sum S_i S_j] = Tr' \exp[-\beta J_{2a} \sum S'_i S'_j], \tag{1.32}$$

ahol $\beta \equiv 1/(k_b T)$ az inverz hőmérséklet. Mi történik, ha a rendszer távol van a fázisátalakulási ponttól, vagy egyáltalán nem megy át fázisátalakuláson? Ebben az esetben új kölcsönhatási tagok generálódnak a blokkosítási lépések által és a Hamilton függvény funkcionális alakja nem őrződik meg. Például írhatjuk

$$H_a = J_a \sum S_i S_j \quad \to \quad H_{2a} = J_{2a} \sum S'_i S'_j + G_{2a} \sum S'_i S'_j S'_k.$$

A blokktranszformáció során természetesen generálódhatnak más kölcsönhatási tagok is, a wilsoni [17] elképzelés szerint minden ilyen generálódó tagot figyelembe kell venni. Azonban a módszer érzékeltetésénél csak három spin csatolásokat tartalmazó új típusú kölcsönhatást feltételeztem.

Vagyis

$$H_a = J_a \sum S_i S_j + G_a \sum S_i S_j S_k, \qquad G_a = 0$$

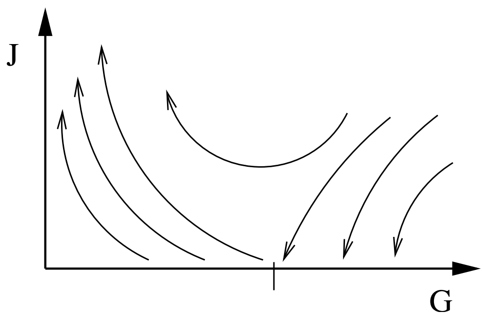
esetben a funkcionális forma megőrződik. Ezek után többször végrehajtva a blokkosítást

$$\begin{aligned} H_a &= J_a \sum S_i S_j + G_a \sum S_i S_j S_k \\ H_{2a} &= J_{2a} \sum S'_i S'_j + G_{2a} \sum S'_i S'_j S'_k \\ H_{3a} &= J_{3a} \sum S''_i S''_j + G_{3a} \sum S''_i S''_j S''_k \end{aligned}$$

kiolvashatjuk a RG futás egyenleteit felhasználva Z invarianciáját,

$$\frac{d}{da} J(a) = f_1(J, G, a), \qquad \frac{d}{da} G(a) = f_2(J, G, a).$$

Az így kapott RG egyenletek megoldása eredményezi az elmélet csatolásainak skálázását, lásd az 1.4 ábrát.



1.4. ábra. Az RG egyenletek megoldása során kapott skálafüggés szemléltetése.

Tekintsünk egy blokkot az impulzus térben, ahol a skálaparaméter szerepét most egy futó impulzus levágás $k \sim 1/a$ játssza. Az RG transzformáció (R_k) fixpontját definiálhatjuk, mint

$$\mathcal{R}_k(H^*) = H^* \tag{1.33}$$

ahol H^* a rendszer fixpontban felvett Hamilton függvénye. H^* körül osztályozhatjuk a csatolási állandókat az alábbi módon. Feltételezve, hogy az RG transzformáció a csatolások analitikus függvénye, kiterjeszthetjük a H^* fixpont körül

$$\mathcal{R}_k(H^* + \epsilon O) = \mathcal{R}_k(H^*) + \epsilon L_k(O) = H^* + \epsilon L_k(O) \tag{1.34}$$

ahol ϵ infinitezimális és L_k az RG transzformáció linearizált alakja a H^* fixpont körül, továbbá O_i jelöli a linearizált RG transzformációhoz tartozó skálázó operátorokat (sajátvektorokat),

$$L_k(O_i) = \lambda_i(k)\, O_i \tag{1.35}$$

$\lambda_i(k)$ sajátértékekkel, amelyek függnek az RG transzformációk k paraméterétől. A Hamilton függvény így a következő alakban írható

$$H = H^* + \sum_i g_{i,0} O_i \tag{1.36}$$

ahol g_i a csatolások, a $\lambda_i(k)$ sajátértékek pedig az RG transzformációk skálaparamétereinek hatványfüggvényei,

$$\lambda_i(k) = k^{y_i}. \tag{1.37}$$

Ezt felhasználva az RG transzformáció a következő alakban írható

$$\mathcal{R}_k(H(g_{i,0})) = \mathcal{R}_k(H^* + \sum_i g_{i,0} O_i) = H^* + \sum_i g_{i,0} k^{y_i} O_i, \tag{1.38}$$

ahonnan leolvasható a csatolások skálázása

$$g_i(k) = g_{i,0}\, k^{y_i}. \tag{1.39}$$

Azaz a fixpont körül az y_i exponensek meghatározzák a csatolási állandók skálázását. Megfeleltethetők releváns, irreleváns és marginális skálaoperátorok (csatolások), a sajátértékek pozitív, negatív és nulla exponenseinek.

2. fejezet

Funkcionális renormálási csoport módszer

A kvantumtérelméleti modellek és a kritikus statisztikus rendszerek hasonló tulajdonságokkal jellemezhetőek, az előbbiben kvantumfluktuációk az utóbbiban termikus fluktuációk szabják meg a rendszer viselkedését. A $d = D + 1$ dimenziós (D térdimenziós és egy idődimenziós) kvantumtérelméleti modellek ekvivalensek a d térdimenziós statisztikus rendszerekkel. Ezért a statisztikus rendszerek fázisátalakulás közeli viselkedésének megértéséhez elegendő megadni a nekik megfelelő kvantumtérelméleti modellt, majd származtatni annak kritikus viselkedését például funkcionális RG módszer (FRG) segítségével. A fejezetben erősen követem a [4], illetve a [6] publikáció ide vonatkozó fejezeteit, valamint a [25] hivatkozás bevezető részét.

2.1. Skálafüggés kvantumtérelméletben

Egy kvantumtérelméleti modell nulla hőmérsékleten ekvivalens egy nem zérus hőmérsékletű klasszikus, nem kvantált, statisztikus fizikai modellel. Kvantumtérelméletben kvantumfluktuációkkal, statisztikus modellek esetén termikus fluktuációkkal találkozhatunk. A statisztikus modell kanonikus partíciós függvénye

$$Z = \mathcal{N} \mathrm{Tr} \exp\left(-\frac{1}{k_B T} H\right), \tag{2.1}$$

ahol H a Hamilton függvény, amely kapcsolatba hozható a kvantumtérelmélet Green-függvényeinek generáló funkcionáljával.

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\mathcal{S}[\phi]\right), \tag{2.2}$$

ahol $\hbar$ a redukált Planck állandó, $\mathcal{S}[\phi]$ a csupasz (nem renormált) hatás, $\phi(x)$ pedig az egyszerűség kedvéért egykomponensű skalártér.

A Helmholtz szabadenergia $F[T] = -k_B T \ln[Z]$ megfelel a $W[J]$ generáló funkcionálnak, $W[J] = -\mathrm{Tr}\ \ln Z$, ahol $J(x)$ a forrás, a Gibbs-féle szabadenergia ($U[S]$) pedig az entrópia függvényeként jelenik meg. Közöttük a Legendre transzformáció teremt kapcsolatot

$$U[S] - F[T] = TS, \qquad T = \frac{\partial U[S]}{\partial s}, \qquad S = -\frac{\partial F[T]}{\partial T}, \tag{2.3}$$

ami hasonlóan a kavantumtérelméletben ismert Legendre transzformációhoz, összekapcsolja a fent említett $W[J]$ generáló funkcionált és az úgynevezett effektív hatást

$$\Gamma[\phi] + W[J] = \int (J\phi) d^d x, \qquad \phi = \frac{\delta W}{\delta J}, \qquad J = \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi}. \tag{2.4}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az előző fejezetben tárgyalt skálafüggés hogyan jelentkezik kvantumtérelméletben, azaz az elemi részek fizikájában! Az elemi részecskéket vizsgálva kvantummechanikai leírást kell alkalmaznunk, illetve figyelembe kell venni a határozatlansági relációkat. Egyidejűleg nem tudjuk tetszőleges pontossággal megadni egy részecske sebességét (impulzusát) és helyét.

$$(\Delta x)(\Delta p_z) \geq \hbar/2, \tag{2.5}$$

ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy Δt ideig sérülhet ΔE-vel az energiamegmaradás törvénye. Az energiára és az időre is felírhatjuk a határozatlansági relációt

$$(\Delta t)(\Delta E) \geq \hbar/2. \tag{2.6}$$

Részecskefizikában nagy sebességgel rendelkező részecskéket ütköztetünk, amelyek leírására a speciális relativitáselmélet alkalmazható. A részecske energiája (E), impulzusa (p) és nyugalmi tömege (m) között teremt kapcsolatot az alábbi, diszperziós reláció

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}, \tag{2.7}$$

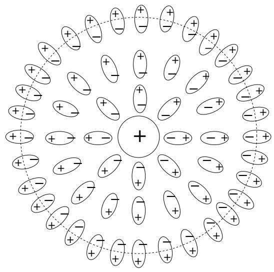
a képletben c a vákuumban mért fénysebességet jelöli. Nulla impulzus esetén a képlet a részecske nyugalmi energiáját adja, ami nem más, mint a tömeg-energia ekvivalencia reláció

$$E = mc^2. \tag{2.8}$$

A képlet alapján azt mondhatjuk, hogy az energia és a tömeg egymásba átalakítható, ez másként megfogalmazva azt jelenti, hogy részecskéket kelthetünk energia segítségével.

Amennyiben figyelembe vesszük a kvantumfluktuációk hatását, az energia-idő határozatlansági reláció alapján az energiamegmaradás is sérülhet egy nagyon kicsi időintervallumon. Ezen ΔE energiát felhasználva virtuális részecskék keletkezhetnek a tömeg-energia ekvivalencia miatt. Ezek lehetnek például virtuális elektron-pozitron párok, amelyek közvetlenül ugyan nem mérhetők, azonban közvetett hatásuk jelentős. Azaz a relativitáselmélet és a kvantummechanika összefüggései alapján azt várjuk, hogy a vákuumban is folyamatosan keletkeznek és megszűnnek virtuális részecskék. Mivel az elektromos töltés megmaradása nem sérülhet, ezért ezek a virtuális részecskék egymással ellentétes töltésű párokban keletkeznek: például keletkezhet egyszerre egy elektron és egy pozitron, mint részecske-antirészecske pár. Ugyan közvetlenül nem mérhetők ezen virtuális részecskék, azonban hatásukat érzékeljük, amikor például egy próbatöltéssel szeretnénk meghatározni egy valódi részecske töltését [4].

Ez jól szemléltethető a 2.1 ábrával, amelyen az látható, ahogyan egy töltött (ebben a vizsgálatban pozitív) részecske körül a virtuális elektron-pozitron párok dipólusként rendeződve polarizálják a vákuumot, és egyben leárnyékolják a mérendő részecske töltését. Képzeljük el, hogy egy R sugarú gömbbel vesszük körül a vizsgálandó központi töltést. Ez a gömb a virtuális elektron-pozitron párokat „kettéválasztja”, ezért a vizsgálandó töltést leárnyékolják a „párok” elektronjai. Vajon mitől függ a „szétvágott” párok száma, azaz a leárnyékolás mértéke? A kérdés megválaszolásához gondoljuk át, hogy amikor messzebbről szemléljük a központi töltést, akkor a „szétválasztott” párok száma keveset változik, ha kicsit közeledünk, vagy távolodunk a próbatöltéshez viszonyítva. Viszont ha a próbatöltéshez közel hajtjuk végre ezt a közeledést-távolodást, akkor már a „szétválaszott” elektron-pozitron párok száma jelentős mértékben változik a gömb sugarának (R) pici változtatására is. Ez arra mutat rá, hogy egy töltés megmérésekor kapott érték változhat annak függvényében, hogy milyen távolságból, azaz milyen energián vizsgálom.



2.1. ábra. Központi töltés körül elhelyezkedő virtuális elektron-pozitron párok szemléltetése [4].

Tehát a virtuális részecskék közvetett hatása miatt a klasszikus fizikából jól ismert mennyiségek értéke attól függ, hogy milyen energia, illetve méretskálán vizsgáljuk azokat. Ezt nevezzük skálafüggésnek. Ennek megfelelően be kell, hogy vezessünk egy skálafüggő effektív hatást,

$$\Gamma \to \Gamma_k \tag{2.9}$$

ahol az effektív hatásban szereplő paraméterek (csatolások) függvényei az impulzusskálának.

Vagyis a kvantálás és a relativisztikus leírás együttes alkalmazása eredményeképpen a modellek paraméterei skálafüggővé válnak, ezért a méréssel történő összehasonlítás úgynevezett renormálást követel. A renormálás végrehajtásával meghatározhatjuk a skálafüggést, azaz megadhatjuk, azok különböző energián felvett értékeit [8]. A renormálás nem-perturbatív megvalósításának egyik eszköze a funkcionális renormálási csoport (FRG) módszer. Az FRG alkalmas arra, hogy megadja a modell paramétereinek függését a hossz- illetve az energiaskálától.

2.2. A funkcionális RG módszer

2.2.1. Wegner-Houghton RG egyenlet

A wilsoni renormálási csoport keretében a Wegner-Houghton [26] egyenlet bevezetésekor az RG transzformációkat úgy valósítjuk meg, hogy a blokosítási eljárás során, kiintegráljuk a tér azon ϕ_q módusait, amelyekre teljesül a $k < q$ feltétel, ahol k a futó ultraibolya impulzus levágás. Következésképpen az $S_k[\phi]$ hatás által definiált effektív elmélet tartalmazza azon kvantumfluktuációkat, melyek frekvenciája kisebb, mint a k impulzus levágás.

A Z generáló funkcionál kifejezhető a következő módon az $S_k[\phi]$ hatásból, amelyet a k impulzus levágással definiálunk,

$$Z = \left(\prod_{|q|<k} \int \mathrm{d}\Phi_q \right) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_k[\Phi_q] \right]. \tag{2.10}$$

Bár az $S_k[\Phi_q]$ hatást szimmetria megfontolások segítségével írjuk fel, ilyen értelemben csupasz (klasszikus) hatásnak tekintjük, de definíciójából következik, hogy ez is egyfajta effektív hatásnak tekinthető, amelyet egy k-nál jóval nagyobb impulzus skálán definiált regularizált elméletből származtattam. Az $S_k[\Phi_q]$ hatás függ a Fourier sorral kifejezett tértől, és tartalmazza a ϕ_q módusokat, ahol $q < k$. Egy infinitezimális RG transzformációt alkalmazva, a tér Fourier sorbafejthető és szétválasztható egy lassú és egy gyors fluktuációs részre, amely megfelel az alacsony és a magas frekvenciás Fourier módusoknak,

$$\Phi(x) = \phi(x) + \hat{\phi}(x) = \sum_{|q|<k-\Delta k} \phi_q e^{iqx} + \sum_{k-\Delta k<|q|<k} \hat{\phi}_q e^{iqx}. \tag{2.11}$$

Így a k impulzus levágás $(k - \Delta k)$-ra módosul, és a tér magas frekvenciás fluktuációi kiintegrálhatók az impulzustérben. Egyrészről a (2.10) kifejezés így írható át,

$$Z = \left(\prod_{|q|<k-\Delta k} \int \mathrm{d}\phi_q \right) \left(\prod_{k-\Delta k<|q|<k} \int \mathrm{d}\hat{\phi}_q \right) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_k[\Phi_q] \right]. \tag{2.12}$$

Másrészről megköveteljük a Z generáló funkcionál invarianciáját

$$Z = \left(\prod_{|q|<k-\Delta k} \int \mathrm{d}\phi_q \right) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_{k-\Delta k}[\phi_q] \right], \tag{2.13}$$

így leolvasható a blokkosított hatásra vonatkozó RG transzformáció

$$\exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_{k-\Delta k}[\phi] \right] = \left(\prod_{k-\Delta k<|q|<k} \int \mathrm{d}\hat{\phi}_q \right) \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_k[\phi + \hat{\phi}] \right], \tag{2.14}$$

ahol a ϕ és a $\hat{\phi}$ térváltozók olyan ϕ_q Fourier komponenseket tartalmaznak, ahol $|p| < k - \Delta k$, illetve $k - \Delta k < |p| < k$. Minden infinitezimális lépésben elvégezhetjük a (2.14)-ben a pályaintegrált a nyeregpont közelítés segítségével. A sorfejtés egy általános $\hat{\phi}_{cl}$ nyeregpont körül így írható

$$S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl} + \hat{\phi}'] = S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}] + \sum_{k-\Delta k<|p|<k} F_p\, \hat{\phi}'_p + \frac{1}{2} \sum_{k-\Delta k<|p|<k} \hat{\phi}'_p\, K_{p,-p}\, \hat{\phi}'_{-p} + \mathcal{O}(\hat{\phi}'^3) \tag{2.15}$$

a következő nyeregponti egyenletekkel

$$F_p = \frac{\delta S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}]}{\delta \phi_p} = 0, \qquad K_{p,-p} = \frac{\delta^2 S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}]}{\delta \phi_p \delta \phi_{-p}}. \tag{2.16}$$

Amint látható megálltam a kvadratikus tagnál a sorfejtésben így (2.15) használatával a (2.14) egyenletben szereplő pályaintegrál Gauss típusú lesz, ezért elvégezhető. A nyeregponti sorfejtéssel kapott alak a következő

$$\exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_{k-\Delta k}[\phi + \hat{\phi}_{cl}]\right] = \left(\det K_{p,-p}[\phi + \hat{\phi}_{cl}]\right)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{\hbar} S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}]\right]. \tag{2.17}$$

Mindkét oldalának logaritmusát véve és használva a $\ln\det(K) = \mathrm{Tr}\,\ln(K)$ egyenlőséget kaptam a következő összefüggést

$$-\frac{1}{\hbar} S_{k-\Delta k}[\phi + \hat{\phi}_{cl}] = -\frac{1}{\hbar} S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}] - \frac{1}{2} Tr \ln(K_{p,-p}[\phi + \hat{\phi}_{cl}]) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{2.18}$$

Ha Δk infinitezimális, akkor a (2.18) egyenletben a trace felírható, mint $\mathrm{Tr} = k^{d-1} \Delta k (2\pi)^{-d} \int \mathrm{d}\omega$, ahol $\int \mathrm{d}\omega$ a d-dimenziós térszög integrál.

Belátható, hogy a (2.18) egyenlet második tagja $\mathcal{O}(\Delta k)$ rendű. Továbbá az is igazolható, hogy az elhanyagolt magasabb rendű hurokkorrekciók $\mathcal{O}(\Delta k^2)$ rendűek. Ezért véve a $\Delta k \to 0$ limeszt a (2.18) egyenlet egzakttá válik, amely tartalmazza az összes hurok korrekciót. Ezt nevezzük a Wegner–Houghton RG egyenletnek.

$$k \partial_k S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}] = -\frac{k^d}{2} \int \frac{\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^d}\, \hbar\, \ln(K[\phi + \hat{\phi}_{cl}])_{kn,-kn}. \tag{2.19}$$

ahol $\hat{\phi}_{cl} = \hat{\phi}_{cl}[\phi]$ a ϕ tér funkcionálja, amely megkapható a $\delta S_k[\phi + \hat{\phi}_{cl}]/\delta \phi_p = 0$ összefüggésből. Ha a nyeregpont triviális, $\hat{\phi}_{cl} = 0$, akkor a Wegner–Houghton

RG egyenlet [26] a következő alakra redukálódik

$$\boxed{k\partial_k S_k[\phi] = -\frac{k^d}{2}\hbar \int \frac{\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^d} \ln\left(\frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta\phi\delta\phi}\right).} \tag{2.20}$$

A nem-triviális nyeregpont esetével az értekezésben nem foglalkozom. Érdemes megjegyezni, hogy a Wegner–Houghton RG egyenlet [26] származtatható az effektív hatás 1-hurok kifejezéséből is, ha a csupasz (skálafüggetlen) hatást lecseréljük a skálafüggő blokkosított hatásra. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az egzakt (2.20) egyenletben a logaritmus argumentumában elvégezzük az $\mathcal{S}_k[\phi] \to \mathcal{S}_\Lambda[\phi]$ cserét, akkor visszakapjuk a szokásos 1-hurok kifejezést [28].

2.2.2. Wetterich RG egyenlet

Mielőtt rátérnék a Wetterich egyenlet [27] szakirodalomban jól ismert levezetésének vázlatos ismertetésére megadok egy formális levezetést, azaz megmutatom az egzakt egyenlet kapcsolatát az effektív hatás 1-hurok perturbatív kifejezésével,

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_\Lambda + \frac{\hbar}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln\left[S_\Lambda^{(2)}\right] + \mathcal{O}(\hbar^3), \tag{2.21}$$

ahol S_Λ a csupasz (klasszikus) hatás. A formális levezetés arra az észrevételre épül, hogy a funkcionális RG egyenlet interpolál a csupasz és a kvantum effektív hatás között, továbbá származtatható az effektív hatás egy-hurok kifejezéséből. Ilyen értelemben szokás „egy-hurok feljavított" (azaz 1-loop improved) RG egyenletről beszélni lásd [28, 30, 31], ahol a „feljavítást" az $S_\Lambda \to S_k$ cserével érik el (lásd még a (2.20) egyenlet utáni megjegyzést). Az általam tárgyalt formális levezetés a szakirodalomban is ismert, például a [32] hivatkozás (12)-(14) képletei. Az impulzus integrál divergens lehet a felső (UV) és az alsó (IR) határok szerint. Az impulzus levágás egy standard választás az integrál regularizálsára, de választhatjuk a Pauli-Villars regularizációt is, hozzáadva egy impulzusfüggő $\frac{1}{2}\int R_k(p)\varphi^2$ kifejezést a csupasz (klasszikus) hatáshoz és bevezetve a következő skálafüggő hatást

$$\Gamma_k \equiv S_\Lambda + \frac{\hbar}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln\left[R_k + S_\Lambda^{(2)}\right]. \tag{2.22}$$

A skálafüggő effektív hatás Γ_k, a klasszikus csupasz hatás $\Gamma_{k\to\Lambda} \equiv S$ és a teljes kvantum effektív hatás $\Gamma_{k\to 0} \equiv \Gamma$ között interpolál, a k futó impulzus skála segítségével. Tehát Γ_k visszaadja a klasszikus és az effektív hatást (1-hurok közelítésnél) az UV és IR határokon, amennyiben az $R_k(p)$ regulátorfüggvény eleget tesz az alábbi követelményeknek

$$R_{k\to 0}(p) = 0, \quad R_{k\to\Lambda}(p) = \infty, \quad R_k(p\to 0) > 0. \tag{2.23}$$

$$\Gamma_{k\to 0} = \Gamma_{\text{eff}}, \qquad \Gamma_{k\to\Lambda} = \Gamma_\Lambda \equiv S_\Lambda, \tag{2.24}$$

Az utolsó követelmény a (2.23) kifejezésben, az impulzus integrál IR divergenciájának eltávolításához szükséges.

A (2.22) egyenlet k szerinti deriválásából kapjuk a következő formulát:

$$\partial_k \Gamma_k = \frac{\hbar}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \partial_k \ln\left[R_k + S_\Lambda^{(2)}\right] = \frac{\hbar}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\partial_k R_k}{R_k + S_\Lambda^{(2)}}. \tag{2.25}$$

Végül annak érdekében, hogy legyen egy egzakt kifejezésünk [28, 68], a csupasz hatást a jobb oldalon le kell cserélni a skálafüggő hatásra $S_\Lambda^{(2)} \to \Gamma_k^{(2)}$, majd mindkét oldalt k-val szorozva kapjuk, hogy

$$k\partial_k \Gamma_k = \frac{\hbar}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{k\partial_k R_k}{R_k + \Gamma_k^{(2)}}, \to \boxed{k\partial_k \Gamma_k[\varphi] = \frac{\hbar}{2}\text{Tr}\left(\frac{k\partial_k R_k}{R_k + \Gamma_k^{(2)}[\varphi]}\right)} \tag{2.26}$$

amely a Wetterich RG egyenlet [27] egykomponensű skalártérre.

Az RG módszer a csatolások által parametrizált belső térben végez transzformációt. Az RG futás pedig egy trajektória ebben a belső térben. Ezen eljárás nemcsak kvalitatív képet biztosít fázisdiagramok és fixpontok szerkezetéről, de pontos kvantitatív becslést is ad kritikus tulajdonságok, például kritikus exponensek és univerzális mennyiségek értékére.

Ismertetem a Wetterich egyenlet részletes levezetését, ahol erősen támaszkodom a [33] referenciára. Definiáljuk a következőket

$$Z_k[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left(-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + \int J\phi\right) \tag{2.27}$$

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_q R_k(q)\,\phi(q)\,\phi(-q) \tag{2.28}$$

$$W_k[J] = \log Z_k[J] \tag{2.29}$$

$$\Gamma_k[\phi] + W_k[J] = \int_x J\phi - \frac{1}{2}\int_{x,y} \phi(x)\,R_k(x-y)\,\phi(y) \tag{2.30}$$

ahol $\phi(x)$-et az alábbi összefüggés definiálja

$$\frac{\delta W_k}{\delta J(x)} = \phi(x) = \langle\phi(x)\rangle \tag{2.31}$$

Abban az esetben, ha $J(x)$-t választjuk k függetlennek (akárcsak $Z_k[J]$ esetében), akkor a W_k-ból számolt $\phi(x)$ lesz k függő. Ez fordítva is igaz, ha $\phi(x)$-et rögzítjük (ahogyan $\Gamma_k[\phi]$-nél szerepel), akkor a (2.35) egyenletből számolt $J(x)$ válik k függővé.

RG egyenlet $W_k[J]$-re.

$$\begin{aligned}
\partial_k e^{W_k} &= -\frac{1}{2}\int \mathcal{D}\phi \left(\int_{x,y} \phi(x)\,\partial_k R_k(x-y)\,\phi(y)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-S[\phi] - \frac{1}{2}\int_q R_k(q)\,\phi(q)\,\phi(-q) + \int J\phi\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\int_{x,y} \partial_k R_k(x-y)\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right) e^{W_k[J]}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Tehát a $W_k[J]$ RG egyenlete

$$\partial_k W_k[J] = -\frac{1}{2}\int_{x,y} \partial_k R_k(x-y)\left(\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} + \frac{\delta W_k}{\delta J(x)}\frac{\delta W_k}{\delta J(y)}\right) \tag{2.33}$$

ami a Polchinski egyenlettel ekvivalens.

Először keressük meg a (2.31) összefüggés fordítottját. A Legendre transzformáció szimmetrikus a két transzformált függvényre nézve. Itt Γ_k +

$1/2 \int \phi R_k \phi$ a W_k Legendre transzformáltja, így

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\Gamma_k + \frac{1}{2}\int_{x,y}\phi(x)R_k(x-y)\,\phi(y)\right) = J(x) \tag{2.34}$$

amiből adódik, hogy

$$\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\phi(x)} = J(x) - \int_y R_k(x-y)\,\phi(y) \tag{2.35}$$

A Polchinski egyenletben (2.33) a k derivált rögzített $J(x)$ mellett értendő. Ezt módosítanunk kell rögzített ϕ értékkel vett deriváltra

$$\partial_k|_J = \partial_k|_\phi + \int_x \partial_k\phi(x)|_J \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \tag{2.36}$$

A $\partial_k|_J$-t a (2.30) egyenletre hattatva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_k\Gamma_k[\phi]|_J + \partial_k W_k[J]|_J = &\int_x J\,\partial_k\phi|_J - \frac{1}{2}\int_{x,y}\partial_k R_k(x-y)\,\phi(x)\,\phi(y)\\ &-\int_{x,y} R_k(x-y)\,\phi(x)\,\partial_k\phi(y)|_J\end{aligned} \tag{2.37}$$

Ebbe az egyenletbe a (2.35),(2.33),(2.36) egyenleteket behelyettesítve végül az alábbi összefüggésre jutunk

$$\partial_k\Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_{x,y}\partial_k R_k(x-y)\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} \tag{2.38}$$

Utolsó lépésként írjuk át a jobb oldalt, hogy csak Γ_k tagok szerepeljenek benne. Induljunk ki a (2.31) egyenletből, amit $\phi(z)$ szerint funkcionálderiválva

$$\delta(x-z) = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta\phi(z)} = \int_y \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(z)} \tag{2.39}$$

Felhasználva a (2.35) összefüggést

$$\delta(x-z) = \int_y \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)}\left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\phi(y)\delta\phi(z)} + R_k(y-z)\right) \tag{2.40}$$

Ezután az alábbi jelölést használva

$$W_k^{(2)}(x,y) = \frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x)\delta J(y)} \tag{2.41}$$

írhatjuk, hogy

$$\delta(x-z) = \int_y W_k^{(2)}(x,y)\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k\right)(y,z) \tag{2.42}$$

amiből látható, hogy a $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ az $W_k^{(2)}$ inverze ha operátorokként tekintünk rájuk, és ez tetszőleges ϕ-re igaz. Fontos megjegyezni, hogy habár nem jelöltük, de $W_k^{(2)}$ a $J(x)$ funkcionálja valamint $\Gamma_k^{(2)}$ a $\phi(x)$ funkcionálja. Végül felírhatjuk a (2.38) RG egyenlet Γ_k-ra.

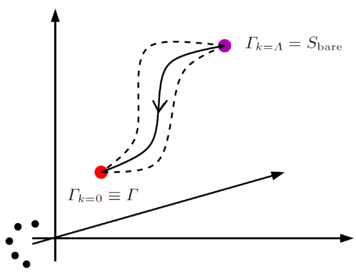
$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_{x,y} \partial_k R_k(x-y)\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k\right)^{-1}(x,y) \tag{2.43}$$

ami a Fourier transzformált téren

$$\partial_k \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_q \partial_k \tilde{R}_k(q)\left(\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \tilde{R}_k\right)^{-1}(q,-q) \tag{2.44}$$

2.3. Közelítések és azok hatása

Az egzakt RG egyenletből származtatott fizikai eredmények függetlenek a regulátor speciális megválasztásától [19], ami azt jelenti, hogy a skálafüggő effektív hatás UV és IR határai jól definiáltak, $\Gamma_{k\to 0} = \Gamma_{\text{eff}}$ és $\Gamma_{k\to\Lambda} = S_\Lambda$. Vagyis az RG futás a paramétertérben függ a regulátor megválasztásától, de a kezdő és a végértékek nem, lásd a 2.2 ábrát, ami a [22] publikációból lett átvéve.



2.2. ábra. Egzakt RG futás az effektív hatás paraméterterében [22], függ a regulátor speciális megválasztásától, azonban a kezdő és végértékei regulátorfüggetlenek.

Az RG egyenlet egy funkcionális parciális differenciálegyenlet, ezért megoldásához közelítések szükségesek. Gyakran használt szisztematikus közelítés a csonkolt gradiens (vagy derivatív) sorfejtés, ahol Γ_k a tér deriváltjainak hatványai szerint van sorfejtve

$$\Gamma_k[\varphi] = \int d^d x \left[V_k(\varphi) + Z_k(\varphi)\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + ... \right]. \tag{2.45}$$

A gradiens sorfejtés vezető rendje az LPA (Local Potential Approximation) azaz a lokális potenciál közelítés, amikor csak a potenciál hordoz skálafüggést.
Az RG egyenletek megoldása olykor további közelítéseket igényel, például a $V_k(\varphi)$ potenciál Taylor vagy Fourier sorfejtése a térváltozó szerint (N_{cut} levágással)

$$V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{cut}}} \frac{g_n(k)}{n!}\varphi^n, \qquad V_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{N_{\mathrm{cut}}} u_n(k)\cos(n\beta\varphi), \tag{2.46}$$

ahol a skálafüggés a $g_n(k)$ vagy $u_n(k)$ csatolásokba van kódolva.

A közelítések alkalmazása során nem csak az RG futás függ a regulátorfüggvény megválasztásától, vagyis a renormálási sémától, hanem az IR limeszben kapott fizikai eredmények is sémafüggővé válhatnak. Ezért alapvető fontosságú a különböző RG sémákkal kapott eredmények összehasonlítása, illetve a „legjobb" séma kiválasztása.

2.3.1. Optimalizálás

Tehát azért, hogy prediktívvé tegyem az RG módszert, nélkülözhetetlen a sémafüggés optimalizálása. Egy általános optimalizálási eljárás eredménye a Litim-féle regulátor [34]. A gradiens sorfejtés első rendjében ez a regulátor szolgáltatja a mért adatokhoz legközelebb eső értékeket. Mivel a Litim regulátor egy nem-differenciálható függvény, így nem alkalmazható a gradiens sorfejtés magasabb rendjében.

A minimális érzékenység elvére (Principle of Minimal Sensitivity – PMS) egy másik optimalizálási eljárás [37], amelynek keretében egy regulátor optimális paraméterét annak figyelembevételével választjuk ki, hogy a fizikai értékek a lehető legkevésbé függjenek a paraméter változtatásától. Ez az eljárás már a gradiens sorfejtés bármelyik rendjében alkalalmazható, hátránya viszont, hogy különböző alakú regulátor függvényeket nem lehet összehasonlítani vele. Ez azt jelenti, hogy a PMS módszerrel megmondhatjuk, hogy egy adott regulátor esetén milyen paramétereket válasszunk, de nem tudunk választ adni arra, hogy melyik az optimális választás a különböző regulátor típusok közül .

Használhatunk viszont egy új regulátort is, amely az úgynevezett kompakt tartójú sima (Compactly Supported Smooth – CSS), regulátor [38]. A CSS visszaadja -paramétereinek megfelelő határértékeiben- a főbb regulátor típusokat (például a Litim-féle regulátort [34]), vagyis felhasználható a regulátor függvények összehasonlítására a PMS optimalizálási eljárás keretén belül [37]. Előnye még, hogy a gradiens sorfejtés bármilyen rendjében alkalmazható, mivel sima függvény, így végtelenszer differenciálható, illetve kompakt tartójú (azaz egy véges tartományban különbözik nullától), így alkalmazható a Litim-határérték vizsgálatára. Ne feledkezzünk meg arról, hogy a gradiens sorfejtés magasabb rendjében, ahol szükséges a regulátor magasabb deriváltja, a Litim határérték tetszőlegesen megközelíthető, de el nem érhető.

2.3.2. Regulátorfüggvények

A szakirodalomban a regulátorfüggvények különböző alakjait vizsgálták, használva a dimenziótlan formájukat

$$R_k(p) = p^2 r(y), \qquad y = p^2/k^2 \tag{2.47}$$

ahol $r(y)$ dimenziótlan. Például az egyik egyszerű függvény az éles levágás regulátor

$$r_{\text{sharp}}(y) = \frac{1}{\theta(y-1)} - 1 \tag{2.48}$$

ahol $\theta(y)$ lépcső függvény. A sharp-cutoff regulátor előnye, hogy az impulzus integrál a (2.26) kifejezésben LPA-ban (azaz lokális potenciál közelítésben) analitikusan megvalósítható. Fontos megjegyezni, hogy az így kapott RG egyenlet identikus a Wegner-Houghton egyenlet LPA-ban vett alakjával, azaz a Wegner-Houghton RG tekinthető a sharp-cutoff regulátorral vett Wetterich egyenletnek (legalábbis LPA-ban).

Az egyik leggyakrabban használt regulátor függvény az exponenciális [27]

$$r_{\text{exp}}(y) = \frac{a}{\exp\left(c_2 y^b\right) - 1}, \tag{2.49}$$

ahol $b \geq 1$. A Litim-Pawlowski eljárást felhasználva meghatározták a függvény optimális [34, 35] paramétereit: $a = 1$, $c_2 = \ln(2)$ és $b = 1.44$.

A hatványkitevő típusú regulátor [36]

$$r_{\text{pow}}(y) = \frac{a}{y^b}\,, \tag{2.50}$$

optimális paraméterei: $a = 1$ és $b = 2$.

A Litim-féle regulátor [34] folytonos (de nem differenciálható), kompakt tartójú függvény

$$r_{\rm opt}^{\rm gen}(y) = a\left(\frac{1}{y^b} - 1\right)\theta(1 - y^b), \tag{2.51}$$

ahol $\theta(y)$ a lépcsőfüggvény. LPA-ban alkalmazva a Litim-Paslowski optimalizálási eljárást $b = 1$ és $a = 1$ paramétereket kapjuk.

A CSS regulátor [38] definíciója

$$r_{\rm css}^{\rm gen}(y) = \frac{\exp[cy_0^b/(f - hy_0^b)] - 1}{\exp[cy^b/(f - hy^b)] - 1}\theta(f - hy^b). \tag{2.52}$$

Előnye, hogy végtelenszer differenciálható az $f - hy^b = 0$ pontban is. Szabad paramétereinek száma az $f = 1$ választással az általánosság elvesztése nélkül csökkenthető .

$$r_{\rm css}^{\rm modif}(y) = \frac{\exp[cy_0^b/(1 - hy_0^b)] - 1}{\exp[cy^b/(1 - hy^b)] - 1}\theta(1 - hy^b). \tag{2.53}$$

A CSS regulátor mindkét alakjára (2.52) és (2.53) jellemző, hogy visszaadják a főbb regulátor típusokat: a Litim-féle optimalizáltat (2.51), a power-law (azaz hatványkitevő) típusút (2.50) és az exponenciálisat is (2.49),

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 0, f=h=1} r_{\rm css}^{\rm gen} &= \lim_{c\to 0, h=1} r_{\rm css}^{\rm modif} = \frac{y_0^b\,(y^{-b} - 1)}{1 - y_0^b}\,\theta(1 - y^b), \\
\lim_{f\to\infty} r_{\rm css}^{\rm gen} &= \lim_{h\to 0, c\to 0} r_{\rm css}^{\rm modif} = \frac{y_0^b}{y^b}, \\
\lim_{h\to 0, c=f} r_{\rm css}^{\rm gen}(y) &= \lim_{h\to 0, c\to 1} r_{\rm css}^{\rm modif} = \frac{\exp[y_0^b] - 1}{\exp[y^b] - 1}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Az y_0 megválasztható úgy, hogy a (2.53) számlálója a c paraméter egy lineáris függvénye legyen, így tovább redukálhatjuk a CSS regulátor szabad paramétereit

$$r_{\rm css}^{\rm norm1}(y) = \frac{c}{\exp[cy^b/(1 - hy^b)] - 1}\theta(1 - hy^b). \tag{2.55}$$

Több esetben is felhasználták már ezt a normálást, például a [39] cikkben, a három-dimenziós $O(N = 1)$ skalár modellben LPA-ban, valamint a Kvantum

Einstein Gravitáció elméleti keretében az RG sémafüggésnek a vizsgálatára [24, 40–44]. A (2.55) kifejezésnek a következő határértékei vannak,

$$\lim_{c\to 0, h\to 1} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm1}} = \left(\frac{1}{y^b} - 1\right)\theta(1-y^b), \tag{2.56a}$$

$$\lim_{c\to 0, h\to 0} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm1}} = \frac{1}{y^b}, \tag{2.56b}$$

$$\lim_{c\to 1, h\to 0} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm1}} = \frac{1}{\exp[y^b]-1}. \tag{2.56c}$$

A (2.55) normálás az y_0 legegyszerűbb lehetséges választását adja és ez a fajta CSS regulátor (a lineárisan normált CSS regulátorként hivatkozok rá) visszaadja az optimalizált hatványkitevő ($b = 2$-vel) és az optimalizált Litim ($b = 1$-gyel) regulátorokat, de nem tudja visszaadni az optimális paraméterekkel rendelkező exponenciális regulátort (2.49) [$c_2 = \ln(2)$].

Egy másik normálást választva [38] (nevezzük ezt exponenciálisan normált CSS regulátornak)

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm2}}(y) &= \frac{\exp[\ln(2)c]-1}{\exp\left[\frac{\ln(2)cy^b}{1-hy^b}\right]-1}\theta(1-hy^b), \\ &= \frac{2^c-1}{2^{\frac{c\,y^b}{1-hy^b}}-1}\,\theta(1-hy^b), \end{aligned} \tag{2.57}$$

ahol a határértékek

$$\lim_{c\to 0, h\to 1} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm2}} = \left(\frac{1}{y^b} - 1\right)\theta(1-y^b), \tag{2.58a}$$

$$\lim_{c\to 0, h\to 0} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm2}} = \frac{1}{y^b}, \tag{2.58b}$$

$$\lim_{c\to 1, h\to 0} r_{\mathrm{css}}^{\mathrm{norm2}} = \frac{1}{\exp[\ln(2)y^b]-1}. \tag{2.58c}$$

A (2.57) alak visszaadja (optimális paraméterekkel) az összes főbb regulátor típust, még az exponenciális regulátort is.

2.4. Wetterich RG egyenlet és gradiens sorfejtés

2.4.1. LPA

A következőkben $\hbar = 1$ egységet használom. Veszem az effektív hatást a gradiens sorfejtés (2.45) első rendjében, azaz a magasabb deriváltakat tartalmazó tagokat elhanyagolva és a hullámfüggvény renormálást egy konstanssal teszem egyenlővé ($Z_k \equiv 1$)

$$\Gamma_k[\varphi] = \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + V_k(\varphi)\right]. \tag{2.59}$$

Ezt nevezzük lokális potenciál közelítésnek (Local Potential Approximation - LPA). A Wetterich egyenlet (2.26) egy közönséges differenciálegyenletté redukálódik, ami egy skálafüggő potenciálra $V_k(\varphi)$ vonatkozik (konstans térkonfigurációval $\varphi(x) = \varphi$)

$$\boxed{k\partial_k V_k(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d^d p}{(2\pi)^2} \frac{k\partial_k R_k}{R_k + p^2 + V_k''}}, \tag{2.60}$$

ahol $V_k'' = \partial_\varphi^2 V_k$ és használva a dimenziótlan regulátort, tovább egyszerűsödik az alábbiak szerint

$$k\partial_k V_k(\varphi) = -\alpha_d k^d \int_0^\infty dy \, \frac{r' \, y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r]\, y \, + \frac{V_k''}{k^2}} \, , \tag{2.61}$$

ahol $\alpha_d = \Omega_d/(2(2\pi)^d)$, $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ és $r(y)$ a dimenziótlan regulátor, ahol $y = p^2/k^2$ és $r' = dr/dy$. A megfelelő dimenziótlan formát így írhatjuk

$$\boxed{\left(d - \frac{d-2}{2}\tilde{\varphi}\partial_{\tilde{\varphi}} + k\partial_k\right)\tilde{V}_k(\tilde{\varphi}) = -\alpha_d \int_0^\infty dy \, \frac{r' \, y^{\frac{d}{2}+1}}{[1+r]\, y \, + \tilde{V}_k''}} \tag{2.62}$$

ami érvényes a skálafüggő, dimenziótlan potenciálra. Az integrál a (2.62) egyenletben általában numerikusan végrehajtandó, bár az analitikus forma elérhető néhány típusú regulátorra.

2.4.2. LPA'

Gyengébb megszorítást, azaz pontosabb közelítést jelent az LPA′, ahol a gradiens sorfejtést LPA-hoz képest eggyel magasabb renddel bezárólag végezzük.

Azaz ebben az esetben a hullámfüggvény renormálási együttható is egy futó csatolás szerepét tölti be, azonban térfüggetlen, $Z_k = Z_k(\cancel{\varphi})$.

$$\Gamma_k[\varphi] = \int \mathrm{d}^d x \left[\frac{1}{2} Z_k(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + V_k(\varphi)\right] \tag{2.63}$$

A Wetterich egyenlet [27] két differenciálegyenletre redukálódik a skálafüggő potenciál és a térfüggetlen hullámfüggvény renormálással. Az így kapott egyenletek konkrét alakját a 4. fejezetben tárgyalom.

2.5. Globális, lokális skálatranszformációk és a c-függvény

Ebben a fejezetben a lokális és globális skálatranszformációkat fogom összehasonlítani. A globális skálatranszformációk az RG módszer sarokkövei, a lokális skálatranszformációk a konformtérelmélet (CFT) alapvető szimmetriái. A kvantumtér, ahogyan a statisztikus fizikai rendszerek, végtelen sok szabadsági fokkal rendelkezik. A $d = D + 1$ (D tér és 1 idő) dimenziós kvantumtérelmélet ekvivalens egy d térdimenziós statisztikus rendszerrel. Ezért egy fázisátalakulás közeli statisztikus rendszer kritikus viselkedésének megértése segíti a vele ekvivalens kvantumtérelméleti modell fázisstruktúrájának feltérképezését és fordítva. Az RG módszer sarokköve a skálainvariancia, a rendszerek a fázisátalakulás környezetében invariánsak a megfigyelés skálájának globális átskálázásával szemben, azaz például a rácsméret változtatására

$$a \to b\ a. \tag{2.64}$$

Az RG transzformációk fixpontjai megfelelnek azon fázisátmeneti pontoknak, ahol a rendszer skálainvariáns. Másrészről egy globális dilatációs szimmetria bizonyos esetben kiterjeszthető egy lokális szimmetriára,

$$a \to b(x)\ a \tag{2.65}$$

amely megváltoztatja a vektorok hosszát, de invariánsan hagyja a vektorok relatív szögét. Az ilyen transzformációkat konform traszformációknak, szimmetria csoportjukat pedig konform szimmetriának nevezzük. A konform invarianciát bizonyították kétdimenziós térelméletekben, amelyek megerősítettek számos korábban ismert egzakt eredményt és hozzájárultak a két dimenziós fázisátmenetek teljes megértéséhez. A d dimenziós konform csoport (ahol $d \neq 2$) $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$-vel azonos számú független generátorral rendelkezik, amíg a $d=2$ konform csoport végtelen dimenziós, ahol a megfelelő generátorok $L_n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ egy Virasoro algebrát alkotnak a következő kommutációs relációval

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{2.66}$$

ahol a c paraméter a centrális töltés, amelyet használhatunk a megfelelő CFT karakterizáslására.

A Zamolodchikov c-elmélet [45] teremti meg a kapcsolatot a CFT technikák és a térelméletek RG leírása között két dimenzióban. Az elmélet szerint mindig lehetséges konstruálni a csatolások egy olyan függvényét, $c(g)$, az úgynevezett c-függvényt, amely monoton csökken az RG trajektóriák mentén haladva, és a fixpontban felveszi a fixponthoz tartozó CFT centrális töltésének értékét

$$c(g^\star) = c, \tag{2.67}$$

ahol $g^\star$ jelöli a csatolások fixponti értékét.

A c-függvény FRG módszer keretében megfogalmazott alakját a [46] publikációból ismerhetjük. A [46] publikáció szerint a c-függvény expilicit alakja LPA-ban a következő

$$k\partial_k c_k = \frac{[k\partial_k \tilde{V}_k''(\varphi_{0,k})]^2}{[1 + \tilde{V}_k''(\varphi_{0,k})]^3}, \tag{2.68}$$

ahol a dimenziótlan blokkosított potenciál $\tilde{V}_k(\varphi)$ a $\varphi = \varphi_{0,k}$ futó minimumnál véve. Megjegyzendő, hogy a c-függvény explicit kifejezése LPA-n túl nem ismert. A (2.68) egyenlet levezetésének ismertetése meghaladja az értekezés kereteit. Azonban egy vázlatos levezetés megtalálható a [2] publikáció bevezetőjében.

3. fejezet

Sine-Gordon típusú modellek

Ebben a fejezetben áttekintem a sine-Gordon típusú modelleket, különös hangsúlyt fektetve a szimmetriájukra és az ismert fázisdiagramokra. A szimmertiák figyelembevétele fontos, hiszen a dimenzióval együtt felhasználhatók a fázisszerkezet meghatározására. A sine-Gordon modell tulajdonságainak bemutatásakor szintén a [6] szakirodalomra támaszkodom.

3.1. Klasszikus Sine-Gordon modell

A kétdimenziós sine-Gordon (SG) térelméleti skalármodellt [47] bevezethetjük a folytonosan deformálható testek mechanikájának formalizmusával. Induljunk ki egy N darab csatolt ingát tartalmazó (diszkrét) rendszerből [6], ahol minden inga egy l hosszúságú elhanyagolható tömegű rúdból, illetve annak végén található m tömegű testből áll. Minden inga egy közös vízszintes torziós szálhoz van rögzítve, ami a csatolást biztosítja az egyes ingák között. A rendszer kinetikus és potenciális energiája a következő alakban adható meg,

$$T = \sum_{i}^{N} \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}_i{}^2, \tag{3.1}$$

$$V = \sum_{i}^{N} \frac{1}{2} c(\varphi_{i+1} - \phi_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} mgl(1 - \cos\varphi_i), \tag{3.2}$$

ahol $\Theta = ml^2$. Innen a rendszer Lagrange függvénye $L = T - V$ származtatható. Például $N = 1$ esetben a Lagrange függvény és a hozzá tartozó Euler-Lagrange egyenlet így írható,

$$L = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}c\varphi^2 - mgl(1 - \cos\varphi), \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\varphi}} - \frac{dL}{d\varphi} = 0 \to \Theta\ddot{\varphi} = -c\varphi - mgl\sin\varphi. \tag{3.4}$$

Hasonlóan jártam el $N \neq 1$ esetén is, ahol a Lagrange függvény alakja

$$L = \sum_{i}^{N} \left[\frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}c(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 - mgl(1 - \cos\varphi_i)\right], \tag{3.5}$$

$$= \sum_{i}^{N} a \left[\frac{1}{2}\frac{\Theta}{a}\dot{\varphi_i}^2 - \frac{1}{2}ca\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a}\right)^2 - \frac{m}{a}gl(1 - \cos\varphi_i)\right], \tag{3.6}$$

ahol bevezettem az ingákat szeparáló a távolságot. Ezek után vettem a folytonos határátmenetet, azaz $a \to 0$, ahol bevezettem a $\mu = m/a$ tömegsűrűséget, illetve felhasználtam, hogy a torziós szálhoz rendelt c konstans arányos a szál hosszának inverzével, azaz $c = c'/a$ így

$$L = \int dx \left[\frac{1}{2}\mu l^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}c'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \mu gl(1 - \cos\varphi)\right]. \tag{3.7}$$

Innen a klasszikus, relativisztikus SG modell Lagrange sűrűsége és hatása leolvasható,

$$\mathcal{L}_{SG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cos\varphi, \tag{3.8}$$

$$S_{SG}[\varphi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cos(\beta\varphi)\right]. \tag{3.9}$$

3.2. Ising modell tulajdonságai

Mielőtt bemutatnám a sine-Gordon modellek tulajdonságait, elemzem a ϕ^{2n} polinomiális skalártér modellt, amely az alábbi Euklideszi hatással definiálható

$$S_{\varphi^4}[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right], \tag{3.10}$$

ami rendelkezik egy tükrözési (vagy Z_2) szimmetriával. Szigorú értelemben véve az így definiált ϕ^4 modell nem azonos az Ising modellel. Az Ising modell rácson értelmezett spinmodell diszkrét változókkal, ahol a (klasszikus) spinek kettő állapotot vehetnek fel. A ϕ^4 modell folytonos téridő felett értelmezett térelméleti modell. A modell szimmetriája megengedi, hogy figyelembe vegyünk tetszőleges ϕ^{2n} tagokat. Az így kapott kvantumtérelmélet és az Ising spinmodell között szoros kapcsolat van, lényegében leképezhetők egymásra és azonos univerzalitási osztályba tartoznak.

A dimenziótól függően (d_c alsó kritikus dimenzió felett) fázisátalakuláson megy keresztül. Faszinten (a kvantumkorrekciók figyelembevétele nélkül) az úgynevezett sértett fázis megfelel $m^2 < 0$-nak, ahol a potenciál dupla fenekű és a rendszer alapállapota a két, nem nulla minimum közül az egyikben található, ezért a tükrözési szimmetriát spontán sérti. Az Ising modell kritikus dimenziója kisebb, mint $d = 2$. Ha kiterjesztjük a modellt úgy, hogy a térváltozót kicseréljük N-komponensű vektorra, az eredeti Ising modell Z_2 szimmetriája folytonos $O(N)$ szimmetriára változik, amely megváltoztatja az alsó kritikus dimenziót. Továbbá összhangban a Mermin-Wagner-Coleman tétellel [11], a kiterjesztett modell folytonos szimmetriája nem sérülhet spontán módon $d = 2$ dimenzióban. Azaz nem jöhet létre konvencionális értelemben vett hosszú távú rendezettség. Azonban az N=2 eset speciális. Itt ugyanis létre jön egy másfajta, úgynevezett topológikus rendezettség, a modellnek van két fázisa és a fázisátalakulás BKT típusú, amit a dolgozat 1.1.3 pontjában ismertettem. Ha $N > 2$ akkor ilyen topológikus rendezettség sem jöhet létre, ekkor az O(N) modellnek $d = 2$ dimenzióban csak egyetlen fázisa van. Tehát $d > d_c$ dimenzióban (ahol d kisebb, mint a felső kritikus dimenzió) az Ising modellnek két fázisa van, egy alacsony hőmérsékletű spontán szimmetria sértéssel (SSB = Spontaneous Symmetry Breaking) és egy magas hőmérsékletű (szimmetrikus). A modell másodrendű fázisátalakuláson megy keresztül, amely azt jelenti, hogy a termodinamikai potenciál második deriváltja már nem lesz folytonos a fázisátalakulási pont közelében.

Bár a jelen munka célja nem az Ising modell tanulmányozása az RG keretein belül, de hasznos lehet a következő lépés. Alkalmazzuk az Ising modellre a következőt. Helyettesítsük be a Gaussi fixpont körül linearizált FRG egyenletbe

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}_k''(\varphi) + \mathcal{O}(\tilde{V}_k''^2), \tag{3.11}$$

a következő potenciált

$$\tilde{V}_{\mathrm{Ising}}(\phi) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N_{CUT}}} \frac{\tilde{g}_{2n}(k)}{(2n)!}\phi^{2n}. \tag{3.12}$$

Véges $\mathrm{N_{CUT}}$ esetén, nem őrzik meg funkcionális formájukat a linearizált RG egyenletek. Tehát Ising típusú, azaz polinomiális potenciált tartalmazó elméletnél elengedhetetlen az FRG egyenlet nem-lineáris tagjainak figyelembe vétele.

Alkalmazzuk tehát az egzakt (LPA) FRG egyenletet az Ising-modellre $N_{\mathrm{CUT}} = 2$ esetre, ahol $d = 2$ dimenzióban a következőket kapjuk

$$k\partial_k g_2 = -2g_2 - \frac{1}{4\pi}\frac{g_4}{(1+g_2)} \tag{3.13}$$

$$k\partial_k g_4 = -2g_4 + \frac{3}{4\pi}\frac{g_4^2}{(1+g_2)^2} \tag{3.14}$$

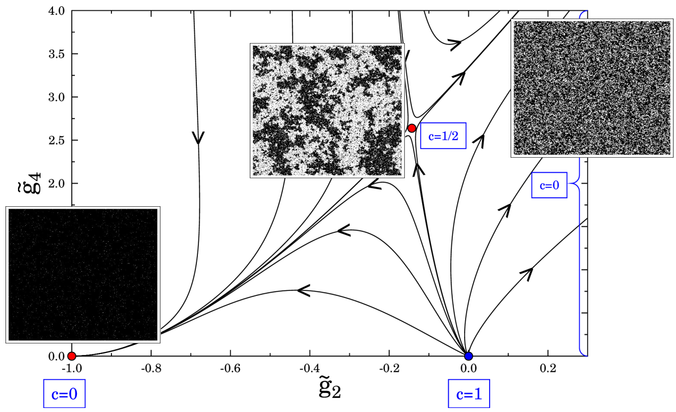
a $b = 1$ hatványfüggvény regulátor esetén. Hasonlóan, $N_{\mathrm{CUT}} = 2$ esetén, illetve $d = 2$ dimenzióban LPA közelítésben Litim regulátorral az RG egyenletek alakja,

$$k\partial_k g_2 = -2g_2 - \frac{1}{4\pi}\frac{g_4}{(1+g_2)^2} \tag{3.15}$$

$$k\partial_k g_4 = -2g_4 + \frac{6}{4\pi}\frac{g_4^2}{(1+g_2)^3}. \tag{3.16}$$

A fenti RG futási egyenletek rendelkeznek triviális Gaussi és egy nem triviális (regulátor függő) Wilson-Fisher (WF) fixponttal, ahol az utóbbi, két fázis jelenlétét mutatja [8, 46].

A 3.1 ábrán bemutatom az Ising modell [48] funkcionális RG módszer segítségével kapott RG diagramját. A nyilak az RG trajektóriák futási irányát jelölik (UV irányából az IR felé haladva). Két vonzó IR fixpont jelöli a két fázist mindkét esetben $c = 0$ centrális töltésértékkel. Az UV Gaussi taszító fixpontot $c = 1$ érték jellemzi, míg a fázisokat elválasztó nyeregpont, a Wilson-Fisher fixpont esetében $c = \frac{1}{2}$.



3.1. ábra. Ising modell RG diagramja a fixpontokat jellemző centrális töltés értékekkel kiegészítve. Továbbá feltüntetem az adott fixponthoz tartozó szimulációkból kapott ábrákat.

3.3. Sine-Gordon modell tulajdonságai

Az Euklideszi hatás a sine-Gordon (SG) modellre tartalmaz egy periodikus önkölcsönhatást [49]

$$S_{\rm SG}[\varphi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + u\cos(\beta\varphi)\right]. \tag{3.17}$$

ahol u a Fourier amplitúdó és β a frekvencia. Rendelkezik egy tükrözési (Z_2) szimmetriával, továbbá a hatás a következő eltolási transzformáció hatása alatt

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \frac{2\pi}{\beta} \tag{3.18}$$

változatlan marad, azaz a modellnek van egy másik diszkrét szimmetriája is. Ennek a további szimmetriának köszönhetően változást várunk a fázisstruktúrában az Ising modellel [48] összehasonlítva. Valóban, az SG modellnek két fázisa van $d = 2$ dimenzióban és tudjuk, hogy átmegy egy végtelen rendű (topológikus) fázisátmeneten. A fázisátmenetet a frekvencia szabályozza. A $\beta^2 = 8\pi$ kritikus érték választja el a két fázist [49].

A két fázis jelenléte és a kritikus frekvencia értéke származtatható a linearizált FRG egyenletekből az SG modell esetén, ahol a potenciál definíciója az egyszerűség kedvéért egyetlen Fourier módust tartalmaz

$$\tilde{V}_{\mathrm{SG}}(\phi) = \tilde{u}_k \cos(\beta\phi), \tag{3.19}$$

ahol a dimenziótlan Fourier amplitúdó hordozza a skálafüggőséget, mivel LPA-ban a β frekvencia nem függ a k futó impulzus levágástól. A linearizált RG egyenlet [49]

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}_k''(\varphi) + \mathcal{O}(\tilde{V}_k''^2), \tag{3.20}$$

megőrzi a potenciál funkcionális formáját, azaz nem generálódnak felharmonikusok [49]

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k \cos(\beta\varphi) = \frac{1}{4\pi}\beta^2\tilde{u}_k \cos(\beta\varphi). \tag{3.21}$$

Az RG futási egyenletek a Fourier amplitúdóra így kiolvashatók

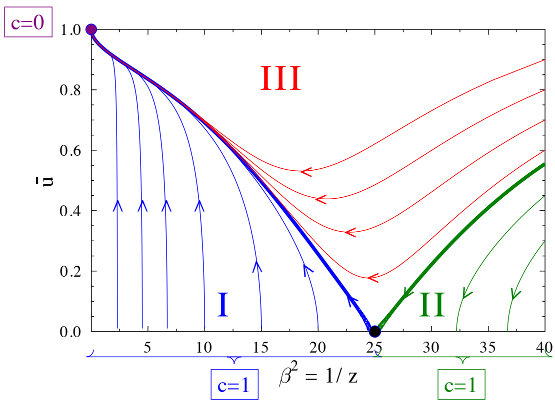
$$k\partial_k \tilde{u}_k = \tilde{u}_k \left(-2 + \frac{1}{4\pi}\beta^2\right), \tag{3.22}$$

a megoldás pedig analitikusan meghatározható,

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_\Lambda \left(\frac{k}{\Lambda}\right)^{-2+\frac{\beta^2}{4\pi}} \tag{3.23}$$

amely megadja a $\beta_c^2 = 8\pi$ kritikus frekvenciát [49]. A modell BKT-típusú fázis átmeneten megy keresztül [49, 51–55]. Fontos észrevétel, hogy az így kapott kritikus frekvenciaérték ($\beta_c^2 = 8\pi$) megegyezik az ismert egzakt értékkel, annak ellenére, hogy a származtatásakor több közelítést is végeztem (linearizálás, LPA, egy-módus). Ennek a megértéséhez érdemes összehasonlítani az itt használt RG futási egyenleteket a „feljavított” közelítésben használtakkal, például LPA' (azaz LPA + hullámfüggvény renormálás) egzakt RG egyenletekkel, amit az értekezésben később tárgyalok, lásd a (4.16) egyenletet. A hullámfüggvény renormálásra (z_k) vonatkozó RG futási egyenlet (4.16)-ban nem tartalmaz a Fourier-amplitúdóban lineáris tagot. Mivel a kritikus pont ($\beta_c^2 = 8\pi$) az $\tilde{u}_c = 0$ értékhez tartozik, így nagyon kis $\tilde{u}_k$ értékekere nincs skálafüggése a hullámfüggvény renormálásnak, azaz az LPA egzakttá válik. Ugyanígy az $\tilde{u}_c = 0$ következménye, hogy a linearizálás egyre jobb közelítést ad minél közelebb megyek a fixponthoz. Ráadásul a linearizált egyenletek szétcsatolják a felharmonikusokat, tehát az egy-módus közelítés sem befolyásolja a kritikus frekvencia értékét.

Megjegyzem, hogy mind a tükrözési, mind a eltolási szimmetria sérülhet spontán módon [56], összhangban a Mermin-Wagner-Coleman tétellel [11] lévén, hogy ezek nem folytonos, hanem diszkrét szimmetriák. Az SG modell ismert fázisdiagramját a 3.2 ábrán mutatom be, feltüntetve a c-függvény értékét a fixpontokban.



3.2. ábra. Az SG modell RG futási diagramja skálafüggő frekvencia közelítésnél. A fázistér három részre osztható. Az első (I) részben egy UV taszító Gaussi fixpontokból álló vonal található ($\bar{u} = 0, \beta^2 < 8\pi$). Minden trajektória ezen vonal környékéről indul és a vonzó IR fixpontban végződik (lila kör $\bar{u} = 1, \beta^2 = 0$). Ezen tartományban a $\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$ étéke a trajektóriák mentén $\Delta c = 1$. A második (II) tartományon megfigyelhetjük a Gaussi fixpontoknak egy IR vonzó vonalát ($\bar{u} = 0, \beta^2 > 8\pi,$); a tartomány (zöld) trajektóriáinak indulási pontja $\beta^2 \approx \infty$, és az IR vonzó vonalba futnak be pl. szeparátrix. A harmadik (III) tartomány azon tarajektóriákat tartalmazza, amelyek $\beta^2 \approx \infty$-ből indulnak és az IR vonzó fixpontba futnak be (lila kör).

A fázisdiagramon három különböző tartományt különböztethetünk meg. A $\Delta c \equiv c_{UV} - c_{IR}$ pontosan definiált, de csak az első (I) tartományban, ahol a Gaussi fixpontból $c_{UV} = 1$ indulnak és a tömeges IR fixpontban $c_{IR} = 0$ érnek véget a trajektóriák [57–61].

A második (II) tartományban a trajektóriák a a Gaussi fixpontban $c_{IR} = 1$ végződnek, de a végtelenből indulnak, ahol nincs fixpont. Ezért Δc nem definiált.

A harmadik (III) tartomány azon trajektóriákat tartalmazza, amelyek $\beta = \infty$-ben kezdődnek és az IR tömeges fixpontban végződnek $c_{IR} = 0$ esetén. A Δc még ebben az esetben sem jól definiált.

3.4. Sinh-Gordon modell tulajdonságai

Az eredeti SG modell frekvencia paraméterének analitikus elfolytatásának felhasználásával, azaz végrehajtva a $\beta \to i\beta$, helyettesítést, megkapjuk a sinh-Gordon (ShG) modellt

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{ShG}}[\varphi] &= \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + u\cos(i\beta\varphi)\right] \\ &= \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + u\cosh(\beta\varphi)\right], \end{aligned} \tag{3.24}$$

amelyben a periodikusság elvész, de a Z_2 szimmetria megmarad. Ezért egyrészt elvárható egy Ising-típusú fázisstruktúra. Másrészt azonban az önkölcsönhatást leíró rész Taylor sorba fejthető, amely Ising-típusú modellt [48] eredményez, de rögzített együtthatókkal, ami érdemben befolyásolhatja a fázisszerkezetet.

Felhasználva a $\beta \to i\beta$ helyettesítést a (3.19) egyenletben az SG modell potenciálját így írhatjuk,

$$\tilde{V}_{\mathrm{ShG}}(\phi) = \tilde{u}_k \cos(i\beta\varphi) = \tilde{u}_k \cosh(\beta\phi) \tag{3.25}$$

amelyet a linearizált egyenletbe helyettesítve

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}_k''(\varphi) + \mathcal{O}(\tilde{V}_k''^2), \tag{3.26}$$

visszakapjuk a potenciál funkcionális formáját

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k \cosh(\beta\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\beta^2 \tilde{u}_k \cosh(\beta\varphi). \tag{3.27}$$

A Fourier amplitúdóra vonatkozó RG futási egyenletek

$$k\partial_k \tilde{u}_k = \tilde{u}_k \left(-2 - \frac{1}{4\pi}\beta^2 \right), \tag{3.28}$$

megoldása pedig (az SG modellhez hasonlóan) analitikus,

$$\tilde{u}_k = \tilde{u}_\Lambda \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{-2-\frac{\beta^2}{4\pi}}, \tag{3.29}$$

és azt mutatja, hogy $\beta^2 = 8\pi$ esetén a hatványkitevő nem vált előjelet, azaz a ShG modellnél nincs BKT-típusú fázisátalakulás. Más szóval a ShG modellre a linearizált RG egyenletek származtathatók a SG modellből, $\beta \to i\beta$ csere felhasználásával, amely a β^2 előjelének változását eredményezi és nem lesz BKT-típusú fázisátalakulás.

Ennek megfelelően megfogalmazhatjuk az úgynevezett sinh-Gordon „ellentmondást", amely a következő. A sinh-Gordon modell olyan skalártérelmélet, ahol az önkölcsönhatást leíró potenciált egy hiperbolikus függvény (cosh) írja le. A modell Z_2 (tükrözési) szimmetriával rendelkezik, hasonlóan a Φ^{2n} (Ising) skalárelmélethez. Ennek alapján azt várnánk, hogy az ShG modell $d = 2$ dimenzióban két fázissal rendelkezik és $c = 1/2$ centrális töltéssel jellemezhető. Másrészt a ShG modell származtatható a sine-Gordon elmélet analitikus elfolytatásából, vagyis a periodikus potenciálban szereplő valós frekvencia képzetesre cserélésével. A sine-Gordon modell, ami a Z_2 szimmetria mellett egy diszkrét eltolási szimmetriával is rendelkezik, $d = 2$ dimenzióban két fázisú és $c = 1$ centrális töltéssel jellemezhető. Ismert azonban, hogy a ShG modell egyetlen fázist tartalmaz, ellentétben az említett Ising modellel [48] és $c = 1$ a hozzá tartozó centrális töltés, ami pedig a sine-Gordon modellével egyezik meg, holott a modell nem periodikus. Az értekezésben ennek a látszólagos ellentmondásnak a feloldására keresem a választ a ShG modell FRG vizsgálatával.

3.5. Shine-Gordon modell tulajdonságai

Ebben az alfejezetben az eredeti SG modell és az ShG modell között interpoláló modellt mutatom be. Amennyiben a β csatolás komplex szám, eljutunk a shine-Gordon modellhez, amelynél a hatás

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{ShineG}}[\varphi] &= \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u \,\mathrm{Re} \cos[(\beta_1 + i\beta_2)\phi] \right] \\
&= \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + u \cos(\beta_1 \phi) \cosh(\beta_2 \phi) \right], \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

ahol β_1 és β_2 valós frekvenciák. Az így kapott modell úgy kezelhető, mint egy polinomiális Ising típusú térelmélet, ami interpolál az SG és ShG modellek között. Itt két kérdés is megfogalmazható, amelyekre az értekezésben -saját eredményeimre támaszkodva- választ adok. Az egyik a modellalkotáshoz kapcsolódik: Vajon lehet-e periodikus függvényeken keresztül interpoláló modellt konstruálni? A másik kérdés magától értetődőbb: Milyen az interpoláló modell (modellek) fázisszerkezete?

III. rész

Saját eredmények

4. fejezet

Sine-Gordon modell alacsony dimenzióban

Ebben a fejezetben, az értekezésben tárgyalt saját eredményeim közül, a sine-Gordon modell alacsony ($d < 2$) dimenziós fázisszerkezetének feltérképezését mutatom be az FRG módszer használatával [1]. Az FRG egyenlet megoldása közelítések segítségével adható meg. Az így kapott megoldás egyrészt függni fog az FRG módszer regulátorától, másrészt a fázisszerkezetről kapott információ sem lesz teljes. Megmutatom például, hogy az LPA' közelítésben vett FRG módszer spontán szimmetria sértő fázis jelenlétét jósolja, ami bizonyosan helytelen, hiszen a $d = 1$ dimenzió esetén a sine-Gordon kvantumtérelmélet nem más, mint egy kvantummechanikai rendszer (kvantum rotor), ahol az alagút effektus miatt spontán szimmetria sértés nem létezhet. Ezt felhasználva bevezetek egy új optimalizálási eljárást, amely azon alapul, hogy a regulátor megválasztásától függ a helytelenül megjelenő szimmetriasértett fázis „nagysága”.

4.1. Sine-Gordon modell FRG vizsgálata

Ebben a fejezetben tanulmányozom a periodikus önkölcsönható sine-Gordon típusú modellek FRG megoldását tetszőleges dimenzióban hullámfüggvény renormálás (skálafüggő frekvencia) figyelembevételével. Az effektív hatás LPA-ban így írható,

$$\text{LPA}: \qquad \Gamma_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_x)^2 + \sum_n^\infty u_n(k)\cos(n\beta\varphi_x) \right]. \tag{4.1}$$

LPA'-ben a tér változót át kell skáláznunk $\tilde{\varphi} \equiv \beta\varphi$ ahol $\tilde{\varphi}$ dimenziótlan

$$\text{LPA}': \qquad \Gamma_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2} z_k (\partial_\mu \tilde{\varphi}_x)^2 + \sum_n^\infty u_n(k)\cos(n\tilde{\varphi}_x) \right] \tag{4.2}$$

$z_k \equiv 1/\beta_k^2$ amely k^{d-2} dimenziós térfüggetlen hullámfüggvény renormálást is tartalmaz. Ehhez szükséges a Wetterich RG [27] egyenlet következő módosítása

$$\left(-\frac{d-2}{2}\tilde{\varphi}\partial_{\tilde{\varphi}} + k\partial_k \right) \Gamma_k[\tilde{\varphi}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\frac{k\partial_k R_k}{R_k + k^{d-2}\Gamma_k''[\tilde{\varphi}]} \right] \tag{4.3}$$

a $' = \partial/\partial\tilde{\varphi}$ jelöléssel. Fontos megjegyezni, hogy az RG egyenletek megőrzik a modell szimmetriáit. Jelen esetben a Z_2 tükrözési szimmetriát és a periodicitást. Azaz ha nem skáláznánk át a teret és a dimenziós potenciálban szereplő három csatolásra (z_k, u_k, β) származtatnánk RG futási egyenleteket, akkor az LPA esethez hasonlóan azt kell, hogy kapjuk, hogy a periodicitás megőrződik változatlan periódus hosszal. Vagyis skálafüggetlennek adódik. Tehát érdemes a tér átskálázásával beolvasztani z_k-ba. Másrészt ez egyben „kötelező" lépés; amikor LPA'-ban áttérünk dimenziótlan változókra (dimenziótlan potenciál és tér) akkor a helyes fixpont analízis elvégzéséhez bele kell definiálni a $\sqrt{z_k}$ értékét a dimenziótlan térváltozóba (lásd pl. [29] (2.96)-os képlet). A térfüggetlen hullámfüggvény renormálásra vonatkozó RG egyenleteket, speciális módon kell kiolvasni, figyelembe véve az önkölcsönhatás periodikusságát egy $\mathcal{P}_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}$ projekció segítségével. Az RG egyenletek dimenziótlan potenciálra és hullámfüggvény renormálásra a következő alakot öltik

$$\left(d - \frac{d-2}{2}\tilde{\varphi}\partial_{\tilde{\varphi}} + k\partial_k \right) \tilde{V}_k(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} k^{-d}\tilde{\mathcal{D}}_k \, k\partial_k R_k,$$

$$((d-2) + k\partial_k)\tilde{z}_k = \mathcal{P}_0 \left[k^{6-d}(\tilde{V}_k''')^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}\tilde{\mathcal{D}}_k^2 \, k\partial_k R_k \left(\frac{2}{d}\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{D}}_k}{\partial p^2 \partial p^2} p^2 + \frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}_k}{\partial p^2} \right) \right], \tag{4.4}$$

ahol $\tilde{\mathcal{D}}_k = 1/(\tilde{z}_k p^2 + R_k + k^2 \tilde{V}_k'')$ és $\tilde{z}_k = k^{2-d} z_k$.
Ha dimenziós potenciált használok, akkor a következő RG egyenleteket kapom

$$k\partial_k V_k = \frac{1}{2}\int_p \mathcal{D}_k k\partial_k R_k, \tag{4.5}$$

$$k\partial_k z_k = \mathcal{P}_0 V_k'''^2 \int_p \mathcal{D}_k^2 k\partial_k R_k \left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}_k}{\partial p^2 \partial p^2} p^2 + \frac{\partial \mathcal{D}_k}{\partial p^2}\right), \tag{4.6}$$

ahol $\mathcal{D}_k = 1/(z_k p^2 + R_k + V_k'')$ és $\mathcal{P}_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\varphi$ projekció a térfüggetlen altérre.
A térfüggetlen hullámfüggvény renormálás speciális megválasztása miatt a regulátor függvénynek hatványfüggvény típusúnak kell lennie. Fontos megjegyezni, hogy az a blokkosítási transzformáció, amelyet úgy kapunk, hogy a Wetterich RG [27] egyenletben kicseréljük a deriválást a k skála megtartásával egy véges különbségre, megőrzi a potenciál periodicitást [49, 62].

4.2. LPA, $d = 2$

Induljunk ki az LPA közelítésben $d = 2$ dimenzióban kapott Wetterich RG egyenletből

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dy \frac{y^2 \frac{dr}{dy}}{(1+r)y + \tilde{V}_k''(\varphi)}, \tag{4.7}$$

és keressük a (4.7) egyenlet megoldását periodikus függvények között, amelyhez szükséges a Fourier sorfejtés használata. Egyetlen Fourier módust véve a skálafüggő blokkosított potenciál a következő alakot ölti

$$\tilde{V}_k(\varphi) = -\tilde{u}_k \cos(\beta\varphi), \tag{4.8}$$

ahol β skálafüggetlen. Bizonyos regulátor esetében (4.7) egyenletben az impulzus integrál elvégezhető.

Például hatványkitevő regulátor (2.50) $b = 1$ esetén, a (4.8) képletben szereplő Fourier amplitúdóra vonatkozó egyenlet alakja,

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k = \frac{1}{2\pi\beta^2 \tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \beta^4 \tilde{u}_k^2}\right]. \tag{4.9}$$

Illetve az optimalizált regulátor (2.51) amely segítségével a következő egyenlet származtatható

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k = \frac{1}{2\pi\beta^2 \tilde{u}_k}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^4 \tilde{u}_k^2}} - 1\right]. \tag{4.10}$$

4.3. LPA', tetszőleges d dimenzió

Azért, hogy bemutassam az SG modell LPA-n túli RG megoldását (LPA' közelítésben) [67], bevezetek egy dimenziótlan változót $\tilde{\varphi} = \beta\varphi$, ezzel az effektív hatás alakja egy módus esetén a következő

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2} z_k (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2 + u_k \cos(\tilde{\varphi})\right], \tag{4.11}$$

ahol u_k a periodikus önkölcsönhatás dimenziós csatolása, $z_k = 1/\beta_k^2$ a térfüggetlen hullámfüggvény renormálás [67]. Azaz veszem a (4.2) kifejezést egy módusra. Bár az RG transzformációk generálnak magasabb harmonikusokat, használjuk a (4.11) kifejezést, amely csak egy Fourier módust tartalmaz. Az SG modell esetén ez megfelelő közelítésnek bizonyult [67] a korábban tárgyalt esetekben is.

A (4.11) hatás csatolásaira vonatkozó RG egyenleteket a (4.5) és (4.6) egyenletekből származtatom

$$k\partial_k u_k = \int_p \frac{k\partial_k R_k}{k^{2-d} u_k} \left(\frac{P - \sqrt{P^2 - (k^{2-d} u_k)^2}}{\sqrt{P^2 - (k^{2-d} u_k)^2}}\right), \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} k\partial_k z_k = \int_p \frac{k\partial_k R_k}{2} \Bigg[&\frac{-(k^{2-d}u_k)^2 P(\partial_{p^2} P + \frac{2}{d} p^2 \partial_{p^2}^2 P)}{[P^2 - (k^{2-d}u_k)^2]^{5/2}} \\ &+ \frac{(k^{2-d}u_k)^2 p^2 (\partial_{p^2} P)^2 (4P^2 + (k^{2-d}u_k)^2)}{d\,[P^2 - (k^{2-d}u_k)^2]^{7/2}} \Bigg], \end{aligned} \tag{4.13}$$

ahol $P = z_k k^{2-d} p^2 + R_k$. Az impulzus integrál $\int_p = \int dp\, p^{d-1} \Omega_d/(2\pi)^d$ általában csak numerikusan oldható meg, ahol Ω_d d-dimenziós térszög. Az SG típusú modellek RG megoldása [49–55] nem igényel térfüggő hullámfüggvény renormálást. Normált dimenziótlan $\bar{z}_k \equiv (8\pi)\tilde{z}_k$, $\bar{u}_k \equiv \tilde{u}_k k^2/\bar{k}$ paramétereket használok ahol $\tilde{z}_k = k^{2-d} z_k$ és $\tilde{u}_k = k^{-d} u_k$ a konvencionális dimenziótlan csatolások és $\bar{k} = \min_{p^2} P$.

Érdemes külön megvizsgálni a $d = 2$ dimenziós RG egyenleteket

$$k\partial_k u_k = \int_p \frac{k\partial_k R_k}{u_k} \left(\frac{P_k}{\sqrt{P_k^2 - u_k^2}} - 1\right), \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} k\partial_k z_k = \int_p k\partial_k R_k \Bigg(&\frac{u_k^2 p^2 (\partial_{p^2} P_k)^2 (4P_k^2 + u_k^2)}{4(P_k^2 - u_k^2)^{7/2}} \\ &- \frac{u_k^2 P_k (\partial_{p^2} P_k + p^2 \partial_{p^2}^2 P_k)}{2(P_k^2 - u_k^2)^{5/2}} \Bigg), \end{aligned} \tag{4.15}$$

ahol $P_k = z_k p^2 + R_k$. Általánosan, az impulzus integrálok csak numerikusan oldhatók meg, azonban néhány esetben analitikus eredmények is elérhetőek. Felhasználva a hatványfüggvény regulátort (2.50) $b = 1$ esetén, az impulzus integrál megoldható [67] és az RG egyenletek így írhatók

$$\begin{aligned}(2 + k\partial_k)\tilde{u} &= \frac{1}{2\pi z_k \tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_k^2}\right] \\ k\partial_k z_k &= -\frac{1}{24\pi}\frac{\tilde{u}_k^2}{[1 - \tilde{u}_k^2]^{\frac{3}{2}}},\end{aligned} \tag{4.16}$$

dimenziótlan csatolásokkal $\tilde{u} = k^{-2}u$. Használva a következő helyettesítést

$$z_k \to 1/\beta_k^2, \tag{4.17a}$$

$$\tilde{u}_k \to \beta_k^2 \tilde{u}_k, \tag{4.17b}$$

és a frekvenciát skálafüggetlennek véve ($\partial_k z_k = 0$ vagyis $\partial_k \beta_k^2 = 0$) visszakapjuk a megfelelő LPA egyenletet (4.9).

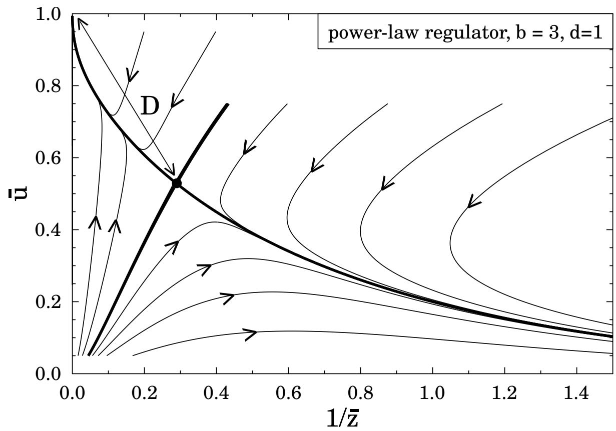
4.4. $d < 2$ fázisszerkezet

$d = 2$ dimenzióban az SG modellre topológiai fázisátmenet jellemző [63–66], ahol a fázisokat szeparáló kritikus érték $1/\bar{z}_\star = 1$, azaz $\beta_\star = 8\pi$ amely függetlennek adódik a regulátorfüggvény megválasztásától [62].

$d = 1$ dimenzióban a közelített RG egyenlet alapján az $(\bar{u}_\star,\ 1/\bar{z}_\star)$ koordinátákkal jellemzett nyeregpont jelenik meg az RG diagramon [67], mint ahogyan azt a (4.1) ábrán is láthatjuk, amelyet a hatványfüggvény regulátorral (2.50) kaptam. Ennek alapján a modell két fázissal rendelkezik. Hasonlóan fraktál dimenziókban ($1 < d < 2$) is megjelenik a nem-triviális nyeregpont. Azonban a spontán sértett fázisnak el kell tűnnie $d = 1$ dimenzióban, amely úgy történik meg, hogy a nyeregpontnak és a nem-triviális IR fixpontnak ($1/\bar{z}_{\mathrm{IR}} \equiv 0$, $\bar{u}_{\mathrm{IR}} \equiv 1$) egybe kell esnie. Így a nyeregpont és a nem-triviális IR fixpont távolsága (lásd 4.1) ábra

$$\begin{aligned} D &\equiv \sqrt{(\bar{u}_{\mathrm{IR}} - \bar{u}_\star)^2 + (1/\bar{z}_{\mathrm{IR}} - 1/\bar{z}_\star)^2} \\ &= \sqrt{(1 - \bar{u}_\star)^2 + 1/\bar{z}_\star^2}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

felhasználható az RG egyenletek sémafüggésének optimalizálására. Ezt úgy értem, hogy minél kisebb a D távolság, annál jobb a választott RG séma. A másik vonzó IR fixpont ($\bar{u}_{k\to 0} = 0$, $1/\bar{z}_{k\to 0} = \infty$) megfelel a szimmetrikus fázisnak [38].



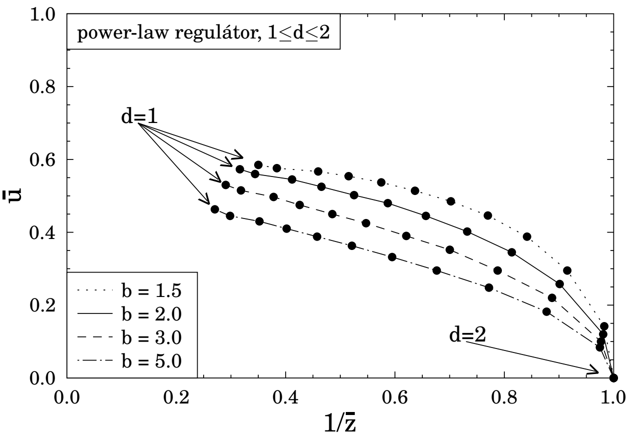
4.1. ábra. Az SG modell fázisdiagramja $d = 1$ dimenzióban az (4.12),(4.13) egyenletek numerikus megoldásával és a hatványfüggvény regulátor felhasználásával (2.50) $b = 3$ értékénél. A nyilak mutatják az RG futás irányát. A D távolságot a (4.18) képlettel definiálom.

4.5. Optimalizálás hatványfüggvény regulátorral

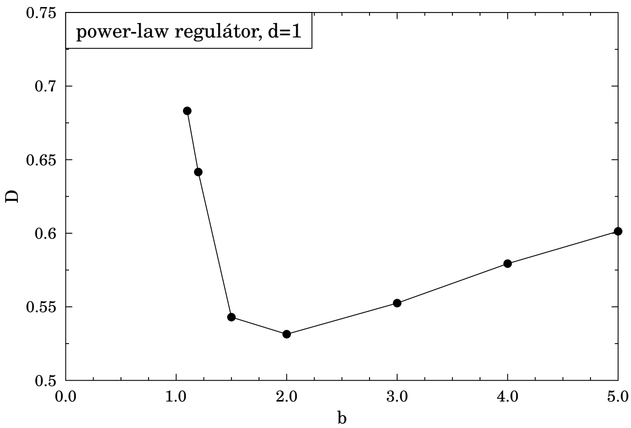
Tekintsük az RG egyenletek optimalizálását a hatványfüggvény regulátorral (2.50) az SG modell keretén belül. A (4.12) és (4.13) egyenletek numerikus megoldása alapján a nyeregpont megjelenik az RG egyenletekben $1 \leq d \leq 2$ dimenzióban. A nyeregpont helyzete a 4.2 ábrán látható módon változik a b paraméter különböző értékei mellett, különböző dimenziókban ($1 \leq d \leq 2$).

$d = 2$ dimenzióban a görbék találkoznak a fixpontban, ahol a kétdimenziós SG modell topológiai fázisátmeneten megy keresztül $\bar{u}_\star = 0$, $1/\bar{z}_\star = 1$-nél, sémától függetlenül. Fraktál dimenziókban illetve $d = 1$ dimenzióban a nyeregpont helye sémafüggővé válik. Például függ a b paramétertől. Mivel a (spontán) sértett fázisnak el kell tűnnie $d = 1$ dimenzióban, ezért a nyeregpont és a nemtriviális IR fixpont ($1/\bar{z}_{\rm IR} \equiv 0$, $\bar{u}_{\rm IR} \equiv 1$) közötti (4.18) távolság felhasználható az RG egyenletek optimalizálására. A 4.3 ábra a D távolság b paramétertől való függését mutatja és a $b = 2$ érték adódik optimális választásnak.

Az így kapott eredményem, azaz a $b = 2$ optimális érték összhangban van a szakirodalommal [34]. Más optimalizálási eljárások során is a $b = 2$ érték adódott a legjobbnak hatványfüggvény regulátor esetében LPA és LPA’



4.2. ábra. A nyeregpont helyzete az SG modellben $1 \leq d \leq 2$ dimenzióban hatványfüggvény regulátor (2.50) esetén.



4.3. ábra. Az ábra mutatja a D távolság (4.18) változását a b paraméter függvényében $d = 1$ dimenzióban.

közelítésekben. Vagyis ez validálja az általam bemutatott módszert. A [38] publikációban alkalmaztuk ezt az optimalizálási eljárást a CSS regulátorra és meghatároztuk optimális paramétereit. Ezt azonban nem tárgyalom itt, mert nem része a jelen értekezésnek.

Összegzésként elmondható, hogy felhasználva azt az eredményt, hogy a funkcionális RG módszer LPA' közelítésben $d = 1$ dimenzióban helytelen fázisszerkezetet ad (mert jelzi a spontán szimmetria sértő fázist), megalkotható egy optimalizálási eljárás, ami úgy szelektál az FRG regulátorok között, hogy az optimális regulátor adja a „legkisebb" nagyságú sértett fázist. Az egzakt eredménnyel való ellentmondás oka az alkalmazott közelítő effektív hatásfunkcionál. Vagyis ennek „feljavítása" visszaadná az elvárt fázisszerkezetet (azaz nem jelentkezne spontán szimmertiasértés). Lehetséges megoldás a magasabb deriváltak szerepeltetése, azaz az LPA' közelítés feljavítása, mivel a rendezett fázis létét az erős fluktuációk jelenléte akadályozza meg alacsony dimenzióban.

5. fejezet

A sine-Gordon modell c-függvénye

Ebben a fejezetben folytatom saját eredményeim bemutatását [2]. Hasonlóan az előzőekhez itt is a sine-Gordon(SG) modellt vizsgálom, de visszatérek $d = 2$ dimenzióba. Célom, hogy a Funkcionális Renormálási Csoport(FRG) módszer keretein belül reprodukáljam az SG modellre -konformtérelmélet segítségével származtatott- c-függvény és c centrális töltés értékeket. Fontos megjegyezni, hogy az FRG módszer keretében kizárólag két, fixpontban felvett centrális töltés különbségét tudjuk meghatározni. Azaz a (2.68) képlet megadja a c-függvényre vonatkozó RG egyenletet, amelynek a megoldásához szükséges megadni a kezdőfeltételt, vagyis például a Gaussi fixpontra jellemző $c = 1$ értéket.

5.1. LPA és $\beta = 0$ eset

Első lépésként vizsgálom a $\beta = 0$ esetet. Röviden ismertetem az előzetes eredményeket [46], amelyek az SG modell c-függvényére vonatkoznak. Induljunk ki a következő potenciálból

$$\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{\tilde{m}_k^2}{\beta_k^2}\left(\cos(\beta_k\varphi) - 1\right), \tag{5.1}$$

ahol a β_k frekvenciát skálafüggőnek feltételezzük a [46] publikációban leírtak szerint. Tehát a fenti anzatz miatt, annak ellenére használom a skálafüggő frekvencia jelölést ($\beta = \beta_k$), hogy LPA közelítést veszek. Közvetlenül behelyettesítve az (5.1) kifejezést a (4.7) RG egyenletbe, a (4.7) egyenlet bal oldalán megjelenik egy nem periodikus kifejezés. Így a modell periodicitása nem őrződik meg, ezért használható az eredeti periodikus modell Taylor sorfejtése.

$$\tilde{V}_k(\varphi) \approx \frac{1}{2}\tilde{m}_k^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}(\tilde{m}_k^2\beta_k^2)\varphi^4. \tag{5.2}$$

Ebben az esetben a (5.1) kifejezés egy csonkolt Ising modellként [48] kezelhető és az RG egyenletek csatolási állandói így írhatók

$$k\partial_k\tilde{m}_k^2 = \frac{\tilde{m}_k^2[\beta_k^2 - 8\pi(1+\tilde{m}_k^2)]}{4\pi(1+\tilde{m}_k^2)} \tag{5.3}$$

$$k\partial_k\beta_k^2 = -\frac{1}{4\pi}\frac{(1+4\tilde{m}_k^2)\beta_k^4}{(1+\tilde{m}_k^2)^2}. \tag{5.4}$$

A skálafüggő frekvencia hátránya, hogy a modell periodicitását sérti, megváltoztatva az SG modell ismert fázis struktúráját. Azonban a $\beta_k \to 0$ limeszben ez mégis helyes eredményt ad az SG modellre, mert ez az egyedüli frekvencia érték, ahol a Taylor sorfejtés használható. Az ehhez tartozó RG trajektória a függőleges tengely 3.2 ábrán, ami a Gaussi fixpontból indul és az IR (SSB) fixpontban végződik. Ez megfelel annak, mintha az Ising modell RG futási diagramján (lásd 3.1 ábra), a Gaussi fixponttól balra induló vízszintes RG trajektóriát vennénk (hiszen ez fut be az SSB-t jelző IR fixpontba).
Valóban, a [46] publikációban a Gaussi fixpont tömeges deformációját vizsgálták a $\beta_k = 0$ és $\tilde{u} = 0$ esetén. Vagyis vették a $\beta_k \to 0$ határértéket, ahol a Taylor sorfejtés jó közelítést jelent az eredeti SG modellre. A $\beta_k \to 0$ határérték esetén, a (5.3), (5.4) RG egyenletek a következő alakra redukálódnak

$$k\partial_k\tilde{m}_k^2 \approx \frac{\tilde{m}_k^2[\beta_k^2 - 8\pi(1+\tilde{m}_k^2)]}{4\pi(1+\tilde{m}_k^2)} \approx -2\tilde{m}_k^2 \tag{5.5}$$

$$k\partial_k\beta_k^2 \approx 0. \tag{5.6}$$

Hasonló RG egyenletek adottak az $\tilde{m}_k^2$ és a β_k csatolásokra a [46] publikációban. A c-függvény (5.1) egyenleten alapuló megoldása ($\beta_k \to 0$) esetben az ismert egzakt eredményt pl. a Gaussi UV fixpontban $c_{\mathrm{UV}} = 1$, IR limeszben $c_{\mathrm{IR}} = 0$, így a pontos eredmény a Gaussi fixpont tömeges deformációja esetén $\Delta c = 1$ ($\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$). A numerikus megoldás ($\beta_\Lambda \simeq 0$ kezdőfeltétellel) [46] $\Delta c = 0.998$ értéket eredményez, ami majdnem pontos egyezést mutat az egzakt

megoldással. Bár a c-függvényre kapott numerikus megoldás a [46] cikkben több mint kielégítő, a Taylor sorfejtésnek köszönhetően az SG modell egy Ising típusú modellnek tekinthető. Így a c-függvény SG modell Taylor sorfejtésére épülő eredménye lényegében ugyanaz, mint az Ising modell Gaussi fixpontjának tömeges deformációja esetén kapott képlet.
Valóban, behelyettesítve a (5.5) kifejezést a (2.68)-be és felhasználva az (5.1)-et, a következő alakot kaptam

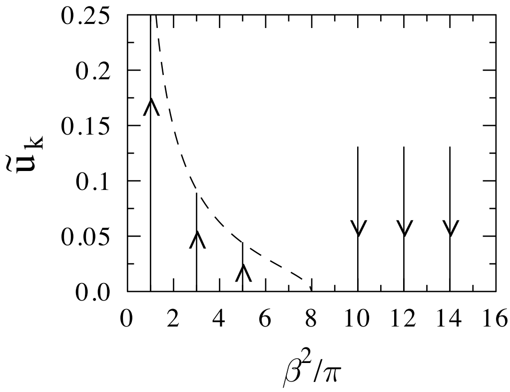
$$k\partial_k c_k = \frac{4\tilde{m}_k^4}{[1+\tilde{m}_k^2]^3}, \tag{5.7}$$

ami azonos a [46] publikáció (5.3)-as képletével ($a = 1$-nél), azaz a Gaussi fixpont Ising modellben kapott deformációjával, amelyet ugyancsak a [46] cikk (5.19) képletéből származtatható $\beta_k^2 \to 0$ limeszben. Ezért fontos kérdés, hogy reprodukálhatók-e a c-függvénnyel kapott numerikus eredmények (ugyanolyan pontossággal), ha az SG modellt skálafüggetlen (4.8) frekvencia mellett veszem LPA-ban vagy LPA'-ben a tér átskálázásával. Célom annak bemutatása, hogy a [46]-ben alkalmazott megközelítés érvényes általánosabb esetekben is, de a közelített FRG fázis diagram nem teljesíti pontosan a c-elmélettel szemben támasztott követelményeket, ezért csak a közelített eredmények lehetségesek.

5.2. LPA és $\beta \neq 0$ eset

Ebben az alfejezetben tanulmányozom az SG modell c-függvényét a teljes fázis diagramra vonatkozólag, skálafüggetlen hullámfüggvény renormálást feltételezve. Tehát olyan anzatz-ot választok, ahol LPA-ban megszokott módon nincs futása a frekvenciának.

Az SG modell ezen munkában használt definíciója (3.19), különbözik az (5.1) formulától, mert frekvencia paramétert skálafüggetlennek feltételezem LPA-ban. A β futása származtatható LPA-n túl a hullámfüggvény renormálással, felhasználva a térváltozó átskálázását, amelyből adódik a $z_k = 1/\beta_k^2$ összefüggés. Ezt a következő fejezetben tárgyalom. Ebben a fejezetben nézzük az LPA-ban kapott eredményeket! A (4.9) és a (4.10) egyenleteknek azonos kvalitatív megoldása van. Az 5.1 ábra mutatja a (4.10) megoldásával keletkező fázisstuktúrát.



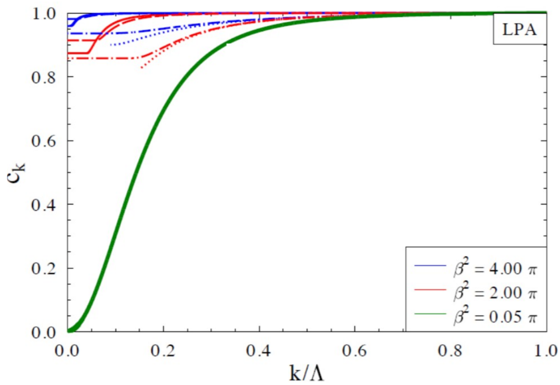
5.1. ábra. Az ábra mutatja az SG modell fázis szerkezetét, az FRG egyenletek Litim regulátor felhasználásával kapott megoldását, skálafüggetlen frekvencia esetén. A két fázist $\beta_c^2 = 8\pi$ választja el. A szaggatott vonal az IR fixpontok helyzetét mutatja a sértett fázisban.

Az ábrán az RG trajektóriák függőleges egyenes vonalak, mivel LPA-ban a (3.19) frekvencia paramétere skálafüggetlen. A kritikus frekvencia $\beta_c^2 = 8\pi$. Az IR fixpontok vonala a szimmetrikus fázisban $\tilde{u}_{\mathrm{IR}} = 0$, sértett fázisban $\tilde{u}_{\mathrm{IR}} \neq 0$ adódik. Mivel $\beta^2 < 8\pi$ esetén a Fourier amplitúdó IR értéke függ a β^2 speciális értékétől, így különböző IR effektív elméleteket kapunk és a hozzá tartozó konform térelmélet (CFT) szintén függ a frekvenciától. A c-függvény a renormálási skála csökkenő függvénye, amely azonban változatlan marad az UV és IR limeszben (fixpontokban) (lásd 5.1 ábra). A skálafüggetlen β frekvencia közelítés miatt a c-függvény IR értéke függ a β^2 speciális kezdő feltételétől.

Tehát ha a szimmetriasértett fázisban a Gauss fixpontokból álló vonalról ($\tilde{u}_{UV} = 0$) indítok RG futást, a trajektóriák IR fixpontja különböző $\tilde{u}_{IR} \neq 0$ értéknél végződik, következésképpen különböző Δc értékeket kapok. Az egzakt $\Delta c \simeq 1$ eredményt kizárólag $\beta \to 0$ limeszben kapom vissza.

Ismert, hogy a (4.9) RG egyenlet, a tömeges levágás használatakor gyenge konvergenciát mutat, az ebből kapott RG futás megáll véges $k_c \neq 0$ értéknél, így a c-függvény IR értéke nem érhető el (az 5.2 ábrán pontozott vonal).

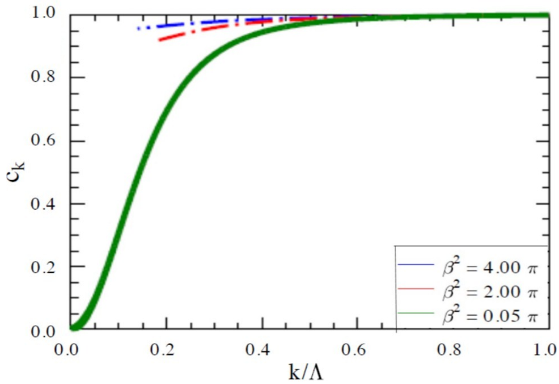
A Litim levágás használatakor a (4.10) egyenlet alapján készített RG futás jobb konvergenciát mutat, de a c-függvény IR eredménye még meglehetősen messze van a $\Delta c = 1$ értéktől, amely csak az eltűnő frekvencia limeszben érhető el (az 5.2 ábrán pont-szaggatott vonal).



5.2. ábra. A c-függvény RG futása skálafüggetlen hullámfüggvény frekvencia esetén. Pontozott vonal ($b = 1$ hatványkitevő regulátor), azaz a (4.9) egyenlet, pont-szaggatott vonal (Litim regulátor), azaz a (4.10) egyenlet megoldása kombinálva a (2.68) egyenlettel különböző β^2 frekvenciák esetén. A folytonos vonal a $b = 2$ hatványkitevő, a szaggatott vonal pedig az exponenciális regulátorral kapott eredményeket jelöli. A (4.9) egyenlet gyenge konvergenciájának megfelelően, az RG futás megáll valamely véges impulzus skálánál és az IR értéke a c-függvénynek nem érhető el (pontozott vonalak). A Litim levágás használata a (4.10) (pont-szaggatott vonalak) képes létrehozni egy IR konstanst a c-függvényre, azonban csak a $\beta \to 0$ limeszben reprodukálja a szakirodalomból ismert $\Delta c = 1$ értéket. A $\beta \to 0$ esetben (folytonos zöld vonal) kapott eredmény független a regulátor megválasztásától.

Magasabb felharmonikusok figyelembe vételével (lásd 5.3 ábra) nem javíthatunk az eddig kapott eredményen. Fontos megjegyezni, hogy a (2.68) egyenlet szigorúan csak tömeges levágás esetén érvényes, bár az 5.3 és az 5.2 ábrák elkészítéséhez a (2.68) egyenletet használtam az optimalizált Litim-levágás esetén is. Mivel fontos elvárás, hogy az RG futás trajektóriái csak nagyon kis mértékben függjenek a levágás típusától, ezért tettem kísérletet a (2.68) használatára tetszőleges regulátorral.

A regulátortól való kis mértékű függés mint elvárás jól látszik a tömeges és



5.3. ábra. A 5.2 ábrához hasonló esetek vizsgálata, azonban itt figyelembe vettem a felharmonikusokat is. A pont-szaggatott görbéket Litim levágással kaptam, míg a folytonos zöld vonal regulátor független eredmény.

a Litim regulátorral kapott c-függvény trajektóriák összehasonlításánál az 5.2 ábrán, amelyek nagyon hasonlóak, legalábbis azon a területen, ahol nincsenek konvergencia problémák. Ez a hasonlóság indokolja a tömeges levágásra vonatkozó formula (2.68) használatát az optimalizált (Litim) regulátorral vett RG egyenleteivel (4.10).

Meghatároztam a c-függvény futását más regulátor függvénnyel, például a hatványfüggvény regulátorral $b = 1, 2$ esetén (5.2 ábra pontozott és folytonos vonala). A tömeges ($b = 1$) levágástól eltekintve az összes konvergál az IR fixpontban.

Megállapítottam, hogy nincs kimutatható függés a különböző levágási sémák (regulátorok) segítségével kapott eredmények között. Továbbá azt is megmutattam, hogy a konstans frekvencia (LPA) közelítés nem elég, hogy visszaadja a c-függvényre vonatkozó előzetes ismereteket.

Megfigyelhetjük, hogy a tömeges levágás esetén tapasztalt konvergencia probléma nem jelenik meg az alacsony frekvenciás limeszben. Valóban, Taylor-sorba fejtve a (4.9) és a (4.10) RG egyenleteket kapom

$$k\partial_k \tilde{u}_k \approx -2\tilde{u}_k + \frac{\tilde{u}_k \beta^2}{4\pi} \approx -2\tilde{u}_k, \tag{5.8}$$

amely érvényes a frekvencia eltüntetésekor, és független a regulátorfüggvény speciális megválasztásától, pl. azonos a tömeges és a Litim levágás esetén. Behelyettesítve az (5.8) egyenletet a (2.68) egyenletbe, felhasználva a (4.8) összefüggést, a következő egyenletet kapom az SG modell c-függvényére:

$$k\partial_k c_k = \frac{\left(k\partial_k \tilde{u}_k \beta^2\right)^2}{\left(1+\tilde{u}_k\beta^2\right)^3} \approx \frac{\left(-2\tilde{u}_k\beta^2\right)^2}{\left(1+\tilde{u}_k\beta^2\right)^3} \equiv \frac{4\tilde{m}_k^4}{[1+\tilde{m}_k^2]^3} \tag{5.9}$$

ahol $\tilde{m}_k^2 = \tilde{u}_k\beta^2$. Ebben az esetben a c-függvény skálafüggése azonos a Gaussi fixpont tömeges deformációjával, a megfelelő RG trajektóriát zöld vonallal jelöltem az 5.2 és az 5.3 ábrán. Megjegyzendő, hogy a véges $\beta^2 \neq 0$ frekvencia esetén Taylor sorfejtett potenciál (5.2) nem használható a c-függvény meghatározására, mert sérti a modell periodicitását. Ebben az esetben a (4.9) vagy a (4.10) egyenlet szolgáltathat helyes eredményt.

Az SG modell c-függvényére kapott eredményem feljavításához a modell periodikusságának megtartása mellett, skálafüggő frekvenciát kell beiktatni, például hullámfüggvény renormálás figyelembe vételével; erre a közelítésre úgy hivatkozom, mint LPA'=z+LPA. Erről lesz szó a következő fejezetben.

5.3. Skálafüggő hullámfüggvény renormálás

A skálafüggő hullámfüggvény renormálás figyelembe vétele megváltoztatja az SG fázisdiagram teljes képét: az összes $\tilde{u} \neq 0$ fixpont egyetlen ($\beta_{k\to 0} = 0$,$\tilde{u}_{k\to 0} = 1$) fixpontban egyesül, mint ahogy az egzakt CFT megoldások alapján várható.

A hullámfüggvény renormálás szükséges ahhoz, hogy korrekt RG diagramot kapjak az SG modellre. Azonban a c-függvény RG futásra vonatkozó (2.68) egyenlet csak skálafüggetlen kinetikus tag esetére lett levezetve. Tehát egy futó hullámfüggvény renormálással levezetett, ezzel ekvivalens kifejezés használata lenne szükséges, ami a jelen értekezésben vázolt számolásnál pontosabb eredményeket szolgáltatna.
Azonban még mindig lehetséges "értelmes" eredményt elérni a futó hullámfüggvény renormálás és a futó β_k frekvencia közötti leképezés használatával (ahogy a (4.17a) és a (4.17b) egyenletek mutatják), ahol végül megkapjuk az (5.12) egyenletet. Más szóval a (2.68) egyenlet csak LPA-ban érvényes, de még mindig lehetséges alkalmazni azt z+LPA esetben, köszönhetően a (4.17a) és a (4.17b) -ban leírt z+LPA és LPA közötti leképezésnek.

Közvetlenül kihasználjuk azt a tényt, hogy skálafüggő frekvencia esetén

$$\tilde{V}_k = \tilde{u}_k \cos(\beta_k \phi) \tag{5.10}$$

nincs hullámfüggvény renormálás a kinetikus tagban. Ez a közelítés egyenértékű a (4.11) egyenlet közelítésével, amennyiben a teret átskálázom, illetve felhasználom a (4.17a) és a (4.17b) relációkat, és a futó frekvencia játssza a hullámfüggvény renormálás szerepét.

Az (5.10) közelítés nem alkalmas az SG modell tanulmányozására, amikor a periodicitást teljesen szeretnénk megőrizni, valóban beírva azt a (4.5) egyenletbe, szimmetria sértő tagok jelennek meg. Hasonló történik, amikor a (2.68) egyenletbe helyettesítek be. Azonban az utóbbi esetben a szimmertia sértő tagok nem jelentenek problémát, mivel a kifejezést a potenciál minimumánál kell kiértékelni, ahol a szimmertia sértő tagok eltűnnek.

Ha ily módon járok el, a következő RG futást leíró egyenletet kapom a c-függvényre

$$k\partial_k c_k = \frac{(\beta_k^2 k\partial_k \tilde{u}_k + 2\tilde{u}_k \beta_k k\partial_k \beta_k)^2}{(1+\tilde{u}_k \beta_k^2)^3} \tag{5.11}$$

ahol nincs jelen következetlenség.

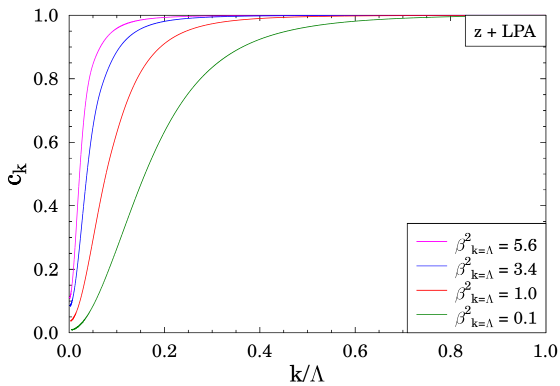
Azonban az (5.11) kifejezés továbbra sem használható, mivel nem tudok β_k-ra RG egyenletet származtatni a nem periodikus tagok miatt.

A nehézségek elkerülése érdekében átírható az (5.11) kifejezés, használva a (4.17a) és a (4.17b) inverz transzformációkat,

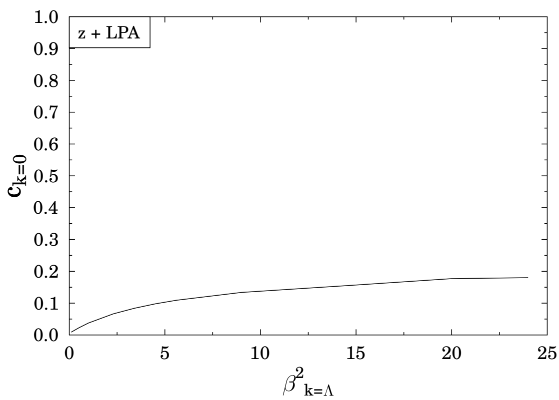
$$k\partial_k c_k = \frac{(k\partial_k \tilde{u}_k)^2}{(1+\tilde{u}_k)^3}. \tag{5.12}$$

Az így kapott kifejezés teljesen koherens és leírja a c-függvény skálafüggését a futó hullámfüggvény renormálás jelenlétében az SG modellben. A (4.17a) és a (4.17b) transzformációk lehetőséget adnak az (5.11) kifejezés származtatására a (2.68) egyenletből.

A $\beta_{k=\Lambda}^2 \to 0$ limeszben, a c-függvény IR limeszben vett értéke lásd az 5.4 és az 5.5 ábra, nullához tart.



5.4. ábra. c-függvény RG futása skálafüggő hullámfüggvény renormálás esetén az egyetlen frekvenciát tartalmazó SG modellre különböző frekvencia-kezdőértékekre.



5.5. ábra. A c_{IR} eredmények a $\beta_{k=\Lambda}$ függvényében mutatják a magas frekvencia limit pontatlanságát, miközben pontos eredményt adnak $\beta_{k=\Lambda} \to 0$ esetén, megfelelően a [46] hivatkozásnak.

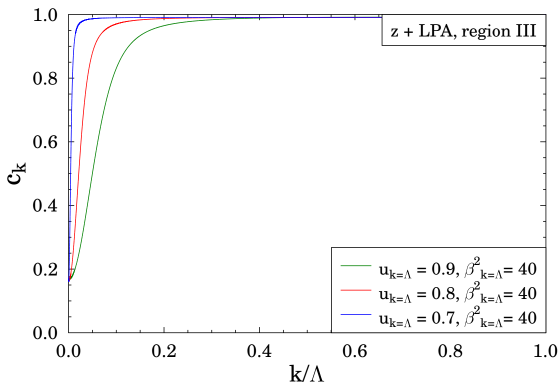
Ez azt jelenti, hogy a $\beta^2_{k=\Lambda} \to 0$ limeszben a $\Delta c \to 1$. A numerikus megoldás esetén sikerült elérni a $1 \geq \Delta c \geq 0.99$ pontosságot. Azonban most az SG modell periodikussága teljesen megőrződik. Az 5.4 és az 5.5 ábrán bemutatott eredményeket nem kaphattam volna meg a tömeges levágás keretében ($b = 1$), mivel az nem biztosít megfelelő konvergenciát. Megállapításaimat a sokkal jobb konvergenciát adó $b = 2$ hatványfüggvény regulátorral származtattam.

A 5.4 ábra mutatja a c-függvény futását különböző β_Λ kezdőértékek esetén. A végső Δc érték függ a trajektóriától, még akkor is, ha ez nem megengedett az egzakt eredmény ismeretében. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy a közelítő eljárással kapott RG futás nem képes megfelelni a c-függvénnyel kapcsolatos pontos CFT követelményeknek.

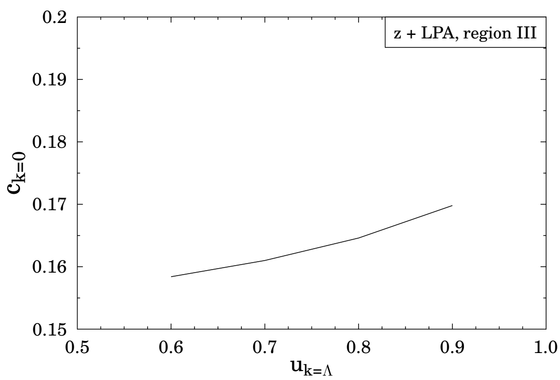
Az ellentmondás a pontos $\Delta c = 1$ érték és az aktuálisan, FRG közelítéssel kapott tényleges eredmény között, felhasználható arra, hogy számszerűsítsük a csonkolás miatt a pontos RG trajektóriák leírásában elkövetett hibát. Azonban ezt a kérdést nem vizsgáltam. Az eltűnő frekvenciára az RG egyenletek regulátor függetlenekké válnak, a c-függvény értéke pedig közelít a pontos $\Delta c = 1$ értékhez. Ez magyarázza a [46] munkában kapott pontosságot még akkor is, ha a tömeges levágást használva a periodikusság sérült.

Végül tekintsük a III tartomány eredményeit! Amint azt a bevezető részeknél tárgyaltam, a Δc értéke az SG modell III tartományában nem jól definiált, mert azok a trajektóriák $\beta_{k=\Lambda} = \infty$-ból indulnak, ahol nincs valós fixpont.

Ugyanakkor ezeknek a pályáknak az 5.6 és az 5.7 ábrán bemutatott numerikus eredményei nincsenek messze a $\Delta c = 1$ értéktől, annak köszönhetően, hogy a legtöbb járulékot abban a tartományban kapják, ahol megközelítik az I tartományt határoló trajektória vonalát (pl. a vékony kék vonal a 3.2 ábrán, amelyről tudjuk, hogy $\Delta c \approx 1$ értékkel rendelkezik, amíg a II régióhoz közeli trajektóriák hozzájárulása majdnem nulla.



5.6. ábra. A c-függvény RG futása az egy-frekvenciás SG modell III. tartományában.



5.7. ábra. A c-függvény IR értékei a III. tartományban.

Összefoglalásként elmondható, hogy sikerült -bizonyos közelítések mellett- reprodukálnom az SG modell fixpontjainak centrális töltését az FRG módszer keretében. Ez tekinthető a szakirodalomban közölt c-függvényre vonatkozó FRG formula [46] első nem triviális alkalmazásának, mert tetszőleges $\beta_{k\equiv\Lambda} < 8\pi$ UV kezdőértékre sikerült jó pontossággal visszakapni az egzakt $\Delta C = 1$ értéket.

6. fejezet

Sinh-Gordon és Sn-Gordon modellek fázisszerkezete

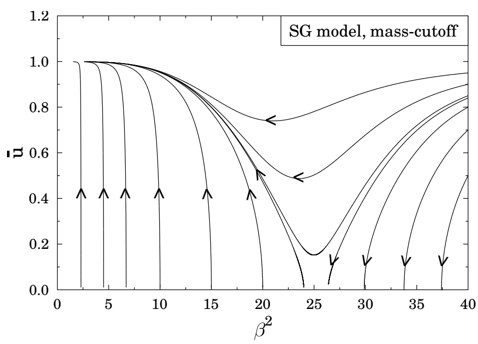
A szimmetriák és a dimenzió meghatározó szerepet játszanak a kritikus viselkedés meghatározásában, illetve a fázisdiagram létrehozása szempontjából. Például kvantumtérelméletben a legtöbbet tanulmányozott modell az Ising-modell, amelynek kölcsönhatási tagja ϕ^4. A modellnek két fázisa van $d = 2$ dimenzióban, az egyikben a Z_2 szimmetria spontán sérül. Egy másik sokat tanulmányozott fázisátalakulás $d = 2$ dimenzióban a sine-Gordon (SG) skalár elmélet, ami tartalmaz egy $\cos(\beta\phi)$ önkölcsönható tagot és ismert a Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) fázisátalakulása. Kicserélve a valós β frekvenciát egy képzetes $\beta \to i\beta$ tagra, megkapjuk a sinh-Gordon (ShG) modellt, amely egy jól ismert skalár-térelmélet, és amelynél a periodicitás elvész, illetve nincs BKT típusú fázisátalakulás. A kölcsönhatási potenciál Taylor sora generál ϕ^{2N} tagokat, amelyből naivan egy Ising típusú fázisszerkezetet várnánk. Azonban nem erről van szó, az ShG modellnek egyetlen fázisa van és ennek oka a potenciál funkcionális formájának megőrzése. Másrészről a kapcsolat az Ising, az SG és ShG modellek között, a konform tulajdonságaikon alapul. Ismert például, hogy a $\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$ mennyiség, azaz a centrális töltés UV és IR fixpontokban felvett értékének különbsége, $\Delta c = 1/2, 1, 1$, az Ising, az SG és az ShG modellekben. Tehát Δc értéke azonos az SG és ShG modellekben, ami alapján valamilyen hasonlóságot várnánk a két modellben. Valóban az SG és ShG modellek jellemzői, hogy a potenciál megőrzi funkcionális formáját a linearizált RG transzformációk során. Vagyis szimmetria megfontolások segítségével következtethetünk a ShG modell fázisszerkezetére, de ennek ellenőrzése megkerülhetetlen, amit végre tudunk hajtani a funkcionális RG módszerrel, ami az egyik célom ebben a fejezetben [3]. A másik kérdés, amit vizsgálok, szintén természetes módon adódik. Érdemes kísérletet tenni egy olyan SG és ShG modellek között interpoláló elmélet felírására, amely periodikus, szemben a szakirodalomban ismert polinomiális interpoláló Shine-Gordon elmélettel [3].

6.1. Sine-Gordon modell fázisszerkezete

Első lépésként vizsgáljuk meg az SG modell fázisszerkezetét az FRG módszer keretében! Ehhez felhasználom a (6.1) kifejezésben felírt RG futási egyenleteket, ahol LPA' közelítést alkalmaztam és a teret átskálázva ($\varphi \to \beta\varphi$) beledefiniáltam a frekvenciát a skálafüggő hullámfüggvény renormálásba, azaz $\beta_k^2 = \frac{1}{z_k}$ jelölést használva az RG egyenletek alakja a következő

$$\begin{aligned} (2 + k\partial_k)\tilde{u} &= \frac{\beta_k^2}{2\pi\tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_k^2}\right] \\ k\partial_k\beta_k^2 &= \frac{1}{24\pi}\frac{\beta_k^4\tilde{u}_k^2}{[1 - \tilde{u}_k^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Az SG modell fázisszerkezete a (6.1) egyenleten alapul, ahogy a 6.1 ábra mutatja, amelyen két fázis látható, a frekvencia kritikus értéke $\beta_c^2 = 8\pi$.



6.1. ábra. Az SG modell fázisszerkezete a (6.1) egyenlet alapján, a BKT-típusú fázisátmenetre utal $\beta_c^2 = 8\pi$ kritikus frekvenciánál.

A gyenge konvergencia tulajdonságok miatt a hatványkitevő regulátor $b = 1$ (tömeges levágás) esetén, az RG trajektóriák nem érik el az IR fixpontot a tömeges fázisában. Jobb eredményt kapunk például $b = 2$ esetén [2].

6.2. Sinh-Gordon modell fázisszerkezete

Fontos megjegyezni, hogy a (3.25) egyenletnek Z_2 szimmetriája van és a ShG modell *nem* periodikus. Ezért annak érdekében, hogy az ShG modell RG futását tanulmányozzam és kirajzoljam a fázisszerkezetét, használnom kell a (3.25) egyenlet Taylor-sorfejtett alakját.

$$\begin{aligned}\tilde{V}_k(\varphi) &= \tilde{u}_k \left[1 + \frac{1}{2}\beta^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\beta^4\varphi^4 + ...\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} g_{2n}\varphi^{2n}, \qquad g_{2n} = \tilde{u}_k\beta^{2n}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Így az ShG modell úgy tekinthető, mint egy Ising-típusú modell, de a csatolások rögzített kezdőértékeivel. Kulcsfontosságú, hogy ShG-típusú kezdőértékeknél az RG futás *mindig* a szimmetrikus fázisból kezdődik, mint ahogyan a 6.2 ábrán látható. Ezért a ShG modellnek egyetlen fázisa van és nem megy át egy BKT vagy más típusú fázisátalakuláson.

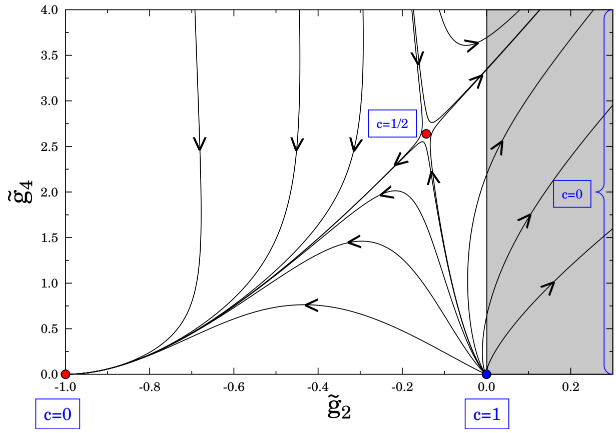
Az ShG modell fázisstruktúrája analitikus elfolytatással is kirajzolható. Ennek legegyszerűbb módja, ha a frekvenciát direkt módon kicserélem egy képzetesre. Például A ShG modell RG futási egyenletei létrehozhatók a (6.1) formulából

$$(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k = -\frac{\beta_k^2}{2\pi\tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_k^2}\right] \tag{6.3}$$

$$k\partial_k\beta_k^2 = -\frac{1}{24\pi}\frac{\beta_k^4\tilde{u}_k^2}{[1 - \tilde{u}_k^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{6.4}$$

Az ShG modell RG futása a (6.3) és a (6.4) egyenletek alapján a 6.3 ábrán látható, amely ugyancsak a modell egyetlen fázisát jelzi. Hasonlóan az SG esethez, a regulátorfüggvény ($b = 1$ hatványkitevő) rossz konvergencia tulajdonságai miatt az RG trajektóriák konvergálása nem megfelelő, különösen abban a tartományban, ahol β_k^2 eltűnik.

Most tekintsük az ShG modell c-függvényét! A [2] publikációban kidolgoztuk a c-függvény megfelelő kezelését az RG keretén belül SG skalártérelméletre. Az



6.2. ábra. Az ShG modell Taylor sorfejtésen (6.2) alapuló ábrázolása a g_2, g_4 síkon. A sötétebb tartomány az egyetlen fázist eredményező kezdőfeltételnek felel meg.

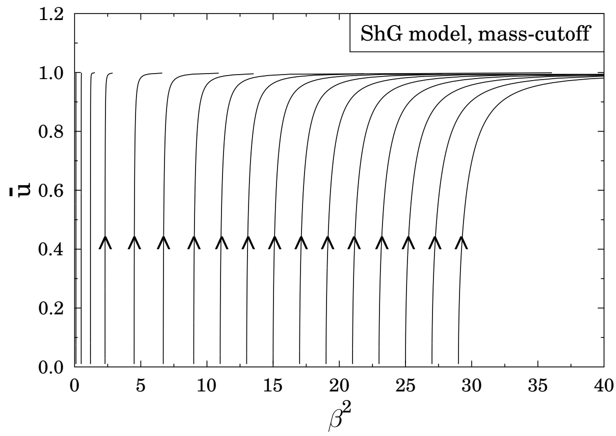
eltűnő frekvencia határán az ShG és az SG modellek azonossá válnak, így a módszer itt alkalmazható az ShG modellre a következő paraméterezés mellett

$$\tilde{V}_k(\varphi) = \frac{\tilde{m}_k^2}{\beta_k^2}\left(\cos(i\beta_k\varphi) - 1\right), \tag{6.5}$$

ahol a β frekvencia skálafüggőnek feltételezhető. A $\beta_k \to 0$ limeszben, az RG egyenletek ShG modellre vonatkozó speciális formája (6.5) erre egyszerűsödik

$$\begin{aligned} k\partial_k \tilde{m}_k^2 &\approx \frac{\tilde{m}_k^2[-\beta_k^2 - 8\pi(1+\tilde{m}_k^2)]}{4\pi(1+\tilde{m}_k^2)} \approx -2\tilde{m}_k^2 & (6.6)\\ k\partial_k \beta_k^2 &= 0. & (6.7)\end{aligned}$$

A [2] munkában kidolgozott módszert követve, az ShG modell c-függvénye meghatározható az RG keretén belül a (6.6) és a (6.7) futási egyenletekből, amely azonos az SG modellel a $\beta_k \to 0$ limeszben. Így az eltűnő frekvencia limeszben a c-függvény futása ShG és SG modellek esetén azonos, amely azonos eredményt ad, reprodukálva az ismert $\Delta c = 1$ ($\Delta c = c_{UV} - c_{IR}$) értéket.



6.3. ábra. Az ShG modell fázis szerkezete a (6.3) és a (6.4) egyenletek alapján egyetlen fázist hozva létre.

6.3. Interpoláló modellek fázisszerkezete

Az irodalmi áttekintést bemutató fejezetekben célul tűztem ki egy olyan SG és ShG modellek között interpoláló elmélet megalkotását, ami periodikus (kivéve természetesen az ShG limeszt). Ez megvalósítható Jacobi függvények [69] segítségével. Például az $sn(\beta\varphi, m)$ Jacobi függvény esetében, az interpoláció alapja, hogy az m értéke 0 és 1 között változik és $\mathrm{sn}(\beta\varphi, m)$ függvény $m = 1$ esetén $\sin(\beta\varphi)$-re, $m = 0$ esetén $\tanh(\beta\varphi)$-re redukálódik. Vagyis az általam javasolt interpoláció, azaz az Sn-Gordon (SnG) modell kifejezésében a Jacobi függvények szerepelnek,

$$V_{\mathrm{SnG}}(\varphi) = u\, \mathrm{cd}(\beta\varphi, m)\, \mathrm{nd}(\beta\varphi, m). \tag{6.8}$$

Ezért az SnG potenciál (6.8) $m = 0$-nál $u \cos(\beta\varphi)$, míg $m = 1$ esetén $u \cosh(\beta\varphi)$ alakra redukálódik. Az interpoláló potenciál periodikus (kivéve $m = 1$ esetét). Megjegyzem, addig amíg a teret nem skálázom át, a frekvencia (β) skálafüggetlennek tekintendő. Ha az átskálázást megteszem, akkor LPA' esetén z_k skálázásából kapom a frekvencia ($\beta_k^2 = \frac{1}{z_k}$) skálafüggését.

Az SnG modellben a dimenziótlan csupasz potenciál alakja

$$\tilde{V}_{\mathrm{SnG}}(\varphi) = \tilde{A}_k\, \mathrm{cd}(\beta\varphi, m)\, \mathrm{nd}(\beta\varphi, m), \tag{6.9}$$

ahol az $\tilde{A}_k$ amplitúdó skálafüggő. Felhasználva a $\mathrm{cd}(u,m) = \mathrm{cn}(u,m)/\mathrm{dn}(u,m)$ és az $\mathrm{nd}(u,m) = 1/\mathrm{dn}(u,m)$ Jacobi függvények tulajdonságait, írhatjuk a következőt

$$\tilde{V}_{\mathrm{SnG}}(\varphi) = \tilde{A}_k \,\mathrm{cn}(\beta\varphi, m)\,[\mathrm{nd}(\beta\varphi, m)]^2. \tag{6.10}$$

Behelyettesítve a (6.9) vagy a (6.10) egyenletet a linearizált RG egyenletbe,

$$(2 + k\partial_k)\tilde{V}_k(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\tilde{V}_k''(\varphi) + \mathcal{O}(\tilde{V}_k''^2), \tag{6.11}$$

látható, hogy nem őrzi meg a funkcionális formáját, mert a potenciál második deriváltja a következő formát ölti

$$\tilde{V}_{\mathrm{SnG}}''(\varphi) = \beta^2 \tilde{A}_k \frac{\mathrm{cn}(\beta\varphi, m)}{\mathrm{dn}(\beta\varphi, m)^4}\left[6(m-1) + (5-4m)\,\mathrm{dn}(\beta\varphi, m)^2\right]. \tag{6.12}$$

Azonban a (6.9) Jacobi függvény periodikus függvény, így Taylor-sorba fejthető,

$$\mathrm{cn}(u,m) = \frac{2\pi}{K\sqrt{m}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1/2}}{1+q^{2n+1}}\cos\left[(2n+1)\frac{\pi u}{2K}\right], \tag{6.13}$$

$$\mathrm{nd}(u,m) = \frac{\pi}{2K\sqrt{1-m}} + \frac{2\pi}{K\sqrt{1-m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n}{1+q^{2n}}\cos\left[2n\frac{\pi u}{2K}\right], \tag{6.14}$$

ahol $q = \exp[-\pi K(1-m)/K(m)]$ és $K(m)$ negyed periódusú, amely az alábbi hipergeometrikus függvénnyel fejezhető ki

$$K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\,\sin^2(\theta)}} = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,m\right).$$

Ezt követi aztán a következő Fourier sorfejtésen alapuló alak

$$\tilde{V}_{\mathrm{SnG}}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n(k)\cos(n\,b\,\varphi), \tag{6.15}$$

$$b = \frac{\beta}{{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,m\right)}. \tag{6.16}$$

Behelyettesítve a (6.15) alakot a (6.11) linearizált LPA RG egyenletbe, származtathatunk egy sor csatolatlan differenciál egyenletet a Fourier módusokra

$$k\partial_k \tilde{u}_n(k) = \tilde{u}_n(k) \left(-2 + \frac{1}{4\pi} n^2 b^2 \right). \tag{6.17}$$

Hasonlóan a SG modellhez a kritikus frekvencia megfelel az alap módusnak, azaz $n = 1$ esetén, $b_c^2 = 8\pi$. A magasabb felharmonikusok nem módosítják azt [49]. Így az eredeti frekvencia m-függősége felírható

$$\beta_c^2(m) = 8\pi \left[{}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m \right) \right]^2, \tag{6.18}$$

amely BKT-típusú fázisátalakulást mutat, amennyiben $m \neq 1$. Az $m \to 0$ limeszben visszakapom a $\beta_c^2 = 8\pi$ értéket. Az $m \to 1$ esetén az eredeti frekvencia divergál, így a rendszer állandóan az úgynevezett tömeges (ionizált) fázisban van, mint ahogy a 6.4 ábrán látható.
Fontos kérdés, hogy az így kapott fázis megegyezik-e az ShG modell egyetlen fázisával. Mindkét esetben (ShG és $m = 1$ Sn-Gordon) egyetlen fázisról beszélünk, ami a magas hőmérsékletű esettel azonosítható. Azonban az $m = 1$ Sn-Gordon esetén ez a spontán szimmetria sértett, míg az ShG esetén a szimmetrikus fázis. Vagyis az $m \to 1$ átmenet nem analitikus. Ezt a kérdést szeretném megvilágítani az Sn-Gordon modell LPA' esetben vett FRG vizsgálatával, amelyet a későbbiekben mutatok be.

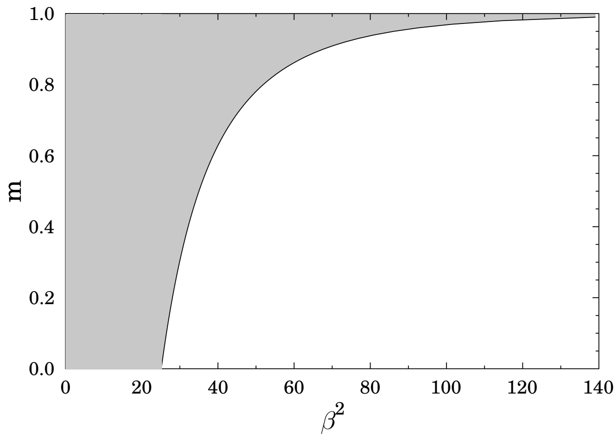
Összegezve megállapítható, hogy az SG és az SnG modellnek (Fourier sorfejtés esetén) speciális fázisszerkezete van, a funkcionális formájukat megőrzik a linearizált RG egyenletek. Megfigyelhető egy BKT- típusú fázisátalakulás SG és SnG modelleknél, az utóbbinál $m \neq 1$ feltétellel.

Az SnG modell RG megoldása a Fourier sorfejtésen (6.15) alapul, ahol az alap módus b^2 frekvenciája fontos szerepet játszik a fázisszerkezet meghatározásában. Így LPA-n túl a SnG modell úgy kezelhető mint egy SG modell, így az RG egyenletet a következő funkcionális alak felhasználásával kell megoldani

$$\Gamma_k = \int d^2x \left[\frac{1}{2} z_k (\partial_\mu \varphi_x)^2 + V_k(\varphi_x) \right], \tag{6.19}$$

ahol a lokális potenciál végtelen sok Fourier módust tartalmaz

$$V_k(\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n(k) \cos(n\,\varphi), \tag{6.20}$$



6.4. ábra. A SnG modell (6.18) egyenlettel kapott fázisstruktúrája az m, β^2 síkon, BKT-típusú fázisátalakulást mutat, ahol a szürke terület képviseli a tömeges fázist.

és a következő jelölést vezetem be

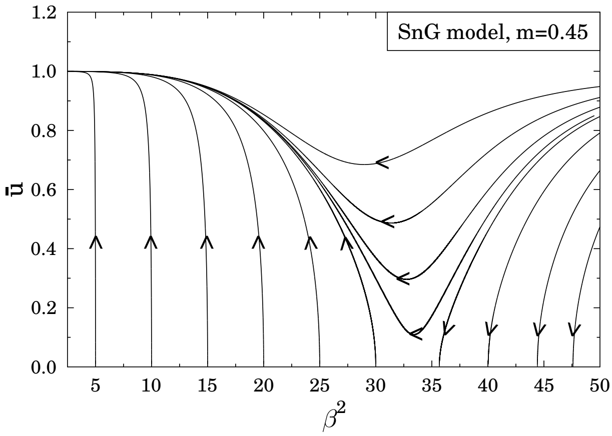
$$z_k \equiv \frac{1}{b^2} = \frac{\left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, m\right)\right]^2}{\beta_k^2} \tag{6.21}$$

a tér $\varphi \to \varphi/b$ átskálázásával a (6.15) egyenletben és z_k megint a térfüggetlen hullámfüggvény renormálás. Fontos, hogy m egy nem skálázó paraméter marad még LPA-n túl is. Azért, hogy az SG modellnél alkalmazott stratégiát lehessen követni, venni kell az SnG modell (6.20) egyetlen Fourier-módusú közelítését. A magasabbrendű tagok nem változtatják a kvalitatív képet. Tömeges levágást használva, pl. a hatványfüggvény típusú regulátor esetén, $b = 1$ értéknél a SnG csatolásokra vonatkozó RG egyenletek így írhatók,

$$\begin{aligned}(2 + k\partial_k)\tilde{u}_k &= \frac{1}{2\pi z_k \tilde{u}_k}\left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_k^2}\right] \\ k\partial_k z_k &= -\frac{1}{24\pi}\frac{\tilde{u}_k^2}{[1 - \tilde{u}_k^2]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{6.22}$$

$\tilde{u} = k^{-2}u$ dimenziótlan csatolással, amely megegyezik az SG modell futási egyenletekkel (4.16), de z_k különböző definíciójával. Az SnG és SG model-

lek folyási diagrammjának [8] összehasonlításához a β_k^2 frekvencia négyzetet érdemes használni a z_k hullámfüggvény renormálás helyett. Az SnG modell futási diagrammját LPA-n túli Fourier kifejtésben $m = 0.45$ érték mellett a 6.5 ábra mutatja.
Itt érdemes megvizsgálni az $m \to 1$ határátmenetet. A (6.5) ábrán jól látszik, hogy $m \to 1$ limeszben $\beta_c \to \infty$, azaz egyetlen fázist kapok, ahol $\tilde{u}$ releváns, míg β_k^2 irreleváns. Ezt összehasonlítva az ShG modell folyási diagramjával (6.3 ábra), jól látszik az eltérés: az ShG modellben β_k^2 relevánsnak adódott. Vagyis az $m \to 1$ határátmenet nem analitikus.



6.5. ábra. Az SnG modell fázisszerkezete $m = 0.45$ értékénél, BKT-típusú fázisátalakulást eredményez $\beta_c^2 \approx 33.3$ esetén.

Végül összehasonlítom az SnG modellt a Shine-Gordon modellel, amely a (6.23) kifejezéssel definiálható, és a következő módon írható.

$$V_{\text{ShineG}}(\varphi) = u \cos(\beta_1 \varphi) \cosh(\beta_2 \varphi), . \tag{6.23}$$

A Shine-Gordon modellre BKT típusú fázisátalakulás csak $\beta_2 = 0$ esetén tapasztalható.

Ez „ellentéte„ az SnG modellnek, amelynek BKT fázisátalakulása van minden pontban (kivéve az $m = 1$ értéket). Egy egyszerű FRG vizsgálat LPA-ban $N_{CUT} = 2,3$ esetén, azonban azt mutatja, hogy a modellnek gazdag fázisdiagramja lehet. Ennek tárgyalása azonban nem része a doktori értekezésemnek.

Összegzésként elmondható, hogy sikerült megadni egy periodikus interpoláló modellt, az Sn-Gordon skalárelméletet. Továbbá sikerült meghatározni az SnG modell fázisszerkezetét, amelyet BKT típusú fázisátmenet jellemez. Származtattam a fázisokat szeparáló kritikus frekvencia változását az interpoláció során. Megmutattam, hogy az Sn-Gordon modell $m \to 1$ határátmenete nem analitikus.

7. fejezet

Összegzés

Az értekezésemben fázisátalakulások vizsgálatával foglalkoztam a funkcionális (vagy egzakt) renormálási csoport (FRG) módszer használatával. Az általam alkalmazott eljárás fontos eleme, hogy klasszikus statisztikus fizikai rendszerek leképezhetők kvantumtérelméleti modellekre, amelyek viszonylag könnyen tanulmányozhatók az említett renormálási csoport módszer funkcionális alakjával, azaz a Wetterich egyenlettel. Vagyis a statisztikus rendszerek fázisátalakulás közeli viselkedésének megértéséhez elegendő megadni az azoknak megfelelő kvantumtérelméleti modellt, majd származtatni ezen elméletek kritikus viselkedését. Speciális, úgynevezett sine-Gordon típusú kvantumtérelméleti modelleket vizsgáltam, amelyek közös jellemzője, hogy tartalmaznak egy periodikus önkölcsönhatást és számos fontos fizikai alkalmazással bírnak szilárdtestfizikában és részecskefizikában egyaránt.
Az értekezés kiinduló pontjául szolgált a két-dimenziós sine-Gordon modell szakirodalomban ismert FRG vizsgálata. Az értekezésben ismertetett saját eredményeimet a 4-6. fejezetekben tárgyaltam, amelyek tézispontok szerinti sorrendben a következők.

Milyen a sine-Gordon modell fázisszerkezete $d < 2$ dimenzióban?

Az FRG egyenlet megoldása közelítések segítségével adható meg. Az így kapott megoldás egyrészt függ az FRG módszer regulátorától, másrészt a fázisszerkezetről kapott információ sem teljes. Megmutattam például, hogy az LPA' közelítésben vett FRG módszer spontán szimmetriasértő fázis jelenlétét jósolja $d = 1$ esetben, ami bizonyosan helytelen, hiszen a $d = 1$ dimenzió esetén

a sine-Gordon kvantumtérelmélet nem más, mint egy kvantummechanikai rendszer, ahol az alagút effektus miatt spontán szimmetriasérétés nem létezhet. Ezt felhasználva bevezettem egy új optimalizálási eljárást, amely azon alapult, hogy a regulátor megválasztásától függ a helytelenül megjelenő szimmetriasértett fázis „nagysága”.
T1: Azaz új optimalizálási eljárást javasoltam, amely arra épül, hogy a közelítő hatás funkcionál az egzakt tulajdonságoknak ellentmondó eredményre vezet és az ellentmondás „mértéke” az optimális regulátornál a legkisebb. Azonban megfelelően feljavított hatásfunkcionál esetén visszakapnánk az elvárt fázisszerkezetet.

Lehet-e reprodukálni a kétdimenziós sine-Gordon modell (konformtérelméletből ismert) c-függvényét az általam használt funkcionális renormálási módszer keretében?

Megvizsgáltam, hogy az SG modell ismert c-függvénye és c centrális töltése reprodukálható-e az FRG módszer segítségével LPA közelítésben.
T2: Megállapítottam, hogy LPA közelítésben az ismert c-függvény értékek csak a $\beta \to 0$ limeszben reprodukálhatók.

Megvizsgáltam, hogy hullámfüggvény renormálás figyelembevételével reprodukálható-e az SG modell c-függvénye és a fixpontokban felvett centrális töltés értékei az FRG módszer keretében.
T3: Megállapítottam, hogy LPA' közelítésben a modell tömeges fázisban (lásd I. tartomány a 3.2 ábrán) tetszőleges ($\beta^2 < 8\pi$) frekvencia esetén jó egyezést kaphatunk a szakirodalommal. Ez tekinthető a szakirodalomban közölt c-függvényre vonatkozó FRG formula első nem triviális alkalmazásának, mert tetszőleges $\beta_{k\equiv\Lambda} < 8\pi$ UV kezdőértékre sikerült jó pontossággal visszakapni az egzakt $\Delta c = 1$ értéket .

Milyen a fázisszerkezete a sine-Gordon elmélet módosításával kapott sinh-Gordon modellnek, illetve a köztük interpoláló modelleknek?

A Sinh-Gordon (ShG) modell olyan skalártérelmélet, ahol az önkölcsönhatást leíró potencial egy hiperbolikus függvény ($\cosh(\beta\varphi)$), amit úgy kapunk, hogy a periodikus SG modellben a (valós) frekvenciát képzetesre cseréljük ($\beta \to i\beta$). A szakirodalomban ismert egy, az SG és ShG között polinomiális függvényeken keresztül interpoláló modell, a Shine-Gordon elmélet.

T4: Az FRG módszer alkalmazásával megmutattam, hogy az ShG modellnek egyetlen fázisa van, amelyet kritikus vonal határol, lásd (6.3) ábra. Megadtam egy periodikus interpoláló modellt, az Sn-Gordon (SnG) skalárelméletet, és meghatároztam az SnG modell fázisszerkezetét, amelyet BKT típusú fázisátmenet jellemez, kivéve az interpoláció egyik végpontját, azaz az ShG elméletet. Származtattam a fázisokat szeparáló kritkus frekvencia változását az interpoláció során és megmutattam, hogy az Sn-Gordon modell $m \to 1$ határátmenete nem analitikus.

8. fejezet

Summary

In this Thesis I investigate phase transitions by the functional (or exact) renormalisation group (FRG) method. One of the important step of the applied procedure is the mapping between statistical models and quantum field theories (QFT) where the latter can be studied easily by the FRG method, i.e. by the Wetterich equation. Therefore, in order to consider statistical systems close to phase transitions it is sufficient to determine the corresponding QFT-s and then derive their critical behaviour. I studied Sine-Gordon-type QFT models which consist of periodic self-interactions and they have relevance in solid state and particle physics, too.
The applied method and consequently the findings of this Thesis are based on the FRG study at the two-dimensional Sine-Gordon model (SG) known from the literature. My own results presented in section 4-6 of the Thesis are the following.

What is the phase structure of the SG model for dimensions $d < 2$?

Solution of the FRG equation requires approximations which on the one hand depend on choice of the regulator of the RG method and on the other hand the resulting phase structure is not complete. I showed, for example, that FRG method at LPA' signals the existence of spontaneous symmetry breaking (SSB) in $d = 1$ dimensions although it is for sure incorrect since the one-dimensional SG model is equivalent to a quantum rotor, where due to tunneling, SSB is not allowed. By using this fact I selected between the regulators since the „area" of the SSB phase depends on the particular choice

of the regulator function.
T1: Thus, I proposed a new optimization method based on the fact that approximations of the functional form of the action lead to contradictions to the (exact) known results and the optimised regulator provides us the „smallest disagreement" which otherwise should disappear if the functional form of the action is improved appropriately.

Can the c-function of the two-dimensional SG model known from CFT be reproduced in the framework of the FRG method?

I investigated whether the known c-function and central charge of the SG model can be reproduced by the FRG method in LPA.
T2: I showed that in local potential approximation (LPA) known results are recovered in the limit $\beta \to 0$ only.

I investigated whether the inclusion of wave function renormalization is sufficient to recover the known c-function and central charge of the SG model in the framework of the FRG method.
T3: I demonstrated that at the LPA' a good agreement with the known results can be achieved for arbitrary frequency ($\beta^2 < 8\pi$) in the so-called massive phase of the model, see region I. of fig (3.2). Furthermore, the central charges associated to fixed points of the SG model can also be reproduced in the FRG method. This can be considered as the first non-trivial application of the c-function formula taken from literature.

What is the phase structure of the Sinh-Gordon (ShG) model which is the analitical continuation of the SG theory and in addition what are the phase structures of interpolating models between the SG and ShG theories?

The Sinh-Gordon (ShG) model is a scalar field theory, where the self-interaction is given by a hiperbolic function ($\cosh(\beta\varphi)$, which can be obtained by replacing the real value frequency with an imaginary one ($\beta \to i\beta$) in the SG model. The Shine-Gordon model is known to interpolate beetwen the SG and ShG models through non-periodic (polinomial) functions.

T4: I showed by FRG method that the ShG model has a single phase bounded by a critical line, see fig. (6.3). I constructed a periodic scalar field theory, the Sn-Gordon (SnG) model, which in-

terpolates between the SG and ShG theories and I showed that it undergoes a BKT-type phase transition, except the end-point of the interpolation, i.e., the case of the ShG theory. I determined the change in the critical frequency over interpolation and showed that the limit $m \to 1$ of the SnG model is non-analitic.

9. fejezet

Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Nándori Istvánnak, aki az évek során mindvégig figyelemmel kísérte munkámat, szakmai tanácsaival hozzájárult kutatómunkám sikerességéhez, segített az eredmények értékelésében, bemutatásában és önzetlen támogatást nyújtott abban, hogy ez a dolgozat elkészülhetett.

Köszönöm kollégámnak, Márián István Gábornak a szakmai megbeszéléseket, amelyek segítséget nyújtottak a dolgozatomban foglalt eredmények megszületéséhez. Köszönöm az értekezés végső formába öntése előtti átolvasásban nyújtott segítségét és hasznos tanácsait.

Köszönettel tartozom kollégáimnak, Hammersberg Ganczstuckhné Dr. Rácz Juditnak és Iszály Zsófiának, akik lehetővé tették, hogy munkám során mindvégig kellemes, együttműködő, baráti légkörben dolgozhattam.

Köszönetemet fejezem ki Dr. Kunné Dr. Sohler Dorottyának és Zolnai Dórának az ügyintézésben nyújtott segítségükért.

Nem utolsó sorban hálás köszönettel tartozom Családomnak, Férjemnek, Gyermekeimnek, akik önzetlen és megértő támogatásukkal lehetővé tették doktori tanulmányaim elvégzését.

10. fejezet

Publikációs lista

Közlemények a disszertáció tárgyköréből

Referált folyóiratban megjelent közlemények

I. I. Nándori, I. G. Márián, V. Bacsó, *Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group*, Phys. Rev. D **89** (2014) 047701. Impact: **4.864**, Citations: **11**

- S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhász, and K. Sailer, Phys. Rev. D **88**, (2013) 116010.
- P. Salamon, R. G. Lovas, R. M. Id Betan, T. Vertse, L. Balkay, Phys. Rev. C **89**, 054609 (2014).
- J. Kovács, K. Sailer, S. Nagy, Int. J. Mod. Phys. **A**, (2015) 1550058.
- P. Mati, Phys. Rev. D **91**, 125038 (2015).
- C. Pagani, Phys. Rev. D **94**, 045001 (2016).
- Prafulla Oak, B. Sathiapalan, JHEP **1707** (2017) 103.
- P. Salamon and T. Vertse, Eur. Phys. J. A **53** (2017), 152.
- N. Defenu, Thesis (Ph.D.), SISSA, Trieste (2017).
- A. Baran, Cs. Noszaly, T. Vertse, Comput. Phys. Commun. **228** (2018) 185.

- J. Kovacs, Thesis (Ph.D), University od Debrecen (2018)
- P. Oak, B. Sathiapalan, arXiv:1809.10758 [hep-th]

II. V. Bacsó, N. Defenu, A. Trombettoni, I. Nandori, *C-function and central charge of the sine-Gordon model from the non-perturbative renormalization group flow*, Nucl. Phys. B **901** (2015) 444.
Impact: **3.929**, Citations: **4**

- Prafulla Oak, B. Sathiapalan, JHEP **1707** (2017) 103.
- B. S. Merzlikin, I. L. Shapiro, A. Wipf, O. Zanusso, Phys. Rev. D **96** (2017) 125007
- J. Kovacs, Thesis (Ph.D), University od Debrecen (2018)
- P. Oak, B. Sathiapalan, arXiv:1809.10758 [hep-th]

Nem referált közlemények

III. N. Defenu, V. Bacso, I. G. Marian, I. Nandori, A. Trombettoni, *Criticality of models interpolating between the sine- and the sinh-Gordon Lagrangians*, arXiv:1706.01444 [hep-th]
Impact: **0.000**, Citations: **1**

- P. Oak, B. Sathiapalan, arXiv:1809.10758 [hep-th]

Poszterek

- **Bacsó V.**, Márián I. G., Nándori I., *Spontán szimmetriasértés és a Funkcionális Renormálási Csoport*
  Poszter, Magyar Fizikus Vándorgyűlés - Debrecen (2013).
- **Bacsó V.**, Márián I. G., Nándori I., *A sinh-Gordon rejtély*
  Poszter, Magyar Fizikus Vándorgyűlés - Szeged (2016).
- **V. Bacsó**, N. Defenu, I. G. Márián, I. Nándori, A. Trombettoni *The Sinh-Gordon Puzzle*
  Poszter, 8th International Conference on the Exact Renormalization Group - ERG2016 Trieste - Sissa (2016).

Nem a disszertáció alapjául szolgáló közlemények

- **Bacsó V.**, Rácz J., *Mágneses nanorészecske hipertermia kísérleti bemutatásának lehetőségei a középiskolában.*
  Poszter, Sciene on Stage fesztivál - Debrecen (2016).

11. fejezet

Irodalomjegyzék

Irodalomjegyzék

[1] I. Nándori, I. G. Márián, V. Bacsó, Phys. Rev. D **89**, 047701 (2014).

[2] V. Bacsó, N. Defenu, A. Trombettoni, and I. Nándori, Nucl. Phys. B **901**, 444 (2015).

[3] N. Defenu, V. Bacsó, I. G. Marian, I. Nandori, A. Trombettoni *Criticality of models interpolating between the sine- and the sinh-Gordon Lagrangians*, arXiv:1706.01444 [hep-th]

[4] A. Patkós, J. Polónyi, *Sugárzás és részecskék* (2006)

[5] Zs. Gulácsi, *Fázisátalakulások elmélete (Egyetemi jegyzet)* Debreceni Egyetem (2000.)

[6] I. Nandori, *Lecture Note on the Functional Renormalization Group Study of Sine-Gordon Models (előkészületben)*

[7] I. Nándori, *Aspec of non-perurbative Renormalization* PhD értekezés Drezda (2002).

[8] K. Sailer, *Renormalization Group Method in Quantum Field Theory*, University of Debrecen, lecture note, 1997.

[9] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group* (Reading, Addison Wesley, 1992).

[10] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher, M.E.J. Newman, *The Theory of Citical Phenomena, An introduction to the renormalization group* Oxfprd Science Publications, Clarendon Press Oxford, 1995.

[11] N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966).

[12] Zs. Gulácsi, M. Gulácsi, Adv. in Phys. **47** (1998) 1-89.

[13] K. Huang, J. Polonyi, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 409.

[14] V. L. Berezinskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 1144 (1971) [Sov. Phys. JETP **34**, 610 (1972)]

[15] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).

[16] K. G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rep. C **12** (1974) 77;

[17] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).

[18] R. J. Creswick, H. A. Farach, C. P. Poole, Jr. *Introduction to RG methods in Physics,* (Wiley, New York, 1992).

[19] D. F. Litim and J. Pawlowski, in *The Exact Renormalization Group*, A. Krasnitz *et al.* eds., p. **168** (World Scientific, Singapore, 1999).

[20] C. Bagnuls and C. Bervillier, Phys. Rep. **348**, 91 (2001).

[21] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).

[22] H. Gies, Lect. Notes Phys. **852**, 287 (2012).

[23] O. J. Rosten, Phys. Rep. **511**, 177 (2012).

[24] S. Nagy, Annals of Phys. **350** (2014) 310.

[25] I.G. Marián, *Levágások spontán szimmetriasértésre gyakorolt hatása a funkcionális renormálási csoport módszer keretében* (Diplomamunka 1-9. oldal, Debreceni Egyetem, 2016).

[26] F. J. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. A. **8**, 401 (1973

[27] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **352**, 529 (1991); *ibid*, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993);

[28] J. Polonyi, Central Eur. J. Phys. **1**, 1 (2004).

[29] B. Delamotte, in *Order, disorder and criticality: advanced problems of phase transition theory*, Yu. Holovatch ed., p. 1 (Singapore, World Scientific, 2007) [`arXiv:cond-mat/0702365`].

[30] D. F. Litim, J. M. Pawlowski Phys. Rev. D **65**, 081701 (2002).

[31] A. Codello, M. Dennel, O. Zanusso, Phys. Rev. D **90**, 027701 (2014).

[32] A. Codello, R. Percacci, C. Rahmede, Annals Phys. **324**, 414 (2009).

[33] P. Mati, *Non-perturbative methods in Quantum Field Theories*, PhD értekezés, Budapest University of Technology and Economics (2015).

[34] D. F. Litim, Phys. Lett. B **486**, 92 (2000); *ibid*, Phys. Rev. D **64**, 105007 (2001); *ibid*, JHEP **0111**, 059 (2001).

[35] J. M. Pawlowski, Ann. Phys. **322**, 2831 (2007).

[36] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9**, 2411 (1994).

[37] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna and J. Vidal, Phys. Rev. D **67**, 065004 (2003); *ibid*, Phys.Rev. B **68** 064421 (2003); L. Canet, Phys.Rev. B **71** 012418 (2005).

[38] I. Nándori, JHEP **1304**, 150 (2013).

[39] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhász, and K. Sailer Phys. Rev. D **88**, 116010.

[40] M. Reuter, Phys. Rev. D **57**, 971 (1998).

[41] M. Reuter, F. Saueressig, New J. Phys. **14**, 055022 (2012).

[42] D. F. Litim, Phys. Rev. Lett. **92**, 201301 (2004).

[43] M. Reuter, F. Saueressig, Phys. Rev D **65**, 065016 (2002).

[44] S. Nagy, J. Krizsan, K. Sailer, JHEP **1207**, 102 (2012).

[45] A. B. Zamolodchikov, JETP Lett. **43**, 730 (1986).

[46] A. Codello, G. D'Odorico, and C. Pagani, JHEP **1407**, 040 (2014).

[47] S. Coleman, Comm. Math. Phys. **264**, 259 (1973).

[48] E. Ising, Z. Phys 31. (1925).

[49] I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, Phys. Rev. D **63**, 045022 (2001).

[50] I. Nándori, Phys. Rev. D **84**, 065024 (2011).

[51] S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Rev. D **70**, 105023 (2004).

[52] I. Nándori, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 8119 (2006).

[53] I. Nándori, Phys. Lett. B **662**, 302 (2008).

[54] S. Nagy, Phys. Rev. D **79**, 045004 (2009).

[55] J. Kovács, S. Nagy, I. Nándori, K. Sailer, JHEP **1101**, 126 (2011).

[56] K. Sailer, *Szimmetriák és sérülésük a kvantumtérelméletben Egyetemi jegyzet (KLTE, Debrecen, 1997.)*

[57] N. Tetradis and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **383**, 197 (1992).

[58] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, Phys. Rev. Lett. **102**, 241603 (2009).

[59] J. Braun, H. Gies, and D. D. Scherer, Phys. Rev. D **83**, 085012 (2011).

[60] S. Nagy, Nucl. Phys. B **864**, 226 (2012).

[61] S. Nagy and K. Sailer, Int. J. Mod. Phys. **28**, 1350130 (2013).

[62] I. Nándori, S. Nagy, K. Sailer, and A. Trombettoni, Phys. Rev. D **80**, 025008 (2009).

[63] S. Nagy, K. Sailer, J. Polonyi, J. Phys. A **39**, 8105 (2006); S. Nagy, I. Nándori, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. B **647**, 152 (2007).

[64] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, K. Sailer, Phys. Lett. B **694**, 89 (2010).

[65] I. Nándori, U. D. Jentschura, K. Sailer, G. Soff, Phys. Rev. D **69**, 025004 (2004).

[66] J. Alexandre, D. Tanner, Phys. Rev. D **82**, 125035 (2010).

[67] I. Nándori, arXiv:1108.4643 [hep-th].

[68] A. Codello, J. Phys. A **45**, 465006 (2012).

[69] P. F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists* (Berlin, Springer-Verlag, 1971).